

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

С.К. Годунов, В.Т. Жуков, О.Б. Феодоритова

АЛГОРИТМ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ

Москва, 2005

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и NWO, Нидерланды (грант 047.016.003), программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 17.4), программ № 3.1 и № 4 Отделения математических наук РАН

УДК.519.6

С.К. Годунов\*, В.Т. Жуков<sup>+</sup>, О.Б. Феодоритова<sup>+</sup>. Алгоритм спектрального анализа для симметрических гиперболических уравнений

\* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>+</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

E-mail: godunov@math.nsc.ru, feodor@kiam.ru, zhukov@kiam.ru

Построен алгоритм расчета собственных подпространств для симметрических гиперболических систем, возникающих при решении задач электромагнетизма, акустики, упругости. Для аппроксимирующих операторов вычисляются главные инвариантные подпространства, отвечающие наименьшим собственным значениям и гладким собственным функциям. Преодолены трудности, связанные с наличием бесконечномерного ядра дифференциального оператора. Эффективность алгоритма показана на примере уравнений акустики.

Ключевые слова: проблема собственных значений, гиперболические уравнения

Стр. 32 , табл. 4, рис. 4, библиограф. 11 назв.

O.B. Feodoritova<sup>+</sup>, S.K. Godunov\*, V.T. Zhukov<sup>+</sup>. An algorithm of spectrum analysis for symmetric hyperbolic equations

\* Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

<sup>+</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences

E-mail: godunov@math.nsc.ru, feodor@kiam.ru, zhukov@kiam.ru

An algorithm for computing eigenspaces of symmetric hyperbolic systems is presented. Such systems emerge in process of solution of many problems (electromagnetism, acoustics, elasticity). For discrete operators the principal invariant subspaces linked with the smallest non-zero eigenvalues are computed. They contain an approximation of sufficiently smooth eigenfunctions of the original differential operator. The difficulties connected with infinite-dimensional null space of the differential operator are overcome. The efficiency of the algorithm is demonstrated on the acoustic equations.

Key words: eigenvalue problem, hyperbolic equations

## 1 Введение

Спектральные задачи для дифференциальных уравнений имеют большое число разнообразных практических приложений и представляют интерес для анализа и конструирования дискретных схем (см., например, [1] – [3]). В представленной статье рассмотрена проблема расчета наименьших собственных значений и соответствующих собственных функций кососимметрических дифференциальных операторов, связанных с симметрическими гиперболическими системами уравнений  $\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}$ , возникающими при решении широкого круга задач (электромагнетизм, акустика, упругость и других).

Целью является вычисление для оператора  $D$  сеточных аппроксимаций его главных инвариантных подпространств, т.е. таких подпространств, которые отвечают некоторому набору наименьших ненулевых собственных значений. Упомянутые инвариантные подпространства оператора  $D$  содержат гладкие низкочастотные функции, которые в отличие от негладких высокочастотных функций могут быть получены из решения разностных спектральных задач.

Одна из трудностей состоит в наличии бесконечномерного ядра оператора  $D$ , т.е. инвариантного подпространства, отвечающего нулевому бесконечно-кратному собственному значению. Существование такого подпространства является следствием выполнения на решениях гиперболических систем дополнительных уравнений, имеющих смысл соотношений на "вертикальных" характеристиках, отвечающих нулевому корню характеристического уравнения.

Мы рассматриваем корректные постановки задач для симметрических систем уравнений, предполагая, что для таких задач нулевая точка спектра

оператора  $D$  является изолированной, т.е. все остальные точки спектра лежат вне некоторой окрестности начала координат (отделены от нуля).

В работе построен алгоритм нахождения главных инвариантных подпространств кососимметрических операторов и приведены результаты расчетов для модельной задачи. Результаты демонстрируют точность алгоритма и его потенциальные возможности. Нам представляется, что предложенный алгоритм будет эффективен при его реализации на многопроцессорных компьютерах.

## 2 Постановка задачи

Система гиперболических уравнений в  $d$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^d$  в общем виде может быть записана как

$$A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{k=1}^d B_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , вектор-функция, вообще говоря, комплекснозначная, а коэффициенты  $A$ ,  $B_k$  являются  $m \times m$ -матрицами, причем

$$A = A(x_1, \dots, x_d) = A^* > 0, \quad B_k = B_k^* = \text{const}.$$

Для системы (1) рассматривается спектральная задача на отыскание некоторой группы наименьших (но ненулевых) собственных значений  $\lambda$  и отвечающих им собственных функций:

$$\begin{cases} D\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} & \text{в области } \Omega \subset \mathbb{R}^d; \quad 0 < |\lambda| \leq r_1, \\ \Phi \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где оператор  $D$  имеет вид

$$D = - \sum_{k=1}^d A^{-1} B_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (3)$$

а граничные условия  $\Phi \mathbf{u}$  предполагаются консервативными, т.е., такими, что имеет место

$$\int_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=1}^d \xi_i B_i \mathbf{u}, \mathbf{u} \right) dS = 0; \quad (4)$$

здесь  $(\xi_1, \dots, \xi_d)$  — вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . Верхняя граница  $r_1$  искомой части спектра (которую будем называть главной частью) может быть известна достаточно грубо и уточняться в процессе решения задачи.

На решениях системы (1) с граничными условиями (4) выполняется следующее интегральное тождество, называемое законом сохранения энергии:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i \mathbf{u}, \mathbf{u}) \right] d\Omega = 0.$$

Отсюда следует, что оператор  $D$  является кососимметрическим  $D^* = -D$  в энергетическом скалярном произведении

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_A = \int_{\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\Omega. \quad (5)$$

В дальнейшем свойство  $D^* = -D$  кососимметричности будет существенно использовано.

Наличие вертикальных характеристик у системы (1) и, следовательно, ненулевого ядра у оператора  $D$ , обеспечивается специальными свойствами постоянных матриц  $B_k$ ; для рассматриваемых ниже в качестве примеров уравнений Максвелла, акустики и упругости эти свойства имеют место.

Наряду с энергетическим скалярным произведением (5) мы будем использовать, например, для оценки погрешности, в пространстве вектор-функций  $L_2(\Omega)$  обычную евклидову норму :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\Omega. \quad (6)$$

Основы теории гиперболических систем даны, например, в [4]. Там же приведены примеры задач математической физики (электромагнетизм, акустика, упругость), которые описываются такими системами.

Приведем простые примеры.

1. Уравнения Максвелла в  $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial t} = \text{rot } H, \quad \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = -\text{rot } E,$$

$$\text{div}(\mu H) = 0, \quad \text{div}(\epsilon E) = 0$$

представляют собой гиперболическую систему (1) для вектор-функции  $\mathbf{u} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ ,  $m = 6$ . Для этой системы все матрицы вида  $\zeta_1 B_1 + \zeta_2 B_2 + \zeta_3 B_3$  для любого единичного вектора  $\zeta$  имеют шесть вещественных собственных значений:  $\pm c, \pm c, 0, 0$ , где  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  – скорость распространения электромагнитных волн.

2. Уравнения акустики в  $\mathbb{R}^2$  получаются из модели изэнтропического течения в предположении, что скорость жидкости мала. Пусть давление зависит только от плотности и  $(u, v, p, \rho)$  – бесконечно малые изменения скорости, давления и плотности. Тогда

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} + \text{grad } p = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } U = 0 \quad (7)$$

для вектор-функции  $\mathbf{u} = (U, p) = (u, v, p)$ ,  $m = 3$ . Здесь  $c_0$  скорость звука,  $\rho_0$  – плотность. Характеристическое уравнение имеет 3 вещественных собственных значения:  $\pm c_0, 0$ . Дополнительное соотношение, которое следует из системы уравнений (7) и соответствует вертикальной характеристике  $\frac{\partial x_1}{\partial t} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial t} = 0$ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{x_2} - v_{x_1}) = 0. \quad (8)$$

## 3. Уравнения теории упругости

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Эти уравнения можно записать в виде симметрической гиперболической системы с дополнительными соотношениями на вертикальных характеристиках ([5]), два из которых имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0, \end{cases} \quad (10)$$

а остальные из них получаются циклической заменой:

$(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (2, 3, 1)$ . Эти соотношения называются условиями совместности Сен-Венана.

Для уравнений Максвелла и акустики соотношения на вертикальных характеристиках имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\epsilon E) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{U} = 0. \quad (12)$$

Двумерный аналог (12) есть соотношение (8).

Оператор  $D$  в рассмотренных примерах имеет бесконечномерное ядро, т.е. нулевое собственное значение бесконечной кратности. Этот факт является следствием соотношений на вертикальных характеристиках. Функции из ядра можно описать. Например, для уравнений акустики при заданном давлении  $p = 0$  на  $\partial\Omega$  все функции из ядра имеют вид  $\mathbf{w} = (\bar{\mathbf{U}}, \bar{p})$ , где

$\bar{p} = 0$ , а функция  $\bar{\mathbf{U}}$  определяется произвольной функцией  $\mathbf{\Omega}$  с помощью решения векторного уравнения Пуассона  $\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{\Omega}$  как  $\bar{\mathbf{U}} = \text{rot} \mathbf{A}$ .

Для того, чтобы избежать трудностей, связанных с наличием ядра и учетом ограничений вида (10) – (12), часто уравнения (1) приводят к уравнениям второго порядка

$$A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( B_k A^{-1} B_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (13)$$

не имеющим вертикальных характеристик.

Например, уравнения акустики (7) приводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p.$$

Рассматривая гармонические по времени колебания  $p = W \times \exp(-i\omega t)$ , из волнового уравнения получается уравнение Гельмгольца:

$$\Delta W - k^2 W = 0, \quad k = \omega/c,$$

здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Однако, в случае переменных коэффициентов среды ( $\epsilon$ ,  $\mu$  для уравнений Максвелла,  $\rho_0$ ,  $c_0$  – для акустики,  $\lambda$ ,  $\mu$  – для упругости) при таком переходе могут возникнуть сложности с постановкой граничных условий, записью схемы и т.п. Отметим также, что гиперболическая постановка (1) является более естественной для метода разрывных конечных элементов (Discontinious Galerkin), [6], частным случаем которого является схема Годунова [7]. Кроме того, гиперболическая постановка представляет большой интерес для задач магнитной гидродинамики [8].

Задача расчета инвариантных подпространств для эллиптических операторов рассматривалась в [9]. В данной работе во время экспериментальных исследований мы пытались исходить непосредственно из системы (1)



первого порядка и старались отыскать прием, позволяющий исключить влияние нулевой частоты в процессе вычислений.

### 3 Алгоритм расчета инвариантных подпространств

#### 3.1 Дискретизация

При изложении алгоритма и численных результатов ограничимся рассмотрением дифференциального оператора  $D$ , заданного в пространстве двумерных вещественных функций и соответствующего системе уравнений акустики (7) с  $c_0 = 1$  и  $\rho_0 = 1$ . Пусть для простоты область  $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$  и на ее границе  $\partial\Omega$  поставлено условие  $p = 0$ .

Рассмотрим сеточные операторы, аппроксимирующие дифференциальный оператор  $D$ . Для этого введем в области  $\Omega$  равномерную квадратную сетку  $\omega_h$  с шагом  $h$ :

$$\omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, i = 0, 1, \dots, N_h, j = 0, 1, \dots, N_h; N_h h = \pi\}.$$

Шаги по  $x, y$  можно, конечно, взять разными. Обобщение на области с полигональной границей, параллелограммные или другие сетки требует записи схемы на ячейках Дирихле для обеспечения кососимметричности разностного оператора.

Ограничимся простейшими разностными аппроксимациями функций и дифференциального оператора  $D$ , действующего в случае уравнений акустики на функцию  $\mathbf{u} = (u, v, p)$  по правилу

$$D\mathbf{u} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (14)$$

Для различных аппроксимаций оператора  $D$  будут использованы различные аппроксимации граничных условий на  $\partial\Omega$ , обеспечивающие консервативность (сохранение энергии) разностного оператора.

Пусть сеточные вектор-функции определены в центрах ячеек, внутри которых каждая компонента вектор-функции является постоянной величиной. Для сеточных функций в центре ячейки  $(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h)$  будем использовать обозначения  $(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})$ . Построенное аппроксимирующее пространство обозначим как  $V_h$ ; это  $N$ -мерное координатное пространство с  $N = 3N_h^2$ .

В пространстве  $V_h$  вводится дискретный аналог энергетического скалярного произведения (5); для уравнений (1) в двумерном случае он имеет вид

$$(W, \hat{W})_A = h^2 \sum_{ij} (A \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{w}}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}) \quad (15)$$

и обозначается символом  $(*)$ .

Разностные аппроксимации приведем только для строго внутренней ячейки области, чтобы не затруднять читателя излишними деталями, связанными с учетом краевых условий. Конечно, такой учет нами был проведен с использованием хорошо известных приемов. Знак  $h$  в обозначениях сеточных объектов, как правило, будем опускать.

Оператор  $D_2$  получается с помощью аппроксимации в каждой ячейке всех пространственных производных центральными разделенными разностями; именно этот оператор на введенной сетке наследует свойство кососимметричности, присущее исходному дифференциальному оператору  $D$ , и аппроксимирует его со вторым порядком. В строго внутренней ячейке сетки он имеет вид:

$$\langle D_2 \mathbf{w} \rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -(p_x^h, p_y^h, u_x^h + v_y^h),$$

где

$$p_x^h = \frac{p_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2h}, \quad p_y^h = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2h},$$

$$u_x^h = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2h}, \quad v_y^h = \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2h}.$$

Оператор  $D_1$  аппроксимирует оператор  $D$  с первым порядком точности  $O(h)$  и возникает при дискретизации уравнений (1) по схеме Годунова [7]. В случае линейного оператора (14) нам удобно записать оператор  $D_1$  в форме, явно содержащей искусственную вязкость. Введем вторые разностные производные

$$\begin{aligned} p_{xx}^h &= (p_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - 2p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})/h^2, \\ p_{yy}^h &= (p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - 2p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})/h^2. \end{aligned}$$

С их помощью оператор  $D_1$  записывается в виде

$$\langle D_1 \mathbf{w} \rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -(p_x^h - 0.5hu_{xx}^h, p_y^h - 0.5hv_{yy}^h, u_x^h + v_y^h - 0.5h(p_{xx}^h + p_{yy}^h)),$$

Эту запись мы используем, чтобы показать связь операторов  $D_1$  и  $D_2$ . В действительности записывается схема Годунова с определением потоков на границах ячеек и записью балансных соотношений по ячейкам.

Важно подчеркнуть, что на границе области для каждого оператора  $D_1$  и  $D_2$  записываются краевые условия, обеспечивающие консервативность.

### 3.2 Спектры операторов

Пусть  $Y$  – множество векторов пространства сеточных функций  $V_h$ ; тогда  $\text{span}(Y)$  – линейная оболочка векторов  $Y$ . Если  $Y$  – базис подпространства  $\text{span}(Y) \subset V_h$ , то  $\dim Y$  – размерность  $\text{span}(Y)$ . Спектр и ядро оператора  $L$  будем обозначать как  $Sp(L)$  и  $Ker(L)$  соответственно. Напомним, что подпространство  $X \subset V_h$  называется инвариантным подпространством оператора  $L$ , если  $LX \subseteq X$ .

Наша цель состоит в построении ортонормированного базиса  $Y_{D_2}$  инвариантного подпространства  $\text{span}(Y_{D_2})$  для разностного аналога  $D_2$  оператора  $D$ . Искомое подпространство должно быть сеточной аппроксимацией собственного подпространства оператора  $D$ , отвечающего достаточно глад-

ким собственным функциям. Такие функции иногда называются низкочастотными модами и именно они могут быть аппроксимированы на сетке с достаточной точностью. Высокочастотные сеточные моды соответствуют большим по абсолютной величине собственным значениям и являются осциллирующими функциями, не имеющими никакого отношения к собственным функциям дифференциальной задачи. Такая ситуация типична практически для всех дискретных аппроксимаций уравнений математической физики. В алгоритме попутно строится базис  $Y_{D_1}$  в  $D_1$ -инвариантном подпространстве, также аппроксимирующим главную часть спектра дифференциального оператора. Подпространство  $\text{span}(Y_{D_1})$  используется для получения  $D_2$ -инвариантного подпространства. Построить  $Y_{D_2}$  без нахождения  $Y_{D_1}$  мы не можем – оператор  $D_2$  нельзя использовать в нужных нам итерациях по соображениям устойчивости. Связь пространств  $\text{span}(Y_{D_1})$  и  $\text{span}(Y_{D_2})$  проста – они аппроксимируют одно и то же инвариантное подпространство оператора  $D$  с точностью  $O(h)$  и  $O(h^2)$  соответственно.

Будем предполагать выполненными следующие спектральные свойства дифференциального оператора  $D$  и его аппроксимаций  $D_h$  (т.е.  $D_1, D_2$ ).

- Существуют параметры  $r_1, r_0 > 0$ , задающие на комплексной плоскости две полосы, внутри которых лежат собственные числа  $\lambda \in Sp(D)$ , отвечающие гладкой части спектра:  $0 < r_0 \leq |\lambda| \leq r_1 \ll \|D_h\|$ .
- Линии  $y = \pm r_0, \pm r_1$  осуществляют дихотомию ([10]) спектра оператора  $D$ .
- Существует достаточно подробная сетка с шагом  $h$ , на которой все значения  $\lambda \in Sp(D)$  в этих полосах могут быть аппроксимированы собственными значениями  $\lambda_h \in Sp(D_h)$ ; подобное утверждение справедливо и для соответствующих инвариантных подпространств.

Отсюда следует потенциальная возможность расчета главной части спектра; эту возможность и реализует предлагаемый алгоритм. Отделимость главной части спектра от нуля означает, что нулевое бесконечно-кратное собственное значение является изолированной точкой спектра.

Размерность искомого инвариантного подпространства заранее неизвестна, она находится в расчете и зависит от чисел  $r_1, r_0$ , которые можно уточнять в ходе расчета.

Приведем краткие сведения о спектрах операторов  $D$ ,  $D_1$  и  $D_2$  для выбранной модельной задачи (более детально см. п. 4). Дифференциальный оператор  $D$  кососимметричен, на комплексной плоскости его спектр состоит из точки  $(0,0)$  бесконечной кратности и точек, лежащих на мнимой оси. Спектр  $D_2$  состоит из точки  $(0,0)$  высокой кратности и точек на мнимой оси (отделенных от нуля). Спектр оператора  $D_1$  устроен достаточно сложно (см. рис. 1). На рисунке слева для сетки  $32 \times 32$  показан весь спектр  $D_1$ ; хорошо видно, что он в целом не аппроксимирует спектр оператора  $D$ . У оператора  $D_1$  много вещественных собственных значений, порядка  $O(N_h^2)$ . На данной сетке в интервале  $|Im(\lambda)| < 10^{-5}$  их более 1000, часть их лежит в окрестности начала координат. Эта картина – результат размазывания искусственной вязкостью ядра оператора  $D_2$ . Но в спектре оператора  $D_1$  есть точки, отвечающие интересующим нас точкам спектра оператора  $D$ . Они прилегают к мнимой оси (показаны на рис. 1 справа) и приближают точки спектра  $D$ , обозначенные символами  $\circ$ .

Отметим, что приведенные сведения о спектрах получены прямыми расчетами по программам библиотеки IMSL. В частности, из таких расчетов получены размерности ядер операторов

$$\dim Ker(D_1) = 2N_h, \quad \dim Ker(D_2) = N_h^2 + 2$$

при размерности  $3N_h^2$  сеточного пространства  $V_h$ . Для оператора  $D_2$  расчеты проводились на нескольких сетках по стандартной программе DEVCHF вычисления спектра комплексной эрмитовой матрицы (в нашем случае – матрицы  $iD_2$ ). Алгоритм DEVCHF основан на приведении матрицы унитарными преобразованиями к вещественной симметричной трехдиагональной матрице. Для расчета спектра оператора  $D_1$  использована программа DEVLRG. С точки зрения вычисления размерности ядра такой расчет не является достаточно надежным в силу сложной картины спектра (рис. 1), но теоретический анализ для данной модельной задачи приводит к такому же ответу.

Заметим, что среди собственных функций, полученных в расчете по программе DEVCHF, содержится большое количество паразитических решений (это будет показано в п. 4). Отобрать среди них нужные нам аппроксимации гладкой части спектра практически невозможно. Под паразитическими функциями мы подразумеваем осциллирующие сеточные моды, не имеющие никакого отношения к дифференциальной задаче, но соответствующие им собственные значения лежат в заданном интервале частот  $r_0 \leq |\lambda| \leq r_1$ .

Оператор типа  $D_2$  практически не употребляется при решении уравнений (1). Обычно используют схемы Годунова в различных модификациях, например, применяют оператор  $D_1$ , который можно интерпретировать как сумму  $D_2$  и аппроксимационных членов типа искусственной вязкости. Однако, именно оператор  $D_2$  наследует важное свойство кососимметричности исходного дифференциального оператора.

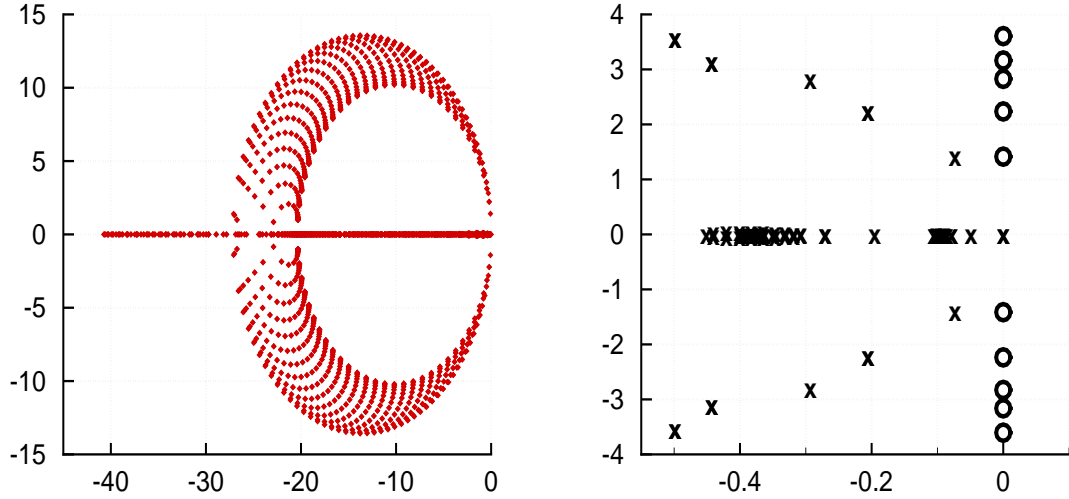


Рис. 1. Слева: полный спектр оператора  $D_1$ ; справа: фрагмент – показаны 10 точек спектра оператора  $D$  (o) и близких к ним точек спектра оператора  $D_1$  (x)

### 3.3 Сглаживающие итерации

Предлагаемый алгоритм базируется на использовании трех основных операторов  $D_1, D_2$  и  $K^q$ , где  $0 < q$  – заданное целое число. Оператор  $S = K^q$  называется нами *сглаживающим*. Сначала поясним идею использования оператора  $S$  на более простой вспомогательной задаче, которая в виде детали будет участвовать в алгоритме. Пусть мы разыскиваем двумерное инвариантное подпространство кососимметричной матрицы  $T \in \mathbb{R}^{[2 \times 2]}$  ( $T^* = -T$ ) с ортонормированным базисом  $Y$ , таким, что

$$TY = Y \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

где  $i\lambda$  – собственное значение матрицы  $T$ , близкое к некоторому заранее заданному числу  $i\omega$ .

Действие оператора  $S$  описывается следующей итерационной процедурой. Пусть  $Y_0$  – заданное начальное приближение. Оператор  $K$  является

оператором перехода от старого итерационного приближению  $Y_i$  к новому  $Y_{i+1} = K Y_i$  и определяется с помощью решения  $Z(t)$  системы двух дифференциальных уравнений с нулевым начальным условием по правилу:

$$\frac{dZ}{dt} = TZ + Y_i \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad Z(0) = 0, \quad (16)$$

$$Y_{i+1} = \frac{2\pi}{\omega} Z\left(\frac{2\pi}{\omega}\right). \quad (17)$$

Выделение нужных частот с помощью уравнений (16) основано на идее резонанса. После заданного числа  $q > 0$  таких итераций найдем

$$Y_q = K^q Y_0 \equiv S Y_0, \quad (18)$$

т.е. полученный итерирующий оператор  $K^q$  мы обозначаем как  $S$ . Нормируя последнее приближение  $Y_q$ , получаем искомый ортонормированный базис

$$Y = \sqrt{\frac{2}{\text{tr}[Y_q^* Y_q]}} Y_q. \quad (19)$$

Начальная пара векторов  $Y_0$  не обязана быть ортонормированной и, более того, может состоять из двух пропорциональных друг другу столбцов. Можно показать, что в результате такого процесса невязки

$$\Delta_i = TY_i - Y_i A_i$$

стремятся к нулю, а на побочной диагонали проекционной матрицы

$$A_i = Y_i^* T Y_i = -A_i^* = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}$$

получающиеся значения  $\alpha_i$  стремятся к значению  $\lambda$ , такому, что  $i\lambda$  – собственное значение матрицы  $T$ . Действие оператора  $S$  можно представить как применение к векторам  $Y_0$  матричной функции

$$F_\omega(T) = \frac{\omega}{2\pi} (T - i\omega I)^{-1} \left( I - \exp\left(-\frac{2\pi}{\omega} (T - i\omega I)\right) \right),$$



обеспечивающей сходимость к собственному числу, ближайшему к  $\omega$ . Такая конструкция оператора  $S$  строится и обосновывается для случая произвольной кососимметрической  $N \times N$ – матрицы, при этом преодолеваются трудности, связанные с кратными собственными значениями. Эта часть исследований, относящаяся к конструированию оператора  $S$ , выполнена С.В. Селивановой под руководством С.К. Годунова в квалификационной работе бакалавра. Сглаживающий оператор для построения инвариантного подпространства оператора  $D_2$  имеет следующий вид. Задается достаточно произвольный, но разумный набор частот  $\omega_j, j = 1, \dots, J$ , где  $2J$  – размерность искомого инвариантного подпространства. Для каждой отдельной частоты  $\omega = \omega_j$  и пары векторов  $Y_\omega$  решается задача

$$\frac{dZ}{dt} = D_1 Z + Y_\omega \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad Z(0) = 0, \quad (20)$$

аналогичная (16), в которой матрица  $T$  заменяется на разностный оператор  $D_1$ . Решение задачи (20) с нормировкой (17) для всего набора частот и пар векторов является одной итерацией алгоритма сглаживания. Требования к выбору начального  $2J$ -мерного базиса  $Y_0$  необременительны. Это, например, может быть повторяющийся набор коллинеарных пар векторов. Задача (20) решается численно с помощью явной схемы интегрирования по времени с обычным ограничением на шаг интегрирования  $\tau = O(h)$  для обеспечения устойчивости. Использовать в (20) вместо  $D_1$  оператор  $D_2$  практически нельзя, так как схема станет неустойчивой.

### 3.4 Описание алгоритма

Алгоритм состоит из двух стадий, на первой из которых строится инвариантное подпространство  $\text{span}(Y_{D_1})$ . Вторая стадия позволяет за один шаг сформировать базис  $Y_{D_2}$  инвариантного подпространства оператора  $D_2$  по

уже известному базису  $Y_{D_1}$ . В алгоритме используются следующие операторы обработки базисов: введенный в п. 3.3 оператора сглаживания  $S$ , оператор ортонормировки  $R$  (п. 3.4.1), оператор  $Q$  (п. 3.4.2) отбора резонансных частот (существенно основанный на кососимметричности оператора  $D_2$ ).

### 3.4.1 Оператор ортонормировки $R$

Действие оператора  $R$  ортонормировки базиса  $Y$

$$R : Y \rightarrow RY, \quad p_0 = \dim Y, \quad p_1 = \dim RY \leq p_0$$

определяет следующая процедура. Формируем матрицу  $G = Y^{(*)}Y$  размера  $p_0 \times p_0$  и делаем ее сингулярное разложение

$$G = V \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_{p_0}) V^*, \quad VV^* = I_{p_0}, \quad g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_{p_0} \geq 0.$$

Рассчитываем практическое значение  $p_1$  (при заявленной точности  $\epsilon_0$ )

$$p_1 = \begin{cases} p_0, & g_{p_0} > \epsilon_0 \\ p, & g_p > \epsilon_0 \geq g_{p+1} \\ 0, & g_1 \leq \epsilon_0 \end{cases}$$

и выбираем первые  $p_1$  столбцов матрицы  $V_{p_1} = (v^{(1)} : v^{(2)} : \dots : v^{(p_1)})$ .

Искомый ортонормированный базис  $RY$  имеет вид

$$RY = YV_{p_1} \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{g_1}}, \frac{1}{\sqrt{g_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{g_{p_1}}} \right).$$

### 3.4.2 Оператор $Q$ отбора резонансных частот $\omega_i$

Оператор  $Q : Y \rightarrow QY$  отбирает нужные резонансные частоты  $\omega_i$  и строит соответствующий им базис  $Y_Q$ . Он действует следующим образом. Делаем сингулярное разложение проекционной матрицы  $\Lambda = Y^{(*)}D_2Y = U\Sigma V^*$  и среди сингулярных чисел матрицы  $\Sigma$  отбираем ненулевые, попавшие в заданный нам интервал спектра. Эти числа и составляют нужный набор

частот  $\Omega = \{\omega_i, i = p_1, \dots, p_2\}$ . Искомый базис имеет вид  $Y_Q = YU_\Omega$ , где  $U_\Omega = [u^{(p_1)} : \dots : u^{(p_2)}]$  – соответствующие столбцы матрицы  $U$ .

### 3.4.3 Алгоритм расчета инвариантных подпространств

**Стадия 1. Расчет базиса  $Y_{D_1}$ ,  $\dim Y_{D_1} \leq 2M$ ,  $M$  – задано.**

1. Выбираем в заданном интервале  $0 < |\lambda| \leq r_1$  начальную сетку частот  $\Omega_0 = \{\omega_j, j = 1, \dots, J_0\}$  и набор векторов  $Y_0$  размерности  $2J_0$ ,  $J_0 \leq M$ .
2. К каждой паре векторов  $Y_0^\omega$ , соответствующих частоте  $\omega = \omega_j$  применяем сглаживающий оператор:  $Y_1^\omega = S Y_0^\omega$ . Собранные вместе простой конкатенацией пары векторов образуют базис  $\hat{Y}_1 = S Y_0$ .
3. Ортонормируем полученный базис  $\hat{Y}_1$  с помощью оператора  $R$  из п. 3.4.1, получаем  $Y_1 = R \hat{Y}_1$ ,  $\dim Y_1 = 2J_1$ ,  $J_1 \leq J_0$ .
4. Расширяем базис  $Y_1$ . Для этого вычисляется  $D_2$ -невязка базиса  $Y_1$  как  $\Delta_{D_2} = D_2 Y_1 - Y_1 [Y_1^{(*)} D_2 Y_1]$ . Используя эту невязку, корректируем набор частот и саму невязку с помощью оператора  $Q$  из п. 3.4.2. Затем полученная невязка сглаживается с помощью оператора  $S$  (с новым набором частот). Получаем  $\Delta_{D_2}^{SQ} = S Q \Delta_{D_2}$ . Расширенный базис имеет вид  $Y_2 = [Y_1 : \Delta_{D_2}^{SQ}]$ .
5. Базис  $Y_2$  ортонормируем. С помощью оператора  $Q$  находим новый набор частот  $\Omega_0$  и базис  $Y_{D_1} = Q R Y_2$ . Это и есть новое итерационное приближение ( $\Omega_0, Y_0 = Y_{D_1}$ ). С ним делается переход к п. 2 данного алгоритма, если не достигнута заданная точность.
6. Итерации заканчиваются как только норма  $D_1$ -невязки

$$\|\Delta_{D_1}\|_2 = \left\| D_1 Y_{D_1} - Y_{D_1} [Y_{D_1}^{(*)} D_1 Y_{D_1}] \right\|_2$$

достигает заданной точности.

## Стадия 2. Расчет базиса $Y_{D_2}$ .

1. Берем базис, полученный на первой стадии  $Y_0 = Y_{D_1}$ .
2. Рассчитываем  $D_2$ -невязку:  $\Delta_{D_2} = D_2 Y_0 - Y_0 [Y_0^{(*)} D_2 Y_0]$ ; строим ортонормированный базис  $Y_1 = R \Delta_{D_2}$ ,  $\dim Y_1 = 2J_1$ .
3. Формируем расширенный ортонормированный базис  $Y_{new} = [Y_0; Y_1]$ .
4. Рассчитываем кососимметричную матрицу  $Y_{new}^{(*)} D_2 Y_{new}$  и выполняем такое ортогональное преобразование, которое приводит ее к трехдиагональной форме с нулевой главной диагональю. Внедиагональные элементы матрицы являются искомыми приближенными собственными значениями оператора  $D_2$ .
5. Отбираем из базиса  $Y_{new}$   $2J$  векторов ( $J \leq M$ ) с наименьшей, но не нулевой нормой. Это и есть искомый базис  $Y_{D_2}$ .
6. Проверяем норму  $D_2$ -невязки  $\|\Delta_{D_2}\|_2$ .

## 4 Результаты численных экспериментов

Продemonстрируем работоспособность описанного алгоритма на одном простом, но типичном примере. Рассмотрим уравнения акустики (7) в квадрате  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ , на границе которого задано нулевое давление:  $p = 0$ . Коэффициенты постоянны:  $c_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Поставим задачу отыскания для разностного операторов  $D_2$  инвариантного подпространства, отвечающего собственным значениям из интервала  $0 < |\lambda| < 4$ . В процессе решения этой задачи попутно строится инвариантное подпространство для  $D_1$ , поэтому мы дадим детальную характеристику спектра каждого из операторов  $D_1$  и  $D_2$ . Точные собственные значения

дифференциального оператора  $D$  на исследуемом интервале известны:

$$\lambda = \pm i\sqrt{2}, \pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{8}, \pm i\sqrt{10}, \pm i\sqrt{10}, \pm i\sqrt{13}, \pm i\sqrt{13}.$$

Их квадраты являются собственными значениями оператора Лапласа:

$$\lambda^{mn} = m^2 + n^2, \quad m, n > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Спектр кратный, в указанный интервал попадает ровно 16 чисел, но различных среди только 10. Вещественный базис в этом 16-мерном собственном подпространстве составляют функции

$$\begin{cases} \phi_{mn} = [u, v, p] \equiv [0, 0, \sin(mx) \sin(ny)], \\ \bar{\phi}_{mn} = [u, v, p] \equiv [m \cos(mx) \sin(ny), n \sin(mx) \cos(ny), 0], \\ (m, n) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}. \end{cases} \quad (21)$$

Спектр оператора  $D_2$  чисто мнимый и на сетке  $32 \times 32$  состоит из 3072 значений (с учетом кратности). В интервале  $0 \leq |\lambda| < 4$  лежат 1122 значения, из них 96 ненулевых (см. Табл. 1). Эти результаты получены расчетом всего спектра с помощью стандартных программ. Среди 96 собственных значений оператора  $D_2$  имеют отношение к спектру дифференциального оператора  $D$  только 16, а остальные являются паразитическими. Им соответствуют осциллирующие сеточные моды. Такие моды содержатся также в инвариантных подпространствах, отвечающих собственным значениям оператора  $D$  из интервала  $0 < |\lambda| < 4$ . Рассмотрим некоторые примеры.

Два комплексно-сопряженных числа  $\pm 1.4119i$  из Табл. 1 отвечают 8-мерному собственному подпространству. В нем, кроме осциллирующих функций, есть интересующая нас пара функций, аппроксимирующих гладкие собственные моды дифференциального оператора, а именно, первую пару  $\phi_{11}, \bar{\phi}_{11}$  из (21). При расчете собственных функций с помощью программы DEVCHF из библиотеки IMSL мы получаем все 8 функций.

Табл. 1. Спектры операторов  $D$  и  $D_2$  (на сетке  $32 \times 32$ );  $0 < |\lambda| < 4$ 

точные с.з. оператора $D$	точные с.з. оператора $D_2$	кратность (число пар)	число истинных пар
	$\pm 0.9984i$	4	0
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4119i$	4	1
	$\pm 1.9872i$	4	0
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.2239i$	8	2
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.8103i$	4	1
	$\pm 2.9568i$	4	0
$\pm 3.1623i$	$\pm 3.1208i$	8	2
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.5625i$	8	2
	$\pm 3.8980i$	4	0
общее число собственных значений			
16	96		

На рис.2 показаны профили давления  $p(x, y_{med})$  в сечении  $y_{med} = \frac{\pi}{2}$  для всех 8 мод (приведены их вещественные компоненты, так как мнимые равны нулю). Глядя на графики, может показаться, что гладкой является функция  $F_6$ . Но это не так: на рис. 3 А, В показаны профили этой функции (умноженной для наглядности на 10) не только в сечении  $y_{med} = \frac{\pi}{2}$ , но и в сечении  $x_{med} = \frac{\pi}{2}$ , в котором функция очевидно негладкая. Расчет показывает, что гладкая функция  $\phi_{11}$  из (21) с хорошей точностью приближается линейной комбинацией полученных базисных функций с коэффициентами: 4.79, 0.892, 2.81, 0.567, 0.747, 5.40, 0.521, 1.40 (профили приближенной и точной функций совпадают при рисовании и показаны на рис. 3 С).

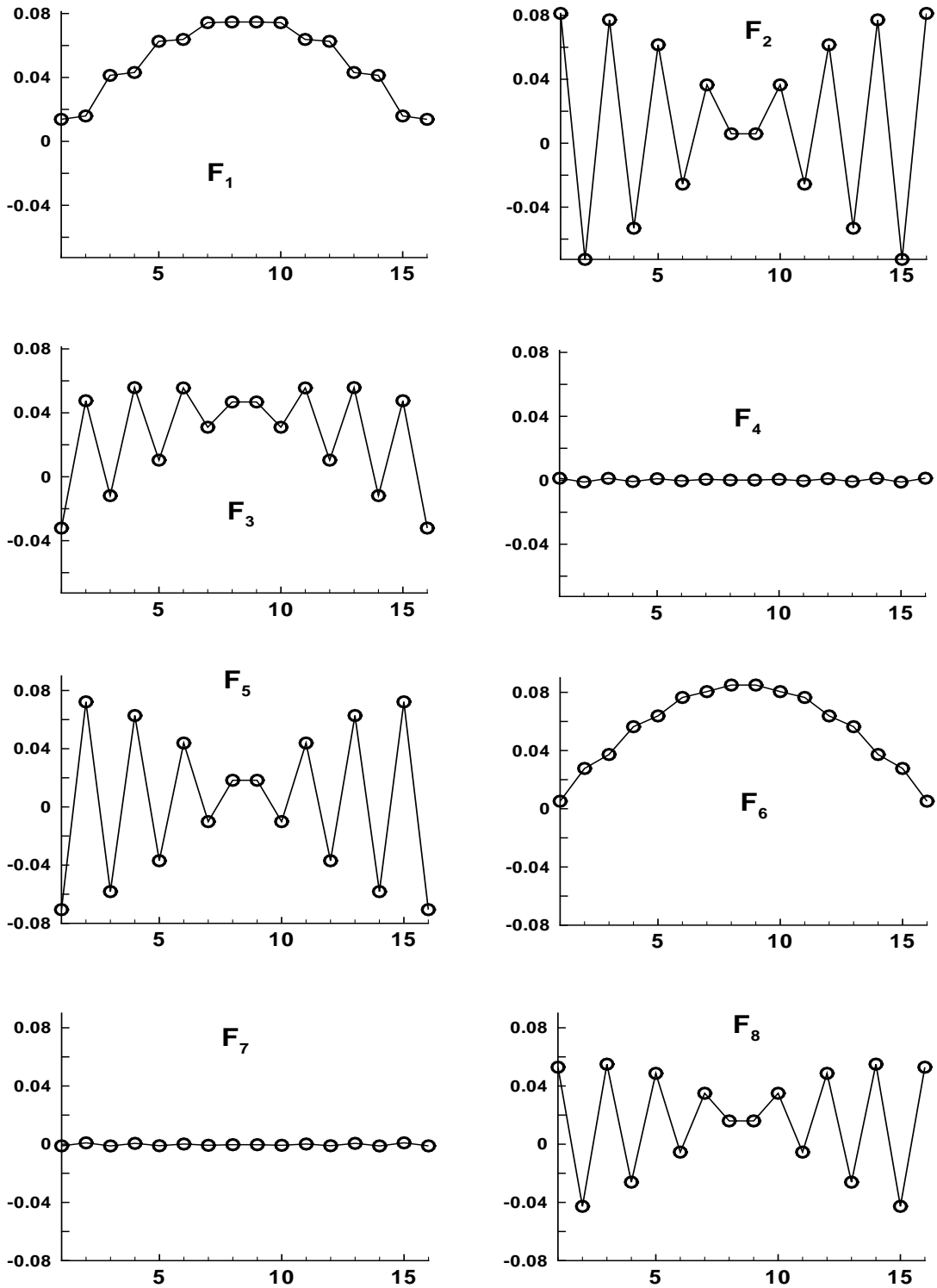


Рис. 2. Расчет по стандартной программе. Профили давления  $p(x, y_{med})$  в сечении  $y_{med} = \frac{\pi}{2}$  для 8 собственных функций с  $\lambda = \pm 1.4119i$

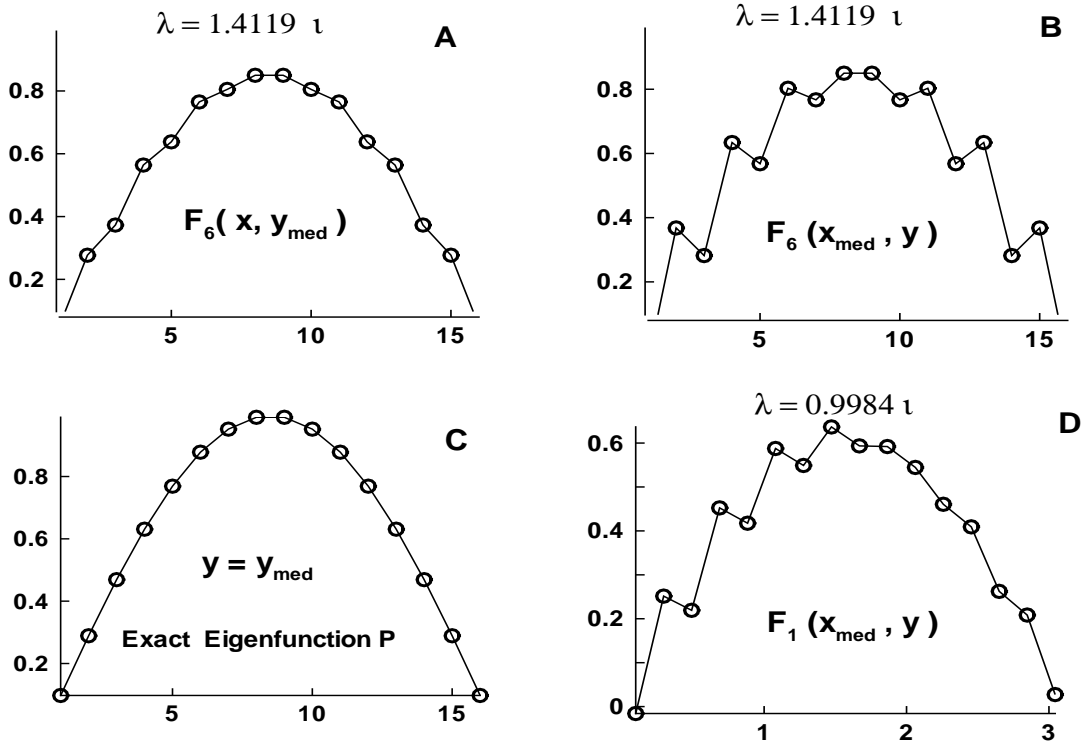


Рис. 3. Расчет по стандартной программе. Профили давления  $p$  в сечениях  $x_{med} = \frac{\pi}{2}$ ,  $y_{med} = \frac{\pi}{2}$ : А, В) собственная функция с  $\lambda = 1.4119i$ ; С) точная собственная функция с  $\lambda = 1.4119i$ ; D) паразитическая собственная функция с  $\lambda = 0.9984i$

Причина появления негладких мод в данном подпространстве состоит в аппроксимации первых производных центральными разностями: каждую из двух гладких собственных функций  $\phi_{11}, \bar{\phi}_{11}$  можно изменить на сетке так, что центральные разности не изменятся. Для этого достаточно взять значения функции с другим знаком в каждой четной ячейке по каждому или одному из двух координатных направлений.

Другая пара собственных чисел  $\pm 0.9984i$  соответствует 8-мерному подпространству, полностью состоящему из осциллирующих мод, не имеющих отношение к спектру оператора  $D$ ; на Рис. 3 D показан профиль давления для одной из таких функций; все другие функции тоже осциллируют.

Опишем данное подпространство. Рассмотрим разностный оператор Ла-



пласа  $\Delta_{2h}$  на 5-точечном шаблоне с шагом  $2h$  (с надлежащим учетом граничных условий). Определим 4 сеточных функции

$$\psi_h(x, y) = \{\sin x, y \sin x, \sin y, x \sin y, (x, y) \in \omega_h\} .$$

Легко проверить, что для каждой из них  $\Delta_{2h}\psi_h(x, y) \approx -1$ . Из этих функций построим осциллирующие функции  $\widehat{\psi}_h(x, y)$ , изменив знак  $\psi_h(x, y)$  в каждой четной ячейке по  $x$  и по  $y$ . Очевидно, что

$$\Delta_{2h}\widehat{\psi}_h(x, y) = \Delta_{2h}\psi_h(x, y) \approx -1.$$

Нулевые граничные условия нетрудно удовлетворить за счет осцилляций. Возьмем указанные 4 функции в качестве давления  $p$  и для каждого собственного значения  $\pm 0.9984i$  найдем компоненты  $u, v$ , построив таким образом искомое 8-мерное подпространство. Приведенные рассуждения проверены расчетом: на прореженной сетке с шагом  $2h$  базис, полученный в расчете, практически совпадает с "точным" базисом  $\psi_h(x, y)$ .

Спектр оператора  $D_1$  уже кратко комментировался. На рис. 1 показано поле собственных значений  $D_1$  на комплексной плоскости. В интервале  $0 < |\lambda| \leq 4$  у  $D_1$  есть точки спектра, соответствующие спектру оператора  $D$ ; они показаны на рис. 1 справа. Видно, что кроме большого числа вещественных собственных значений есть 10 точек спектра оператора  $D_1$ , прилегающих к мнимой оси и близких к точкам спектра оператора  $D$ . Последние лежат на мнимой оси и обозначены символами  $\bullet$ . Как мы уже говорили, спектр кратный и 10 точкам спектра соответствует 16-мерное собственное подпространство. При измельчении сетки показанные 10 точек спектра оператора  $D_1$  приближаются к точкам спектра дифференциального оператора  $D$ .

Приведем результаты расчетов спектров по предложенному алгоритму п. 3.4.3. Для нахождения базиса собственного подпространства размерно-

сти  $M = 16$  в качестве начальных частот взят набор  $\Omega_0 = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4\}$ . Расчеты проведены на последовательности сгущающихся квадратных сеток с числом шагов  $16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64$ . С измельчением сетки тактика счета менялась. На сетке  $16 \times 16$  на первой стадии (для построения базиса  $Y_{D_1}$ ) сделано 4 итерации для уменьшения невязки до  $10^{-6}$ , а в операторе сглаживания  $S = K^q$  использовалось  $q = 10$  для каждой частоты. Сетка  $32 \times 32$  потребовала 5 итераций на первой стадии с  $q = 20$  в операторе  $S$ . На сетке  $64 \times 64$  затрачено 6 итераций для построения базиса  $Y_{D_1}$  с точностью  $5 \cdot 10^{-6}$  при  $q = 30$  в операторе  $S = K^q$ . В Табл. 2 для последовательности сеток показаны приближенные собственные значения  $\lambda_h$  оператора  $D_2$ , точные собственные значения  $\lambda$  дифференциального оператора  $D_2$ , и их разности, по которым можно судить о скорости сходимости  $\lambda_h$  к  $\lambda$ ; хорошо виден второй порядок сходимости: двукратное измельчение сетки в каждом направлении приводит к четырехкратному уменьшению ошибки.

Приближенные собственные значения оператора  $D_1$ , вычисленные в процессе построения  $\text{span}(Y_{D_2})$ , аппроксимируют главную часть спектра дифференциального оператора  $D$  с точностью  $O(h)$ ; соответствующую таблицу для краткости не приводим.

Изучим сходимость приближенных собственных функций к точным функциям (21), проводя сравнение не отдельных функций, а соответствующих подпространств. Естественной оценкой погрешности является угол между построенным подпространством  $\text{span}(Y_{D_2})$  и точным подпространством  $\text{span}(Y_{ex})$ , где в качестве  $Y_{ex}$  используется базис, полученный ограничением в центры ячеек точного базиса (21) с последующей ортонормировкой. Угол  $\alpha$  (см. [10]) между подпространствами  $\text{span}(X)$  и  $\text{span}(Y)$  размер-

ности  $p$  и  $q$  определяется по следующим формулам. Пусть базисы  $X$ ,  $Y$  ортонормированы:  $X^{(*)}X = I_p$ ,  $Y^{(*)}Y = I_q$ . Вычисляем матрицу  $X^{(*)}Y$  и находим ее сингулярное разложение. Положим  $\hat{X} = XU$ ,  $\hat{Y} = YV$ , где пусть  $U, V$  - левые и правые сингулярные векторы. Подпространства  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  имеют одинаковую размерность  $r = \min(p, q)$ , т.е. матрицы базисов  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  имеют одинаковое число столбцов. Среди  $r$  сингулярных чисел матрицы  $(\hat{X} - \hat{Y})^{(*)}(\hat{X} - \hat{Y})$ , равных  $4 \sin^2(\alpha_k/2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , находим максимальное число. Ему соответствует искомый угол  $\alpha$  между подпространствами  $\text{span}(X)$  и  $\text{span}(Y)$ .

Табл. 2. Точные и приближенные собственные значения оператора  $D_2$

точные с.з. $\lambda$	сетка $16 \times 16$		сетка $32 \times 32$		сетка $64 \times 64$	
	$\lambda_h$	$ \lambda_h - \lambda $	$\lambda_h$	$ \lambda_h - \lambda $	$\lambda_h$	$ \lambda_h - \lambda $
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4051i$	0.0091	$\pm 1.4119i$	0.0023	$\pm 1.4136i$	0.0006
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.1876i$	0.0485	$\pm 2.2239i$	0.0122	$\pm 2.2330i$	0.0031
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.1876i$	0.0485	$\pm 2.2239i$	0.0122	$\pm 2.2330i$	0.0031
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.7563i$	0.0721	$\pm 2.8103i$	0.0181	$\pm 2.8239i$	0.0045
$\pm 3.1623i$	$\pm 2.9989i$	0.1634	$\pm 3.1208i$	0.0415	$\pm 3.1519i$	0.0104
$\pm 3.1623i$	$\pm 2.9989i$	0.1634	$\pm 3.1208i$	0.0415	$\pm 3.1519i$	0.0104
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.4358i$	0.1698	$\pm 3.5625i$	0.0431	$\pm 3.5948i$	0.0108
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.4358i$	0.1698	$\pm 3.5625i$	0.0431	$\pm 3.5948i$	0.0108

В Табл. 3 приведены синусы углов  $\sin(Y_{ex}, Y_{D_2})$  между инвариантными подпространствами  $\text{span}(Y_{ex})$  (точным) и  $\text{span}(Y_{D_2})$  (построенным) для двух случаев – основного, когда размерность подпространства  $M = 16$  и дополнительного с  $M = 6$ . В последнем случае подпространство отвечает собственным числам  $\pm 1.4142i$  и  $\pm 2.2361i$  и содержит 6 первых (и более

гладких) собственных функций из 16-мерного подпространства. Для сравнения показаны "эталонные значения" углов между  $\text{span}(Y_{ex})$  и подпространством  $\text{span}(DY_{ex})$ , полученным "точным" применением дифференциального оператора  $D$  к базису (21). Эта процедура сводится к точному дифференцированию функций (21) и их ограничению на сетку. Из Табл. 3 видно, что с измельчением сетки базисы инвариантных подпространств  $Y_{ex}$  и  $Y_{D_2}$  сближаются и эта сходимость квадратичная по  $h$ . С ростом размерности  $M$  подпространств точность ухудшается, в данном случае в 2 раза. Это хорошо согласуется с аппроксимационными свойствами оператора  $D_2$ .

Табл. 3. Точность расчета инвариантных подпространств оператора  $D_2$

сетка	16-мерное подпространство		6-мерное подпространство	
	$\sin(Y_{ex}, Y_{D_2})$	$\sin(Y_{ex}, DY_{ex})$	$\sin(Y_{ex}, Y_{D_2})$	$\sin(Y_{ex}, DY_{ex})$
$16 \times 16$	$0.16e - 01$	$0.70e - 06$	$0.78e - 02$	$0.30e - 07$
$32 \times 32$	$0.39e - 02$	$0.70e - 06$	$0.19e - 02$	$0.20e - 07$
$64 \times 64$	$0.96e - 03$	$0.40e - 06$	$0.48e - 03$	$0.10e - 07$

Одновременно с  $Y_{D_2}$  получены подпространства, инвариантные для оператора  $D_1$ , аппроксимирующего дифференциальный оператор  $D$  с первым порядком. Табл. 4 отличается по структуре от предыдущей Табл. 3, в ней показаны углы  $(Y_{ex}, Y_{D_1})$  и  $(D_1 Y_{ex}, Y_{D_1})$ , где базис  $D_1 Y_{ex}$  есть образ точного базиса (21) при применении оператора  $D_1$ . Убывание величин  $\sin(Y_{ex}, Y_{D_1})$  показывает, что сходимость приближенного подпространства к точному является линейной по  $h$ , а из анализа углов  $(D_1 Y_{ex}, Y_{D_1})$  следует, что  $D_1$  - инвариантное подпространство близко к образу подпространства, натянутого на точный базис (21). Видим, что сходимость  $Y_{D_1}$  к  $D_1 Y_{ex}$  квадратичная, что достаточно неожиданно.

Объясним этот факт, а также почему однократное применение  $D_2$  к  $\text{span}(Y_{D_1})$  обеспечивает точность  $O(h^2)$ . В процессе построения  $Y_{D_1}$  ( итерации Стадии 1) выделяются гладкие собственные функции с погрешностью  $O(h)$ . Наша гипотеза состоит в том, что в структуре этой погрешности главными членами являются крупные вихревые функции, т.е. достаточно гладкие сеточные функции, приближенно удовлетворяющие соотношению (8). Мелкие вихри хорошо гасятся схемой интегрирования по времени. Но оператор  $D_2$  аннулирует крупные вихри, так как они являются аппроксимациями функций из его ядра. Следовательно, результирующая погрешность есть  $O(h^2)$ . Похожими соображениями можно объяснить квадратичную сходимость  $Y_{D_1}$  к  $D_1 Y_{ex}$  : при применении  $D_1$  к точному базису  $Y_{ex}$  возникает погрешность  $O(h)$ , имеющая вихревую компоненту, также содержащуюся в  $Y_{D_1}$ . По-видимому, погрешности  $O(h)$  компенсируются.

Это одна из причин установления  $D_1$ -невязки на определенном уровне (что наблюдалось в расчетах): после небольшого числа итераций в базисе  $Y_{D_1}$  фактически остается ошибка порядка погрешности аппроксимации  $O(h)$  и дальнейшее уменьшение невязки уже не имеет смысла.

Табл. 4. Точность расчета инвариантных подпространств оператора  $D_1$

сетка	16-мерное подпространство		6-мерное подпространство	
	$\sin(Y_{ex}, Y_{D_1})$	$\sin(D_1 Y_{ex}, Y_{D_1})$	$\sin(Y_{ex}, Y_{D_1})$	$\sin(D_1 Y_{ex}, Y_{D_1})$
$16 \times 16$	$0.75e - 01$	$0.82e - 02$	$0.53e - 01$	$0.38e - 02$
$32 \times 32$	$0.37e - 01$	$0.23e - 02$	$0.26e - 01$	$0.92e - 03$
$64 \times 64$	$0.18e - 01$	$0.59e - 03$	$0.13e - 01$	$0.23e - 03$

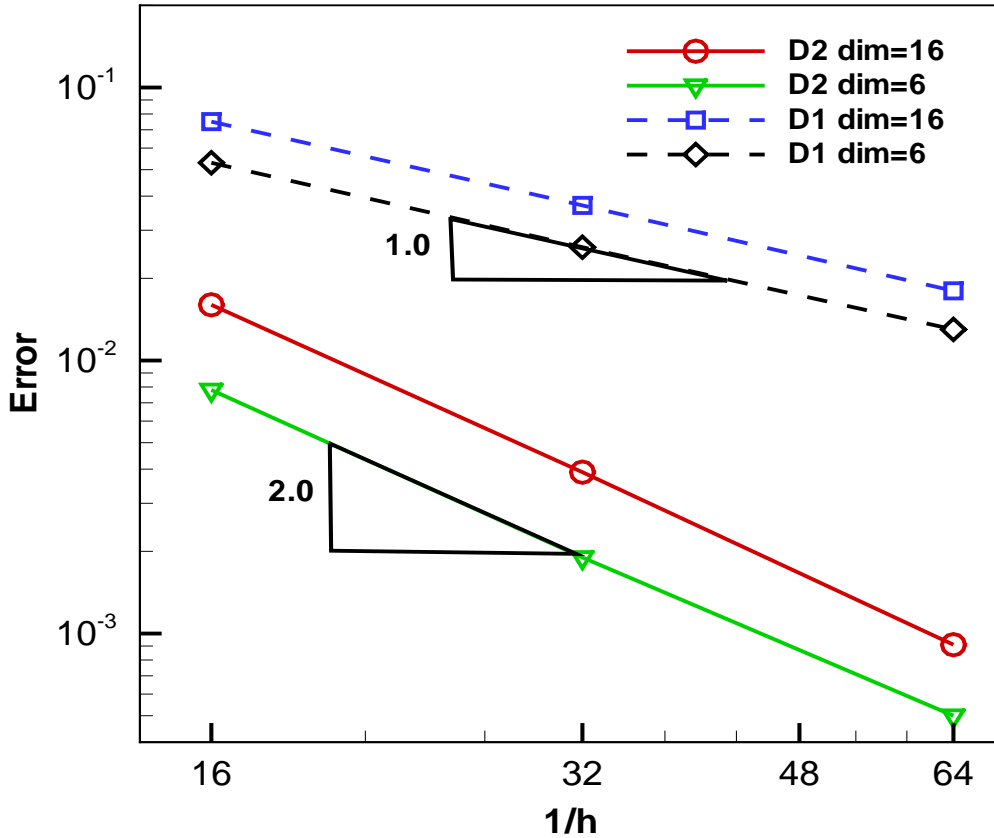


Рис. 4. Погрешность расчета собственных подпространств операторов  $D_1$  и  $D_2$

Точность расчета инвариантных 6 и 16-мерных подпространств помимо таблиц показана на рис. 4; по каждой из осей взят логарифмический масштаб. Хорошо видна квадратичная и линейная сходимость для операторов  $D_2$  и  $D_1$  соответственно.

Отметим важные свойства алгоритма: строится  $D_2$ -инвариантное подпространство точности  $O(h^2)$  без итераций с оператором  $D_2$ . Итерации ведутся только с оператором  $D_1$  при естественном ограничении на шаг  $\tau = O(h)$ .

## 5 Заключение

В данной работе построен и экспериментально изучен алгоритм расчета главных инвариантных подпространств кососимметрических гиперболических дифференциальных операторов. Разработка алгоритма явилось результатом экспериментальной работы, в процессе которой было отбраковано много предварительных вариантов.

Численные расчеты проведены на примере уравнений акустики и показывают сходимость приближенных собственных значений и собственных подпространств к точным. Скорость сходимости совпадает с порядком разностных аппроксимаций по пространству. Намечены пути преодоления трудностей, связанных с бесконечной кратностью нулевой точки спектра. Такая ситуация наблюдается у многих уравнений математической физики.

Нам представляется, что предложенный алгоритм будет эффективен при его реализации на параллельных компьютерах.

## Список литературы

- [1] L. Demkowicz, P. Monk, Ch. Schwab, L. Vardapetyan. Maxwell Eigenvalues and Discrete Compactness in Two Dimension. - Int. J. Computers and Mathematics with Applications 40(2000), 589-605
- [2] P.F. Antonietti, A. Buffa, I. Perugia. Discontionuous Galerkin Approximation of the Laplace Eigenproblem. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, to appear, pp. 28
- [3] J.S. Hesthaven, T. Warburton. High-order nodal discontionuous Galerkin methods for the Maxwell eigenvalue problem. Royal Soc., London, Ser A 362, 2004, pp. 493-524. Published online 29 January 2004

- [4] С.К. Годунов. Уравнения математической физики.  
М.: Наука, 1979, 392 с.
- [5] С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Теория упругости,  
М.: Наука, 1979, 560 с.
- [6] J. J. W. van der Vegt, H. van der Ven, and O. J. Boelens. Discontinuous Galerkin Methods for Hyperbolic Partial Differential Equations.  
In: Godunov Methods: Theory And Applications. Edited by E F Toro. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001, pp. 985 – 1007
- [7] Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под редакцией С.К. Годунова. М.: Наука, 1976, 400 с.
- [8] А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001, 608 с.
- [9] S.K. Godunov, M. Sadkane, M. Robe. Computing invariant subspaces of elliptic operators using multi-grid techniques. Applied Numerical Mathematics, 2000, v.33, pp. 341-347
- [10] С.К. Годунов. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск, Научная Книга, 1997, 390 с.
- [11] А.Н. Малышев. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск, Наука, 1991, 228 с.