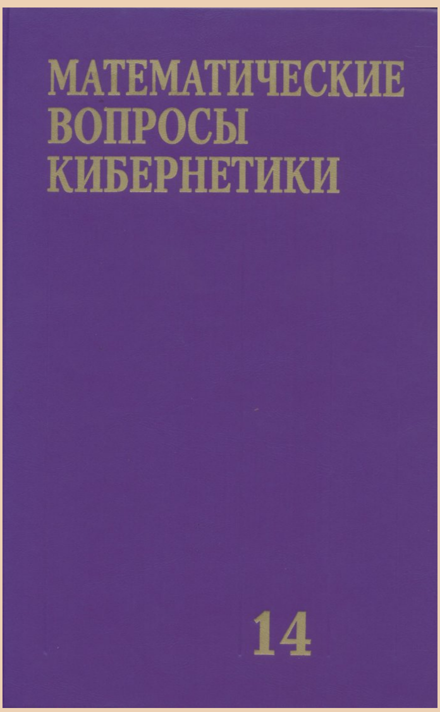

С. В. Попов

О регулярности моделей формул первого порядка

О РЕГУЛЯРНОСТИ МОДЕЛЕЙ ФОРМУЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С. В. ПОПОВ

(МОСКВА)

Введение

Исследуются модели универсальных формул первого порядка без функциональных символов. Доказывается существование ограниченного числа типов подмоделей, из которых образуются логические модели таких формул. Основываясь на этом, доказывается разрешимость проблемы общезначимости для класса формул, представляющих собой импликации следующего вида. Их посылки — это универсальные формулы, а заключения — формулы первого порядка, сигнатура которых включена в сигнатуру посылок и вхождения атомов одного знака — либо положительные, либо отрицательные. Показано, что ослабление требований на вид заключения импликации приводит к неразрешимому классу.

1. Характеристика моделей универсальных формул

Приведем некоторые договоренности и введем определения, которые будем использовать в дальнейшем. Кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если нам не важен вид его конкретных компонентов, будем представлять в векторной записи $\boldsymbol{x}$. Тогда выражение $F(\boldsymbol{x})$ понимается как $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а выражение $\forall\boldsymbol{x}$ — как последовательность $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)$ кванторов. Теперь $\forall\boldsymbol{x}F(\boldsymbol{x})$ обозначает универсальную формулу

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\boldsymbol{A} = \{a, b, \ldots, r\}$ суть множества. Тогда выражение $\sigma = \{x_1 \leftarrow a_1, x_2 \leftarrow a_2, \ldots, x_n \leftarrow a_n\}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{A}$, называется *подстановкой* из $\boldsymbol{A}$ вместо $\mathbf{X}$. Если нам не важен конкретный вид подстановки σ из $\mathbf{A}$ вместо $\mathbf{X}$, то будем обозначать ее сокращенно $\{\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{A}\}$.

Пусть Q есть множество литер и термов. Тогда умножение Q на подстановку σ, обозначается σQ, есть результат замены каждого x_i на a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В частном случае Q может быть единственной формулой, например $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Подстановка σ *разложима* на две σ' и σ'', обозначается $\sigma = \sigma'\sigma''$, если имеет место равенство $\sigma Q = \sigma'\sigma'' Q$ для всякого множества Q литер и термов. При этом подстановки σ' и σ'' не обязательно должны быть подстановками из $\mathbf{A}$ вместо $\mathbf{X}$.

Подстановка $\sigma_1 = \{x_1 \leftarrow a_1, x_2 \leftarrow a_2, \ldots, x_n \leftarrow a_n\}$ называется $\mathbf{A}$-*переименованием* (или просто *переименованием*, если ясно о каком множестве $\mathbf{A}$ идет речь), если все $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно различны. Если $\sigma = \{x_1 \leftarrow a_1, x_2 \leftarrow a_2, \ldots, x_n \leftarrow a_n\}$ есть переименование, то обратная подстановка $\sigma^{-1} = \{a_1 \leftarrow x_1, a_2 \leftarrow x_2, \ldots, a_n \leftarrow x_n\}$ также есть переименование.

Рассмотрим универсальную формулу $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ первого порядка без функциональных символов. Обозначим произвольную модель формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ с носителем $\boldsymbol{A}$ через $M_{\boldsymbol{A}}$. Модели будем представлять как множества литер.

Истинность формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ на модели с носителем $\boldsymbol{A} = \{a, b, \ldots, h\}$ эквивалентна выполнимости пропозициональной формулы

$$\bigcap_{x \in A^n} F(\boldsymbol{x}) =$$

$$= F(a, a, \ldots, a) \wedge F(a, a, \ldots, b) \wedge \ldots \wedge F(a, a, \ldots, h) \wedge \ldots \wedge F(h, h, \ldots, h).$$

Так как модели — это множества литер, то любая модель $M_{\boldsymbol{A}}$ формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ определяет единственное единичное означивание конъюнкции $\bigcap\limits_{x \in A^n} F(\boldsymbol{x})$. И наоборот, всякое единичное означивание конъюнкции $\bigcap\limits_{x \in A^n} F(\boldsymbol{x})$ определяет некоторую совокупность моделей формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ с носителем $\boldsymbol{A}$. Эта совокупность получается в результате различных, не приводящих к противоречию расширений единичного означивания до модели за счет новых литер с аргументами — элементами носителя $\boldsymbol{A}$.

Пусть Λ есть конечное упорядоченное множество $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ так называемых *метапеременных*. Истинность формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ на модели с носителем Λ эквивалентна выполнимости конъюнкции $\bigcap\limits_{x \in \Lambda_n} F(\boldsymbol{x})$. Так как множества атомов формулы $F(\boldsymbol{x})$ и Λ конечны, то имеется лишь ограниченное число различных моделей с носителем Λ формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$. Назовем такие модели *базисными*. Очевидно, что для всякого конечного r число базисных моделей определяется лишь параметрами формулы $F(\boldsymbol{x})$.

Пусть Λ' есть упорядоченное множество $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1})$ метапеременных. Истинность формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ на какой-либо модели с носителем Λ' эквивалентна выполнимости конъюнкции $\bigcap\limits_{x \in \Lambda^n} F(\boldsymbol{x}) \wedge \bigcap\limits_{\boldsymbol{x} \in \Lambda_*^n F(\boldsymbol{x})}$, где Λ_*^n обозначает часть декартова произведения Λ'^n, в каждом кортеже которой встречается, по меньшей мере, одна метапеременная α_{r+1}.

Отсюда следует, что всякая базисная модель $M_{\Lambda'}$ включает некоторую модель M_Λ, т. е. выполняется включение $M_\Lambda \subseteq M_{\Lambda'}$. С другой стороны, всякая базисная модель M_Λ расширяема лишь до определенных базисных моделей с носителем Λ'.

Очевидно, что *если $M_{\boldsymbol{A}}$ есть модель формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$, то каждое подмножество $\boldsymbol{A}_r \subseteq \boldsymbol{A}$ мощности r определяет единственную подмодель $M_{\boldsymbol{A}_r}$ этой формулы.*

Такую подмодель $M_{\boldsymbol{A}_r}$ назовем $\boldsymbol{A}_r$-*подмоделью*. Она получается из некоторой базисной модели M_Λ $\boldsymbol{A}_r$-переименованием ее метапеременных. Таким образом, всякая $\boldsymbol{A}_r$-подмодель $M_{\boldsymbol{A}_r}$ однозначно определяется парой: базисной моделью M_Λ и $\boldsymbol{A}_r$-переименованием σ метапеременных. Назовем эту пару (M_Λ, σ) — *типом* подмодели $M_{\boldsymbol{A}_r}$.

Пусть $M_{\boldsymbol{A}_r}$ и $M_{\boldsymbol{A}_{r+1}}$ — это $\boldsymbol{A}_r$-подмодель и $\boldsymbol{A}_{r+1}$-подмодель, и выполняется включение $M_{\boldsymbol{A}_r} \subseteq M_{\boldsymbol{A}_{r+1}}$, $M_{\boldsymbol{A}_r} = (M_\Lambda, \sigma_1)$, $M_{\boldsymbol{A}_{r+1}} = (M_{\Lambda'}, \sigma_2)$, $\sigma_1 = \{\Lambda \leftarrow \boldsymbol{A}_r\}$, $\sigma_2 = \sigma_1\{\alpha_{r+1} \leftarrow a_{r+1}\}$. В общем случае существует базисная модель $M_{\Lambda'}$, которая может не быть расширением базисной модели M_Λ. Но построим $M_{\Lambda'}$

следующим образом: по модели M_Λ строим расширение $M_{\Lambda'}$ такое, что $M_{\boldsymbol{A}_{r+1}}$ получается из этого расширения переименованием $\sigma_1\{\alpha_{r+1} \leftarrow a_{r+1}\}$. Такое расширение существует, оно получается добавлением к модели M_Λ новых литер, обязательно включающих метапеременную α_{r+1}.

Таким образом, если выполняется включение $M_{\boldsymbol{A}_r} \subseteq M_{\boldsymbol{A}_{r+1}}$, $M_{\boldsymbol{A}_r} = (M_\Lambda, \sigma_1)$, $M_{\boldsymbol{A}_{r+1}} = (M_\Lambda, \sigma_2)$, то будем полагать, что имеет место включение $M_\Lambda \subseteq M_{\Lambda'}$ и переименование $\sigma_2 = \sigma_1\{\alpha_{r+1} \leftarrow a_{r+1}\}$.

Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ есть вектор с компонентами из $\boldsymbol{A}$, содержащий ровно r попарно различных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Тогда набор $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ назовем *индексом вектора* $\boldsymbol{a}$. Переименования $(\alpha_1 \leftarrow a_{i_1}, \alpha_2 \leftarrow a_{i_2}, \ldots, r \leftarrow a_{i_r})$ будем называть *переименованиями* с индексом $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$.

Для базисной модели M_Λ, $|\Lambda| = r$, вектор $\boldsymbol{a}$ с индексом $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ определяет модель (типа) (M_Λ, σ), где σ — переименование с тем же индексом, что и у вектора $\boldsymbol{a}$.

Если $M_{\boldsymbol{A}}$ — модель с носителем $\boldsymbol{A}$ таким, что $|\boldsymbol{A}| \geqslant r$, то вектор $\boldsymbol{a}$ с индексом $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ определяет в $M_{\boldsymbol{A}}$ подмодель $M_{\boldsymbol{a}}$ с носителем $\{a_{i_1}, \ldots \ldots, a_{i_r}\}$ которую мы будем называть подмоделью, *выделенной* вектором $\boldsymbol{a}$ в модели $M_{\boldsymbol{A}}$.

Векторы $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ с компонентами из $\boldsymbol{A}$, назовем *эквивалентными* относительно $M_{\boldsymbol{A}}$, если они выделяют изоморфные модели.

2. Исследование свойств выводов

Рассмотрим формулу $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, находящуюся в предваренной нормальной форме. Полагаем, что сигнатура матрицы $H(z_1, \ldots, z_m)$ включена в сигнатуру формулы $F(\boldsymbol{x})$, содержит атомы лишь одного знака и $H(\boldsymbol{z})$ находится в д.н.ф. В этом разделе мы покажем, что установление общезначимости импликации

$$\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x}) \supset Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$$

решается за ограниченное число шагов, зависящее лишь от вида формул $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ и $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$. Для определенности полагаем, что все атомы в матрице H — положительные. Нам потребуется ввести несколько определений и доказать ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть произвольное множество, $M_{\boldsymbol{A}}$ есть модель формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$. Построим однокорневое, растущее вверх дерево $T_{\boldsymbol{A}}$:

его самому нижнему узлу — корню приписан символ λ;

если узел n отстоит от корня на расстоянии $l < m$, то непосредственно выше располагаются $|\boldsymbol{A}|$ узлов, каждому из них приписан в точности один символ из $\boldsymbol{A}$, разным узлам — разные символы;

узлы, отстоящие от корня на расстоянии m, являются висячими.

Каждому узлу n поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{a}_n$, компонентами которого являются элементы множества $\boldsymbol{A}$, приписанные узлам пути из корня в узел n. Введем еще одну пометку узлов дерева $T_{\boldsymbol{A}}$: каждый его узел n пометим тем классом эквивалентности eq_n относительно $M_{\boldsymbol{A}}$, который содержит вектор $\boldsymbol{a}_n$.

Множество всех векторов, поставленных в соответствие висячим узлам дерева $T_{\boldsymbol{A}}$, разобьем на два подмножества: t-подмножество и f-подмножество. В первое (второе) входят все такие векторы $(a_1, \ldots, a_m)$, что соответствующие подстановки $\{z_1 \leftarrow a_1, \ldots, z_m \leftarrow a_m\}$ превращают формулу $H(a_1, \ldots, a_m)$ в истинную (ложную) на модели $M_{\boldsymbol{A}}$ формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$. Назовем висячий узел дерева $T_{\boldsymbol{A}}$ *t-узлом*, если определяемый им вектор принадлежит t-множеству. В свою очередь назовем любое поддерево $T \subseteq T_{\boldsymbol{A}}$ t-деревом, если все его висячие узлы суть t-узлы.

Истинность формулы $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ на модели $M_{\boldsymbol{A}}$ эквивалентна выводимости пропозициональной секвенции $[M_{\boldsymbol{A}}] \to Q_1^* z_1 \ldots \ldots Q_m^* z_m H(z_1, \ldots, z_m)$, где $[M_{\boldsymbol{A}}]$ есть конъюнкция всех литер модели $M_{\boldsymbol{A}}$, $Q_i^* = \bigcap\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$, если $Q_i = \forall$ и $Q_i^* = \bigcup\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$, если $Q_i = \exists$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Справедливо утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $[\boldsymbol{a}]$ *есть класс эквивалентности векторов длины* m. *Тогда все векторы этого класса являются либо f-векторами, либо t-векторами.*

Доказательство. Все векторы класса $[\boldsymbol{a}]$ выделяют в модели $M_{\boldsymbol{A}}$ изоморфные подмодели. Следовательно, все модели, выделяемые этими векторами, характеризуются изоморфными единичными означиваниями атомов формулы $Q^*{}_1 z_1 \ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$. Теорема доказана.

Вывод секвенции

$$[M_{\boldsymbol{A}}] \to Q^*{}_1 z_1 \ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$$

после устранения всех логических связок из правой части имеет самыми верхними секвенциями выражения вида

$$[M_{\boldsymbol{A}}] \to K_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, K_l(b_1, \ldots, b_m),$$

где $K_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, K_l(b_1, \ldots, b_m)$ получены из конъюнктов д.н.ф. $H(z_1, \ldots, z_m)$ подстановками элементов носителя вместо переменных $z_1, \ldots, z_m$. (Обозначим множество всех таких секвенций L_H). Так как конъюнкты $K_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, K_l(b_1, \ldots, b_m)$ не содержат литер с разными знаками, то выводимость указанной секвенции сводится к доказательству секвенции, которая получается из нее отбрасыванием из правой части всех конъюнктов кроме одного.

Поэтому можно полагать, что *все секвенции множества* L_H *содержат в точности по одному конъюнкту справа.*

Исходя из вида приставки $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m$, выделим в дереве $T_{\boldsymbol{A}}$ поддерево $Tr(H, \boldsymbol{A})$ следующим образом:

Базисное построение. Корнем $Tr(H, \boldsymbol{A})$ является корень дерева $T_{\boldsymbol{A}}$. Полагаем, что он соответствует всей приставке $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m$.

Индукционное построение. Пусть уже построено некоторое поддерево и его висячий узел n соответствует кванторной приставке $Q_i z_i \ldots \ldots Q_m z_m$, $i \leqslant m$. Тогда дальнейшее построение зависит от вида квантора Q_i.

а) $Q_i = \forall$. В этом случае узел n назовем A-узлом и к уже построенному фрагменту добавим все узлы, расположенные непосредственно выше n.

б) $Q_i = \exists$. В этом случае узел n назовем E-узлом и к уже построенному фрагменту добавим в точности один узел, расположенный непосредственно выше n.

Очевидно, что из одного дерева $T_{\boldsymbol{A}}$ можно выделить несколько поддеревьев $Tr(H, \boldsymbol{A})$. При этом некоторые из них могут быть t-деревьями, а некоторые — нет.

Справедливо утверждение.

Теорема 2.2. *Формула* $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ *истинна на модели* $M_{\boldsymbol{A}}$ *тогда и только тогда, когда существует t-дерево* $Tr(H, \boldsymbol{A})$.

Доказательство. Пусть формула $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ истинна на модели $M_{\boldsymbol{A}}$. Тогда формула $Q^*{}_1 z_1 \ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ истинна при означивании, которое задается этой моделью. Построим по формуле $Q^*{}_1 z_1 \ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ t-дерево $Tr(H, \boldsymbol{A})$ следующим образом.

1. Базисное построение. Корню искомого дерева соответствует приставка $Q^*{}_1 z_1 \ldots Q^*{}_m z_m$.

2. Индукционное построение. Пусть уже построено некоторое дерево и его висячий узел n соответствует кванторной приставке $Q^*{}_i z_i \ldots Q^*{}_m z_m$, $i \leqslant m$.

2.1. Пусть $Q^*{}_i z_i$ есть $\bigcap\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$ и пусть из корня в узел n отправляется вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$. Тогда из истинности формулы $Q^*{}_i z_i \ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots$ $\ldots, z_m)$ при означивании, определяемом моделью $M_{\boldsymbol{A}}$, следует что формула $Q^*{}_i z_i \ldots Q^*{}_m z_m H(a_1, \ldots, a_{i-1}, z_i, \ldots, z_m)$ также истинна при означивании определяемом этой моделью. Так как $Q^*{}_i z_i = \bigcap\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$, то из этого следует, что формула $Q^*{}_{i+1} z_{i+1} \ldots Q^*{}_m z_m H(a_1, \ldots, a_{i-1}, a', z_{i+1}, \ldots, z_m)$ истинна при означивании, определяемом моделью $M_{\boldsymbol{A}}$. при всяком $a' \in \boldsymbol{A}$. Поэтому n есть A-узел и непосредственно выше него располагается $|\boldsymbol{A}|$ узлов, каждый их которых соответствует приставке $Q^*{}_{i+1} z_{i+1} \ldots Q^*{}_m z_m$, и всем им приписаны по уникальному элементу носителя.

2.2. Пусть $Q^*{}_i z_i$ есть $\bigcup\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$, и путь, ведущий из корня в узел n определяет вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$. Тогда из истинности формулы $Q^*{}_1 z_1 \ldots$ $\ldots Q^*{}_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ при означивании, определяемом этой моделью следует, что формула $Q^*{}_i z_i \ldots Q^*{}_m z_m H(a_1, \ldots, a_{i-1}, z_i, \ldots, z_m)$ также истинна при означивании, определяемом моделью $M_{\boldsymbol{A}}$. Так как $Q^*{}_i z_i$ есть $\bigcup\limits_{z_i \in \boldsymbol{A}}$ и формула H не содержит атомов разных знаков, то из истинности формулы

$$Q^*{}_i z_i \ldots Q^*{}_m z_m H(a_1, \ldots, a_{i-1}, z_i, \ldots, z_m)$$

следует существование некоторого элемента $a_i \in \boldsymbol{A}$ такого, что истинной будет формула

$$Q^*{}_{i+1} z_{i+1} \ldots Q^*{}_m z_m H(a_1, \ldots, a_i, z_{i+1}, \ldots, z_m).$$

Поэтому n есть E-узел. Непосредственно выше него в дереве $T_{\boldsymbol{A}}$ выделяем узел n', которому в дереве $T_{\boldsymbol{A}}$ приписан элемент a_i. Полагаем, что этому узлу соответствует кванторная приставка $Q^*{}_{i+1} z_{i+1} \ldots Q^*{}_m z_m$.

Если узел n расположен на расстоянии m от корня, то он — висячий, ему соответствует пропозициональная формула $H(a_1, \ldots, a_m)$, которая находится в д.н.ф.

Из того, что формула $H(a_1, \ldots, a_m)$ содержит лишь положительные атомы, следует, что в ней имеется конъюнкт $K(a_1, \ldots, a_m)$, истинный при означивании, определяемом моделью $M_{\boldsymbol{A}}$. Но тогда вектор $(a_1, \ldots, a_m)$ является t-вектором. В одну сторону теорема доказана.

В обратную сторону теорема следует из способа построения дерева $Tr(H, \boldsymbol{A})$.

Теорема доказана.

Нам потребуются следующие определения.

Пусть $T \subseteq T_{\boldsymbol{A}}$ есть поддерево, узлам которого приписано подмножество $\boldsymbol{A}' \subseteq \boldsymbol{A}$ элементов носителя. Тогда моделью, *выделяемой деревом* T в $M_{\boldsymbol{A}}$, назовем подмодель $M'_{\boldsymbol{A}} \subseteq M_{\boldsymbol{A}}$, определяемую подмножеством $\boldsymbol{A}'$.

Веником, определяемым в однокорневом дереве узлом n, называется его дерево, которое представляет собой объединение пути из корня в узел n и максимального поддерева с корнем в n.

Введем определение *прореженного дерева* $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$, которое строится по произвольному $Tr(H, \boldsymbol{A})$. Построение осуществим индукцией по числу узлов в $Tr(H, \boldsymbol{A})$.

Базисное построение. Пусть в дереве $Tr(H, \boldsymbol{A})$ n есть A-узел, непосредственно выше него расположены висячие узлы n_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, каждому из которых приписан в точности один элемент $a_q \in \boldsymbol{A}$. В этом случае $Tr(H, \boldsymbol{A})$ является t-деревом лишь в случае, когда выводимы все секвенции $M_q \to H(\boldsymbol{a}, a_q)$, где M_q — это модель, определяемая путем из корня в узел n_q, а вектор $\boldsymbol{a}$ определяется путем из корня в узел n.

Путь из корня в узел n определяет модель $M_{\boldsymbol{a}}$. Все модели $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$, определяемые путями из корня в висячие узлы $n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_i, \ldots$, суть расширения модели $M_{\boldsymbol{a}}$. Среди моделей $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ имеется лишь ограниченное множество попарно не изоморфных, мощность которого определяется лишь числом m кванторов в формуле $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ и видом формулы F. Это следует из ограниченности множества попарно неизоморфных моделей формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ с носителем мощности m. Пусть таких моделей в точности k, они суть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и их носители — соответственно $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{a}, a_1$, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{a}, a_2$, ..., $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{a}, a_k$. Каждая из них является представителем класса изоморфизма, соответственно $[M_1], [M_2], \ldots, [M_k]$.

Заменим в каждом классе $[M_i]$ все элементы носителя $\boldsymbol{A}$, не вошедшие в множество $\boldsymbol{A}_i$, на один элемент a_i. Очевидно, что такими заменяемыми элементами будут элементы носителя, не вошедшие в вектор $\boldsymbol{a}$. В итоге все модели из $[M_i]$ превращаются в одну модель M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Проделав такие преобразования со всеми классами $[M_1], [M_2], \ldots, [M_k]$ изоморфизма, получим, что исходный веник, включающий все узлы n_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, превращается в веник, содержащий только k узлов $n_1, n_2, \ldots, n_k$, который определяет подмодель с носителем $\boldsymbol{a}, a_1, a_2, \ldots, a_k$ мощности не более чем $m - 1 + k$.

Справедливо утверждение.

Теорема 2.3. *Результирующий веник является t-деревом тогда и только тогда, когда исходный веник является t-деревом.*

Доказательство. Изоморфные подмодели из одного класса $[M_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, в результате подстановки элементов носителей вместо переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$ превращают в истину одинаковые множества подформул формулы $H(z_1, \ldots, z_m)$. Поэтому, если результирующий веник есть t-дерево, то исходный также представляет собой t-дерево.

В обратную сторону доказательство элементарно, так как, если исходный веник есть t-дерево, то его часть, выделяемая в результате описанного преобразования, также есть t-дерево.

Теорема доказана.

Если n есть E-узел, и непосредственно выше располагается висячий узел, то дерево с корнем n также будет прореженным. В этом случае утверждение, аналогичное теореме 2.3., становится тривиальным.

Индукционный переход. Пусть в прореженном дереве $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$ имеется A-узел n, которому соответствует приставка $\forall z_j Q_{j+1} z_{j+1} \ldots Q_m z_m$, и непосредственно выше этого узла расположены узлы n_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, каждому из которых приписан в точности один элемент $a_q \in \boldsymbol{A}$. При этом все деревья T_q с корнями n_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, прореженные.

Из индуктивного предположения вытекает, что в этом случае $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$ является t-деревом лишь в случае, когда выводимы все секвенции

$$M_q \to Q_{j+1} z_{j+1} \ldots Q_m z_m H(\boldsymbol{a}, a_q, z_{j+1}, \ldots, z_m),$$

где M_q — это модель, определяемая путем из корня в узел n_q, а вектор $\boldsymbol{a}$ определяется путем из корня в узел n. Каждая модель M_q является расширением модели $M_{\boldsymbol{a}}$, выделяемой путем из корня в узел n.

В силу ограниченности каждого дерева T_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, и пути из корня в узел n каждая модель M_q ограничена. Полагаем, что носитель этой модели есть множество $\boldsymbol{A}_q \subseteq \boldsymbol{A}$ и $|\boldsymbol{A}_q| = m_q$. Модель, выделяемая всем веником, содержащим все деревья T_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$, имеет носитель $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_q \ldots$, который в общем случае не ограничен.

Отношение изоморфизма моделей разбивает множество $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_q, \ldots$ моделей на классы изоморфизма, число которых ограничено и определяется значением j и сложностью прореженных деревьев с корнями в узлах n_q, $q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|$. Это вытекает из ограниченности моделей формулы $\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x})$ с носителями мощности не более $m^* = \max\{m_1, m_2, \ldots\}$. Пусть этих классов ровно k, обозначим их $[M_1], [M_2], \ldots, [M_k]$.

Выделим произвольную модель M' из класса $[M_i]$. Переименуем все элементы носителя $\boldsymbol{A}'$ модели M' соответствующими элементами носителя $\boldsymbol{A}_i$. В результате получается, что каждый класс изоморфизма сжимается до одной модели M_i.

Исходный веник является t-деревом тогда и только тогда, когда выводимы все секвенции

$$M_q \to Q_{j+1} z_{j+1} \ldots Q_m z_m H(\boldsymbol{a}, a_q, z_{j+1}, \ldots, z_m),\ q = 1, 2, \ldots, |\boldsymbol{A}|.$$

Так как модели M' и M_i изоморфны, то секвенции

$$M_i \to Q_{j+1} z_{j+1} \ldots Q_m z_m H(\boldsymbol{a}, a_i, z_{j+1}, \ldots, z_m)$$

и

$$M' \to Q_{j+1} z_{j+1} \ldots Q_m z_m H(\boldsymbol{a}, a', z_{j+1}, \ldots, z_m),$$

где элемент a' соответствует элементу a_i, одновременно либо выводимы либо нет.

Таким образом, два дерева T_i — определяющее модель из $[M_i]$, и T' — определяющее модель M', одновременно являются либо t-деревьями, либо f-деревьями. Следовательно, если все элементы носителя одного класса $[M_i]$ изоморфизма заменить соответствующими элементами носителя $\boldsymbol{A}_i$, то исходный веник превратится в прореженный, у которого непосредственно выше узла n располагаются k узлов $n_1, n_2, \ldots, n_k$, которые являются корнями прореженных деревьев $T_1, T_2, \ldots, T_k$. При этом результирующий веник является t-деревом тогда и только тогда, когда t-деревом является исходный веник, включающий узел n.

Как видно, результирующее дерево ограничено, его величина зависит лишь от числа k попарно не изоморфных моделей с ограниченной мощностью их носителей. Поэтому мощность носителя подмодели, выделяемой веником прореженного дерева, содержащего узел n, не превосходит $m + m^* k$.

Если n есть E-узел, и непосредственно выше него располагается прореженное дерево, то дерево с корнем n также будет прореженным.

Из построения прореженного дерева вытекают утверждения.

Т е о р е м а 2.4. *Всякое прореженное дерево $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$, построенное по дереву $Tr(H, \boldsymbol{A})$, ограничено и его размер определяется лишь видом формулы F и значением m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения прореженного дерева видно, что степень его узлов ограничена. Действительно, если это E-узел, то имеется в точности одна ведущая в него дуга и одна выходящая. Если это A-узел, то число выходящих из него дуг определяется числом классов изоморфных подмоделей, выделяемых в исходной модели $M_{\boldsymbol{A}}$ ограниченными вениками. В свою очередь, ограничения на размер веников устанавливаются из индуктивного построения прореженного дерева $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$. Выделение подмоделей на базисном шаге построения $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$ происходит путем из корня в висячий узел дерева $T_{\boldsymbol{A}}$.

Теорема 2.5. *Прореженное дерево $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$ является t-деревом тогда и только тогда, когда исходное дерево $Tr(H, \boldsymbol{A})$ также является t-деревом.*

Доказательство. В процедуре построения прореженного дерева всякий переход от исходного веника к прореженному сохраняет свойство быть t-деревом. В обратную сторону также верно: если прореженный веник является t-деревом, то исходный также обладает этим свойством. Это вытекает из того, что отбрасываемые фрагменты исходного дерева определяют модели, принадлежащие классам изоморфизма, все представители которых определяются оставшимися деревьями прореженного веника. Поэтому, если прореженный веник есть t-дерево, то исходный не содержит f-узлов.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Формула $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ истинна на модели $M_{\boldsymbol{A}}$ тогда и только тогда, когда существует прореженное t-дерево $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$.*

Из ограниченности всякого прореженного дерева $Tr^*(H, \boldsymbol{A})$, число узлов которого определяется лишь формулой F и значением m, вытекает следствие.

Следствие 2. *Задача установления общезначимости импликации*

$$\forall \boldsymbol{x} F(\boldsymbol{x}) \supset Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m),$$

где формула $Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m H(z_1, \ldots, z_m)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черч А. Введение в математическую логику. Ч. 1. — М: ИЛ, 1967.

Поступило в редакцию 26 IV 2005