Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Т. В. ДУДНИКОВА

О СХОДИМОСТИ К РАВНОВЕСИЮ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$ С НЕЧЕТНЫМ $n \geq 3$

Препринт

Москва 2005

Аннотация

Т. В. Дудникова.[1] О сходимости к равновесию для волновых уравнений в $\mathbb{R}^n$ с нечетным $n \geq 3$.

Рассматриваются волновые уравнения в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$ и нечетно, с постоянными или переменными коэффициентами. Начальные данные - случайная функция с конечной средней плотностью энергии, удовлетворяющая условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова-Линника. Предполагается, что начальная случайная функция сходится к двум различным пространственно-инвариантным процессам при $x_n \to \pm\infty$ с распределениями $\mu_\pm$. Изучается распределение μ_t случайного решения в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Основной результат - доказательство сходимости мер μ_t к гауссовой мере при $t \to \infty$, что означает центральную предельную теорему для волновых уравнений. Дается приложение к случаю гиббсовских мер $\mu_\pm = g_\pm$ с двумя различными температурами $T_\pm$.

Abstract

T. V. Dudnikova. On Convergence to Equilibrium for Wave Equations in $\mathbb{R}^n$, with odd $n \geq 3$.

Consider the wave equations in $\mathbb{R}^n$, with $n \geq 3$ and odd, with constant or variable coefficients. The initial datum is a random function with a finite mean density of energy that satisfies a Rosenblatt- or Ibragimov-Linnik-type mixing condition. It is assumed that the initial random function converges to different space-homogeneous processes as $x_n \to \pm\infty$, with the distributions $\mu_\pm$. We study the distribution μ_t of the random solution at a time $t \in \mathbb{R}$. The main result is the convergence of μ_t to a Gaussian measure as $t \to \infty$ that means a central limit theorem for the wave equations. The application to the case of the Gibbs measures $\mu_\pm = g_\pm$ with two different temperatures $T_\pm$ is given.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (грант No 03-01-00189), ДФГ (грант No 436 RUS 113/615/0-1).

1. Введение

Изучается волновое уравнение в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$ и нечетно,

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,\, t) = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \partial_j (a_{jk}(x) \partial_k u(x,\, t)) - a_0(x)\, u(x,\, t), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{1-1}$$

Здесь $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t) \in \mathbb{R}$. На уравнение (1-1) накладываются следующие условия **E1–E3**.

E1 $a_{jk}(x) = \delta_{jk} + b_{jk}(x)$, где $b_{jk}(x) \in D$; $a_0(x) \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

E2 $a_0(x) \geq 0$, и выполнено условие гиперболичности: $\exists\, \alpha > 0$ такое, что

$$H(x,k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) k_i k_j \geq \alpha |k|^2, \quad x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{1-2}$$

E3 Условие неловушечности (см. [5]): для $(x(0), k(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с $k(0) \neq 0$ имеем $|x(t)| \to \infty$, $t \to \infty$, где $(x(t), k(t))$ - решение следующей гамильтоновой системы

$$\dot{x}(t) = \nabla_k H(x(t), k(t)), \quad \dot{k}(t) = -\nabla_x H(x(t), k(t)).$$

Пример. Условия **E1-E3** выполнены для случая постоянных коэффициентов, $a_{jk}(x) \equiv \delta_{ij}$. Например, **E3** выполнено потому, что $\dot{k}(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv k(0)t + x(0)$.

Обозначим $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t))$, $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$. Тогда задача (1-1) имеет вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = Y_0. \tag{1-3}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначается операторнозначная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-4}$$

где $A = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \partial_j (a_{jk}(x) \partial_k) - a_0(x)$. Мы предполагаем, что начальные данные Y_0 - случайный элемент функционального пространства $\mathcal{H}$ состояний с конечной локальной энергией, см. определение 2.1 ниже. Распределение Y_0 обозначается через μ_0.

Предполагается, что мера μ_0 обладает нулевым средним, и начальная корреляционная матрица $(Q_0^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$, т. е.

$$Q_0^{ij}(x,y) := \int Y^i(x) Y^j(y)\,\mu_0(dY), \quad i,j=0,1,$$

имеет вид

$$Q_0^{ij}(x,y) = \begin{cases} q_-^{ij}(x-y), & x_n, y_n < -a, \\ q_+^{ij}(x-y), & x_n, y_n > a. \end{cases} \tag{1-5}$$

Здесь $q_\pm^{ij}(x-y)$ - корреляционные функции некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и $a > 0$. Мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_-^{ij} \neq q_+^{ij}$. Далее предполагается, что начальная мера μ_0 обладает конечной средней плотностью энергии. В частности,

$$E[|\nabla u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2] = [\nabla_x \cdot \nabla_y Q_0^{00}(x,y)]|_{y=x} + Q_0^{11}(x,x) < \infty. \tag{1-6}$$

Наконец, предполагается, что начальная мера μ_0 удовлетворяет условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова-Линника, которое означает, грубо говоря, что

$$Y_0(x) \ \text{ и } \ Y_0(y) \ \text{ являются асимптотически независимыми} \tag{1-7}$$

при $|x-y| \to \infty$.

Обозначим через $\mu_t(dY)$, $t \in \mathbb{R}$, меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$ задачи (1-1).

Основная цель статьи - доказать слабую сходимость мер μ_t,

$$\mu_t \to \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{1-8}$$

к равновесной мере μ_∞, которая является трансляционно-инвариантной гауссовской мерой.

Доказательство сходимости (1-8) мы проводим сначала для случая постоянных коэффициентов. Мы разбиваем доказательство на три этапа, используя общую стратегию [1]-[3].

I. Семейство мер μ_t, $t \geq 0$, является слабо компактным в подходящем пространстве Фреше.

II. Корреляционные матрицы сходятся к пределу: для $i,j = 0,1$,

$$Q_t^{ij}(x,y) = \int (Y^i(x) \otimes Y^j(y)) \mu_t(dY) \to Q_\infty^{ij}(x,y), \quad t \to \infty. \tag{1-9}$$

III. Характеристические функционалы сходятся к гауссовскому:

$$\hat{\mu}_t(\Psi) := \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\mu_t(dY) \to \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\}, \quad t\to\infty, \quad (1\text{-}10)$$

где Ψ - произвольный элемент двойственного пространства, и $\mathcal{Q}_\infty$ - квадратичная форма с интегральным ядром $(Q_\infty^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$; через $\langle Y, \Psi\rangle$ обозначается скалярное произведение в действительном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{R}^N$.

Свойство **I** следует из теоремы Прохорова о компактности с использованием методов М.И. Вишика и А.В. Фурсикова, разработанных ими для задач статистической гидромеханики в [6]. Сначала доказывается равномерная оценка для средней локальной энергии по мере μ_t. Мы выводим эту оценку из явного выражения для корреляционных матриц $Q_t^{ij}(x,y)$. Из нее следует выполнение условий теоремы Прохорова по теореме вложения Соболева. Свойство **II** также выводится из явного выражения для корреляционных матриц $Q_t^{ij}(x,y)$. Наконец, для доказательства свойства **III** используется вариант метода "комнат-коридоров" С.Н. Бернштейна из [1, 2].

В заключение, мы распространяем сходимость (1-8) на уравнения с переменными коэффициентами, которые являются постоянными вне конечной области. Это обобщение вытекает из нашего результата для постоянных коэффициентов с использованием теории рассеяния для решений с бесконечной энергией, которая построена в [1].

Для нетрансляционно-инвариантных начальных мер сходимость (1-8) была доказана для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ в [2], для уравнения Клейна-Гордона в [4] и для гармонического кристалла в [3]. Здесь мы обобщаем эти работы на случай волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$, где $n\geq 3$ и нечетно.

2. Основные результаты

Предполагается, что начальные данные Y_0 принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}$.

Определение 2.1. $\mathcal{H}\equiv H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\oplus H^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *- пространство Фреше пар* $Y\equiv(u(x),v(x))$ *действительных функций* $u(x)$, $v(x)$ *с локальны-*

ми энергетическими полунормами

$$\|Y\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2)dx < \infty, \quad \forall R > 0.$$

Следующее предложение 2.2 вытекает из [7, Теорем V.3.1, V.3.2].

Предложение 2.2. *i) Для любого $Y_0 \in \mathcal{H}$ существует единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ задачи Коши (1-3).*
ii) Для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}$.
iii) Справедливы следующие энергетические оценки: $\forall R > 0$,

$$\|U(t)Y_0\|_R \leq C(t)\|Y_0\|_{R+|t|}, \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{2-1}$$

Выберем функцию $\zeta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\zeta(0) \neq 0$. Обозначим через $H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, локальные пространства Соболева, то есть пространства Фреше распределений $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ с конечными полунормами

$$\|u\|_{s,R} := \|\Lambda^s(\zeta(x/R)u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

где $\Lambda^s v := F^{-1}_{k\to x}(\langle k\rangle^s \hat{v}(k))$, $\langle k\rangle := \sqrt{|k|^2+1}$, и $\hat{v} := Fv$ - преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста v. Для $\psi \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ определим $F\psi(k) = \int e^{ik\cdot x}\psi(x)dx.$

Для $s \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{H}^s \equiv H^{1+s}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) \oplus H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$.

Используя стандартные методы псевдодифференциальных операторов и теоремы Соболева (см., например, [8]), можно доказать, что $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-\varepsilon}$ для каждого $\varepsilon > 0$, и это вложение - компактно.

2.1. Случайное решение. Сходимость к равновесию

Пусть (Ω, σ, P) - вероятностное пространство с математическим ожиданием E, и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - борелевская σ-алгебра в $\mathcal{H}$. Мы предполагаем, что $Y_0 = Y_0(\omega, x)$ в (1-3) - измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Другими словами, $(\omega, x) \mapsto Y_0(\omega, x)$ - измеримое отображение $\Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ относительно σ-алгебры $\Sigma \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $Y(t) = U(t)Y_0$ - также измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в силу предложения 2.2. Обозначим через $\mu_0(dY_0)$ борелевскую вероятностную меру в $\mathcal{H}$, которая является распределением Y_0. Без ограничения общности, мы допускаем, что $(\Omega, \Sigma, P) = (\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mu_0)$ для $\mu_0(d\omega) \times dx$-почти всех точек $(\omega, x) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. μ_t *- борелевская вероятностная мера на* $\mathcal{H}$*, которая является распределением* $Y(t)$*:*

$$\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Наша основная цель - доказать слабую сходимость μ_t в пространстве Фреше $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$:

$$\mu_t \xrightarrow{\mathcal{H}^{-\varepsilon}} \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{2-2}$$

где μ_∞ - некоторая борелевская вероятностная мера на пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 2.4. *Корреляционные функции меры* μ_t *определяются следующим образом*

$$Q_t^{ij}(x,y) \equiv E(Y^i(x,t)Y^j(y,t)), \quad i,j = 0,1, \tag{2-3}$$

для почти всех $x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, если математические ожидания в правой части - конечны.*

Для борелевской вероятностной меры μ через $\hat{\mu}$ обозначим её характеристический функционал (преобразование Фурье)

$$\hat{\mu}(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\, \mu(dY), \quad \Psi \in \mathcal{D},$$

где через $\mathcal{D}$ обозначается пространство $[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^2$.

2.2. Условие перемешивания

Через $O(r)$ обозначим множество всех пар открытых подмножеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ с $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq r$, и через $\sigma_{i\alpha}(\mathcal{A})$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми $\alpha_i \geq 0$, σ-алгебру подмножеств $\mathcal{H}$, порожденную всеми линейными функционалами

$$Y \mapsto \langle D^\alpha Y^i, \psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha Y^i(x)\psi(x)\, dx, \quad |\alpha| \leq 1 - i, \quad i = 0,1,$$

где $\psi \in D$ с $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{A}$. Для $d = 0,1$ обозначим через σ_d σ-алгебру, порожденную $\sigma_{i\alpha}$ с $i + |\alpha| \geq d$, т.е.

$$\sigma_d \equiv \bigvee_{i+|\alpha|\geq d} \sigma_{i\alpha}, \quad d = 0,1.$$

Определим коэффициент перемешивания Ибрагимова - Линника $\phi_{d_1,d_2}(r)$ с $d_1, d_2 = 0, 1$ вероятностной меры μ_0 на $\mathcal{H}$ (ср. с определением 17.2.2 из [9]) следующим образом

$$\phi_{d_1,d_2}(r) \equiv \sup_{(\mathcal{A},\mathcal{B})\in O(r)} \sup_{\substack{A\in\sigma_{d_1}(\mathcal{A}),\, B\in\sigma_{d_2}(\mathcal{B}) \\ \mu_0(B)>0}} \frac{|\mu_0(A\cap B)-\mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)}.$$

Определение 2.5. *Мера* μ_0 *удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова-Линника, если для любого* $d_1, d_2 = 0, 1$ *,*

$$\phi_{d_1,d_2}(r) \to 0, \;\; r \to \infty. \tag{2-4}$$

Ниже мы уточним скорость убывания $\phi_{d_1,d_2}(r)$.

2.3. Основная теорема

Через $\nu_d \in C[0,\infty)$ обозначим некоторые непрерывные неотрицательные невозрастающие функции на $[0,\infty)$ $(d = 0, 1, \ldots, n-1)$ с конечными интегралами,

$$\int\limits_0^\infty (1+r)^{d-1}\nu_d(r)dr < \infty. \tag{2-5}$$

Более того, мы будем дополнительно предполагать, что при $n \geq 5$

$$\int\limits_0^\infty (1+r)^{n-4+d}\nu_d(r)dr < \infty, \quad d = 0, 2. \tag{2–5$'$}$$

Мы также будем обозначаем через $\nu(r) = \nu_{n-1}(r)$. Предполагаем, что мера μ_0 удовлетворяет следующим условиям **S0**-**S3**:

S0 μ_0 имеет нулевое математическое ожидание, $EY_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

S1 Корреляционные функции μ_0 имеют вид (1-5).

S2 Следующие производные непрерывны, и справедливы следующие оценки,

$$|D^{\alpha,\beta}_{x,y}Q^{ij}_0(x,y)| \leq \left\{ \begin{array}{l} C\nu_d(|x-y|) \text{ при } d = 0, 1, \ldots, n-1, \\ C\nu_{n-1}(|x-y|) \text{ при } d = n-1, n, n+1, \end{array} \right. \tag{2-6}$$

где $|\alpha| \leq (n-3)/2 + 2 - i$, $|\beta| \leq (n-3)/2 + 2 - j$ и $d = i + j + |\alpha| + |\beta|$.

S3 Мера μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова-Линника, и для $d_1, d_2 = 0, 1$ справедлива следующая оценка:

$$\phi_{d_1,d_2}(r) \le C\nu_d^2(r), \quad d = d_1 + d_2. \tag{2-7}$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем сначала корреляционную матрицу предельной меры в случае постоянных коэффициентов.

Обозначим через $\mathcal{E}(x) = -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x|^{n-2}}$ фундаментальное решение оператора Лапласа, где ω_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, то есть $\triangle\mathcal{E} = \delta(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ и нечетно, и $\mathcal{P}(x) = -iF^{-1}\dfrac{\operatorname{sgn} k_n}{|k|}$, где через F^{-1} обозначается обратное преобразование Фурье. Определим для почти всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ матричнозначную функцию

$$Q_\infty(x,y) = (Q_\infty^{ij}(x,y))_{i,j=0,1} = (q_\infty^{ij}(x-y))_{i,j=0,1}\ , \tag{2-8}$$

где

$$q_\infty^{00} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{00} - \mathcal{E} * (\mathbf{q}^+)^{11} + \mathcal{P} * ((\mathbf{q}^-)^{01} - (\mathbf{q}^-)^{10})\right], \tag{2-9}$$

$$q_\infty^{10} = -q_\infty^{01} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{10} - (\mathbf{q}^+)^{01} + \mathcal{P} * ((\mathbf{q}^-)^{11} - \Delta(\mathbf{q}^-)^{00})\right], \tag{2-10}$$

$$q_\infty^{11} = -\Delta q_\infty^{00} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{11} - \Delta(\mathbf{q}^+)^{00} + \mathcal{P} * \Delta((\mathbf{q}^-)^{10} - (\mathbf{q}^-)^{01})\right]. \tag{2-11}$$

Здесь $\mathbf{q}^+ := \frac{1}{2}(q_+ + q_-)$, $\mathbf{q}^- := \frac{1}{2}(q_+ - q_-)$, и $*$ обозначает свертку обобщенных функций.

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)$ действительную квадратичную форму на пространстве $\mathcal{D} = D \oplus D$, определенную следующим образом

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) = \sum_{i,j=0,1} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} Q_\infty^{ij}(x,y)\Psi^i(x)\Psi^j(y)\,dxdy.$$

Определение 2.6. $\mathcal{H}_\delta$, $\delta > 0$, *- гильбертово пространство функций* $Y = (u, v) \in \mathcal{H}$ *с конечной нормой*

$$|||Y|||_\delta^2 = \int e^{-2\delta|x|}(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2)\,dx < \infty.$$

Заметим, что форма $\mathcal{Q}_\infty$ непрерывна на $\mathcal{H}'_\delta$ в силу следствия 5.3.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия* **E1–E3** *и* **S0–S3**. *Тогда*
i) сходимость (2-2) справедлива для любого $\varepsilon > 0$.
ii) Предельная мера μ_∞ *- гауссовская на* $\mathcal{H}$.
iii) Предельный характеристический функционал имеет вид

$$\hat{\mu}_\infty(\Psi) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi, W\Psi)\}, \ \ \Psi \in \mathcal{D},$$

где $W : \mathcal{D} \to \mathcal{H}'_\delta$ *- линейный непрерывный оператор для достаточно малых* $\delta > 0$, *и* $W = I$, *если* $b_{jk}(x) \equiv 0$ *и* $a_0(x) \equiv 0$.

3. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим волновое уравнение с постоянными коэффициентами ($a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}$, $a_0(x) \equiv 0$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{array} \right. \tag{3-1}$$

Как и в (1-3), перепишем (3-1) в виде

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}_0 Y(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad Y(0) = Y_0. \tag{3-2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $U_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, динамическую группу задачи (3-2). Тогда $Y(t) = U_0(t)Y_0$.

Обозначим $\mu_t(B) = \mu_0(U_0(-t)B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем основной результат для задачи (3-2).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **S0-S3**. *Тогда*
i) сходимость (2-2) имеет место для любого $\varepsilon > 0$.
ii) Предельная мера μ_∞ *- гауссовская равновесная мера на* $\mathcal{H}$.
iii) Предельный характеристический функционал имеет вид

$$\hat{\mu}_\infty(\Psi) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\}, \quad \Psi \in \mathcal{D},$$

где $\mathcal{Q}_\infty$ *- квадратичная форма с интегральным ядром* $Q_\infty(x,y)$, *определенным в (2-8)-(2-11).*

Теорема 3.1 может быть выведена из предложений 3.2 и 3.3, используя те же самые рассуждения, как в [6, теорема XII.5.2].

Предложение 3.2. *Пусть выполнены условия* **S0-S2** *и (2-5). Тогда семейство мер* $\{\mu_t,\, t\geq 0\}$ *- слабо компактно на* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ *с любым* $\varepsilon>0$, *и справедливы следующие оценки:*

$$\sup_{t\geq 0} E\|U_0(t)Y_0\|_R^2<\infty,\quad R>0. \tag{3-3}$$

Предложение 3.3. *Пусть выполнены условия* **S0-S3** *и (2-5'). Тогда для любого* $\Psi\in\mathcal{D}$,

$$\hat{\mu}_t(\Psi)\equiv\int\exp(i\langle Y,\Psi\rangle)\,\mu_t(dY)\to\exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\},\quad t\to\infty. \tag{3-4}$$

4. Приложение к случаю гиббсовских мер

Мы применяем теорему 3.1 к случаю, когда $\mu_\pm=g_\pm$ - гиббсовские меры с двумя различными температурами $T_+\neq T_-$. Формально,

$$g_\pm(du_0,dv_0)=\frac{1}{Z_\pm}e^{-\frac{\beta_\pm}{2}\int(|v_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2)dx}\prod_x du_0(x)dv_0(x), \tag{4-1}$$

где $\beta_\pm=T_\pm^{-1}$ и $T_\pm\geq 0$ - соответствующие абсолютные температуры.

4.1. Гиббсовские меры

Определим гиббсовские меры $g_\pm$ как гауссовские меры с корреляционными функциями (ср. с (4-1))

$$\begin{aligned} q_\pm^{00}(x-y) &= -T_\pm\mathcal{E}(x-y),\quad q_\pm^{11}(x-y)=T_\pm\delta(x-y),\\ q_\pm^{01}(x-y) &= q_\pm^{10}(x-y)=0, \end{aligned} \tag{4-2}$$

где $x,y\in\mathbb{R}^n$. Корреляционные функции $q_\pm^{ij}$ не удовлетворяют условию **S2** из-за сингулярности при $x=y$. Сингулярность означает, что меры $g_\pm$ не сосредоточены на пространстве $\mathcal{H}$. Введем соответствующие функциональные пространства для мер $g_\pm$. Сначала определим пространства Соболева с весом $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ с любыми $s,\alpha\in\mathbb{R}$.

Определение 4.1. $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *- гильбертово пространство распределений* $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ *с конечной нормой*

$$\|u\|_{s,\alpha}\equiv\|\langle x\rangle^\alpha\Lambda^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}<\infty,\quad \Lambda^s u\equiv F^{-1}[\langle k\rangle^s\hat{u}(k)]. \tag{4-3}$$

Зафиксируем произвольные $s, \alpha < -n/2$.

Определение 4.2. $G_{s,\alpha}$ *- гильбертово пространство* $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *с нормой*

$$|||Y|||_{s,\alpha} \equiv \|u\|_{s+1,\alpha} + \|v\|_{s,\alpha} < \infty, \quad Y = (u, v).$$

Введем гауссовские борелевские вероятностные меры $g^0_\pm(du)$, $g^1_\pm(dv)$ на пространствах $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, соответственно, с характеристическими функционалами

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat g^0_\pm(\psi) & = & \int \exp\{i\langle u,\psi\rangle\} g^0_\pm(du) = \exp\left\{\dfrac{\langle \Delta^{-1}\psi,\psi\rangle}{2\beta_\pm}\right\} \\ \hat g^1_\pm(\psi) & = & \int \exp\{i\langle v,\psi\rangle\} g^1_\pm(dv) = \exp\left\{-\dfrac{\langle \psi,\psi\rangle}{2\beta_\pm}\right\} \end{array}\right| \quad \psi \in D.$$

По теореме Минлоса борелевские вероятностные меры $g^0_\pm$, $g^1_\pm$ существуют на пространствах $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, соответственно, потому что

$$\int \|u\|^2_{s+1,\alpha} g^0_\pm(du) < \infty, \quad \int \|v\|^2_{s,\alpha} g^1_\pm(dv) < \infty, \quad s, \alpha < -n/2. \tag{4-4}$$

Наконец, мы определяем гиббсовские меры $g_\pm(dY)$ как борелевские вероятностные меры $g^0_\pm(du) \times g^1_\pm(dv)$ на $G_{s,\alpha}$.

Определение 4.3. $g_0(dY)$ *- борелевская вероятностная мера на* $G_{s,\alpha}$*, которая является распределением случайной величины*

$$Y_0(x) = \zeta_-(x_n) Y_-(x) + \zeta_+(x_n) Y_+(x),$$

где (Y_-, Y_+) *- единичная случайная функция на вероятностном пространстве* $(G_{s,\alpha} \times G_{s,\alpha}, g_- \times g_+)$.

Тогда корреляционные функции меры g_0 имеют вид

$$Q^{ij}_0(x, y) = q^{ij}_-(x - y)\zeta_-(x_n)\zeta_-(y_n) + q^{ij}_+(x - y)\zeta_+(x_n)\zeta_+(y_n), \tag{4-5}$$

где $i, j = 0, 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, и $q^{ij}_\pm$ - корреляционные функции, определенные в (4-2).

Мера g_0 удовлетворяет условиям **S0** и **S1** с $q^{ij}_\pm$ из (4-2). Однако, g_0 не удовлетворяет условию **S2**, так как $Q^{ij}_0(x, y)$ сингулярны при $x = y$. Поэтому, теорема 3.1 не может быть применена непосредственно к $\mu_0 = g_0$. Заметим, что $G_{s,\alpha} \subset \mathcal{H}^s$ согласно стандартным рассуждениям из псевдодифференциальных уравнений, [8]. Следующая лемма может быть доказана с помощью преобразования Фурье, исходя из конечности скорости распространения для волнового уравнения.

Лемма 4.4. *Операторы* $U_0(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ *допускают непрерывное расширение* $\mathcal{H}^s \mapsto \mathcal{H}^s$.

4.2. Сходимость к равновесию

Пусть Y_0 - случайная функция с распределением g_0, следовательно, $Y_0 \in G_{s,\alpha}$ п.в. Обозначим через g_t распределение $U_0(t)Y_0$.

Теорема 4.5. *Пусть* $s < -n + 1/2$. *Тогда существует гауссовская борелевская вероятностная мера* g_∞ *на* $\mathcal{H}^s$, *такая что*

$$g_t \xrightarrow{\mathcal{H}^s} g_\infty, \quad t \to \infty.$$

Предельная мера g_∞ - гауссовская с корреляционной матрицей $Q_\infty = (Q_\infty^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$, где

$$Q_\infty^{00}(x,y) \equiv q_\infty^{00}(x-y) = -\frac{1}{2}(T_+ + T_-)\mathcal{E}(x-y), \qquad (4\text{-}6)$$

$$Q_\infty^{10}(x,y) = -Q_\infty^{01}(x,y) \equiv q_\infty^{10}(x-y) = \frac{1}{2}(T_+ - T_-)\mathcal{P}(x-y), \qquad (4\text{-}7)$$

$$Q_\infty^{11}(x,y) \equiv q_\infty^{11}(x-y) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)\delta(x-y). \qquad (4\text{-}8)$$

Тождества (4-6)–(4-8) формально следуют из (4-2) и (2-9)–(2-11).

4.3. Предельный поток энергии

Пусть $u(x,t)$ - решение (3-1) с конечной энергией. Определим энергию в области $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0\}$ как

$$\mathcal{E}_k(t) = \int_{\Omega_k} \left(|\dot u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx.$$

Формально вычисляя, используя уравнение (3-1), получим

$$\dot{\mathcal{E}}_k(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j^k(x',t)\, dx'.$$

Здесь $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ с $x_k = 0$; через $j^i(x',t)$ обозначается плотность потока энергии в направлении $e_k = (\delta_{k1}, \ldots, \delta_{kn})$, $k = 1, \ldots, n$,

$$j^k(x',t) = -\dot u(x',t)\nabla_k u(x',t).$$

Теперь пусть $u(x,t)$ - случайное решение (3-1) с начальной мерой μ_0, удовлетворяющей **S0–S3**. Средняя плотность потока энергии равна

$Ej(x,t) = -E(\dot u(x,t)\nabla u(x,t))$. Поэтому, в пределе $Ej(x,t) \to \bar{\mathbf{j}}_\infty = \nabla q^{10}_\infty(0)$ при $t\to\infty$. Соответственно, в случае "гиббсовской" начальной меры g_0, из выражения (4-7) для предельной корреляционной функции следует *формально*, что

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty = \frac{T_+ - T_-}{2}\nabla\mathcal{P}(0),$$

где $[\nabla\mathcal{P}](z) = -F^{-1}[\frac{k\,\mathrm{sgn}\,k_n}{|k|}](z)$. Следовательно, формально мы имеем "ультрафиолетовую расходящуюся" предельную среднюю плотность потока энергии,

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty = -\frac{T_+ - T_-}{2(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{k\,\mathrm{sgn}\,k_n}{|k|}dk = -\infty\cdot(0,\ldots,0,T_+ - T_-).$$

С другой стороны, для свертки $U_0(t)(Y_0 * \theta)$ соответствующая предельная плотность потока энергии конечна,

$$\bar{\mathbf{j}}^\theta_\infty = -\frac{T_+ - T_-}{2(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\hat\theta(k)|^2\frac{k\,\mathrm{sgn}\,k_n}{|k|}dk = -C_\theta\cdot(0,\ldots,0,T_+ - T_-),$$

если $\theta(x)$ - симметрична относительно оси Ox_n, $\theta(x)\not\equiv 0$, и $C_\theta = \frac{1}{2(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\hat\theta(k)|^2\frac{|k_n|}{|k|}dk > 0.$

5. Доказательство теоремы 3.1

5.1. Компактность семейства мер

Предложение 3.2 может быть выведено из оценки (3-3) с помощью теоремы Прохорова [6, лемма II.3.1] также, как в [6, теорема XII.5.2].

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* **S0**–**S2** *и (2-5). Тогда справедливы оценки (3-3).*

Доказательство. Из условия **S2** и предложения 2.2 *iii)* следует существование корреляционных функций в (2-3) в силу теоремы Фубини, где $Y^i(x,t)$ - компоненты $Y(x,t) = (Y^0(x,t), Y^1(x,t))$. Поэтому, в силу определения 2.1 получаем

$$\begin{aligned} E\|Y(\cdot,t)\|^2_R &= \int\limits_{|x|<R} Q^{00}_t(x,x)dx + \int\limits_{|x|<R}\nabla_x\cdot\nabla_y Q^{00}_t(x,y)|_{y=x}dx \\ &\quad + \int\limits_{|x|<R} Q^{11}_t(x,x)dx. \end{aligned} \tag{5-1}$$

Мы ограничимся, для примера, оценкой интеграла от $Q_t^{00}(x,x)$ в (5-1) в частном случае, когда $Y_0^0 \equiv u_0 = 0$ почти всюду. Общий случай доказывается аналогично. Предположим дополнительно, что функция $Y_0^1 \equiv v_0$ класса $C^k(\mathbb{R}^n)$, $k=(n-3)/2$, почти всюду. Тогда решение $Y^0(\cdot,t)$ имеет вид

$$Y^0(x,t) = \frac{(-1)^k}{4\pi^{k+1}t^{2k+1}} \int\limits_{S_t(x)} \mathcal{D}_k(z-x,\nabla_z)v_0(z)\,dS(z),\ k=\frac{n-3}{2}. \tag{5-2}$$

Здесь через $dS(z)$ обозначается мера Лебега на сфере $S_t(x)=\{z\in\mathbb{R}^n : |x-z|=t\}$, и через $\mathcal{D}_k(x,\nabla)$ - дифференциальный оператор k-порядка,

$$\mathcal{D}_0(x,\nabla)\equiv 1,\ \ \mathcal{D}_k(x,\nabla) := (k-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}x\cdot\nabla)\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}x\cdot\nabla), \tag{5-3}$$

$x\in\mathbb{R}^n$, $k\ge 0$. Тогда в силу теоремы Фубини и формулы (5-2) имеем

$$Q_t^{00}(x,x) = \frac{1}{(4\pi^{k+1}t^{2k+1})^2} \int\limits_{S_t(x)\times S_t(x)} \mathcal{D}_k(x'-x,\nabla_{x'})\mathcal{D}_k(x''-x,\nabla_{x''})Q_0^{11}(x',x'')dS(x')dS(x''). \tag{5-4}$$

Заметим, что при $x'\in S_t(x)$,

$$\mathcal{D}_k(x'-x,\nabla_{x'}) = (k-\frac{n}{2}-\frac{t}{2}n_x(x')\cdot\nabla_{x'})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n}{2}-\frac{t}{2}n_x(x')\cdot\nabla_{x'}),$$

где через $n_x(x')=(x'-x)/|x'-x|$ обозначается единичный вектор. Поэтому,

$$|\mathcal{D}_k(x'-x,\nabla_{x'})\mathcal{D}_k(x''-x,\nabla_{x''})Q_0^{11}(x',x'')| \le \sum_{\kappa=0}^{n-3} C_\kappa t^\kappa \sum_{|\alpha|+|\beta|=\kappa} |D^{\alpha,\beta}_{x',x''}Q_0^{11}(x',x'')|, \tag{5-5}$$

с $|\alpha|\le k$, $|\beta|\le k=(n-3)/2$. Применим следующую лемму о сферическом интегральном тождестве.

Лемма 5.2. *Пусть $h(r)\in C(0,+\infty)$. Тогда для любых $r_0\ge 0$ и $x''\in S_t(x)$ выполнено следующее тождество:*

$$\int\limits_{\{x'\in S_t(x):\,|x'-x''|\ge r_0\}} h(|x'-x''|)dS(x') = \omega_{n-1}\int\limits_{r_0}^{2t} r^{n-2}(1-\frac{r^2}{4t^2})^{(n-3)/2}h(r)dr, \tag{5-6}$$

где через ω_{n-1} обозначается площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Из формул (5-4) и (5-5), условия **S2** и леммы 5.2 с $r_0 = 0$ следует (см. (2-5)), что

$$Q_t^{00}(x,x) \leq \frac{C}{t^{2n-4}} \int\limits_{S_t(x)\times S_t(x)} \Big(\sum_{\kappa=0}^{n-3} C_\kappa t^\kappa \nu_{\kappa+2}(|x'-x''|)\Big)\, dS(x')dS(x'')$$
$$\leq \sum_{\kappa=0}^{n-3} C_\kappa \int\limits_0^{2t} \frac{r^{n-3-\kappa}}{t^{n-3-\kappa}}\, r^{\kappa+1}\nu_{\kappa+2}(r)\, dr \leq C_4 < \infty, \ \ t\in \mathbb{R}. \qquad (5\text{-}7)$$

Тогда

$$\int\limits_{|x|<R} Q_t^{00}(x,x)dx \leq CR^n, \ \ t\in\mathbb{R}.$$

Предположение о п.в. гладкости $v_0 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ может быть снято с помощью свертки с функцией $\theta \in D$. □

Из оценки (3-3) следует, что

$$\sup_{t\geq 0} \int |||Y|||_\delta^2\, \mu_t(dY) \leq e_0 \int \exp(-2\delta|x|)\, dx \leq C_\delta(\varphi) e_0 < \infty, \qquad (5\text{-}8)$$

$\delta > 0$. Из этой интегральной оценки вытекает следующее следствие, которое будет использовано в разделе 6.2.

Следствие 5.3. (i) Меры μ_t, $t \geq 0$, сосредоточены на $\mathcal{H}_\delta$ для любого $\delta > 0$, и их характеристические функционалы $\hat\mu_t$ равномерно непрерывны на двойственном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'_\delta$, т.е. для всех $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}'_\delta$,

$$|\hat\mu_t(\Psi_1) - \hat\mu_t(\Psi_2)| \leq C(\delta,\varphi,e_0)|||\Psi_1-\Psi_2|||'_\delta, \ t\geq 0, \qquad (5\text{-}9)$$

где $|||\cdot|||'_\delta$ обозначает норму в $\mathcal{H}'_\delta$.
(ii) Квадратичные формы $\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)$ равномерно непрерывны на $\mathcal{H}'_\delta$, т.е. для всех $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}'_\delta$,

$$|\mathcal{Q}_t(\Psi_1,\Psi_1) - \mathcal{Q}_t(\Psi_2,\Psi_2)| \leq C(\delta,\varphi,e_0)|||\Psi_1-\Psi_2|||'_\delta, \ t\geq 0. \qquad (5\text{-}10)$$

(iii) Квадратичная форма $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ непрерывна на $\mathcal{H}'_\delta$.

5.2. Сходимость корреляционных функций

В этом разделе мы докажем сходимость корреляционных функций меры μ_t. Отсюда вытекает сходимость характеристических функционалов $\hat\mu_t$ в случае гауссовских мер μ_0 и $\mu_\pm$.

Лемма 5.4. *Пусть выполнены условия* **S0–S2** *и (2-5). Тогда справедлива следующая сходимость при* $t \to \infty$ *:*

$$Q_t^{ij}(x,y) \to Q_\infty^{ij}(x,y), \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \ \forall i,j = 0,1. \tag{5-11}$$

Доказательство. Докажем лемму для случая $i = j = 0$ в частном случае, когда $u_0 \equiv 0$ почти всюду. Общий случай может быть аналогично. Предположим дополнительно, что функция $v_0 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ почти всюду. Тогда формула (5-2) и теорема Фубини приводят к следующему равенству

$$\begin{aligned} Q_t^{00}(x,y) &= E(u(x,t)u(y,t)) \\ &= \frac{1}{(4\pi^{k+1}t^{2k+1})^2} \int\limits_{S_t(x)} dS(x') \int\limits_{S_t(y)} f(x'-x, y'-y, x', y')\, dS(y'), \end{aligned} \tag{5-12}$$

где $f(x'-x, y'-y, x', y') := \mathcal{D}_k(x'-x, \nabla_{x'})\mathcal{D}_k(y'-y, \nabla_{y'})Q_0^{11}(x',y')$. Интеграл (5-12) - это свертка функции $Q_0^{11}(x,y)$ по обеим переменным x,y с обобщенной функцией с компактным носителем. Свертка распределений с компактным носителем коммутативна. Поэтому, предположение о п.в. $v_0 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ может быть снято с помощью свертки с функцией $\theta \in D$. Заменяя переменные $x' = x + \omega t$ в правой части (5-12), мы получаем

$$\begin{aligned} Q_t^{00}(x,y) &= \frac{1}{(4\pi^{k+1}t^{2k+1})^2} \int\limits_{S_t(x)} dS(x') \int\limits_{S_t(y)} f(x'-x, y'-y, x', y')\, dS(y') \\ &= \frac{1}{16\pi^{n-1}} \int\limits_{|\omega|=1, \omega_n<0} dS(\omega) \frac{1}{t^{n-3}} \int\limits_{S_t(y)} f(\omega t, y'-y, x+\omega t, y')\, dS(y') \\ &\quad + \frac{1}{16\pi^{n-1}} \int\limits_{|\omega|=1, \omega_n>0} dS(\omega) \frac{1}{t^{n-3}} \int\limits_{S_t(y)} f(\omega t, y'-y, x+\omega t, y')\, dS(y') \\ &= I_-(t,x,y) + I_+(t,x,y). \end{aligned} \tag{5-13}$$

Напомним, что $\nu(r) \equiv \nu_{n-1}(r)$.

Определение 5.5. $C_\nu^\kappa(\mathbb{R}^n)$ $(\kappa \geq 0)$ *- пространство функций* $f(y) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *таких, что* $\sum_{|\alpha|=\kappa} |D_y^\alpha f(y)| \leq C\nu(|y|)$, $y \in \mathbb{R}^n$, *где константа* $C \geq 0$.

Определим для $f(y) \in C_\nu^\kappa(\mathbb{R}^n)$ оператор

$$\mathbf{R}_\pm^\kappa f(v) := \frac{(-1)^{(n-3)/2}}{4(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{|\omega|=1, \pm\omega_n>0} dS(\omega) \int\limits_{p\cdot\omega = v\cdot\omega} (\omega, \nabla)^\kappa f(p) d^{n-1}p, \ \ v \in \mathbb{R}^n. \tag{5-14}$$

Здесь $d^{n-1}p$ - лебегова мера на плоскости $p\cdot\omega = v\cdot\omega$. Заметим, что интегралы $\mathbf{R}^\kappa_\pm$ сходятся в силу (2-5), и $\mathbf{R}^\kappa_+ = \mathbf{R}^\kappa_- =: \mathbf{R}^\kappa$, если κ - четное, и $\mathbf{R}^\kappa_+ = -\mathbf{R}^\kappa_- =: \mathbf{R}^\kappa$, если κ - нечетное. Следовательно, операторы $\mathbf{R}^\kappa : C^\kappa_\nu(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n)$ непрерывны с нормой в C^κ_ν: $\|f\|_{C^\kappa_\nu} = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} \dfrac{\sum_{|\alpha|=\kappa} |D^\alpha f(y)|}{\nu(|y|)}$.

Замечание 5.6. *(i) Операторы $\mathbf{R}^\kappa$ могут быть применены к функциям $q^{ij}_\pm$, если $\kappa+i+j=n-1,n,n+1$, в силу условия* **S2**.
(ii) Пусть $f\in C^{n-3}_\nu(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathbf{R}^{n-3}f = -\dfrac{1}{4}\mathcal{E}*f$, где $\mathcal{E}$ - фундаментальное решение оператора Лапласа.

Сходимость (5-11) для $i=j=0$ имеет место в силу формул (5-12) и (5-13), леммы 5.7 и замечания 5.6 (ii).

Лемма 5.7. *Пусть выполнено условие* **S2**. *Тогда для $x,y\in\mathbb{R}^n$,*

$$I_\pm(t,x,y) \to \mathbf{R}^{n-3} q^{11}_\pm(x-y), \quad t\to\infty. \tag{5-15}$$

Доказательство. Предположим дополнительно, что

$$Q^{ij}_0(x',x'') = 0 \ \text{ при } \ |x'-x''| \ge r_0, \quad i,j=0,1. \tag{5-16}$$

Обозначим через I_{11} внутренний интеграл из (5-13):

$$\begin{aligned} I_{11} &\equiv I_{11}(x,y,\omega,t) \\ &= \frac{1}{t^{n-3}} \int\limits_{S_t(y)} \mathcal{D}_k(\omega t,\nabla_x)\mathcal{D}_k(y'-y,\nabla_{y'}) Q^{11}_0(x+\omega t,y')\,dS(y'). \end{aligned} \tag{5-17}$$

Сделаем замену переменных $y'\to p$, $y'=y+\omega t+p$, и обозначим $R=|x-y|$. Из (5-16) следует, что $Q^{11}_0(x+\omega t, y+\omega t+p)=0$ для $|p|\ge r_0+R$, следовательно, интеграл (5-17) имеет вид

$$I_{11} = \frac{1}{t^{n-3}} \int\limits_{S_t(-\omega t)\cap B_0} \mathcal{D}_k(\omega t,\nabla_x)\mathcal{D}_k(\omega t+p,\nabla_y) Q^{11}_0(x+\omega t, y+\omega t+p)\,dS(p), \tag{5-18}$$

где через B_0 обозначается шар $|p|\le r_0+R$. Сфера $S_t(-\omega t)$ содержит точку 0, следовательно в окрестности начала координат сфера сходится к касательной плоскости $\omega^\perp$ при $t\to\infty$. Далее, рассмотрим случаи $\omega_n<0$ и $\omega_n>0$ отдельно. При $\omega_n<0$ и достаточно больших $t>t(\omega)$,

$$x_n+\omega_n t < -a, \qquad y_n+\omega_n t+p_n < -a, \qquad \text{при } \ |p|\le r_0+R.$$

Тогда из условия **S1** следует, что

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_k(\omega t,\nabla_x)\mathcal{D}_k(\omega t+p,\nabla_y)Q_0^{11}(x+\omega t,y+\omega t+p)\\ =\frac{t^{n-3}}{2^{n-3}}(\frac{2k-n}{t}-(\omega,\nabla_x))\cdot\ldots\cdot(\frac{2-n}{t}-(\omega+\frac{p}{t},\nabla_x))\\ (\frac{2k-n}{t}+(\omega+\frac{p}{t},\nabla_x))\cdot\ldots\cdot(\frac{2-n}{t}+(\omega+\frac{p}{t},\nabla_x))q_-^{11}(x-y-p).\end{gathered}\tag{5-19}$$

Поэтому, если $\omega_n<0$, то

$$I_{11}\to\frac{(-1)^k}{2^{n-3}}\int\limits_{\omega^\perp\cap B_0}(\omega,\nabla_x)^{n-3}q_-^{11}(x-y-p)\,d^{n-1}p,\quad t\to\infty.\tag{5-20}$$

Интеграл, стоящий в правой части (5-20), совпадает с внутренним интегралом из правой части (5-14) с $f=q_-^{11}$ и $v=x-y$. Аналогично доказывается случай $\omega_n>0$. Итак, лемма 5.7 доказана с дополнительным условием (5-16). Наконец, лемма 5.2 и условие **S2** дают равномерную малость интеграла (5-18) по области $|p|\geq r_0+R$ с большим r_0, так как

$$\begin{aligned}I_{11}\;&\leq\;\frac{1}{t^{n-3}}\int\limits_{S_t(-\omega t)\cap B_0}[\sum_{\kappa=0}^{n-3}C_\kappa t^\kappa\nu_{\kappa+2}(|x-y-p|)]\,dS(p)\\ &\leq\;\sum_{\kappa=0}^{n-3}C'_\kappa\int\limits_{r_0+R}^{+\infty}r^{\kappa+1}\nu_{\kappa+2}(r-R)\,dr\end{aligned}$$

для $|p|\geq r_0+R$. Поэтому, (5-20) выполнено для любого ω с $\omega_n\neq 0$. Следовательно, (5-15) вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости. □

Вернемся к доказательству леммы 5.4 в частном случае, когда $i=j=0$ и $u_0\equiv 0$. В силу формул (5-12) и (5-13), леммы 5.7 и замечания 5.6 (ii) получаем, что

$$Q_t^{00}(x,y)\to-\frac{1}{4}\mathcal{E}*(q_+^{11}+q_-^{11})(x-y),\quad t\to\infty,$$

что доказывает (5-11) (ср. с формулой (2-9)) в частном случае. □

5.3. Метод Бернштейна для волнового уравнения

В этом и следующем разделах мы развиваем версию метода Бернштейна "комнат - коридоров". Мы используем стандартное интегральное представление для решений, делим область интегрирования на "комнаты" и "коридоры" и оцениваем их вклад. В результате, $\langle U_0(t)Y_0, \Psi\rangle$ представляется как сумма слабо зависимых случайных величин. Мы оцениваем дисперсии этих случайных величин, которые будут важны в следующем разделе.

Через $\mathcal{E}_t(x) \equiv \mathcal{E}(x,t) = \dfrac{(-1)^k}{2\pi^{k+1}}\delta^{(k)}(|x|^2 - t^2)$, $k = (n-3)/2$, обозначается фундаментальное решение волнового уравнения. Носитель $\mathcal{E}_t$ принадлежит сфере $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$. Поэтому, динамическая группа $U_0(t)$ задачи (3-2) - оператор свертки

$$U_0(t)Y_0 = \mathcal{G}_t * Y_0,\ t > 0, \tag{5-21}$$

где

$$\mathcal{G}_t = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{E}}_t & \mathcal{E}_t \\ \triangle\mathcal{E}_t & \dot{\mathcal{E}}_t \end{pmatrix}. \tag{5-22}$$

Затем мы разбиваем пространство $\mathbb{R}^n$ на "комнаты-коридоры". Для данного $t > 0$ выберем $d \equiv d_t \geq 1$ и $\rho \equiv \rho_t > 0$ и целое число $N \equiv N_t > 0$. Асимптотические отношения между t, d_t и ρ_t определены ниже. Определим

$$a_1 = -t,\ b_1 = a_1 + d;\ \ a_2 = b_1 + \rho,\ b_2 = a_2 + d;\ \ \ldots,\ b_N \equiv a_N + d = t. \tag{5-23}$$

Мы разделим сферу S_t плоскостями, ортогональными оси Ox_n на слои, которые называем "комнатами" R_t^l $(l = 1, ..., N)$, разделенные "коридорами" C_t^l $(l = 1, ..., N-1)$,

$$R_t^l = \{x \in S_t :\ x_n \in [a_l, b_l]\},\quad C_t^l = \{x \in S_t :\ x_n \in [b_l, a_{l+1}]\}. \tag{5-24}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, d - ширина комнаты, и ρ - ширина коридора. Тогда

$$S_t = (\bigcup_{l=1}^{N} R_t^l) \bigcup (\bigcup_{l=1}^{N-1} C_t^l). \tag{5-25}$$

Для любой области $\Sigma \subset S_t$ мы определяем распределение $\mathcal{E}_{t,\Sigma}$ с носителем в Σ следующим образом:

$$\langle \mathcal{E}_{t,\Sigma}, \theta\rangle := \frac{(-1)^k}{4\pi^{k+1}t^{2k+1}} \int\limits_{\Sigma} \mathcal{D}_k(z, \nabla)\theta(z)dS(z), \quad \theta \in D,$$

где через $dS(z)$ обозначается мера Лебега на сфере S_t. Заметим, что $\forall t > 0$ $\dot{\mathcal{E}}_t(x) = \dfrac{1}{t}\mathcal{E}_t(x) - \nabla(\dfrac{x}{t}\mathcal{E}_t(x))$. Поэтому, для любой области $\Sigma \subset S_t$

определим распределение $\dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}$:

$$\dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}(x) := \frac{1}{t}\mathcal{E}_{t,\Sigma}(x) - \nabla(\frac{x}{t}\mathcal{E}_{t,\Sigma}(x)). \tag{5-26}$$

Тогда в случае $\Sigma = S_t$ получаем $\dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma} = \dot{\mathcal{E}}_t$. Обозначим

$$\mathcal{G}_{t,\Sigma} := \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma} & \mathcal{E}_{t,\Sigma} \\ \triangle\mathcal{E}_{t,\Sigma} & \dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma} \end{pmatrix}. \tag{5-27}$$

Определим случайную величину

$$I_t(\Sigma) = \langle \mathcal{G}_{t,\Sigma} * Y_0, \Psi \rangle, \tag{5-28}$$

где Ψ - некоторая функция класса $\mathcal{D} \equiv [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^2$. Введем величины

$$r_t^l = I_t(R_t^l), \quad c_t^l = I_t(C_t^l). \tag{5-29}$$

Из равенства (5-25) следует, что

$$\langle U_0(t)Y_0, \Psi \rangle = \langle \mathcal{G}_t * Y_0, \Psi \rangle = \sum_{l=1}^{N_t} r_t^l + \sum_{l=1}^{N_t-1} c_t^l. \tag{5-30}$$

Лемма 5.8. *Пусть выполнены условия* **S0**, **S3** *и (2-5). Тогда справедливы следующие оценки для* $t > 1$ *и* $l \geq 1$

$$E|r_t^l|^2 \leq C(\Psi)\, d_t/t, \tag{5-31}$$
$$E|c_t^l|^2 \leq C(\Psi)\ \rho_t/t. \tag{5-32}$$

Доказательство. Мы докажем следующую оценку: для любой области $\Sigma \subset S_t$

$$E|I_t(\Sigma)|^2 \leq C(\Psi)|\Sigma|/t^{n-1}. \tag{5-33}$$

Тогда оценки (5-31) и (5-32) должны вытекать из этой оценки с $\Sigma = R_t^l$ и $\Sigma = R_t^k$, соответственно, так как $|R_t^l| = C(n)t^{n-2}d_t$ и $|C_t^l| = C(n)t^{n-2}\rho_t$.

Теперь докажем оценку (5-33). Из (5-27) и (5-28) следует, что для $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1) \in \mathcal{D}$

$$I_t(\Sigma) = \langle \dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma} * u_0, \Psi^0 \rangle + \langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * v_0, \Psi^0 \rangle - \langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * \nabla u_0, \nabla\Psi^1 \rangle + \langle \dot{\mathcal{E}}_{t,\Sigma} * v_0, \Psi^1 \rangle. \tag{5-34}$$

Подставляя равенство (5-26) в первый и последний члены правой части (5-34), получаем

$$
\begin{aligned}
I_t(\Sigma) \;=\; & \langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * u_0/t, \Psi^0\rangle - \langle (\frac{x}{t}\mathcal{E}_{t,\Sigma}) * \nabla u_0, \Psi^0\rangle - \langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * \nabla u_0, \nabla\Psi^1\rangle \\
& + \langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * v_0, \Psi^0\rangle + \frac{1}{t}\langle \mathcal{E}_{t,\Sigma} * v_0, \Psi^1\rangle + \langle (\frac{x}{t}\mathcal{E}_{t,\Sigma}) * v_0, \nabla\Psi^1\rangle.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
I_t(\Sigma) = \sum_{j=1}^{M} I_t^j, \quad \text{где} \quad I_t^j = c_j(t)\langle \bar{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}^j * w_j, \theta_j\rangle. \tag{5-35}
$$

Здесь $M \le 6$, $c_j(t)$ - ограниченная функция при $t \ge \delta > 0$, w_j - одна из следующих функций $t^{-1}u_0$, ∇u_0 или v_0, $\bar{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}^j$ - одно из следующих выражений $\mathcal{E}_{t,\Sigma}(z)$ или $\dfrac{z}{t}\mathcal{E}_{t,\Sigma}(z)$, θ_j - одна из функций $D^\alpha\Psi^l$ с $|\alpha| \le 1$. Поэтому, для $t > 1$ получаем

$$
\begin{aligned}
E|I_t(\Sigma)|^2 \le\; & C\sum_{j=1}^{M}\langle E[(\bar{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}^j * w_j)(x)\,(\bar{\mathcal{E}}_{t,\Sigma}^j * w_j)(y)], \theta_j(x)\theta_j(y)\rangle \\
\le\; & C_1\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{t^{2n-4}}|\langle \int_\Sigma\int_\Sigma D_k(z,\nabla_z)D_k(p,\nabla_p) \\
& [\,\frac{1}{t^2}Q_0^{00}(x-z-y+p) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_{z,p}^{\alpha,\beta}Q_0^{00}(x-z-y+p) \\
& + Q_0^{11}(x-z-y+p)]\,dS(z)dS(p), \theta_j(x)\theta_j(y)\rangle|.
\end{aligned} \tag{5-36}
$$

Заметим, что

$$
\operatorname{supp}\Psi \subset B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n:\ |x| \le r_0\} \tag{5-37}
$$

с $r_0 > 0$. Так как $x, y \in \operatorname{supp}\theta_j \subset \operatorname{supp}\Psi \subset B_{r_0}$, то

$$
|x - z - y + p| \ge (|z-p| - 2r_0)_+,
$$

где $s_+ = \max(s, 0)$, $s \in \mathbb{R}$. Поскольку $\nu_d(r)$ - невозрастающие функции, то в силу (5-36) и условия **S2** мы получаем (ср. с (5-5))

$$
\begin{aligned}
E|I_t(\Sigma)|^2 \;\le\; & C(\Psi)\frac{1}{t^{2n-4}}\sum_{\kappa=0}^{n-3} t^\kappa \int_\Sigma dS(z)\int_\Sigma (\frac{1}{t^2}\nu_\kappa((|z-p|-2r_0)_+) \\
& + \nu_{\kappa+2}((|z-p|-2r_0)_+))\,dS(p).
\end{aligned} \tag{5-38}
$$

Тогда из леммы 5.2 и условия (2-5) следует, что

$$E|I_t(\Sigma)|^2 \;\le\; C\frac{|\Sigma|}{t^{n-1}}\int\limits_0^{2t}\Big[\sum_{\kappa=0}^{n-3}\frac{r^{n-1-\kappa}}{t^{n-1-\kappa}}\,r^{\kappa-1}\nu_\kappa((r-2r_0)_+)$$
$$+\frac{r^{n-3-\kappa}}{t^{n-3-\kappa}}\,r^{\kappa+1}\nu_{\kappa+2}((r-2r_0)_+)\Big]\,dr \le C_1\frac{|\Sigma|}{t^{n-1}}\,.\ \Box$$

Замечание 5.9. Заметим, что для $\theta\in D$ с носителем в шаре B_{r_0}

$$\langle\mathcal{E}_{t,\Sigma}*u_0,\theta\rangle = \frac{(-1)^k}{4\pi^{k+1}t^{2k+1}}\int\limits_{\Sigma}\int\limits_{B_{r_0}} u_0(x-z)D_k(z,\nabla_x)\theta(x)\,dS(z)dx,$$

где функция $D_k(z,\nabla_x)\theta(x)$ имеет вид

$$D_k(z,\nabla_x)\theta(x) = \sum_{\kappa=0}^{k} C_\kappa t^\kappa\Big(\frac{z}{|z|},\nabla_x\Big)^\kappa\theta(x),\quad k=\frac{n-3}{2},$$

если $z\in S_t$. Следовательно, $I_t(\Sigma)$ имеет представление (ср. с (5-35)):

$$I_t(\Sigma) = \sum_{j=1}^{M} I_t^j,\quad \text{где}\quad I_t^j = c_j(t)\langle\bar\delta_{t,\Sigma}*w_j,\theta_j\rangle. \tag{5-39}$$

Здесь M - некоторое фиксированное число, $c_j(t)$ - ограниченная функция при $t\ge\delta>0$, w_j - одна из следующих функций $t^{-1}u_0$, ∇u_0 или v_0, θ_j - какая-либо из функций Ψ^0, Ψ^1 или их производных до порядка $k+1$, $\bar\delta^j_{t,\Sigma}(x)$ - одна из функций $\dfrac{1}{t^{k+1}}\dfrac{x_{i1}\cdot\ldots\cdot x_{is}}{|x|^s}\delta_{t,\Sigma}(x)$, $0\le s\le k$, и $\delta_{t,\Sigma}$ определяется следующим образом:

$$\langle\delta_{t,\Sigma},\theta\rangle = \int\limits_\Sigma \theta(z)\,dS(z),\quad \theta\in D,$$

Заметим, что $\delta_{t,\Sigma}(x) = 2t\delta(|x|^2-t^2)$, если $\Sigma=S_t$.

5.4. Сходимость характеристических функционалов

В этом разделе мы завершаем доказательство предложения 3.3. Если $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)=0$, то предложение 3.3 выполнено в силу (5-11). Таким образом, мы можем допустить, что

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\ne 0. \tag{5-40}$$

Выберем $0<\delta<1$, и

$$N_t\sim(\ln(t+1))^{1/10},\ \ \rho_t\sim t^{1-\delta},\ \ t\to\infty. \tag{5-41}$$

Тогда в силу (2-5) справедливы следующие оценки:

$$N_t(\nu_0^2(\rho_t)+(\frac{\rho_t}{t})^{1/2})+N_t^2(\nu_0(\rho_t)+\frac{\rho_t}{t})\to 0,\quad t\to\infty. \tag{5-42}$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} |\hat\mu_t(\Psi)-\hat\mu_\infty(\Psi)| \;&\le\; |E\exp\{i\langle U_0(t)Y_0,\Psi\rangle\}-E\exp\{i\textstyle\sum_t r_t^l\}|+\\ &+|\exp\{-\frac12\textstyle\sum_t E(r_t^l)^2\}-\exp\{-\frac12\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\}|+\\ &+|E\exp\{i\textstyle\sum_t r_t^l\}-\exp\{-\frac12\textstyle\sum_t E(r_t^l)^2\}|\\ &\equiv\; I_1+I_2+I_3, \end{aligned} \tag{5-43}$$

где обозначение $\sum_t$ заменяет $\sum\limits_{l=1}^{N_t}$. Покажем, что все слагаемые I_1, I_2, I_3 стремятся к нулю при $t\to\infty$.

(i) В силу уравнения (5-30) мы имеем

$$I_1=|E\exp\{i\textstyle\sum_t r_t^l\}(\exp\{i\sum_t c_t^l\}-1)|\le\sum_t E|c_t^l|\le\sum_t(E|c_t^l|^2)^{1/2}. \tag{5-44}$$

Из оценок (5-44), (5-32) и (5-42) получаем, что

$$I_1\le CN_t(\rho_t/t)^{1/2}\to 0,\quad t\to\infty. \tag{5-45}$$

(ii) Из неравенства треугольника,

$$\begin{aligned} I_2 \;&\le\; \frac12\,|\textstyle\sum_t E(r_t^l)^2-\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)|\le\frac12\,|\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)-\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)|\\ &+\frac12\,|E(\textstyle\sum_t r_t^l)^2-\sum_t E(r_t^l)^2|+\frac12\,|E(\sum_t r_t^l)^2-\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)|\\ &\equiv\; I_{21}+I_{22}+I_{23}, \end{aligned} \tag{5-46}$$

где Q_t - квадратичная форма с интегральным ядром $(Q_t^{ij}(x,y))$. Из уравнения (5-11) следует, что $I_{21}\to 0$, $t\to\infty$. Также, как для I_{22}, мы сначала получаем, что

$$I_{22}\equiv\frac12\,|E(\textstyle\sum_t r_t^l)^2-\sum_t E(r_t^l)^2|\le\sum\limits_{l<p}|Er_t^l r_t^p|. \tag{5-47}$$

Следующая лемма - следствие леммы 17.2.3 из [9].

Лемма 5.10. *Пусть ξ - случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры $\sigma_{d_1}(\mathcal{A})$, η - случайная величина, измеримая*

относительно σ*-алгебры* $\sigma_{d_2}(\mathcal{B})$, *и* $\mathrm{dist}\,(\mathcal{A},\mathcal{B})\geq h>0$.
i) Пусть $(E|\xi|^2)^{1/2}\leq a$, $(E|\eta|^2)^{1/2}\leq b$. *Тогда*

$$|E\xi\eta-E\xi E\eta|\leq C\,ab\;\phi^{1/2}_{d_1,d_2}(h).$$

ii) Пусть $|\xi|\leq a$, $|\eta|\leq b$ *почти всюду. Тогда*

$$|E\xi\eta-E\xi E\eta|\leq C\,ab\;\phi_{d_1,d_2}(h).$$

Мы применяем (5-42), чтобы вывести, что $I_{22}\to 0$ при $t\to\infty$. Заметим, что величины $r_t^l=\langle\mathcal{G}_{t,R_t^l}*Y_0,\Psi\rangle=\langle Y_0,\breve{\mathcal{G}}^T_{t,R_t^l}*\Psi\rangle$ (здесь $\breve{\mathcal{G}}_{t,R_t^l}(x):=\mathcal{G}_{t,R_t^l}(-x)$) - измеримы относительно σ-алгебры $\sigma_{d_l}(\mathcal{A}^l)$, где

$$\mathcal{A}^l=\{x-y:\ y\in R_t^l,\ x\in\mathrm{supp}\,\Psi\subset B_{r_0}\}.$$

Расстояние между различными комнатами R_t^l больше или равно ρ_t согласно (5-23) и (5-24). Тогда $\rho(\mathcal{A}^p,\mathcal{A}^l)\geq\rho(R_t^p,R_t^l)-2r_0\geq\rho_t-2r_0$. Следовательно, из оценки (5-47), условий **S0**, **S3** и леммы 5.10, i) следует, что

$$I_{22}\leq CN_t^2\nu_0((\rho_t-2r_0)_+)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{5-48}$$

в силу (5-31) и (5-42). Наконец, остается проверить, что $I_{23}\to 0$, $t\to\infty$. В силу неравенство Коши-Шварца, имеем

$$\begin{aligned}I_{23}\;&\leq\;|E(\textstyle\sum_t r_t^l)^2-E(\sum_t r_t^l+\sum_t c_t^l)^2|\\&\leq\;N_t\textstyle\sum_t E|c_t^l|^2+2(E(\sum_t r_t^l)^2)^{1/2}(N_t\sum_t E|c_t^l|^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{5-49}$$

Из оценок (5-31), (5-47) и (5-48) следует, что

$$E(\textstyle\sum_t r_t^l)^2\leq C_1+C_2N_t^2\nu_0((\rho_t-2r_0)_+)\leq C_3<\infty.$$

Тогда из (5-32), (5-49) и (5-42) вытекает, что

$$I_{23}\leq C_1N_t^2\rho_t/t+C_2N_t(\rho_t/t)^{1/2}\to 0,\quad t\to\infty.$$

Поэтому суммы I_{21}, I_{22}, I_{23} стремятся к нулю при $t\to\infty$. Тогда из (5-46) следует, что

$$I_2\leq\frac{1}{2}\,|\textstyle\sum_t E(r_t^l)^2-\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)|\to 0,\quad t\to\infty. \tag{5-50}$$

(iii) Остается проверить, что

$$I_3\equiv|E\exp\{i\textstyle\sum_t r_t^l\}-\exp\{-\dfrac{1}{2}\sum_t E(r_t^l)^2\}|\to 0,\quad t\to\infty. \tag{5-51}$$

Применяя лемму 5.10, ii) рекурсивно, получаем, что

$$|E\exp\{i\textstyle\sum_t r_t^l\} - \displaystyle\prod_{l=1}^{N_t} E\exp\{ir_t^l\}| \le N_t\nu_0^2((\rho_t - 2r_0)_+) \to 0, \quad t\to\infty, \tag{5-52}$$

в силу (5-42). Остается проверить, что

$$|\prod_{l=1}^{N_t} E\exp\{ir_t^l\} - \exp\{-\frac{1}{2}\textstyle\sum_t E(r_t^l)^2\}| \to 0, \ \ t\to\infty. \tag{5-53}$$

Согласно стандартному утверждению центральной предельной теоремы (см., например, [10, теорема 4.7]) достаточно проверить условие Линдеберга: $\forall\varepsilon>0$

$$\frac{1}{\sigma_t}\textstyle\sum_t E_{\varepsilon\sqrt{\sigma_t}}|r_t^l|^2 \to 0, \ \ t\to\infty. \tag{5-54}$$

Здесь $\sigma_t \equiv \sum_t E(r_l^t)^2$, и $E_\delta f \equiv E(X_\delta f)$, где X_δ - индикатор события $|f|>\delta^2$. Заметим, что из сходимости (5-50) и условия (5-40) вытекает, что

$$\sigma_t \to \mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\ne 0, \ \ t\to\infty.$$

Следовательно, остается проверить, что $\forall\varepsilon>0$

$$\textstyle\sum_t E_\varepsilon|r_t^l|^2 \to 0, \ \ t\to\infty. \tag{5-55}$$

Мы проверяем (5-55) в следующих разделах. Окончательно, из (5-43) и (5-45), (5-50)–(5-53) вытекает предложение 3.3. □

5.5. Условие Линдеберга

Доказательство сходимости (5-55) может быть сведено к случаю, когда для некоторого $b\ge 0$ мы имеем, почти всюду, что

$$|Y_0(x)|\le b, \qquad x\in\mathbb{R}^n. \tag{5-56}$$

Общий случай может быть доказан стандартными срезающими рассуждениями.

Далее, мы оцениваем выражение из (5-55):

$$\textstyle\sum_t E_\varepsilon|r_t^l|^2 = \sum_t |R_t^l|\displaystyle\frac{1}{|R_t^l|}E_\varepsilon|r_t^l|^2 \le \omega_{n-1}t^{n-1}\max_{l=1,..,N_t}\frac{1}{|R_t^l|}E_\varepsilon|r_t^l|^2.$$

Поэтому остается доказать, что

$$\max_{l=1,..,N_t}\frac{1}{|R_t^l|}E_\varepsilon|r_t^l|^2 = o(t^{-n+1}), \ \ t\to\infty. \tag{5-57}$$

В силу неравенства Чебышева получаем

$$E_\varepsilon|r_t^l|^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2}E|r_t^l|^4.$$

Используя представление (5-39), мы получаем

$$E|r_t^l|^4 = E|I_t^1 + ... + I_t^M|^4 \le C(M)E(|I_t^1|^4 + ... + |I_t^M|^4). \tag{5-58}$$

Поэтому (5-57) вытекает из следующей оценки:

$$\max_l \frac{1}{|R_t^l|}E|\langle\bar{\delta}_{t,R_t^l} * w_l, \theta_l\rangle|^4 = o(t^{-n+1}), \quad t \to \infty. \tag{5-59}$$

Предложение 5.11. *Пусть выполнены условия (2-5') и (5-56), и* $w = t^{-1}u_0, \nabla u_0$ *или* v_0. *Тогда для любой области* $\Sigma \subset S_t$ *справедлива следующая оценка*

$$E|\langle\bar{\delta}_{t,\Sigma} * w, \theta\rangle|^4 \le C(\theta)\frac{b^4}{t^{2(n-1)}}|\Sigma|^2. \tag{5-60}$$

Здесь $\bar{\delta}_{t,\Sigma}(x)$ *- одно из выражений* $\dfrac{1}{t^{k+1}}\dfrac{x_{i1}\cdot \ldots \cdot x_{is}}{|x|^s}\delta_{t,\Sigma}$, $0 \le s \le k = (n-3)/2$, θ_j *- одна из функций* $D^\alpha\Psi^l$ *с* $|\alpha| \le k+1$.

Предложение 5.11 будет доказано ниже. Из этого предложения следует оценка (5-59). Действительно,

$$\frac{1}{|R_t^l|}E|\langle\bar{\delta}_{t,R_t^l} * w_l, \theta_l\rangle|^4 \le \frac{1}{|R_t^l|}C(\Psi)\frac{b^4}{t^{2n-2}}|R_t^l|^2 \le C(b,\Psi)\frac{|R_t^l|}{t^{2n-2}} = o(t^{-n+1}),$$

так как $|R_t^l| \le \omega_{n-1}t^{n-1}/N_t$, где $N_t \to \infty$. (5-55) доказано. $\square$

5.6. Моментные функции четвертого порядка

Мы выводим предложение 5.11 из оценок для моментных функций четвертого порядка.

Обозначим через $m_0^{(l)}(\bar{z}) := E[w(z_1)\cdot ... \cdot w(z_l)]$, $\bar{z} = (z_1, ..., z_l)$, где $w(z_k) = v_0(z_k)$ для каждого $k = 1, ..., l$, или $w(z_k) = \nabla u_0(z_k)$ для каждого $k = 1, ..., l$, или $w(z_k) = t^{-1}u_0(z_k)$ для каждого $k = 1, ..., l$. Мы имеем $\operatorname{supp}\theta \subset B_{r_0}$ для $r_0 > 0$. Тогда левая часть (5-60) оценивается следующим образом (см. (5-39)):

$$E|\langle\bar{\delta}_{t,\Sigma} * w, \theta\rangle|^4 \le \frac{C(\theta)}{t^{2n-2}}\int\limits_{B_{r_0}^4}\int\limits_{\Sigma^4}|m_0^{(4)}(\bar{x}-\bar{z})|dS(\bar{z})\,d\bar{x}, \tag{5-61}$$

где $dS(\bar{z}) := dS(z_1)\dots dS(z_4)$. Поэтому, мы должны доказать, что

$$I(\overline{x}) \equiv \int\limits_{\Sigma^4} |m_0^{(4)}(\overline{x}-\overline{z})| dS(\overline{z}) \le Cb^4|\Sigma|^2, \;\; \overline{x} \in B_{r_0}. \tag{5-62}$$

(i) Докажем оценку для моментных функций $m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)$, используя условие перемешивания для различных конфигураций точек y_1,y_2,y_3,y_4 в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лемма 5.12. *Следующие оценки имеют место*

$$\begin{aligned}|m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)| \le\ & 4b^4(\nu_2^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)+\nu_0^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)t^{-4})\\ & +16b^4\sum_{i,j=0,2}(\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2(|y_1-y_3|)\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2(|y_2-y_4|)\\ & +\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2(|y_1-y_4|)\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2(|y_2-y_3|)).\end{aligned} \tag{5-63}$$

Доказательство. Разделим пространство $\mathbb{R}^n$ на три области I_1,I_2,I_3 двумя гиперплоскостями, которые является ортогональными к отрезку $[y_1,y_2]$ и делят его на три равных отрезка, $y_1\in I_1$, $y_2\in I_3$. По крайней мере, одна из областей I_1,I_2,I_3 не содержит y_3,y_4. Если точки $y_3,y_4\notin I_1$, то из **S0** и **S3** следует (5-63), так как

$$\begin{aligned}|m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)| &= |m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)-m_0^{(1)}(y_1)m_0^{(3)}(y_2,y_3,y_4)|\\ &\le 4b^4(\nu_2^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)+\nu_0^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)t^{-4}).\end{aligned}$$

То же самое доказательство верно для случая, когда $y_3,y_4\notin I_3$. Теперь допустим, что $y_3,y_4\notin I_2$, например, $y_3\in I_1$, $y_4\in I_3$. Тогда из условий **S0** и **S3** вытекает (5-63), так как в силу леммы 5.10, ii) имеем

$$\begin{aligned}|m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)| \le\ & |m_0^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)-m_0^{(2)}(y_1,y_3)m_0^{(2)}(y_2,y_4)|\\ & +|m_0^{(2)}(y_1,y_3)m_0^{(2)}(y_2,y_4)|\\ \le\ & 4b^4(\nu_2^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)+\nu_0^2(\frac{1}{3}|y_1-y_2|)t^{-4})\\ & +16b^4\sum_{i,j=0,2}\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2(|y_1-y_3|)\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2(|y_2-y_4|).\end{aligned}$$

То же самое доказательство справедливо для случая $y_3\in I_3,\;\; y_4\in I_1$. □

(ii) Оценка (5-63) справедлива с любыми перестановками y_1, y_2, y_3, y_4 в правой части. Следовательно,

$$\begin{aligned} |m_0^{(4)}(\bar y)| &\le 4b^4(\nu_2^2(\frac{1}{3}|y_s-y_p|)+\nu_0^2(\frac{1}{3}|y_s-y_p|)t^{-4}) \\ &\quad +16b^4\sum_{i,j=0,2}(\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2(|y_s-y_k|)\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2(|y_p-y_l|) \\ &\quad +\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2(|y_s-y_l|)\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2(|y_p-y_k|)) \\ &\equiv M_{s,p}^1(\bar y)+M_{s,p}^2(\bar y), \end{aligned} \tag{5-64}$$

для любой перестановки $\{s,p,k,l\}$ из $\{1,2,3,4\}$. Определим

$$\Sigma_{s,p} := \{\bar z\in\Sigma^4 \mid |z_s-z_p| = \max_{i,j}|z_i-z_j|\}.$$

Тогда $(\Sigma)^4 = \bigcup\limits_{(s,p)}\Sigma_{s,p}$, где объединение берется по всем парам (s,p) индексов $1,2,3,4$. Поэтому, из (5-64) вытекает, что

$$\begin{aligned} I(\bar x) &\equiv \int\limits_{\Sigma^4}|m_0^{(4)}(\bar x-\bar z)|dS(\bar z) \\ &\le \sum_{(s,p)}\{\int\limits_{\Sigma_{s,p}}M_{s,p}^1(\bar x-\bar z)dS(\bar z)+\int\limits_{\Sigma_{s,p}}M_{s,p}^2(\bar x-\bar z)dS(\bar z)\}. \end{aligned} \tag{5-65}$$

Здесь сумма берется по всем парам (s,p). Все шесть членов в сумме $\sum\limits_{(s,p)}$, соответствующие различным парам (s,p) в правой части (5-65), совпадают. Мы должны оценить $I(\bar x)$ только для $\bar x\in B_{r_0}^4$ (см. (5-62)). Тогда $|z_s-z_p-x_s+x_p|\ge(|z_s-z_p|-2r_0)_+$ для любой $z_s,z_p\in\mathbb{R}^n$. Так как ν_d - невозрастающая функция, то из (5-64) и (5-65) вытекает, что

$$\begin{aligned} I(\bar x) \le Cb^4 &\int\limits_{\Sigma_{1,2}}(\nu_2^2(\frac{1}{3}(|z_1-z_2|-2r_0)_+)+\frac{\nu_0^2}{t^4}(\frac{1}{3}(|z_1-z_2|-2r_0)_+))dS(\bar z) \\ +Cb^4 &\sum_{i,j=0,2}\int\limits_{\Sigma_{1,2}}(\frac{1}{t^i}\nu_{2-i}^2((|z_1-z_3|-2r_0)_+) \\ &\cdot\frac{1}{t^j}\nu_{2-j}^2((|z_2-z_4|-2r_0)_+))dS(\bar z). \end{aligned}$$

Применяя лемму 5.2 и условие (2-5’), получаем оценку (5-62). $\square$

6. Волновое уравнение с переменными коэффициентами

6.1. Теория рассеяния для решений с бесконечной энергией

Мы расширяем все результаты предыдущих разделов на случай волновых уравнений с переменными коэффициентами. Теорема 2.7 следует из теоремы 3.1, используя метод [1]. Метод основан на теории рассеяния для решений бесконечной энергии.

Пусть $U(t)$, $U_0(t)$ динамические группы задач Коши (1-1) и (3-1), соответственно.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* **E1-E3**, $n \geq 3$ *и нечетно. Тогда существуют* $\delta, \gamma > 0$ *и линейные непрерывные операторы* $\Theta, \rho(t) : \mathcal{H}_\delta \to \mathcal{H}$ *такие, что для* $Y_0 \in \mathcal{H}_\delta$ *имеет место следующее разложение*

$$U(t)Y_0 = \Theta U_0(t)Y_0 + \rho(t)Y_0, \ \ t \geq 0,$$

и для любого $R > 0$ *существует константа* $C = C(R, \delta, \gamma)$ *такая, что для* $Y_0 \in \mathcal{H}_\delta$

$$\|\rho(t)Y_0\|_R \leq C\ e^{-\gamma t} \| Y_0 \|_\delta, \ \ t \geq 0.$$

Теорема 6.1 вытекает из следующего предложения 6.2 с помощью двойственных рассуждений. В свою очередь, доказательство предложения 6.2 основано на стандартном методе Кука и результатах Вайнберга, [5]. (Доказательства теоремы 6.1 и предложения 6.2 см. в [1, §8].)

Предложение 6.2. *(см. [1]). Пусть выполнены условия* **E1 - E3**, $n \geq 3$ *и нечетно. Тогда существуют константы* $\delta, \gamma > 0$ *и линейные непрерывные операторы* $W, r(t) : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'_\delta$ *такие, что для* $\Psi \in \mathcal{H}'$

$$U'(t)\Psi = U'_0(t)W\Psi + r(t)\Psi, \ t \geq 0,$$

и для любого $R > 0$ *существует константа* $C_R = C(R, \delta, \gamma)$, *такая что*

$$\| r(t)\Psi \|'_\delta \leq C_R e^{-\gamma t} \| \Psi \|'_{(R)}, \quad t \geq 0.$$

6.2. Сходимость к равновесию для переменных коэффициентов

Выведем теорему 2.7 из следующих предложений 6.3 и 6.4 (ср. с предложениями 3.2 и 3.3).

Предложение 6.3. *Семейство мер* $\{\mu_t,\ t\in\mathbb{R}\}$, *- слабо компактно на* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$, $\forall\varepsilon>0$.

Предложение 6.4. *Для любого* $\Psi\in\mathcal{D}$,

$$\hat\mu_t(\Psi)\equiv\int\exp(i\langle Y,\Psi\rangle)\mu_t(dY)\to\exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\},\quad t\to\infty. \qquad (6\text{-}1)$$

Доказательство предложения 6.3. Аналогично предложению 3.2, предложение 6.3 вытекает из оценок

$$\sup_{t\ge0}E\|U(t)Y_0\|_R^2<\infty,\quad R>0. \qquad (6\text{-}2)$$

Из теоремы 6.1 следует, что

$$\begin{aligned}E\|U(t)Y_0\|_R^2 &\le 2E\|\Theta U_0(t)Y_0\|_R^2+2E\|r(t)Y_0\|_R^2\\ &\le C_1(R)E|\!|\!|U_0(t)Y_0|\!|\!|_\delta^2+C_2(R)e^{-2\gamma|t|}E|\!|\!|Y_0|\!|\!|_\delta^2\,.\end{aligned}$$

Тогда (6-2) вытекает из (5-8). □

Доказательство предложения 6.4. Пусть $\Psi\in\mathcal{D}$. Тогда из теоремы 6.1 следует, что

$$\begin{aligned}\hat\mu_t(\Psi) &\equiv E\exp\{i\langle U(t)Y_0,\Psi\rangle\}=E\exp\{i\langle\Theta U_0(t)Y_0+r(t)Y_0,\Psi\rangle\}\\ &=E\exp\{i\langle\Theta U_0(t)Y_0,\Psi\rangle\}+\nu(t),\end{aligned} \qquad (6\text{-}3)$$

где

$$\nu(t)=E\left[\exp\{i\langle\Theta U_0(t)Y_0,\Psi\rangle\}(\exp\{i\langle r(t)Y_0,\Psi\rangle\}-1)\right].$$

Заметим, что $\nu(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Действительно, из теоремы 6.1 следует, что

$$|\nu(t)|\le E\ |\langle r(t)Y_0,\Psi\rangle|\le C(R)\|\Psi\|'_{(R)}E\|r(t)Y_0\|_R\to0,\quad t\to\infty. \qquad (6\text{-}4)$$

Окончательно, из предложения 3.3 и следствия 5.3 вытекает, что

$$\begin{aligned}E\exp\{i\langle\Theta U_0(t)Y_0,\Psi\rangle\} &= E\exp\{i\langle U_0(t)Y_0,W\Psi\rangle\}\\ &\to\exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi,W\Psi)\},\end{aligned} \qquad (6\text{-}5)$$

при $t\to\infty$. Из формул (6-3)–(6-5) вытекает сходимость (6-1). □

Литература

[1] Dudnikova T.V., Komech A.I., Ratanov N.E., Suhov Yu.M.: On convergence to equilibrium distribution, II. The wave equation in odd dimensions, with mixing, *J. Stat. Phys.* **108** (2002), no.4, 1219-1253. ArXiv: math-ph/0508039.

[2] Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.: On a two-temperature problem for wave equation, *Markov Processes and Related Fields* **8** (2002), 43-80. ArXiv: math-ph/0508044.

[3] Dudnikova T., Komech A., Mauser N.: On two-temperature problem for harmonic crystals, *J. Stat. Phys.* **114** (2004), no.3/4, 1035-1083. ArXiv: math-ph/0211017.

[4] Дудникова Т.В., Комеч А.И.: О двух-температурной задаче для уравнения Клейна-Гордона, принята в *Теория вероятностей и ее применения*, 2005.

[5] Вайнберг Б.Р.: Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1982, 296 с.

[6] Вишик М.И., Фурсиков А.В.: Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980, 442 с.

[7] Михайлов В.П.: Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.

[8] Hörmander L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. Springer-Verlag, 1985.

[9] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.: Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

[10] Petrov V.V.: Limit Theorems of Probability Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995.