

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М. В. Келдыша

А. А. Дегтярев, Ш. Тайль

Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана

Москва – 2003

Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана, А. Дегтярев, Ш. Тайль, Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, Москва, 35 страниц, 12 рисунков, библиография: 8 наименований.

Описано построение алгоритма расширенного фильтра Калмана для нелинейной непрерывно-дискретной задачи оценки вектора состояния системы. Рассмотрена проблема адаптивного фильтра, где для шумов процесса и измерений проводится оценки их ковариационных матриц с целью повышения точности оценки вектора состояния. Приведены схемы нескольких типов адаптивных алгоритмов и результаты математического моделирования их работы на примере твердого тела с заданным тензором инерции движущегося по круговой орбите.

Ключевые слова: динамическая система, статистическая оценка вектора состояния, расширенный фильтр Калмана, адаптивный фильтр Калмана

The elements of the theory of the adaptive extended Kalman filter, A. Degtyarev, S. Theil, Preprint of KIAM RAS, Moscow, 35 Pages, 12 Figures, 8 References.

Construction of algorithm of extended Kalman filter for a nonlinear continuous - discrete problem of an estimation of a state vector of system is described. It is considered the problem of the adaptive filter where the estimations of the covariance matrices is carried out for noises of process and measurements with the purpose to increase an accuracy of a state vector's estimation. It is shown the schemes for several types of adaptive algorithms and results of mathematical modeling of their work for a rigid body with given inertia.

Key words: dynamic system, the statistical estimation of a state vector, extended Kalman filter, adaptive Kalman filter.

Введение

Фильтр Калмана - последовательный рекурсивный алгоритм оценки, использующий принятую модель динамической системы для получения оценки, которая может быть существенно скорректирована в результате анализа каждой новой выборки измерений во временной последовательности.

Этот алгоритм находит применение в процессе управления многими сложными динамическими системами, например, непрерывными производственными процессами, самолетами, кораблями и космическими аппаратами. При управлении динамической системой прежде всего необходимо полностью знать все ее состояния в каждый момент времени, другими словами необходимо иметь информацию о том, что эта система делает в каждый момент времени. Но измерение всех переменных, которыми вы хотите управлять, не всегда возможно и в этих случаях фильтр Калмана является тем средством, которое позволяет восстановить недостающую информацию посредством имеющихся неточных (зашумленных) измерений.

Настоящая работа разбита на две части. Основная задача первой части состоит в том, чтобы ознакомить читателя с методом фильтрации на инженерном уровне и в применении к реальным задачам. Классический фильтр Калмана-Бюси, не рассматриваемый здесь, описан, например, в [8]. Наша цель заключается в построении алгоритма фильтра Калмана для так называемой *непрерывно-дискретной задачи* (непрерывная модель динамической системы с дискретными измерениями).

В разделах 1.1 — 1.4 рассматриваются основные шаги построения алгоритма фильтрации для линейных задач. В разделе 1.5 рассматриваются подходы для построения *расширенного фильтра Калмана*, то есть перенос методологии фильтрации на класс нелинейных задач. В разделе 1.6 приводится суммирование полученных результатов и приводится схема работы расширенного фильтра Калмана для непрерывно-дискретной задачи. В подразделе 1.6.1 рассмотрены результаты моделирования работы такого фильтра на примере динамической системы математический маятник.

Вторая часть работы посвящена описанию и моделированию различных типов *адаптивных* алгоритмов фильтрации, а именно алгоритмов оценки ковариационных матриц шумов процесса и измерений с целью повышения точности оценки вектора состояния системы. Рассмотрены два типа таких алгоритмов: метод *уточнение ковариации* (разделы 2.2 и 2.3) и *принцип согласованности* (разделы 2.4 и 2.5).

Таблица 1. Линейные модели динамики и измерений

Модель	Непрерывное время	Дискретное время
Система	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$	$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$
Измерения	$\mathbf{z} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \nu(t)$	$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \nu_k$
Шум системы	$E\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^\top(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{Q}(t)$	$E\langle \mathbf{w}_k \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{w}_k\mathbf{w}_i^\top \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{Q}_k$
Шум измерений	$E\langle \nu(t) \rangle = 0$ $E\langle \nu(t)\nu^\top(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{R}(t)$	$E\langle \nu_k \rangle = 0$ $E\langle \nu_k\nu_i^\top \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{R}_k$

1 Фильтр Калмана

1.1 Линейная задача. Основные понятия

Мы предполагаем, что стохастическая система может быть описана моделями динамики и измерений (для непрерывного и дискретного случаев) представленных таблицей 1. Здесь $\mathbf{x}(t)$ – вектор состояния динамической системы, который является случайным Гауссовским процессом, \mathbf{z}_k – измерения полученные в момент времени t_k . Шум системы и шум измерений \mathbf{w}_k и ν_k также являются Гауссовскими случайными процессами с нулевым математическим ожиданием. Другими словами, мы предполагаем наличие как в самой системе, так и в измерениях *белого шума* (см. приложение А.1).

Задача фильтрации состоит в том, чтобы найти оценку вектора состояния системы \mathbf{x}_k , которую мы будем обозначать $\hat{\mathbf{x}}_k$, являющуюся функцией измерений $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ и которая минимизирует средне квадратичную ошибку

$$E \left\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^\top \mathbf{M} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^\top \right\rangle,$$

где \mathbf{M} симметричная положительно определенная матрица.

Фильтр Калмана работает по схеме *прогноз – коррекция*. Чтобы пояснить этот факт, рассмотрим рис. 1. Допустим, что в момент времени t_{k-1} получена оценка вектора состояния системы $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ и теперь мы хотим получить оценку в точке t_k . Для этого мы строим прогноз оценки $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$, базируясь на $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, получаем измерения \mathbf{z}_k и далее корректируем оценку в точке $t_k(+)$, базируясь на прогнозе и измерениях, и получаем окончательную оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$. В дальнейшем, если не оговаривается какая именно рассматривается оценка вектора состояния под оценкой $\hat{\mathbf{x}}_k$ подразумевается уже откорректированная оценка $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ (или апостериори оценка). В случаях, когда будем говорить об априори

оценке вектора состояния, мы будем иметь в виду прогнозируемую оценку $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$.

Рис. 1. Принцип работы фильтра

Второй момент случайного процесса может быть описан в терминах ковариационной матрицы

$$\mathbf{P}(t) = E \left\langle [\mathbf{x}(t) - E\langle \mathbf{x}(t) \rangle] [\mathbf{x}(t) - E\langle \mathbf{x}(t) \rangle]^\top \right\rangle \quad (1)$$

Если мы заменим $E \langle \mathbf{x}(t) \rangle$ на оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}(t)$ (на оценку математического ожидания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$), то матрица $\mathbf{P}(t)$ будет называться ковариационной матрицей ошибки оценки вектора состояния (далее - ковариационная матрица ошибки).

Очевидно, что для получения прогнозируемой оценки $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ необходимо интегрировать модельное динамическое уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+)$. А каким образом мы можем получить прогнозируемую оценку ковариационной матрицы ошибки? Для того, чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим непрерывную модель системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t),$$

описанную в таблице 1. Решение этого уравнения с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)$ и переходной матрицей состояния $\Phi(t, t_0)$ записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau.$$

Математическое ожидание этой величины

$$E\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \Phi(t, t_0)E\langle \mathbf{x}(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\langle \mathbf{w}(\tau) \rangle d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(t) - E\langle \mathbf{x}(t) \rangle] &= \Phi(t, t_0) [\mathbf{x}(t_0) - E\langle \mathbf{x}(t_0) \rangle] + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), производя некоторые преобразования и вычисляя первую производную функции $\mathbf{P}(t)$, в результате получим

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^\top(t) + \mathbf{Q}. \quad (3)$$

Это матричное дифференциальное уравнение Риккати.

Итак, мы получили уравнение продолжения (Covariance propagation equation) ковариационной матрицы ошибки. Путем интегрирования уравнения (3) с начальным условием $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$ мы получим прогнозируемую оценку ковариационной матрицы ошибки $\mathbf{P}_k(-)$. Получение апостериори оценки ковариационной матрицы ошибки $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$ будет рассмотрено позднее.

1.2 Коэффициент обратной связи

Предположим, что измерения были сделаны в момент времени t_k и эта информация используется для оценки вектора состояния \mathbf{x} стохастической системы в момент времени t_k .

Предполагается, что измерения линейно зависят от вектора состояния и описываются уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k. \quad (4)$$

Оценка $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ базируется на наблюдениях (или измерениях) \mathbf{z}_k , таким образом, она является функцией априори оценки $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ и измерений \mathbf{z}_k и может быть записана в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \mathbf{K}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{z}_k. \quad (5)$$

Матрицы \mathbf{K}_k^1 и $\bar{\mathbf{K}}_k$ пока неизвестны и их значения будут определяться таким образом, чтобы новая оценка $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ удовлетворяла *принципу ортогональности* (см. приложение А.2), условия которого могут быть записаны в следующем виде:

$$E \langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(+)] \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (6)$$

$$E \langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(+)] \mathbf{z}_k^\top \rangle = 0. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (6) значения \mathbf{x}_k и $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ из уравнений (1.1) и (5) и учитывая тот факт, что случайные последовательности \mathbf{w}_k и $\boldsymbol{\nu}_k$

некоррелированы, а следовательно $E\langle \mathbf{w}_k \mathbf{z}_j^\top \rangle = 0$ для $1 \leq i \leq k$, можно получить следующее соотношение:

$$E \langle [\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{K}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{z}_k] \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (8)$$

С учетом (4) уравнение (8) может быть переписано в виде:

$$E \langle [\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{K}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{K}}_k \boldsymbol{\nu}_k] \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что $E\langle \boldsymbol{\nu}_k \mathbf{z}_j^\top \rangle = 0$ для $1 \leq i \leq k$, уравнение (9) можно привести к следующему виду:

$$\Phi_{k-1} E \langle \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{z}_i^\top \rangle - \mathbf{K}_k^1 E \langle \hat{\mathbf{x}}_k(-) \mathbf{z}_i^\top \rangle - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1} E \langle \mathbf{x}_{k-1} \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0. \quad (10)$$

Вычтем $\mathbf{K}_k^1 E \langle \mathbf{x}_k \mathbf{z}_i^\top \rangle$ из обеих частей равенства (10) и учитывая, что $\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}$, получим

$$E \langle \{ [\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^1 \mathbf{x}_k] - \mathbf{K}_k^1 (\hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{x}_k) \} \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0.$$

Так как $E \langle (\hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{x}_k) \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0$ окончательно получим

$$[\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1 - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k] E \langle \mathbf{x}_k \mathbf{z}_i^\top \rangle = 0.$$

Это уравнение выполняется для любого заданного \mathbf{x}_k , если

$$\mathbf{K}_k^1 = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k. \quad (11)$$

Введем следующие соотношения: $\tilde{\mathbf{x}}_k(-)$ — ошибка прогнозируемой оценки и $\tilde{\mathbf{x}}_k(+)$ — ошибка откорректированной оценки

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(-) = \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{x}_k, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(+)= \hat{\mathbf{x}}_k(+)- \mathbf{x}_k. \quad (13)$$

Аналогично введем понятие ошибки прогноза вектора измерений — $\tilde{\mathbf{z}}_k$

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{z}_k. \quad (14)$$

Параметр $\hat{\mathbf{x}}_k$ линейно зависит от \mathbf{x}_k , который в свою очередь линейно зависит от \mathbf{z}_k . Таким образом, из уравнения (7) следует равенство

$$E \langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(+)] \mathbf{z}_k^\top(-) \rangle = 0 \quad (15)$$

и так же

$$E \langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(+)] \tilde{\mathbf{z}}_k^\top(-) \rangle = 0. \quad (16)$$

Подставляя в это уравнение выражение для \mathbf{x}_k согласно табл.1, выражения для $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ и $\tilde{\mathbf{z}}_k$ из уравнений (5) и (14) соответственно, получим

$$E \left\langle [\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{K}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{z}_k] [\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{z}_k]^\top \right\rangle = 0.$$

Однако, из структуры системы следует, что $E \langle \mathbf{w}_k \mathbf{z}_k^\top \rangle = E \langle \mathbf{w}_k \hat{\mathbf{x}}_k^\top(+)\rangle = 0$. Следовательно справедливо равенство

$$E \left\langle [\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{K}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{z}_k] [\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{z}_k]^\top \right\rangle = 0.$$

Подставляя выражения для \mathbf{K}_k^1 , \mathbf{z}_k и $\tilde{\mathbf{x}}_k(-)$ из уравнений (11), (4) и (12) и используя тот факт, что $E \langle \tilde{\mathbf{x}}_k(-) \boldsymbol{\nu}_k^\top \rangle = 0$, предыдущее уравнение может быть модифицировано следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= E \left\langle [\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{K}}_k \boldsymbol{\nu}_k] \times \right. \\ &\quad \times [\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \boldsymbol{\nu}_k] \left. \right\rangle = \\ &= E \left\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(-)) - \bar{\mathbf{K}}_k \boldsymbol{\nu}_k] \times \right. \\ &\quad \times [\mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k(-) - \boldsymbol{\nu}_k]^\top \left. \right\rangle = \\ &= E \left\langle [-\hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k(-) - \bar{\mathbf{K}}_k \boldsymbol{\nu}_k] [\mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k(-) - \boldsymbol{\nu}_k]^\top \right\rangle. \quad (17) \end{aligned}$$

По определению *априори* значение ковариационной матрицы (прогнозируемое значение ковариационной матрицы ошибки) записывается в виде

$$\mathbf{P}_k(-) = E \langle \tilde{\mathbf{x}}_k(-) \tilde{\mathbf{x}}_k^\top(-) \rangle.$$

С учетом этого, раскрывая скобки в уравнении (17), получим

$$[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k(-) \mathbf{H}_k^\top - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{R}_k = 0.$$

Окончательно, коэффициент обратной связи $\bar{\mathbf{K}}_k$ может быть выражен в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{P}_k(-) \mathbf{H}_k^\top [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k(-) \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k]^{-1}. \quad (18)$$

Этот коэффициент является функцией от *априори* значения ковариационной матрицы ошибки.

1.3 Коррекция значения ковариационной матрицы ошибки оценки вектора состояния

Теперь выведем формулу для *апостериори* значения ковариационной матрицы ошибки (для корректировки ковариационной матрицы ошибки). По определению она записывается в виде

$$\mathbf{P}_k(+) = E \langle \tilde{\mathbf{x}}_k(+) \tilde{\mathbf{x}}_k^\top(+) \rangle. \quad (19)$$

Подставляя уравнение (11) в уравнение (5), получим

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+)=\left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\hat{\mathbf{x}}_k(-)+\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{z}_k.$$

Преобразуем это уравнение к более удобному виду

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+)=\hat{\mathbf{x}}_k(-)+\bar{\mathbf{K}}_k\left[\mathbf{z}_k-\mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k(-)\right]. \quad (20)$$

Вычтем \mathbf{x}_k из обеих частей уравнения (20) и подставим в него значение \mathbf{z}_k в соответствии с уравнением (4):

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+)-\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_k(-)+\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k+\bar{\mathbf{K}}_k\boldsymbol{\nu}_k-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k(-)-\mathbf{x}_k.$$

С учетом равенств (12) и (13), это равенство можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(+)=\tilde{\mathbf{x}}_k(-)-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}_k(-)+\bar{\mathbf{K}}_k\boldsymbol{\nu}_k.$$

Преобразуем это уравнение к более удобному виду

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(+)=\left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\tilde{\mathbf{x}}_k(-)+\bar{\mathbf{K}}_k\boldsymbol{\nu}_k. \quad (21)$$

Подставляя уравнение (21) в уравнение (19) и принимая во внимание, что $E\langle\tilde{\mathbf{x}}_k(-)\boldsymbol{\nu}_k^\top\rangle=0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(+)&=E\left\langle\left[\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right]\tilde{\mathbf{x}}_k(-)\tilde{\mathbf{x}}_k^\top(-)\left[\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right]^\top+\right. \\ &\quad \left.+\bar{\mathbf{K}}_k\boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_k^\top\bar{\mathbf{K}}_k^\top\right\rangle= \\ &= \left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_k(-)\left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)^\top+\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{R}_k\bar{\mathbf{K}}_k^\top. \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее уравнение – это уравнение в форме Джозефа для корректировки ковариационной матрицы ошибки. При постановке $\bar{\mathbf{K}}_k$ из уравнения (18), оно может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(+)&= \mathbf{P}_k(-)-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k(-)- \\ &\quad -\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top\bar{\mathbf{K}}_k^\top+\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top\bar{\mathbf{K}}_k^\top+\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{R}_k\bar{\mathbf{K}}_k^\top= \\ &= \left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_k(-)-\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top\bar{\mathbf{K}}_k^\top+ \\ &\quad +\bar{\mathbf{K}}_k\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top+\mathbf{R}_k\right)\bar{\mathbf{K}}_k^\top= \\ &= \left(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_k(-). \end{aligned} \quad (23)$$

1.4 Экстраполяция ковариационной матрицы ошибки

При рассмотрении дискретной системы, *априори* оценку вектора состояния можно получить путем решения следующего уравнения:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(-)=\Phi_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+). \quad (24)$$

Вычитая из обеих частей этого уравнения \mathbf{x}_k , получим

$$\hat{\mathbf{x}}_k(-) - \mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+) - \mathbf{x}_k.$$

Левую часть этого равенства преобразуем согласно уравнению (12), а в правую часть подставим значение \mathbf{x}_k из табл.1

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k(-) &= \Phi_{k-1} [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+) - \mathbf{x}_{k-1}] - \mathbf{w}_{k-1} = \\ &= \Phi_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}(+) - \mathbf{w}_{k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $E \langle \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top \rangle = 0$ получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(-) &\stackrel{\text{def}}{=} E \langle \tilde{\mathbf{x}}_k(-) \tilde{\mathbf{x}}_k(-)^\top \rangle = \\ &= \Phi_{k-1} E \langle \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}(+) \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}(+)^\top \rangle \Phi_{k-1}^\top + E \langle \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^\top \rangle = \\ &= \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

в котором *априори* значение ковариационной матрицы ошибки есть функция от предыдущего *апостериори* ее значения. Выражения (24) и (25) это аналог уравнений *продолжения* описанных в подразделе (1.1) в случае дискретного времени.

1.5 Фильтр Калмана для нелинейных систем (расширенный фильтр)

Большинство динамических систем и сенсоров не являются линейными. Но методы фильтрации разработанные для линейных систем, могут быть применены и для нелинейных систем. В этом разделе рассматриваются методы, которые позволят перенести методологию фильтрации Калмана на нелинейные задачи.

Предположим, что непрерывная или дискретная стохастическая система может быть представлена нелинейным динамическим уравнением и модельным уравнением описывающим измерения (таб. 2). Применяемой

Таблица 2. Нелинейные модели динамики и измерений

Модель	Непрерывное время	Дискретное время
Система	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) + \mathbf{w}_{k-1}$
Измерения	$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t)$	$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k$

метод линеаризации требует, чтобы функции \mathbf{f} и \mathbf{h} были дважды непрерывно дифференцируемы.

Обозначим символом δ малое отклонение от оцениваемой траектории:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(-), \\ \delta \mathbf{z}_k &= \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k(-), k),\end{aligned}$$

тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x}, k-1)$ в окрестности $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(-)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) = \\ &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k(-), k-1) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, k-1)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(-)} \delta \mathbf{x}_{k-1} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, k-1)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(-)} \delta \mathbf{x}_{k-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\delta \mathbf{x}_k \approx \Phi_{k-1}^{[1]} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1},$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_{k-1}^{[1]} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, k-1)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(-)} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(-)}.\end{aligned}\quad (26)$$

В свою очередь, измерения могут быть представлены в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k(-)$ следующим образом:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k(-), k) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)} \delta \mathbf{x}_k, \quad (27)$$

и

$$\delta \mathbf{z}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)} \delta \mathbf{x}_k. \quad (28)$$

Слагаемые выше первого порядка малости здесь опущены. Если в разложении мы пренебрегаем членами высокого порядка, то возмущение \mathbf{z}_k может быть представлено как

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k^{[1]} \delta \mathbf{x}_k, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k^{[1]} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \frac{\partial h_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)}. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае непрерывной системы матрицы частных производных имеют следующий вид

$$\mathbf{F}^{[1]}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}, \quad (31)$$

$$\mathbf{H}^{[1]}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}. \quad (32)$$

1.6 Использование фильтра Калмана

Подведем некоторый итог всего вышеизложенного на примере *непрерывно-дискретной* системы (непрерывная динамическая система с дискретными измерениями), которая и описывает большинство реальных задач. Такая система подбирается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t), \quad (33)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(t_k)) + \boldsymbol{\nu}_k. \quad (34)$$

Допустим, что в момент времени $t_{k-1}(+)$ получены *апостериори* значения $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+)$ и $\mathbf{P}_{k-1}(+)$, т.е. на шаге t_{k-1} задача фильтрации выполнена и теперь необходимо определить $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ и $\mathbf{P}_k(+)$.

Априори значения оценок вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки $\mathbf{x}_k(-)$ и $\mathbf{P}_k(-)$ можно получить путем интегрирования модельного уравнения и уравнения типа Риккати

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t); \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^\top(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{Q}(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+)$ и $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$. Так как мы рассматриваем нелинейную задачу, то для определения матрицы $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ воспользуемся уравнением (31). Выполнив данную процедуру мы получим $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ и $\mathbf{P}_k(-)$.

Далее находим линеаризованную матрицу чувствительности $\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}(-))$ согласно уравнению (30).

Определяем коэффициент обратной связи $\bar{\mathbf{K}}_k$, используя уравнение (18).

Находим *a priori* значения $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ и $\mathbf{P}_k(+)$ по формулам (20) и (23).

Описанная процедура представлена в таблице 3.

Таблица 3. Расширенный фильтр Калмана

Модель системы	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t)$
Модель измерений	$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(t_k)) + \boldsymbol{\nu}_k, k = 1, 2, ..$
Предположения	$\mathbf{w}(t) \sim N(0, Q(t)), \boldsymbol{\nu}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k), E \langle \mathbf{w}(t)\boldsymbol{\nu}_k^\top \rangle = 0$
Начальные условия	$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+), \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$
Продолжение	$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ $\dot{\mathbf{P}}(t) = F(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)F^\top(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + Q(t)$
Коэффициент обратной связи	$\bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) [\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-))\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) + \mathbf{R}_k]^{-1}$
Уточнение вектора состояния	$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k(-)]$
Уточнение матрицы ошибки	$\mathbf{P}_k(+) = (I - \bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-))) \mathbf{P}_k(-)$
Обозначения	$\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)}$ $F(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}$

1.6.1 Моделирование работы фильтра Калмана

В качестве примера применимости фильтра Калмана рассмотрим простейшую систему — математический маятник, уравнение движения которого имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t), \quad (35)$$

где g – ускорение свободного падения, l – длина подвеса. Вектор состояния такой системы имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) \end{bmatrix}$$

В качестве модельного уравнения измерений рассмотрим

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \equiv \varphi_k$$

заметим, что в данном случае мы рассматриваем *идеальную* задачу, то есть в ней отсутствует как шум самой системы, так и шум измерений. Цель примера состоит в том, чтобы показать работу фильтра и подобная идеализация позволит нам избежать настроек ковариационных матриц шумов для корректной работы фильтра. Мы можем задавать любые значения ковариационных матриц шумов и от этого выбора будет зависеть только время, за которое ошибка оценки станет равной нулю. Задача настройки ковариационных матриц шумов заслуживает отдельного рассмотрения, что будет сделано позднее.

Теперь запишем матрицы $F(\mathbf{x}(t), t)$ и $H(\mathbf{x}_k, k)$

$$F(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \varphi(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$H(\mathbf{x}_k) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} = [1 \ 0]. \quad (37)$$

Измерения моделируются путем интегрирования уравнения (35) и являются входом параметром фильтра Калмана.

Параметры моделирования:

- Начальные условия

$$\mathbf{x}(0) = [1.0 \ 0.0], \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

- Время между двумя измерениями — 0.01 сек.
- Значения ковариационных матриц шумов

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{R} = 10.$$

- Время моделирования – 10 сек.

Результаты моделирования представлены на рисунках 2 и 3. На рис.2 показано поведение ошибки оценки угла φ , то есть разница между измеренным и оцененным значением угла. На рис.3 показаны оцениваемые значения элементов вектора состояния $\dot{\varphi}$ и φ .

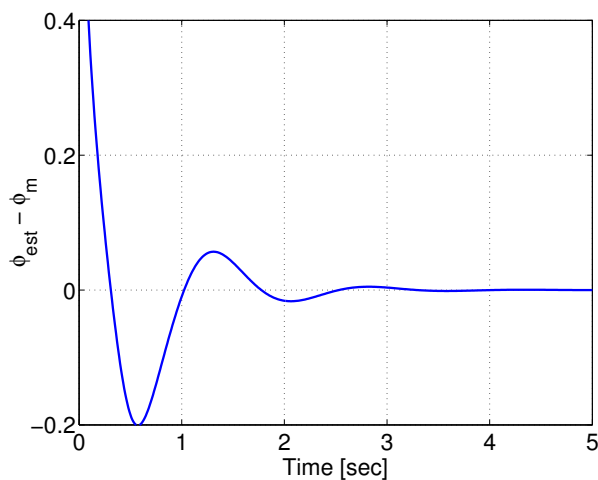


Рис. 2. Ошибка оценки

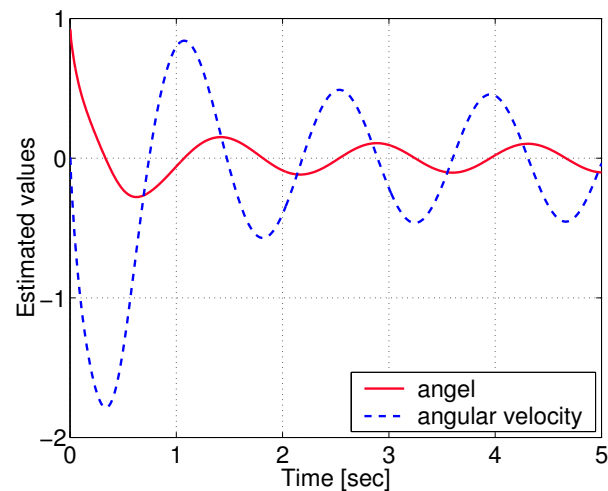


Рис. 3. Оценка вектора состояния

2 Адаптивный фильтр Калмана

2.1 Проблема адаптивного фильтра

Одной из основных проблем, с которой мы сталкиваемся при работе с фильтром Калмана, является то, что как модель самой системы, так и модель измерений неидеальны. Именно по этой причине в уравнениях (33) и (34) мы предполагаем наличие шумов $\mathbf{w}(t)$ и ν_k . Статистические свойства этих шумов, а именно, их ковариационные матрицы являются теми параметрами, от которых зависит точность оценивания вектора состояния системы, т.е. точность работы фильтра.

Обычно, начальные значения ковариационных матриц шума измерений и шума процесса выбирается путем анализа некоторых эмпирических данных или путем моделирования различных ситуаций и далее считается постоянной. Если в процессе использования этих данных выясняется, что работа фильтра неудовлетворительна, то требуется новая настройка ковариационных матриц шумов.

В большинстве случаев данная задача может решиться наземным службами в так называемой постэкспериментальной фазе. Результаты измерений и результаты работы фильтра пересекаются на Землю, далее проводится анализ сложившейся ситуации, выбираются новые значения ко-

вариационных матриц шума процесса и шума измерений и эксперимент моделируется заново с учетом новых данных. Если результаты этого эксперимента являются удовлетворительными, то новые значения ковариационных матриц пересылаются на борт аппарата и далее алгоритм фильтрации работает с ними, считая их постоянными. Понятно, что при таком подходе будут возникать некоторые задержки в получении точных оценок вектора состояния системы.

Однако, при рассмотрении некоторых задач, например, при активном управлении спутником с использованием трех магнитных катушек, необходимо знать ориентацию аппарата в каждый момент времени с высокой точностью. Здесь появляется задача адаптивной фильтрации — параллельно с оценкой вектора состояния системы оценивать статистические свойства шумов процесса и измерений (ковариационные матрицы) с целью повышения точности работы фильтра. Такой подход будет автономен и не будет требовать вмешательства извне, что позволит избежать временных задержек с получением достоверных результатов, т.е. будет реализована работа в режиме on line.

Прежде чем перейти к рассмотрению различных методов адаптивной фильтрации, ответим на следующий вопрос: что является показателем работы фильтра?

Как мы уже говорили, вектор шума измерений не может быть точно определен, однако его можно интуитивно аппроксимировать с помощью полученных измерений \mathbf{z}_j и оценки вектора состояния системы $\hat{\mathbf{x}}_j$ следующим образом:

$$\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j(-) \quad (38)$$

Эта величина называется *прогнозируемая разность* (более точно — прогнозируемая разность ошибки измерения). Прогнозируемая разность (38) является удобным средством для того, чтобы судить о работе фильтра на практике.

2.2 Метод “Уточнение ковариации”

Данный подход впервые был предложен в работе [4] и базируется на идее, что ковариационная матрица шума процесса равна ковариационной матрице ошибки измерения, то есть

$$[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k))] [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k))]^\top \cong \mathbf{R}_k \quad (39)$$

Если измерения представляют одинаковые физические величины и имеют одинаковую минимальную точность, то для придания алгоритму большей

статистической значимости будем рассматривать выборку из N сечение случайного процесса

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k))] [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k))]^\top \cong \mathbf{R}_j \quad (40)$$

Общую схему алгоритма можно представить в виде таблицы 4. Аналогичный подход можно использовать для оценки ковариационной

Таблица 4. “Уточнение ковариации” для оценки \mathbf{R}

1	Начальные условия	$j = 1, \hat{\mathbf{R}}_0 = 0$
2	Аппроксимация шума	$\mathbf{r}_j = \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j(-)$
3	Вычисление	$\hat{\mathbf{R}}_j = \frac{j-1}{j} \hat{\mathbf{R}}_{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^\top$
4	$j = N$	Подставляем $\hat{\mathbf{R}}_N$ в фильтр
5	$j < N$	Увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 2

матрицы шума процесса. Здесь мы опять сталкиваемся с проблемой невозможности точного определения вектора шума процесса \mathbf{w} , но исходя из здравого смысла, его можно аппроксимировать с помощью оценок вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}$, полученных на двух последовательных шагах,

$$\mathbf{q}_j = \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{F}_{j-1} \hat{\mathbf{x}}_{j-1} \quad (41)$$

Оценку ковариационной матрицы шума процесса можно записать с использованием N выборочного среднего в виде

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{j-1}, t)) (\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{j-1}, t))^\top \cong \mathbf{Q} \quad (42)$$

Общую схему алгоритма для оценки ковариационной матрицы шума процесса можно представить в виде таблицы 5

Оба описанных алгоритма имеют сильное ограничение к применению. Их применение оправдано только в случаях, когда мы достоверно знаем о том, что один из шумов является доминирующим. Например, при использовании в качестве датчиков ориентации системы GPS шумом системы по отношению к шуму измерений можно пренебречь и использование алгоритма “Уточнение ковариации” для оценки ковариационной матрицы

Таблица 5. "Уточнение ковариации" для оценки \mathbf{Q}

1	Начальные условия	$j = 1, \hat{\mathbf{Q}}_0 = 0$
2	Аппроксимация шума	$\mathbf{q}_j = \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{F}_{j-1}\hat{\mathbf{x}}_{j-1}$
3	Вычисление	$\hat{\mathbf{Q}}_j = \frac{j-1}{j}\hat{\mathbf{Q}}_{j-1} + \frac{1}{j}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^\top$
4	$j = N$	Подставляем $\hat{\mathbf{Q}}_N$ в фильтр
5	$j < N$	Увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 2

шума измерений вполне оправдано. Если же в рассматриваемой задаче присутствует как шум измерений, так и шум самого процесса использование подобных алгоритмов может существенно ухудшить работу фильтра. Другими словами мы можем попасть в ситуацию когда, например, пытаемся настроить ковариационную матрицу шума измерений, а на самом деле ошибка измерений (прогнозируемая разность) обусловлена наличием шума процесса и нашими действиями мы вносим дополнительную ошибку.

В завершение данного раздела приведем некоторые результаты использования описанного алгоритма.

2.3 Результаты моделирования

Будем рассматривать спутник как твердое тело с заданным тензором инерции \mathbf{J} . Его движение на круговой орбите описывается следующими нелинейными уравнениями

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q} \end{cases} \quad (43)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость аппарата, \mathbf{q} — кватернион, описывающий угловое положение спутника. Вводя безразмерные параметры

$$G_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} \quad G_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2} \quad G_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}$$

уравнения движения можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = G_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = G_2\omega_1\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = G_3\omega_1\omega_2 \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\mathbf{q} \end{cases} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{r3} & -\omega_{r2} & \omega_{r1} \\ -\omega_{r3} & 0 & \omega_{r1} & \omega_{r2} \\ \omega_{r2} & -\omega_{r1} & 0 & \omega_{r3} \\ -\omega_{r1} & -\omega_{r2} & -\omega_{r3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

Здесь ω_{ri} — относительная угловая скорость между связанной и орбитальной системами координат, а ω_i — проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси связанной системы координат.

Измерения моделируются путем интегрирования системы уравнений движения (44) с наложением на каждый канал дополнительного шума,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = G_1\omega_2\omega_3 + w_1 \\ \dot{\omega}_2 = G_2\omega_1\omega_3 + w_2 \\ \dot{\omega}_3 = G_3\omega_1\omega_2 + w_3 \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\mathbf{q} + \mathbf{w}_q \end{cases}$$

Далее считается, что вектор состояния системы и вектор измерений имеют следующий вид

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Предполагается, что шум измерений отсутствует. Начальное значение ковариационной матрицы шума процесса выбирается произвольно. Размер выборки N равен 500. В данном случае нас интересуют качественные результаты работы алгоритма, а не количественные, по этой причине точные численные значения элементов вектора шума процесса w_1 , w_2 , w_3 и w_4 не указаны.

На рис.4 показано поведение ошибки оценки вектора состояния, а именно, поведение ошибок оценки второй компоненты вектора угловой скорости и третьего компонента кватерниона. В момент времени $t = 10$ сек. происходит новая оценка ковариационной матрицы шума системы.

2.4 Принцип согласованности. Оценка ковариационной матрицы шума измерений

Как мы уже говорили, прогнозируемая разность (38) является удобным и, пожалуй, единственным средством для того, чтобы судить о работе филь-

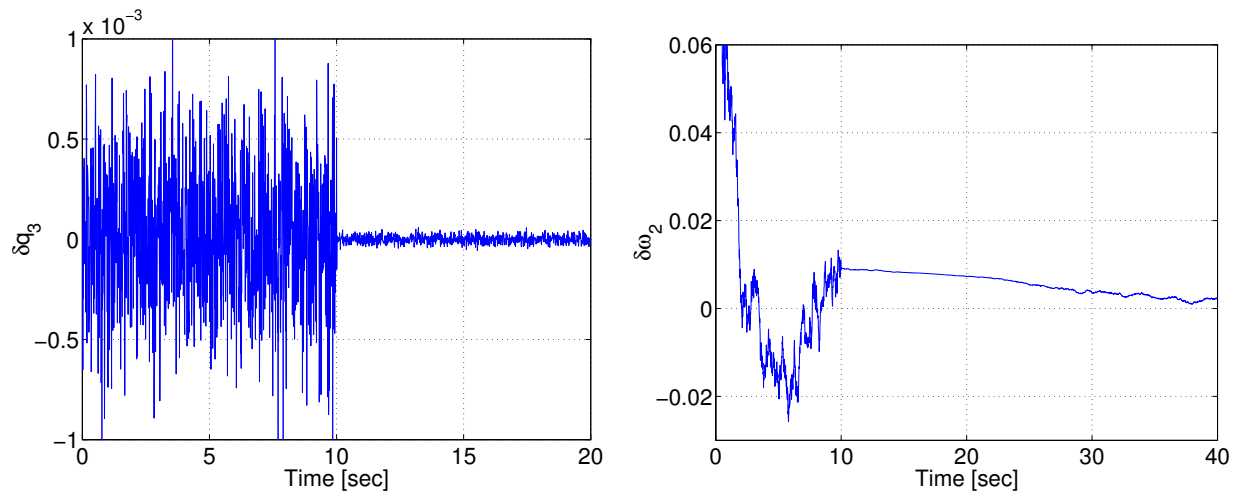


Рис. 4. Ошибки оценки элементов w_2 и q_3

тра на практике. Эта разность доступна через математическое ожидание и ковариационную матрицу. Основой данного метода является работа Джазвинского [1], в которой он определяет принцип согласования (consistency requirement) так:

$$\mathbf{r}_j^2 = E\langle \mathbf{r}_j^2 \rangle, \quad l = 1, \dots, N. \quad (46)$$

Чтобы понять смысл данного соотношения рассмотрим его правую часть

$$\begin{aligned} E\langle \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^\top \rangle &= E\langle (\mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j) (\mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j)^\top \rangle = \\ &= E\langle (\mathbf{H}_j \mathbf{x}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j + \boldsymbol{\nu}_j) (\mathbf{H}_j \mathbf{x}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j + \boldsymbol{\nu}_j)^\top \rangle = \\ &= \mathbf{H}_j E\langle (\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_j) (\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_j)^\top \rangle \mathbf{H}_j^\top + E\langle \boldsymbol{\nu}_j \boldsymbol{\nu}_j^\top \rangle = \\ &= \mathbf{H}_j \mathbf{P}_j \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R}_j \end{aligned} \quad (47)$$

Другими словами, правая часть равенства (46) есть ковариационная матрица ошибки измерений, записанная через модельные параметры системы, в то время как левая часть этого равенства — образец ковариационной матрицы, вычисленный по результатам прогнозируемой разности. Теперь становится ясно, что наша задача состоит в том, чтобы построить соответствие между двумя этими матрицами путем вычисления оптимальных значений ковариационных матриц шумов процесса и измерений.

Оценка ковариационной матрицы ошибки измерений может быть сконструирована следующим образом:

$$\hat{\mathbf{C}}_r = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}})^\top, \quad (48)$$

где

$$\hat{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \quad (49)$$

Модельная ковариационная матрица может быть записана в виде (47)

$$\tilde{\mathbf{C}}_r = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{P}}_j \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R}. \quad (50)$$

Здесь мы опять использовали N -выборочное среднее для придания нашему методу большей статистической значимости. Еще стоит отметить, что запись ковариационной матрицы (48) представлена в общем виде, несмотря на то что ранее мы определяли математическое ожидание шума измерений равным нулю. Тем самым, мы пытаемся построить интересующий нас алгоритм в общем виде.

Приравнивая друг к другу выражения (48) и (50), мы получим выражение для оценки ковариационной матрицы шума процесса в виде

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left\{ (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}})^\top - \left(\frac{N-1}{N} \right) \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{P}}_j \mathbf{H}_j \right\}. \quad (51)$$

Аналогичный подход для получения выражения (51), был рассмотрен в работе [5].

2.4.1 Простой адаптивный алгоритм

Общую схему алгоритма удобно представить в виде табл.6. Это схема так называемого *простого адаптивного фильтра*, когда мы после его работы получаем оценку ковариационной матрицы шума измерений и далее используем ее в фильтре как постоянную. Если после этой подстановки опять оказывается, что результат фильтрации недостаточно хорош, можно повторить эту процедуру заново. Однако, существует другая возможность — другой алгоритм, который позволит нам получать оценки этой ковариационной матрицы на каждом шаге. Это так называемый *адаптивный фильтр с ограниченной памятью*.

2.4.2 Адаптивный фильтр с ограниченной памятью

Идея этого алгоритма довольно проста. Сначала мы определяем размер выборки N . Если $j \leq N$, то мы применяем алгоритм описанный ранее, но

Таблица 6. Простой адаптивный алгоритм

1	Начальные условия	$j = 1, \hat{\mathbf{r}}_0 = 0, \hat{\mathbf{C}}_r^0 = 0, \tilde{\mathbf{C}}_r^0 = 0$
2	Аппроксимация шума	$\mathbf{r}_j = \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j(-)$
3	Вычисление	$\hat{\mathbf{r}}_j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \hat{\mathbf{r}}_{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{r}_j$ $\hat{\mathbf{C}}_r^j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \hat{\mathbf{C}}_r^{j-1} + \frac{1}{j} (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_j) (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_j)^\top$
4	Вычисление	$\tilde{\mathbf{C}}_r^j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \tilde{\mathbf{C}}_r^{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{P}}_j \mathbf{H}_j^\top$
5	Если $j < N$	Увеличиваем j на 1 и переходим к шагу 2
6	Если $j = N$	$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{C}}_r^N - \tilde{\mathbf{C}}_r^N$

сохраняем в памяти некоторую промежуточную информацию

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{x}}_j, \\ \hat{\mathbf{C}}_r^{step(j)} &= (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_j) (\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_j)^\top, \\ \tilde{\mathbf{C}}_r^{step(j)} &= \mathbf{H}_j \hat{\mathbf{P}}_j \mathbf{H}_j^\top. \end{aligned}$$

После получения первой оценки матрицы \mathbf{R} с момента времени $j = N + i$, $i = 1, 2, \dots$ запускается новый алгоритм, схема которого представлена в табл.7

2.4.3 Результаты моделирования

В этом разделе будут приведены результаты работы фильтра с ограниченной памятью, а так же рассмотрены вопросы, касающиеся сравнения в применимости простого адаптивного фильтра и фильтра с ограниченной памятью в различных ситуациях.

Рассматривается система (44). Измерения моделируются интегрированием системы

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = G_1 \omega_2 \omega_3, \\ \dot{\omega}_2 = G_2 \omega_1 \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 = G_3 \omega_1 \omega_2, \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \Omega \mathbf{q}, \end{cases}$$

Таблица 7. Адаптивный фильтр с ограниченной памятью

	Начальное условие	$i = 1$
7	Аппроксимация шума	$\mathbf{r}_{N+i} = \mathbf{z}_{N+i} - \mathbf{H}_{N+i} \hat{\mathbf{x}}_{N+i}(-)$
8	Вычисление \hat{r}_j	$\hat{\mathbf{r}}_{N+i} = \hat{\mathbf{r}}_N + \frac{1}{N} (\mathbf{r}_{N+i} - \mathbf{r}_1)$
9	Вычисление ковариаций $\hat{\mathbf{C}}_r$ и $\tilde{\mathbf{C}}_r$ в точке $N + i$	$\hat{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)} = (\mathbf{r}_{N+i} - \hat{\mathbf{r}}_{N+i}) (\mathbf{r}_{N+i} - \hat{\mathbf{r}}_{N+i})^\top$ $\tilde{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)} = \mathbf{H}_{N+i} \hat{\mathbf{P}}_{N+i} \mathbf{H}_{N+i}^\top$
10	Вычисление среднего значения ковариаций по выборке	$\hat{\mathbf{C}}_r^{N+i} = \hat{\mathbf{C}}_r^N + \frac{1}{N} (\hat{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)} - \hat{\mathbf{C}}_r^{step(1)})$ $\tilde{\mathbf{C}}_r^{N+i} = \tilde{\mathbf{C}}_r^N + \frac{1}{N} (\tilde{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)} - \tilde{\mathbf{C}}_r^{step(1)})$
11	Построение новой оценки \mathbf{R}	$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{C}}_r^{N+i} - \tilde{\mathbf{C}}_r^{N+i}$
12	"Сдвиг" выборки	Исключение первой точки выборки и добавление новых вычисленных значений
13	Запись в память	$\mathbf{r}_{N+i}, \hat{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)}, \tilde{\mathbf{C}}_r^{step(N+i)}$
12	Переход к шагу 7	$i = 2$

и считается, что вектор состояния системы и вектор измерений имеют следующие структуры:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} q_1 + \nu_1 \\ q_1 + \nu_2 \\ q_2 + \nu_3 \\ q_4 + \nu_4 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Параметры моделирования: начальное значение ковариационной матрицы измерений — $0.05I$, ковариации элементов вектора шума ν_i ($i = 1 \dots 4$) равны 0.0064, 0.0025, 0.01 и 0.09 соответственно. Оценивание ковариационной матрицы шума начинается после 10 сек.

На рис.5 показано поведение четвертого диагонального элемента ковариационной матрицы шума измерений (дисперсия четвертого элемента вектора шума измерений ν_4). Видно, что до начала работы адаптивного алгоритма вариация оценки этого элемента равна заданному значению 0.05, а после того, как адаптивная часть алгоритма фильтрации активирована ($t \geq 10$ сек.) значение оценки вариации колеблется относительно

изначально заданной вариации четвертого элемента вектора шума измерений.

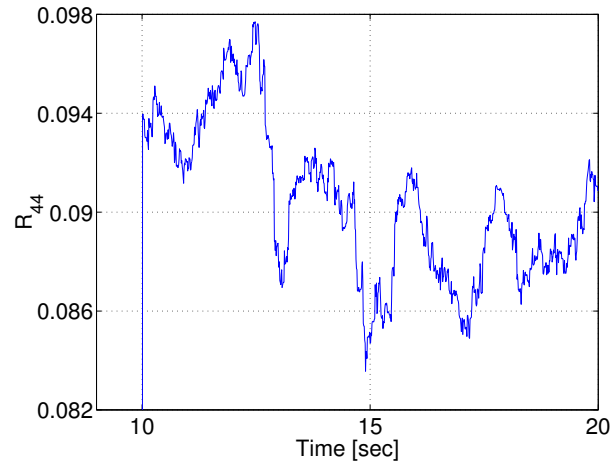


Рис. 5. Поведение четвертого диагонального элемента матрицы R

На рис.6 пунктирной линией показано значение четвертого элемента вектора измерений q_4 без наложенного шума (идеальное измерение), а непрерывной линией показано поведение оценки значения этого элемента без адаптации ковариационной матрицы шума измерений ($t < 10$ сек.) и при использовании адаптивного алгоритма ($t \geq 10$ сек.). На рис.7 показано поведение ошибки измерения для четвертого элемента. Видно, что использование адаптивного алгоритма (с момента времени $t \geq 10$ сек.) дает значительное улучшение в оценке.

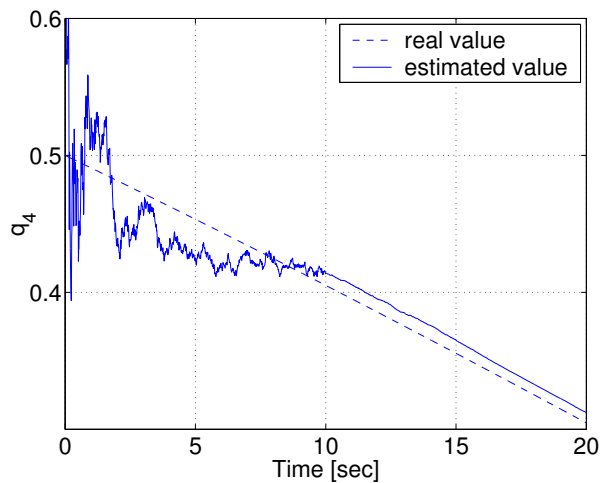


Рис. 6. Оценка q_4

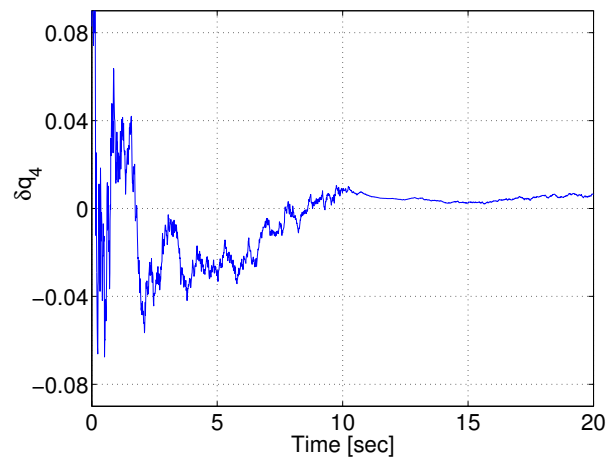


Рис. 7. Ошибка оценки q_4

Конечно, применение алгоритма с ограниченной памятью требует некоторых затрат со стороны бортовой электроники и применение этого алгоритма не всегда оправдано. Например, если статистические свойства

шумов являются постоянными функциями времени, достаточно один или несколько раз провести оценки ковариационной матрицы шума процесса с использованием простого адаптивного фильтра и далее считать оценку матрицы постоянной. По-другому дело обстоит в случае, когда сигнал имеет структуру, подобную сигналу, представленному на рис.8, то есть в случае, когда статистические свойства шума непостоянны во времени. В этом случае применение фильтра с ограниченной памятью поможет нам плавно настраиваться на изменяющийся шум без существенных ухудшений в величине ошибки измерений. На рис.9 показано поведение четвертого диагонального элемента в случае варьирующегося шума. Дисперсия шума сигнала на трех временных интервалах равна 0.09, 0.36 и 0.0225 соответственно. Работа алгоритма с ограниченной памятью (первая оценка ковариационной матрицы) начинается в момент времени $t = 10$ сек. Алгоритм адаптивной фильтрации работает с шагом равным 0.01 сек., размер выборки равен 500 элементам, так что временная длина памяти равна пяти секундам.

На рис.10 показано сравнение работы простого и адаптивного фильтра с ограниченной памятью на примере четвертого элемента вектора измерения. Пунктирная линия — идеальное измерение (без наложения шума), непрерывная линия — оценка этого элемента с использованием простого адаптивного фильтра (однократная оценка ковариационной матрицы шума измерений была сделана для первой части сигнала (рис.8), а далее считалась постоянной, что и привело к возрастанию ошибки после изменения параметров шума) и, наконец, точечная линия — оценка четвертого элемента вектора измерения (седьмой элемент вектора состояния) с использованием алгоритма с ограниченной памятью. С момента времени $t = 10$ сек. мы получаем оценки ковариационной матрицы на каждом шаге (рис.9), тем самым, плавно “настраиваясь” на шум. Конечно, требуется некоторое время (порядка пяти секунд) для того, чтобы полностью настроиться на шум и именно с этим фактом связано некоторое увеличение ошибки оценки, однако, данная ситуация выглядит более предпочтительно, чем в случае, когда мы использовали однократную оценку ковариационной матрицы шума измерений. Сравнение результатов работы различных типов адаптивных алгоритмов рассмотрено в работе [3].

В заключении этого раздела рассмотрим еще одну важную проблему, а именно, размер выборки N . С одной стороны, увеличение объема выборки обеспечивает нам более точную оценку ковариационной матрицы, что и иллюстрирует рис.11. На нем показано поведение оценки четвертого диагонального элемента ковариационной матрицы шума измерений при различных значениях объема выборки. Непрерывная линия соответ-

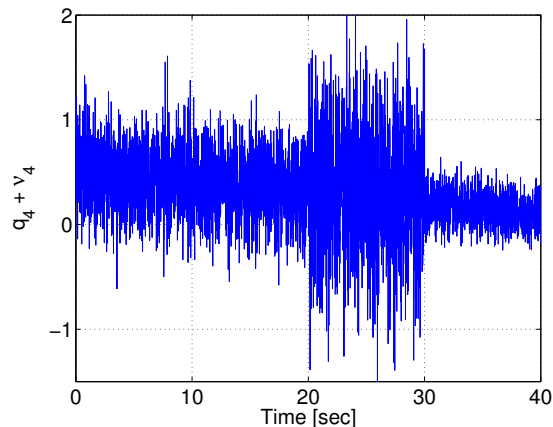


Рис. 8. Модель сигнала

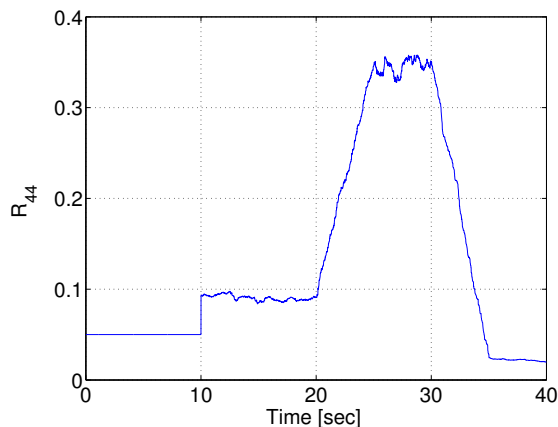


Рис. 9. “Настройка” четвертого диагонального элемента матрицы R

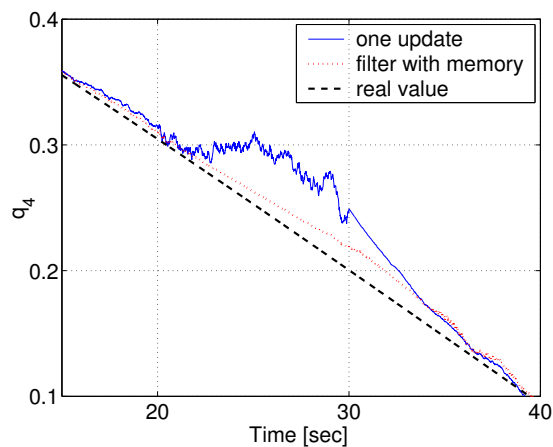


Рис. 10. Сравнение работы простого адаптивного фильтра и фильтра с ограниченной памятью

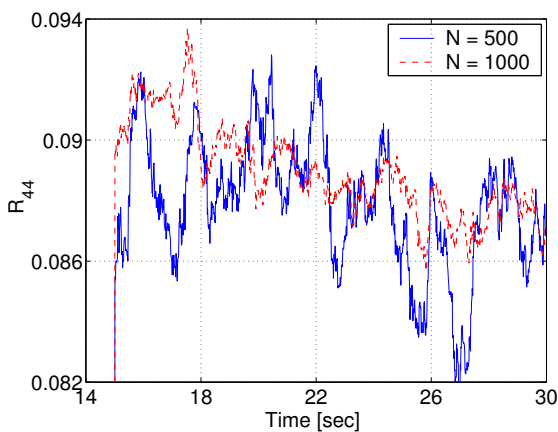


Рис. 11. Зависимость точности оценивания от объема выборки

стует $N = 500$ элементов, а пунктирная — $N = 1000$ элементов. С другой стороны, при выборе объема выборки N мы ограничены возможностями бортовой памяти, что является довольно сильным ограничением. Также, мы видели, что при использовании фильтра с ограниченной памятью настройка элементов ковариационной матрицы при изменении шума происходит не мгновенно, а требует некоторого времени, которое пропорционально выбранному объему выборки (рис.9). Например, если бы в рассмотренной ситуации мы увеличили объем выборки хотя бы в три раза, то практически бы потеряли “всплеск” шума сигнала. Другими словами, невозможно дать каких либо определенных рекомендаций по поводу выбора объема выборки N , это зависит от конкретной задачи, от конкретных возможностей бортовой памяти и должно быть определено в процессе моделирования различных ситуаций.

2.5 Оптимальное значение ковариационной матрицы шума процесса

В этом разделе описан метод в котором соответствие между образчиком ковариационной матрицы (48) и ее модельным значением (50) достигается выбором оптимального значения ковариационной матрицы шума процесса.

Согласно выражению (25) экстраполяцию ковариационной матрицы ошибки оценки вектора состояния \mathbf{P} можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{F}_{j-1} \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{F}_{j-1}^\top + \mathbf{Q}_{j-1}. \quad (53)$$

С учетом этого равенства выражение для модельной ковариационной матрицы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_r &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{P}_j \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{H}_j \mathbf{F}_{j-1} \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{F}_{j-1}^\top \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{H}_j \mathbf{Q}_{j-1} \mathbf{H}_j^\top) + \mathbf{R} \end{aligned}$$

и для нахождения оптимального значения матрицы \mathbf{Q} мы будем решать следующую оптимизационную задачу

$$\min_{q_{jj} \geq 0} \left\{ J(\mathbf{Q}) = \left\| \hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_r \right\|^2 \right\} \quad (54)$$

Такой подход предложен в работе [2]. Ранее, для аппроксимации шума измерений (для записи прогнозируемой разности) мы использовали *априори* оценки вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки путем интегрирования уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{F}^\top(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{Q}(t) \end{aligned} \quad (55)$$

Теперь, предположим, что в момент времени t_k получены *апостериори* оценки вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки состояния и мы рассматриваем их как начальные условия $\mathbf{x}'_k = \hat{\mathbf{x}}_k$ и $\mathbf{P}'_k = \mathbf{P}_k$ для интегрирования новой системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}'(t), t) \\ \dot{\mathbf{P}}'(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}'(t), t) \mathbf{P}'(t) + \mathbf{P}'(t) \mathbf{F}^\top(\mathbf{x}'(t), t). \end{aligned} \quad (56)$$

на всем этапе накопления элементов выборки N . Отметим также, что матрица \mathbf{Q} не включена во второе уравнение этой системы, т.е. мы предполагаем, что наша МОДЕЛЬ "очень хороша".

Шум измерений будем аппроксимировать следующим образом:

$$\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{x}_j', \quad j \geq k$$

В работе [2] автор предполагает, что ковариационная матрица шума процесса имеет следующий вид:

$$\mathbf{Q}_k = \eta \mathbf{I}, \quad (57)$$

где η неизвестный параметр, который требуется оценить.

С учетом всего выше сказанного образец ковариационной матрицы (48) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{C}}_r = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^\top,$$

(предполагается, что математическое ожидание шума измерений равно нулю), а модельную ковариационную матрицу так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_r &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{F}_{j-1} \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{F}_{j-1}^\top \mathbf{H}_j^\top + \nu \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R} = \\ &= \tilde{\mathbf{C}}_{r1} + \tilde{\mathbf{C}}_{r2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{r1} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{F}_{j-1} \mathbf{P}_{j-1} \mathbf{F}_{j-1}^\top \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{r2} &= \frac{1}{N} \eta \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{H}_j^\top. \end{aligned}$$

Таким образом, нам необходимо рассматривать оптимизационную задачу

$$\min_{\eta \geq 0} \left\{ J(\eta) = \left\| \hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_r(\eta) \right\|^2 \right\}. \quad (59)$$

Ее решение выглядит следующим образом:

$$\hat{\eta} = \frac{\text{tr} \left[\left(\hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{r1} \right) \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^\top \right]}{\text{tr} \left(\tilde{\mathbf{C}}_{r1} \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^\top \right)}. \quad (60)$$

Общую схему этого алгоритма можно представить в виде табл.8

Предполагается, что в момент времени t_k апостериори оценки вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки уже вычислены. Если $\hat{\eta}$

Таблица 8. Оптимальное значение матрицы Q

	Начальные условия	$j = 1 \quad (j \geq k)$ $\mathbf{x}'_k = \hat{\mathbf{x}}_k, \quad \mathbf{P}'_k = \mathbf{P}_k$ $\hat{\mathbf{C}}_r^0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{r1}^0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^0 = 0$
1	Новое продолжение	$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}'(t), t)$ $\dot{\mathbf{P}}'(t) = \mathbf{F}_k \mathbf{P}'(t) + \mathbf{P}'(t) \mathbf{F}_k^\top$
2	Вычисление $\hat{\mathbf{C}}_r^j$	$\mathbf{r}_j = \mathbf{z}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{x}'_j$ $\hat{\mathbf{C}}_r^j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \hat{\mathbf{C}}_r^{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^\top$
3	Вычисление $\tilde{\mathbf{C}}_{r1}^j$ и $\tilde{\mathbf{C}}_{r2}^j$	$\tilde{\mathbf{C}}_{r1}^j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \tilde{\mathbf{C}}_{r1}^{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{H}_j \mathbf{F}_{j-1} \mathbf{P}'_{j-1} \mathbf{F}_{j-1}^\top \mathbf{H}_j^\top + \mathbf{R}$ $\tilde{\mathbf{C}}_{r2}^j = \left(\frac{j-1}{j}\right) \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^{j-1} + \frac{1}{j} \mathbf{H}_j \mathbf{H}_j^\top$
4	Если $j < N$	Увеличение j на 1, переход к шагу 2
5	Если $j = N$	$\hat{\eta} = \frac{tr \left[\left(\hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{r1} \right) \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^{-\top} \right]}{tr \left(\tilde{\mathbf{C}}_{r1} \tilde{\mathbf{C}}_{r2}^{-\top} \right)}$

положительна, то

$$Q = \hat{\eta} \mathbf{I},$$

если вычисленное значение отрицательно, то ковариационная матрица шума процесса полагается равной нулю.

Этот алгоритм должен работать параллельно с основным алгоритмом, так как предполагается, что вычисление матриц \mathbf{F}_j и \mathbf{H}_j выполняется именно основным алгоритмом.

Прежде мы делали довольно сильное упрощение, предполагая, что все диагональные элементы ковариационной матрицы шума процесса равны между собой. Теперь рассмотрим общую задачу, где матрица Q произ-

вольная. В этом случае условие (54) можно переписать в виде

$$\min_{q_{jj} \geq 0} \left\{ J(\mathbf{Q}) = \left\| \hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{r1} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \mathbf{Q} \mathbf{H}_j^\top \right\|^2 \right\}. \quad (61)$$

Вводя следующие обозначения $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{r1}$, $\mathbf{C} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j$ и пользуясь выкладками представленными в приложении А.3, получим следующее решение (61):

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{D} \mathbf{C} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1}. \quad (62)$$

Оба описанных метода для оценки оптимального значения ковариационной матрицы шума процесса имеют ряд очевидных недостатков. Например, описанный ранее вектор состояния имеет размерность 7×1 , а вектор измерений 4×1 (45), (52) и в этом случае матрица чувствительности \mathbf{H} имеет следующую структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ясно, что использование описанных алгоритмов оценивания, не даст нам никакой информации об адаптации первых трех диагональных элементов матрицы \mathbf{Q} . Другими словами, иногда мы имеем недостаточную информацию о нашей системе и в этом случае невозможно получить "хорошую" или "полную" оценку ковариационной матрицы шума процесса используя описанные методы.

Заключение

Приведенные схемы адаптивных фильтров позволяют повысить точность оценки вектора состояния системы за счет настройки ковариационных матриц шумов процесса и измерений. Качественные сравнения работы различных типов адаптивных алгоритмов, полученные в результате математического моделирования, позволяют ответить на вопрос о том, какой из них более предпочтителен в той или иной ситуации. В случаях, когда предполагается доминирование одного из шумов, оправдано применение метода "Уточнение ковариации". В противном случае, метода "Принцип

согласованности” более предпочтительно. Основной проблемой адаптивной фильтрации является настройка ковариационной матрицы шума процесса. Приведенные теоретические результаты по определению оптимального значения ковариационной матрицы шума процесса позволяют ответить на некоторые вопросы и сделать методические пояснения.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта DAAD, Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 03-01-00652), ФЦП “Интеграция” (проект N И-0899) и проект N 89 6-го конкурса РАН молодых ученых и студентов, Научной школы (проект N НШ-2003.2003.1). Авторы благодарят М.Ю.Овчинникова за постановку задачи и С.А.Мирера за внимание к работе, Александра Шляйхера за помощь в ее выполнении, а так же коллектив Департамента космических технологий Центра аэрокосмических исследований и микрогравитации (ZARM) Бременского университета за оказанную поддержку во время выполнения работы.

А Приложение

А.1 Белый шум

Белый шум — некоррелированный во времени случайный процесс или случайная последовательность. Случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ называется *некоррелированным*, если

$$E \left\langle [\mathbf{x}(t_1) - E \langle \mathbf{x}(t_1) \rangle] [\mathbf{x}(t_2) - E \langle \mathbf{x}(t_2) \rangle]^\top \right\rangle = \mathbf{Q}(t_1, t_2) \delta(t_1 - t_2),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leq 0 \leq b, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Случайная последовательность называется *некоррелированной*, если

$$E \left\langle [\mathbf{x}_k - E \langle \mathbf{x}_k \rangle] [\mathbf{x}_j - E \langle \mathbf{x}_j \rangle]^\top \right\rangle = \mathbf{Q}(K, j) \Delta(k - j),$$

где $\Delta(k)$ — дельта-функция Кронекера

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

А.2 Принцип ортогональности

Константа α , которая минимизирует среднеквадратичную ошибку

$$e = E \left\langle [\mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}]^2 \right\rangle$$

такова, что вектор $\mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}$ ортогонален вектору \mathbf{z} . Таким образом,

$$E \langle [\mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}] \mathbf{z} \rangle = 0.$$

Величина минимума среднеквадратичной ошибки определяется так:

$$e_m = E \langle (\mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}) \mathbf{x} \rangle$$

Принципу ортогональности можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Будем считать все случайные переменные — векторами. Скалярное произведение двух векторов \mathbf{x} и \mathbf{z} есть второй момент $E \langle \mathbf{x} \mathbf{z} \rangle$. Таким образом,

$$E \langle \mathbf{x}^2 \rangle = E \langle \mathbf{x} \mathbf{x}^\top \rangle$$

есть квадрат модуля вектора \mathbf{x} . Векторы \mathbf{x} , \mathbf{z} , $\alpha_1\mathbf{z}$ и $\mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{z}$ представлены на рис.(12). Среднеквадратичная ошибка $E \langle (\mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{z})^2 \rangle$ есть

Рис. 12. Принцип ортогональности

квадрат модуля вектора $\mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{z}$. Модуль минимален, если $\mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{z}$ ортогонален \mathbf{z} , то есть

$$E \langle (\mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle = 0 .$$

А.3 Решение уравнения (61)

Функционал задачи (61) имеет вид

$$J(\mathbf{Q}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\|^2 \quad (63)$$

Обозначим $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Тогда

$$\begin{aligned} J(\mathbf{Q}) &= \text{tr} \left[(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top) (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top)^\top \right] = \\ &= \text{tr} \left[(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top) (\mathbf{D}^\top - \mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top) \right] = \\ &= \text{tr} \left[-\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{D}^\top - \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top + \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top + \mathbf{D}\mathbf{D}^\top \right] = \\ &= -\text{tr} (\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{D}^\top) - \text{tr} (\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top) + \\ &\quad + \text{tr} (\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top) + \text{tr} (\mathbf{D}\mathbf{D}^\top) . \end{aligned} \quad (64)$$

Сделаем некоторые преобразования первых трех слагаемых правой части равенства (64)

$$\begin{aligned} \text{tr} (\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{D}^\top) &= \text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{D}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}) = (\mathbf{C}^\top\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) , \\ \text{tr} (\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top) &= \text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) , \\ \text{tr} (\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top\mathbf{C}^\top) &= \text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) . \end{aligned} \quad (65)$$

После подстановки выражений (65) в равенство (64) получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{Q}) &= -\text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) - \text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) + \\ &\quad + \text{tr} (\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Q}^\top) + \text{tr} (\mathbf{D}\mathbf{D}^\top) . \end{aligned} \quad (66)$$

Беря первую вариацию функционала J по \mathbf{Q} получим

$$\begin{aligned} \delta J = & -2tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{DQ}(\delta\mathbf{Q})^\top) + tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\delta\mathbf{Q})\mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}^\top) + \\ & + tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}\mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\delta\mathbf{Q})^\top). \end{aligned} \quad (67)$$

Второе слагаемое правой части уравнения (67) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\delta\mathbf{Q})\mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}^\top) &= tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\delta\mathbf{Q})) = \\ &= tr(\mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}\mathbf{C}^\top \mathbf{C}(\delta\mathbf{Q})^\top). \end{aligned}$$

Таким образом, первая вариация функционала $J(\mathbf{Q})$ принимает вид

$$\delta J(\mathbf{Q}) = tr \left[(-\mathbf{C}^\top \mathbf{DQ} + \mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}\mathbf{C}^\top \mathbf{C}) (\delta\mathbf{Q})^\top \right]$$

Необходимое условие достижения данным функционалом минимума по \mathbf{Q} , $\delta J = 0$, дает

$$tr \left[(-\mathbf{C}^\top \mathbf{DQ} + \mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}\mathbf{C}^\top \mathbf{C}) (\delta\mathbf{Q})^\top \right] = 0$$

а так как \mathbf{Q} — произвольная матрица

$$-\mathbf{C}^\top \mathbf{DQ} + \mathbf{C}^\top \mathbf{CQ}\mathbf{C}^\top \mathbf{C} = 0.$$

Окончательно, оптимальное значение ковариационной матрицы шума процесса \mathbf{Q} есть

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{DQ} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1}. \quad (68)$$

Список литературы

- [1] *Jazwinski A.H.* Stochastic Processes and Filtering Theory. New York. 1970.
- [2] *Choukroun D., Bar-Itzhack I.Y., Oshman Y.* A Novel Quaternion Kalman Filter. AIAA Guidance, Navigation and Control, v.5, №8. August, 2002.
- [3] *Bernelli-Zazzera F., Campana R.* Adaptive Kalman Filtering for Multipath Rejection in GPS Based Attitude Determination. February, 1999.
- [4] *D. Joseph Mook, John L. Junkinst.* Minimum Model Error Estimation for Poorly Modeled dynamic System. Journal of Guidance, Control and Dynamics, v.11, №3. May-June, 1988.
- [5] *K.A.Myers and B.D. Tapley.* Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics. IEEE Transactions on Automatic Control v.AC-21, №8. August, 1976.
- [6] *M.S. Grewal, A.P. Andrews.* Kalman Filtering: Theory and Practice. John Wiley Sons, Inc., 2001.
- [7] *Ю.П. Пытьев.* Методы математического моделирования измерительно вычислительных систем. Наука. Москва, 2002.
- [8] *Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.* Очерки по математической теории систем. Мир. Москва, 1971.

Содержание

1	Фильтр Калмана	4
1.1	Линейная задача. Основные понятия	4
1.2	Коэффициент обратной связи	6
1.3	Коррекция значения ковариационной матрицы ошибки оценки вектора состояния	8
1.4	Экстраполяция ковариационной матрицы ошибки	9
1.5	Фильтр Калмана для нелинейных систем (расширенный фильтр)	10
1.6	Использование фильтра Калмана	12
1.6.1	Моделирование работы фильтра Калмана	13
2	Адаптивный фильтр Калмана	15
2.1	Проблема адаптивного фильтра	15
2.2	Метод “Уточнение ковариации”	16
2.3	Результаты моделирования	18
2.4	Принцип согласованности. Оценка ковариационной матри- цы шума измерений	19
2.4.1	Простой адаптивный алгоритм	21
2.4.2	Адаптивный фильтр с ограниченной памятью	21
2.4.3	Результаты моделирования	22
2.5	Оптимальное значение ковариационной матрицы шума про- цесса	27
А	Приложение	32
A.1	Белый шум	32
A.2	Принцип ортогональности	32
A.3	Решение уравнения (61)	33