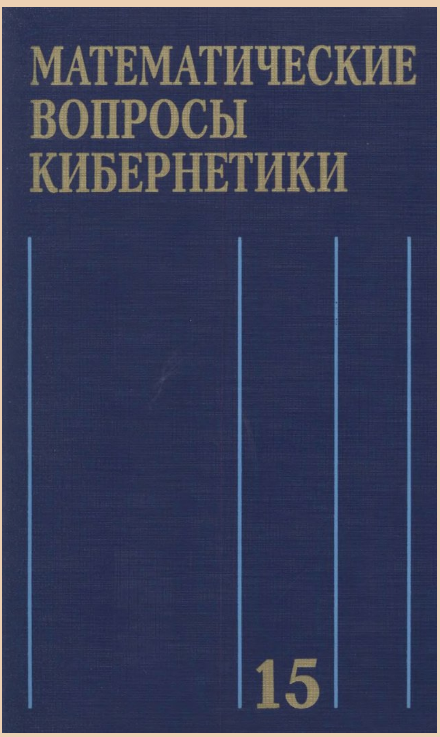

Р. В. Хелемендик

Алгоритм распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени и эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Хелемендик Р. В. Алгоритм распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени и эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: Физматлит, 2006. — С. 217–266. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2006-217

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ВЫПОЛНИМОСТИ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ И ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЫВОДОВ ОБЩЕЗНАЧИМЫХ ФОРМУЛ ИЗ АКСИОМ *)

Р. В. ХЕЛЕМЕНДИК

(МОСКВА)

Одним из актуальных направлений в неклассических логиках является логика ветвящегося времени (computational tree logic). В этой логике к пропозициональным связкам добавляются следующие временны́е: $\bigcirc$ — «в следующий момент», $\Box$ — «во всякий момент», $\Diamond$ — «в некоторый момент», $\mathcal{U}$ — «до тех пор, пока», а также кванторы $\forall$ и $\exists$, стоящие перед каждой временно́й связкой (и только перед ней). Истинность формулы определяется в модели: в вершинах связного ориентированного графа, в котором каждой вершине приписаны истинностные значения пропозициональных переменных. Формула называется *выполнимой*, если существует модель, в начальной вершине которой эта формула истинна. Формула называется *общезначимой*, если она истинна во всякой модели.

Разрешимость логики ветвящегося времени доказана в работе [9]. В то же время для этой логики вопросы построения и детального описания табличного алгоритма распознавания выполнимости формул вместе с доказательством его корректности и полноты являются актуальными. Это связано, в частности, с тем, что при табличном подходе проявляется связь разбора формулы с содержанием задачи, которое отражено в структуре формулы, а применение каждого правила имеет простой содержательный смысл.

Табличный алгоритм для распознавания проблемы выполнимости формул в логике ветвящегося времени был описан Эмерсоном в работах [8–11]. Однако отметим, что в этих работах на графы в моделях для формул наложено ограничение в виде тотальности: каждая вершина должна иметь сына, что существенно сужает область его применимости. Кроме того, некоторые случаи, возникающие, в частности, при построении новых вершин в графе, удалении вершин, проверки подтверждённости так называемых формул-обещаний, рассмотрены недостаточно подробно. Доказательства корректности и полноты этого алгоритма даны в виде наброска.

В настоящей работе снято ограничение на тотальность графов в моделях для формул. Построен и детально изложен оригинальный табличный алгоритм, распознающий выполнимость формул логики ветвящегося времени и строящий для любой выполнимой формулы модель. Дано детальное доказательство корректности и полноты этого алгоритма. Данный алгоритм

*) Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

основывается на построении так называемой схемы модели (см. [6]), являющейся более компактной конструкцией по сравнению с табличным графом Эмерсона.

Вопрос эффективного алгоритма построения выводов общезначимых формул из аксиом для логики ветвящегося времени также оставался открытым. Система аксиом и правил вывода для логики ветвящегося времени вместе с доказательством её полноты приведены в работе [9]. Подстановка формул в эти аксиомы и использование правил вывода теоретически позволяют перечислить все возможные выводы общезначимых формул из аксиом. Однако такой путь практически не даёт вывода данной произвольной формулы из этих аксиом. В настоящей работе сформулирован эффективный алгоритм построения вывода произвольной общезначимой формулы из аксиом, а также доказаны его полнота и корректность. Этот результат анонсирован в работе [4].

Вопросы сравнения с известным табличным алгоритмом Эмерсона рассмотрены в работе [7]. В ней доказано, что размер схемы модели не превосходит размера табличного графа Эмерсона и приведены примеры классов формул, для которых схемы моделей существенно меньше табличных графов Эмерсона. В указанной работе также приведён пример применения алгоритма к решению достаточно сложной шахматной задачи (см. также [2, 5]). Условие задачи записано в виде формулы логики ветвящегося времени, выполнимость которой означает существование решения, и это решение получено по модели, построенной для формулы. Другой пример применения алгоритма распознавания выполнимости приведён в работе [3].

В § 1 настоящей работы вводятся основные понятия для логики ветвящегося времени. Алгоритм распознавания выполнимости содержится в §§ 2–4 и состоит из трёх частей. В § 2 даётся определение схемы модели и формулируется первая часть алгоритма — построение схемы модели. Второй частью алгоритма, изложенной в § 3, является фильтрование схемы модели, состоящее в проверке подтверждённости в вершинах схемы модели так называемых формул-обещаний. Третья часть алгоритма изложена в § 4 и состоит в построении модели в случае её существования, т. е. в случае выполнимости формулы. В § 5 устанавливаются некоторые свойства алгоритма, используемые в дальнейшем, и доказывается теорема о его завершаемости. В § 6 доказывается теорема о корректности работы алгоритма, утверждающая, что в найденной алгоритмом модели исследуемая формула истинна. В § 7 формулируется эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом и даётся доказательство его корректности и полноты. С использованием результатов §§ 5–7 в § 8 доказывается теорема о полноте алгоритма распознавания выполнимости формул, утверждающая, что если формула выполнима, то некоторая её модель будет найдена алгоритмом, и эта модель конечна.

§ 1. Логика ветвящегося времени. Основные понятия

В п. 1.1 этого параграфа приводятся подробные определения, а в п. 1.2 — примеры и лемма о модели, в которой граф тотален.

1.1. Определения и обозначения. Пропозициональные переменные в логике ветвящегося времени будем обозначать символами p, q, а формулы — символами Θ, φ, ψ, θ, χ, ϑ, приписывая иногда внизу индексы.

Определим понятие *формулы логики ветвящегося времени.*

Каждая пропозициональная переменная есть формула. Если φ, ψ — формулы, то θ, являющаяся одним из 12 выражений: $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall\circ\varphi$, $\exists\circ\varphi$, $\forall\Box\varphi$, $\exists\Box\varphi$, $\forall\Diamond\varphi$, $\exists\Diamond\varphi$, $\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$, $\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$, тоже называется формулой, а φ и ψ называются подформулами формулы θ. Если

φ — формула, то φ также называется подформулой формулы φ. Если φ — подформула формулы θ, а ψ — подформула формулы φ, то ψ называется также подформулой формулы θ. Других формул и подформул нет.

Для любого графа если из вершины u_i ведёт дуга в вершину u_j, то вершину u_i будем называть родителем вершины u_j, а вершину u_j — сыном вершины u_i. *Путём* в графе с началом в вершине u_{i_1} будем считать конечную или бесконечную последовательность вершин $< u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}, \ldots >$, в которой всякая последующая вершина, является сыном предшествующей, причём вершины в этой последовательности могут повторяться. *Цепью* в графе с началом в вершине u_{i_1} будем считать конечную последовательность вершин $< u_{i_1}, \ldots, u_{i_n} >$, $n \geqslant 1$, в которой всякая последующая вершина, является сыном предшествующей, причём каждая вершина графа встречается в этой последовательности не более одного раза. Для всякой вершины u_{i_1} всегда существуют тривиальный путь и тривиальная цепь с началом в этой вершине — $< u_{i_1} >$. Если существует путь с началом в вершине u_i, содержащий вершину u_j, то вершину u_j будем называть *достижимой из вершины* u_i. *Полным путём* в графе называется бесконечный путь или путь, последняя вершина которого не имеет сыновей.

Модель — это пара $M = \langle \Gamma, L \rangle$, где Γ — это связный ориентированный граф с выделенной вершиной u_0 (называемой также начальной), из которой достижимы все вершины этого графа, а L — функция означивания (называемая также оценкой), сопоставляющая каждой вершине множество пропозициональных переменных.

Истинность формулы θ в вершине u_i модели M (обозначим это $M, u_i \models \theta$) определяется индуктивно:

— если θ есть пропозициональная переменная p, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow p \in L(u_i)$,

— если θ есть $(\varphi \wedge \psi)$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow M, u_i \models \varphi$ и $M, u_i \models \psi$,

— если θ есть $(\varphi \vee \psi)$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow M, u_i \models \varphi$ или $M, u_i \models \psi$,

— если θ есть $(\varphi \to \psi)$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow M, u_i \models \psi$ или $M, u_i \not\models \varphi$ (т. е. неверно, что $M, u_i \models \varphi$),

— если θ есть $\neg\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow M, u_i \not\models \varphi$,

— если θ есть $\forall\bigcirc\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ для каждого сына u_j вершины u_i верно $M, u_j \models \varphi$; либо вершина u_i сыновей не имеет,

— если θ есть $\exists\bigcirc\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ существует хотя бы один сын u_j вершины u_i, и верно $M, u_j \models \varphi$,

— если θ есть $\forall\Box\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ для каждого полного пути в графе с началом в вершине u_i в каждой его вершине u_j верно $M, u_j \models \varphi$,

— если θ есть $\exists\Box\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ существует полный путь в графе с началом в вершине u_i, в каждой вершине u_j которого верно $M, u_j \models \varphi$,

— если θ есть $\forall\Diamond\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ для каждого полного пути в графе с началом в вершине u_i найдётся вершина u_j этого пути, для которой верно $M, u_j \models \varphi$,

— если θ есть $\exists\Diamond\varphi$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ существует полный путь в графе с началом в вершине u_i, в котором найдётся вершина u_j, для которой верно $M, u_j \models \varphi$,

— если θ есть $\forall(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ для каждого полного пути в графе с началом в вершине u_i найдётся вершина u_j этого пути, для которой верно $M, u_j \models \psi$, а в каждой вершине u_k этого пути, предшествующей u_j, верно $M, u_k \models \varphi$,

— если θ есть $\exists(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)$, то $M, u_i \models \theta \Longleftrightarrow$ существует полный путь в графе с началом в вершине u_i, для которого найдётся вершина u_j этого пути, для которой верно $M, u_j \models \psi$, а в каждой вершине u_k этого пути, предшествующей u_j, верно $M, u_k \models \varphi$.

Если $M, u_i \not\models \theta$, то будем говорить, что формула θ не истинна в модели M вершине u_i.

Формула θ *истинна в модели* M, если она истинна в начальной вершине u_0 этой модели. Модель, в которой истинна формула θ, называется *моделью для формулы* θ *). Формула θ *выполнима*, если она истинна в некоторой модели. Формула θ *общезначима*, если она истинна в каждой модели.

1.2. Примеры. Пример 1.1. Рассмотрим модели $M_1 = \langle \Gamma_1, L_1 \rangle$ и $M_2 = \langle \Gamma_2, L_2 \rangle$, где $\Gamma_1 = \{(u_0, u_1), (u_0, u_2), (u_1, u_0)\}$, $L_1(u_0) = \{p\}$, $L_1(u_1) = \varnothing$, $L_1(u_2) = \{q\}$, Γ_2 состоит из единственной вершины u_0 и не имеет дуг, а $L_2(u_0) = \{q\}$ — см. рис. 1.

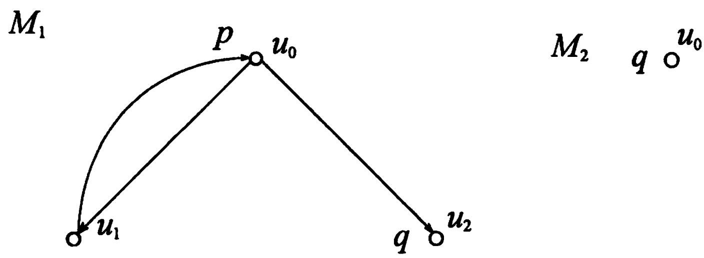

Рис. 1

Рассмотрим формулы: $\theta_1 = \forall\bigcirc q$, $\theta_2 = \exists\bigcirc q$, $\theta_3 = \forall\Box q$, $\theta_4 = \exists\Box q$, $\theta_5 = \forall\Diamond q$, $\theta_6 = \exists\Diamond q$, $\theta_7 = \forall(p\,\mathcal{U}\,q)$, $\theta_8 = \exists(p\,\mathcal{U}\,q)$. Тогда верны следующие утверждения:

$M_1, u_0 \not\models \theta_1$,	$M_2, u_0 \models \theta_1$,	$M_1, u_0 \models \theta_2$,	$M_2, u_0 \not\models \theta_2$,
$M_1, u_0 \not\models \theta_3$,	$M_2, u_0 \models \theta_3$,	$M_1, u_0 \not\models \theta_4$,	$M_2, u_0 \models \theta_4$,
$M_1, u_0 \not\models \theta_5$,	$M_2, u_0 \models \theta_5$,	$M_1, u_0 \models \theta_6$,	$M_2, u_0 \models \theta_6$,
$M_1, u_0 \not\models \theta_7$,	$M_2, u_0 \models \theta_7$,	$M_1, u_0 \models \theta_8$,	$M_2, u_0 \models \theta_8$.

Пример 1.2. Формула $\theta = ((\exists\Box\neg q \wedge \forall\bigcirc(q \vee p)) \wedge \exists\bigcirc\neg p)$ выполнима.

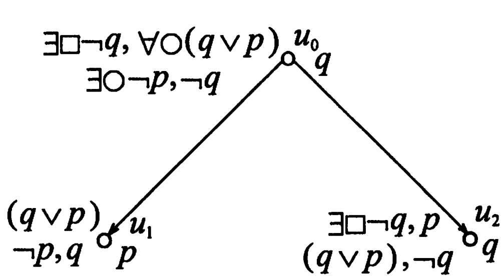

Рис. 2.

Рассмотрим модель $M = \langle \Gamma, L \rangle$, где $\Gamma = \{(u_0, u_1), (u_0, u_2)\}$, $L(u_0) = \varnothing$, $L(u_1) = \{q\}$, $L(u_2) = \{p\}$. Ясно, что $M, u_0 \models \exists\Box\neg q$, так как $< u_0, u_2 >$ — полный путь с началом в вершине u_0 и $q \notin L(u_0)$, $q \notin L(u_2)$; $M, u_0 \models \forall\bigcirc(q \vee p)$, так как $M, u_1 \models (q \vee p)$, потому что $q \in L(u_1)$, и $M, u_2 \models (q \vee p)$, потому что $p \in L(u_2)$; $M, u_0 \models \exists\bigcirc\neg p$, так как $p \notin L(u_1)$. Поэтому $M, u_0 \models \theta$. Модель M изображена на рис. 2. Слева от вершины расположены истинные в ней формулы, а справа — некоторые формулы, которые не истинны.

Пример 1.3. Формула $\theta = (\forall\bigcirc(p \wedge q) \wedge (\exists\bigcirc\neg p \vee \exists\bigcirc\neg q))$ невыполнима. Докажем это.

Допустим, что формула θ выполнима. Тогда существует модель M, в которой верно $M, u_0 \models \theta$. Тогда по определению истинности формулы вида $(\varphi \wedge \psi)$ также верно и $M, u_0 \models \forall\bigcirc(p \wedge q)$, $M, u_0 \models (\exists\bigcirc\neg p \vee \exists\bigcirc\neg p)$. Из последнего утверждения получаем, что $M, u_0 \models \exists\bigcirc\neg p$ или $M, u_0 \models \exists\bigcirc\neg q$. Если верно

*) Таким образом, следует отличать модель вообще от модели для формулы.

$M, u_0 \models \exists \bigcirc \neg p$, то вершина u_0 имеет некоторого сына u_i, для которого верно $M, u_i \models \neg p$, т. е. $M, u_i \not\models p$. Но по определению истинности формулы вида $\forall \bigcirc \varphi$ из $M, u_0 \models \forall \bigcirc (p \wedge q)$ следует $M, u_i \models (p \wedge q)$, т. е. $M, u_i \models p$, откуда получается противоречие. Если же верно $M, u_0 \models \exists \bigcirc \neg q$, то вершина u_0 имеет некоторого сына u_j, для которого верно $M, u_j \models \neg q$, т. е. $M, u_j \not\models q$. Тогда из $M, u_0 \models \forall \bigcirc (p \wedge q)$ следует $M, u_j \models (p \wedge q)$, т. е. $M, u_j \models q$, и также получается противоречие. Невыполнимость формулы θ доказана.

Будем считать $\top$ сокращением для тождественно истинной (т. е. общезначимой) формулы, пусть для определенности $\top$ является формулой $(p \vee \neg p)$. Пусть $\perp$ является сокращением для тождественно ложной (т. е. невыполнимой) формулы, пусть для определенности $\perp$ является формулой $(p \wedge \neg p)$. Пусть выражение $\varphi \equiv \psi$ является сокращением для формулы $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$. Очевидно, что из общезначимости формул $(\varphi \to \psi)$ и $(\psi \to \varphi)$ следует общезначимость формулы $\varphi \equiv \psi$. Если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, то формулы φ и ψ будем называть *эквивалентными*. Поскольку формулы $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$, $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$, $((\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta))$, $((\varphi \vee \psi) \vee \vartheta) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \vartheta))$ общезначимы, в дальнейшем скобки в формулах, имеющих вид вложенных конъюнкций или дизъюнкций, в некоторых случаях будут опускаться; при этом порядок следования конъюнктивных или дизъюнктивных членов в этих формулах не важен.

Напомним, что граф называется *тотальным* если у каждой его вершины есть сын. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Формула $\forall \Box \exists \bigcirc \top$ истинна в модели M тогда и только тогда, когда граф в модели тотален.*

Доказательство. Очевидно, что для любой модели M истинность формулы $\forall \Box \varphi$ в вершине u_i означает истинность формулы φ в вершине u_i и во всех вершинах, достижимых из нее. Допустим, что граф в модели тотален. Тогда во всякой его вершине истинна формула $\exists \bigcirc \top$, так как у всякой вершины есть сын, а, значит, и истинна формула $\forall \Box \exists \bigcirc \top$ в вершине u_0.

Допустим, что формула $\forall \Box \exists \bigcirc \top$ истинна в некоторой модели M в вершине u_0. Тогда истинна формула $\exists \bigcirc \top$ в вершине u_0. Значит, у вершины u_0 есть хотя бы один сын. Тогда в каждом сыне u_i, в свою очередь, истинна формула $\exists \bigcirc \top$ в силу истинности формулы $\forall \Box \exists \bigcirc \top$ в вершине u_0 и достижимости u_i из u_0. Значит, у каждой вершины u_i также есть хотя бы один сын. Продолжая этот процесс, получаем, что у каждой вершины есть сын, т. е. граф в модели тотален. Лемма доказана.

Всюду ниже будут рассматриваться модели в общем случае — когда на граф не наложено ограничение в виде тотальности. Эти общие модели позволяют применять логику ветвящегося времени к значительно более широкому кругу задач, нежели модели с тотальными графами, рассматриваемые Эмерсоном в работах [8, 9, 11]. В то же время если исследовать на выполнимость формулу θ в рамках моделей с тотальными графами, то в силу леммы 1.1 для этого необходимо и достаточно рассматривать выполнимость формулы $(\theta \wedge \forall \Box \exists \bigcirc \top)$ в соответствии с определениями п. 1.1.

§ 2. Построение схемы модели

В этом параграфе излагается первая часть алгоритма распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени — построение размеченной и завершённой схем моделей.

2.1. Основные определения. *Схема модели* — это конечный связный ориентированный граф G, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Множество вершин и дуг графа G либо пусто (в этом случае схему модели будем называть пустой), либо в G выделена вершина, называемая начальной и обозначаемая символом D_0.

2. Вершины графа G обозначаются символами $B_0, B_1, \ldots$ и делятся на два вида: основные, обозначаемые символами C_0, $C_1, \ldots$, и вре́менные, обозначаемые символами D_0, $D_1, \ldots$.

3. В графе G сыном основной вершины может быть только вре́менная, а сыном вре́менной — только основная. При этом каждая вре́менная вершина имеет хотя бы одного сына. Основная вершина, не имеющая сыновей, называется концевой.

4. В графе G каждой вершине B_i приписано конечное множество B_i^+ формул, называемых положительными, и конечное множество B_i^- формул, называемых отрицательными. К некоторым формулам из этих множеств в основных вершинах приписывается справа символ $\star$ *).

Пусть G — схема модели. Введём для неё следующие обозначения.

Если вершина B_i содержит не помеченные символом $\star$ формулы, то формулой χ_{B_i} обозначается конъюнкция всех таких положительных формул, а также отрицаний отрицательных формул. В противном случае формулой χ_{B_i} является формула $\top$. Формула χ_{B_i} называется *характеристической формулой* (х.ф.) *вершины* B_i.

Если для основной вершины C_i верно $C_i^+ \cup C_i^- \neq \varnothing$, то формулой $\chi^\star_{C_i}$ обозначается конъюнкция всех положительных формул, а также отрицаний всех отрицательных формул (как помеченных, так и непомеченных). В противном случае формулой $\chi^\star_{C_i}$ является формула $\top$. Формула $\chi^\star_{C_i}$ называется *полной характеристической формулой* (п.х.ф.) *вершины* C_i.

Некоторым вершинам приписывается верхний индекс $\perp$ (либо $\top$). Такие вершины называются $\perp$-помеченными ($\top$-помеченными), что содержательно означает невыполнимость (выполнимость) х.ф. данной вершины. Если вершина B_i $\perp$-помечена или $\top$-помечена, то она называется *помеченной.*

Цепью в схеме модели G с началом в вершине B_i будем считать конечную последовательность вершин, в которой всякая последующая вершина, является сыном предшествующей, причём каждая вершина графа G встречается в этой последовательности не более одного раза. Для всякой вершины B_i всегда существует тривиальная цепь с началом в этой вершине, которая содержит только эту вершину.

Вершина B_i называется *$\perp$-свободно* (*$\top$-свободно*) *достижимой*, если в G существует цепь, идущая из начальной вершины в вершину B_i, каждая вершина которой не является $\perp$-помеченной ($\top$-помеченной). Вершина B_i, которая $\perp$-свободно и $\top$-свободно достижима, называется *свободно достижимой.*

Если вершина B_i $\perp$-свободно достижима, то она также называется *полезной* вершиной. Если вершина B_i не $\perp$-свободно достижима то она называется *$\perp$-вершиной.* Если вершина B_i не $\top$-свободно достижима то она называется *$\top$-вершиной.*

2.2. Пояснения к определениям. Содержательно дуги из основной вершины C_i в её сыновья означают, что подтверждение истинности формул из C_i^+ и истинности отрицаний формул из C_i^- зависит от подтверждения истинности формул и соответственно отрицаний истинности формул в каждом её сыне. При решении задач это означает, что надо учитывать все возможные варианты, ответы соперника в конкретной ситуации. Вре́менные вершины введены для удобства описания алгоритма; дуга из вре́менной вершины в основную носит формальный характер и не означает в отличие от

*) Этот символ приписывается в точности к тем формулам, которые оказались разобранными путём применения в п. 2.4 правил 1–6.

дуги из основной вершины перехода к следующей ситуации. Сыновья вре́менной вершины — это наши ресурсы, возможности, т. е. миры-состояния, получаемые при нашем выборе некоторых альтернатив. В зависимости от информации о характере задачи, заложенной в строении формулы, каждая текущая схема модели при построении соответствует некоторой стадии решения, каждая вершина — отдельному состоянию, каждое правило — шагу решения. Поэтому весь ход разбора исходной формулы, записывающей конкретную задачу, можно полностью перевести на язык данной задачи. При этом можно заменять пропозициональные связки, временны́е операторы и кванторы на соотвествующие им слова, а пропозициональные переменные — на соответствующие им высказывания так, что человек может «прочитать» процесс построения схемы модели в терминах конкретной прикладной задачи. Таким путем, в частности, человек может получить и обоснование отсутствия решения. При решении задачи значения отдельных высказываний в некоторых ситуациях не влияют на ответ, и человек их не оценивает. В построении схемы модели мы также можем не определять значения пропозициональных переменных, не влияющих на истинность формулы в модели. Человек может и участвовать в построении схемы модели, фиксируя удобный порядок применения правил и выбирая ту или иную концевую вершину, учитывая характер прикладной задачи. Перечисленные факты показывают возможности участия человека при компьютерной реализации алгоритма.

2.3. Дополнительные определения. В начале исследования формулы Θ на выполнимость схема модели G состоит из вершин D_0, C_0, дуги (D_0, C_0), где $D_0^+ = \{\Theta\}$, $D_0^- = \varnothing$, $C_0^+ = \{\Theta\}$, $C_0^- = \varnothing$. Такая схема модели называется *начальной*. Схема модели называется *$\bot$-размеченной* (*$\top$-размеченной*), если её начальная вершина $\bot$-помечена ($\top$-помечена). Схема модели G называется *размеченной*, если она 1) $\bot$-размечена; либо 2) $\top$-размечена; или 3) каждая концевая вершина в G помечена или не является свободно достижимой.

Построение размеченной схемы модели начинается с начальной схемы модели и состоит в применении указанных ниже правил 1–6 в порядке их следования. Для схемы модели каждое правило применяется к некоторой непомеченной концевой свободно достижимой основной вершине C_i и даёт новую схему модели.

Как обычно, оператор $:=$ означает, что левой части оператора присваивается значение, равное правой части оператора, а $B_i = B_{i'}$ означает, что $B_i^+ = B_{i'}^+$ и $B_i^- = B_{i'}^-$. Если $B_i = B_{i'}$, то вершины B_i и $B_{i'}$ называются *равными*. Всюду в дальнейшем в случае записи $C_i^+ := C_i^+ \cup \{\varphi\}$ ($C_i^- := C_i^- \cup \{\varphi\}$) формула φ добавляется во множество C_i^+ (C_i^-) тогда и только тогда, когда множество C_i^+ (C_i^-) не содержит ни формулу φ, ни формулу $\varphi\star$. Будем говорить, что *формула* φ, где $\varphi \in C_i^+$ ($\varphi \in C_i^-$), *помечается знаком* $\star$, если $C_i^+ := (C_i^+ \setminus \varphi) \cup \{\varphi\star\}$ ($C_i^- := (C_i^- \setminus \varphi) \cup \{\varphi\star\}$).

2.4. Правила построения размеченной схемы модели. Зафиксируем следующий порядок применения правил 1–6 к основным вершинам в схеме модели. Пусть эти правила применяются к основным вершинам в порядке их появления в схеме модели.

1. *Правило противоречия.* Условие применения правила: 1) $\top \in C_i^-$, или 2) $\bot \in C_i^+$, или 3) существует такая формула θ, что θ или $\theta\star$ принадлежит C_i^+ и θ или $\theta\star$ принадлежит C_i^-. Применение правила состоит в выполнении рекурсивной процедуры $\bot$-разметки с индексом 0 для вершины C_i.

Процедура $\bot$-разметки с индексом n_i для вершины C_i. Вершине C_i приписывается верхний индекс $\bot n_i$. Если каждый родитель D_i вершины C_i $\bot$-помечен или имеет сына без $\bot$-пометки, то процедура $\bot$-разметки окончена. Иначе каждому родителю D_{i_k} вершины C_i, не имеющему $\perp$-пометки, но все сыновья которого $\perp$-помечены, приписывается верхний индекс $\perp n_{i_k}$, где n_{i_k} есть максимальный индекс $\perp$-пометок сыновей вершины D_{i_k}. Если теперь каждый родитель каждой такой вершины D_{i_k} $\perp$-помечен, то процедура $\perp$-разметки окончена. Иначе выделяется каждая вершина C_j без $\perp$-пометки, являющаяся родителем хотя бы одной из таких вершин D_{i_k}. Пусть n_j — минимальный из индексов $\perp$-пометок вершин, являющихся сыновьями вершины C_j. Тогда процедура $\perp$-разметки выполняется с индексом n_j+1 для каждой такой вершины C_j. Конец процедуры $\perp$-разметки.

Комментарий. Ниже (§ 5, п. 5.3) будет показано, что если вершина B_i становится $\perp$-помеченной, то её х.ф. невыполнима.

2. *Правило завершения.* Условие применения правила: 1) $\chi_{C_i}=\top$, или 2) $\chi_{C_i}=\neg\perp$, или 3) каждая непомеченная формула из C_i^+ является пропозициональной переменной или формулой вида $\forall\bigcirc\varphi$, и каждая непомеченная формула из C_i^- является пропозициональной переменной или формулой вида $\exists\bigcirc\varphi$. Применение правила состоит в выполнении рекурсивной процедуры $\top$-разметки с индексом 0 для вершины C_i.

Процедура $\top$-разметки с индексом n_i для вершины C_i. Вершине C_i приписывается верхний индекс $\top n_i$. Если каждый родитель D_i вершины C_i $\top$-помечен, то процедура $\top$-разметки окончена. Иначе каждому родителю D_{i_k} вершины C_i, не имеющему $\top$-пометки, приписываются верхние индексы $\top n_i+1, C_i$. Если теперь каждый родитель вершин D_{i_k} $\top$-помечен или имеет сына без $\top$-пометки, то процедура $\top$-разметки окончена. Иначе выделяется каждая вершина C_j без $\top$-пометки, имеющая только $\top$-помеченных сыновей, среди которых есть хотя бы одна из таких вершин D_{i_k}. Пусть $D_{j_1}^{\top n_{j_1}, C_{j_1}}, \ldots, D_{j_m}^{\top n_{j_m}, C_{j_m}}$ — все сыновья такой вершины C_j, и $n_j=\max\limits_{1\leqslant h\leqslant m} n_{j_h}$, где n_{j_h} — индекс $\top$-пометки вершины D_{j_h}. Тогда процедура $\top$-разметки выполняется с индексом n_j для каждой из выделенных вершин C_j. Конец процедуры $\top$-разметки.

Комментарий. Очевидно, что $C_i^+\cap C_i^-=\varnothing$, так как иначе было бы применено правило 1, а всякая формула вида $\forall\bigcirc\varphi$ или $\neg\exists\bigcirc\varphi$ является истинной в концевой вершине модели. Ниже (§ 5, п. 5.4) будет показано, что если вершина B_i становится $\top$-помеченной, то её х.ф. выполнима.

3. *Правило эквивалентности.* Условия применения правила:

$$\text{a) } \theta=\forall\Box\varphi\in C_i^+,\quad \text{b) } \theta=\exists\Box\varphi\in C_i^+,\quad \text{c) } \theta=\forall\Diamond\varphi\in C_i^+,$$
$$\text{d) } \theta=\exists\Diamond\varphi\in C_i^+,\quad \text{e) } \theta=\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)\in C_i^+,\quad \text{f) } \theta=\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)\in C_i^+.$$

Для C_i^- условия применения этого правила аналогичны условиям a)–f). Обозначим их g)–l). Применение правила состоит в пометке формулы θ знаком $\star$ и введении формулы θ' для условий a)–l) соответственно:

$$\text{a), } g)\ \theta'=(\varphi\wedge\forall\bigcirc\forall\Box\varphi),\qquad \text{b), } h)\ \theta'=(\varphi\wedge(\exists\bigcirc\exists\Box\varphi\vee\forall\bigcirc\perp)),$$
$$\text{c), } i)\ \theta'=(\varphi\vee(\forall\bigcirc\forall\Diamond\varphi\wedge\exists\bigcirc\top)),\qquad \text{d), } j)\ \theta'=(\varphi\vee\exists\bigcirc\exists\Diamond\varphi),$$
$$\text{e), } k)\ \theta'=(\psi\vee((\varphi\wedge\forall\bigcirc\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi))\wedge\exists\bigcirc\top)),$$
$$\text{f), } l)\ \theta'=(\psi\vee(\varphi\wedge\exists\bigcirc\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi))).$$

Далее, в случаях a)–f) $C_i^+:=C_i^+\cup\{\theta'\}$, в случаях g)–l) $C_i^-:=C_i^-\cup\{\theta'\}$, а затем происходит возможное отождествление вершины C_i.

Здесь и в правилах 4–6 *отождествление* вершины C_i состоит в следующем. Если D_i — родитель вершины C_i, и в схеме модели существует вершина C_j, равная вершине C_i, то проводится дуга (D_i, C_j) (в случае её отсутствия), а дуга (D_i, C_i) и вершина C_i удаляются. Теперь если вершина C_j помечена и индекс её пометки есть n_j, то для неё выполняется соответствующая процедура разметки с индексом n_j.

К о м м е н т а р и й. Данные эквивалентности $\theta \equiv \theta'$ получаются на основании леммы 5.1 (§ 5, п. 5.1). Систематическое их применение позволяет в дальнейшем рассматривать только формулы с главной пропозициональной связкой, а также формулы вида $\forall\bigcirc\varphi$ и $\exists\bigcirc\varphi$.

4. *Правило линейности.* Условия применения правила:

$$\text{a) } \theta = \top \in C_i^+, \quad \text{b) } \theta = \bot \in C_i^-, \quad \text{c) } \theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_i^+,$$
$$\text{d) } \theta = (\varphi \vee \psi) \in C_i^-, \quad \text{e) } \theta = (\varphi \to \psi) \in C_i^-,$$
$$\text{f) } \theta = \neg\varphi \in C_i^+, \quad \text{g) } \theta = \neg\varphi \in C_i^-.$$

Применение правила состоит в пометке формулы θ знаком $\star$. Далее, для условий c)–g) соответственно:

$$\begin{aligned}
&\text{c) } C_i^+ := C_i^+ \cup \{\varphi\}, \quad C_i^+ := C_i^+ \cup \{\psi\},\\
&\text{d) } C_i^- := C_i^- \cup \{\varphi\}, \quad C_i^- := C_i^- \cup \{\psi\},\\
&\text{e) } C_i^+ := C_i^+ \cup \{\varphi\}, \quad C_i^- := C_i^- \cup \{\psi\},\\
&\text{f) } C_i^- := C_i^- \cup \{\varphi\}, \quad \text{g) } C_i^+ := C_i^+ \cup \{\varphi\}.
\end{aligned}$$

В заключительной части правила происходит возможное отождествление вершины C_i.

К о м м е н т а р и й. Здесь мы также производим локальные (т. е. относящиеся только к данной вершине) преобразования, заменяя формулы на подформулы. Истинность формул $\top$ и $\neg\bot$ очевидна, а случаи c)–g) соответствуют приведённому выше индуктивному определению истинности формул.

5. *Правило ветвления.* Условия применения правила:

$$\text{a) } \theta = (\varphi \vee \psi) \in C_i^+, \quad \text{b) } \theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_i^-, \quad \text{c) } \theta = (\varphi \to \psi) \in C_i^+.$$

Применение правила состоит в пометке формулы θ знаком $\star$, добавлению в G новой вершины $C_{i'}$, где $C_{i'} = C_i$, и дуги $(D_i, C_{i'})$, где D_i — родитель C_i. Далее, соответственно условиям:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } C_i^+ := C_i^+ \cup \{\varphi\}, \quad C_{i'}^+ := C_{i'}^+ \cup \{\psi\},\\
&\text{b) } C_i^- := C_i^- \cup \{\varphi\}, \quad C_{i'}^- := C_{i'}^- \cup \{\psi\},\\
&\text{c) } C_i^+ := C_i^+ \cup \{\psi\}, \quad C_{i'}^- := C_{i'}^- \cup \{\varphi\}.
\end{aligned}$$

В заключительной части правила происходит возможное отождествление вершин C_i, $C_{i'}$.

К о м м е н т а р и й. В данной группе правил появляется новая вершина $C_{i'}$ — другой сын родителя C_i. Три случая правила соответствуют приведенному выше индуктивному определению истинности формул. Здесь это означает разбор двух альтернатив.

6. *Правило построения новых вершин.* Условие применения правила:

$$\exists\bigcirc\vartheta_1, \ldots, \exists\bigcirc\vartheta_m, \forall\bigcirc\varphi_1, \ldots, \forall\bigcirc\varphi_l \in C_i^+;$$
$$\forall\bigcirc\vartheta_{m+1}, \ldots, \forall\bigcirc\vartheta_{m+n}, \exists\bigcirc\psi_1, \ldots, \exists\bigcirc\psi_r \in C_i^- \text{ —}$$

все положительные и отрицательные непомеченные формулы в вершине C_i, отличные от пропозициональных переменных, $m+n \geqslant 1$, $l \geqslant 0$, $r \geqslant 0$. Тогда положим:

$$\begin{gathered}
D_{i_1}^{+} = \{\vartheta_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_l\}, \quad D_{i_1}^{-} = \{\psi_1, \ldots, \psi_r\}, \quad \ldots, \\
\ldots, \quad D_{i_m}^{+} = \{\vartheta_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_l\}, \quad D_{i_m}^{-} = \{\psi_1, \ldots, \psi_r\}, \\
D_{i_{m+1}}^{+} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}, \quad D_{i_{m+1}}^{-} = \{\vartheta_{m+1}, \psi_1, \ldots, \psi_r\}, \quad \ldots, \\
\ldots, \quad D_{i_{m+n}}^{+} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}, \quad D_{i_{m+n}}^{-} = \{\vartheta_{m+n}, \psi_1, \ldots, \psi_r\}.
\end{gathered}$$

Для каждого множества равных вершин среди $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{m+n}}$ оставляется лишь одна вершина из этого множества. Для каждой оставленной вершины D_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant m+n$, если в G существует такая вершина D_q, что $D_q = D_{i_j}$, то добавляется дуга (C_i, D_q), а иначе добавляются вершины D_{i_j}, C_{i_j} и дуги (C_i, D_{i_j}), (D_{i_j}, C_{i_j}), где $C_{i_j} := D_{i_j}$, и в конце правила происходит возможное отождествление каждой новой вершины C_{i_j}. Если после всех отождествлений вершина C_i оказалась не $\top$-помеченной, а все её сыновья $\top$-помечены, причём максимальный индекс их $\top$-пометок равен n_i, то для вершины C_i выполняется процедура $\top$-разметки с индексом n_i; если же вершина C_i оказалась не $\perp$-помеченной и имеет хотя бы одного $\perp$-помеченного сына, причём n_i — минимальный из индексов её сыновей, то для вершины C_i выполняется процедура $\perp$-разметки с индексом n_i+1.

Комментарий. Вершина C_i называется родителем вершины D_{i_j} (либо равной ей вершины D_q) по правилу 6 для формулы $\exists\bigcirc\vartheta_j$ при $1 \leqslant j \leqslant m$, либо для формулы $\forall\bigcirc\vartheta_j$ при $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$. Легко видеть, что условие применения этого правила полностью отлично от условия применения правила 2. Благодаря порядку применения правил в C_i^+ и C_i^- из не помеченных знаком $\star$ формул могут содержаться лишь пропозициональные переменные и формулы вида $\forall\bigcirc\varphi$ и $\exists\bigcirc\varphi$. Для выяснения истинности этих формул необходимо рассмотреть их подформулы в одном или нескольких сыновьях вершины C_i.

2.5. Приведение размеченной схемы модели к завершённой и окончание первой части алгоритма. *Завершённой схемой модели* называется схема модели, полученная из размеченной схемы модели приведением, т. е. удалением всех $\perp$-вершин, затем удалением $\top$-вершин без $\top$-пометки, а также всех входящих и выходящих из них дуг.

Если завершённая схема модели оказалась пустой, то алгоритм распознавания выполнимости даёт ответ, что исходная формула Θ невыполнима. Если в завершённой схеме модели начальная вершина оказалась $\top$-помеченной, то алгоритм распознавания выполнимости даёт ответ, что исходная формула Θ выполнима и строит модель, в которой Θ истинна (§ 4, п. 4.1). Если же завершённая схема модели не пуста и её начальная вершина не является $\top$-помеченной, то второй частью исследования формулы Θ на выполнимость является фильтрование завершённой схемы модели (см. § 3).

§ 3. Фильтрование схемы модели

Вторую часть алгоритма распознавания выполнимости составляют фильтрование схемы модели и приведение полученной повторно размеченной схемы модели к заключительной. Фильтрование схемы модели состоит в выполнении процедуры фильтрования, выделяющей в схеме модели вершины, которые, как и ранее в правиле 1 § 2, становятся $\perp$-помеченными.

Однако, если в правиле 1, применяемом к основной вершине, противоречие, вызывающее $\bot$-помеченность вершин, является явным — зависящим только от положительных и отрицательных формул в этой вершине, то теперь оно связано с так называемой неподтверждённостью обещания.

3.1. Определение обещаний. *Обещанием, содержащемся в вершине* C_i (D_i), будем называть формулу θ в одном из 6 случаев (пометки $\star$ здесь и ниже опускаются):

$$\text{a) } \theta = \exists\Diamond\psi \in C_i^+,\quad \text{b) } \theta = \forall\Diamond\psi \in C_i^+,\quad \text{c) } \theta = \exists\Box\psi \in C_i^-,$$
$$\text{d) } \theta = \forall\Box\psi \in C_i^-,\quad \text{e) } \theta = \exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+,\quad \text{f) } \theta = \forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+.$$

Стандартным обещанием формулы θ называется сама формула θ — в случаях a), b), e), f), либо формула $\neg\theta$ — в случаях c) и d).

Будем говорить, что в случаях a), d), e) обещание θ имеет тип $\exists$, а в случаях b), c), f) — тип $\forall$.

Исполнением обещания θ (*отложенным обещанием* θ), содержащемся в вершине C_i (D_i), будут называться соответственно формулы:

$$\text{a) } \psi \in C_i^+ \ (\exists\circ\exists\Diamond\psi \in C_i^+),\quad \text{b) } \psi \in C_i^+ \ (\forall\circ\forall\Diamond\psi \in C_i^+),$$
$$\text{c) } \psi \in C_i^- \ (\exists\circ\exists\Box\psi \in C_i^-),\quad \text{d) } \psi \in C_i^- \ (\forall\circ\forall\Box\psi \in C_i^-),$$
$$\text{e) } \psi \in C_i^+ \ (\exists\circ\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+),\quad \text{f) } \psi \in C_i^+ \ (\forall\circ\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+).$$

Стандартное исполнение обещания θ (*стандартное отложенное обещание* θ) в случаях a), b), e), f) совпадает с исполнением обещания θ (отложенным обещанием θ), а в случаях c) и d) является отрицанием исполнения обещания θ (отложенного обещания θ).

Понятия стандартного обещания, стандартного исполнения обещания и стандартного отложенного обещания вводятся для единой работы как с обещаниями, являющимися положительными формулами, так и с обещаниями, являющимися отрицательными формулами.

Полным обещанием θ будут называться соответственно формулы:

$$\text{a) } (\psi \vee \exists\circ\exists\Diamond\psi) \in C_i^+,\quad \text{b) } (\psi \vee (\forall\circ\forall\Diamond\psi \wedge \exists\circ\top)) \in C_i^+,$$
$$\text{c) } (\psi \wedge (\exists\circ\exists\Box\psi \vee \forall\circ\bot)) \in C_i^-,\quad \text{d) } (\psi \wedge \forall\circ\forall\Box\psi) \in C_i^-,$$
$$\text{e) } (\psi \vee (\varphi \wedge \exists\circ\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi))) \in C_i^+,\quad \text{f) } (\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\circ\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)) \wedge \exists\circ\top)) \in C_i^+.$$

В процессе построения размеченной схемы модели обещания по правилу 3 заменяются полными обещаниями, и эквивалентность такой замены основывается на лемме 5.1 (см. § 5, п. 5.1). Однако, при таком подходе вопрос выполнимости х.ф. вершины, содержащей обещания, может сводиться к вопросу выполнимости х.ф. последующих вершин, содержащих эти обещания, и оставаться на этапе построения завершённой схемы модели без ответа. Требуемый ответ будет получен, если для каждого обещания и содержащей его основной вершины мы проанализируем специальные подграфы, порождённые этой вершиной, которые состоят из определённых множеств вершин, достижимых из данной.

3.2. Определение порождённых подграфов. *Длиной цепи* будем называть число встретившихся в ней вершин минус единица. *Основной цепью с началом в основной вершине* C_i будем называть цепь чётной длины в графе G с началом в вершине C_i. В силу чередования основных и вре́менных вершин, в основной цепи последняя вершина всегда основная. Заметим, что для любой основной вершины C_i всегда существует основная цепь с началом в вершине C_i, состоящая из единственной вершины C_i.

Фиксированным или *основным ациклическим подграфом* (а.п.) Υ_{C_i}, *порождённым вершиной* C_i, будем называть подграф графа G без ориентированных циклов следующего вида:

(i) вершина C_i входит в Υ_{C_i};

(ii) если основная вершина C_j входит в а.п. Υ_{C_i} и имеет сыновей в G, то либо в а.п. Υ_{C_i} входит всякий её сын $D_{j'}$ в графе G вместе с дугой $(C_j, D_{j'})$, либо не входит ни один из сыновей, т. е. вершина C_j является концевой в Υ_{C_i};

(iii) если вре́менная вершина D_j входит в а.п. Υ_{C_i}, то её единственным сыном в Υ_{C_i} является ровно один из ее сыновей C_j в графе G.

Таким образом, в фиксированном а.п. Υ_{C_i}, порождённым вершиной C_i, всякая вре́менная вершина имеет ровно одного сына — основную вершину. Фиксированный или основной а.п. Υ_{C_i}, порождённый вершиной C_i, будем называть также *фиксированным* или *основным а.п. с началом в вершине* C_i.

А.п. Υ_{C_i} называется $\top$-*а.п.* Υ_{C_i}, если каждая его вершина $\top$-помечена и каждая его концевая вершина является концевой в графе G.

Усечённым а.п. $\mathcal{J}_{C_i}$, *порождённым вершиной* C_i, *построенным по основной цепи с началом в вершине* C_i *и концом в вершине* C_j, называется а.п., состоящий из указанной цепи, а также всякой вре́менной вершины, являющейся сыном в G каждой основной вершины в $\mathcal{J}_{C_i}$ (за исключением вершины C_j), вместе с дугой, ведущей из основной вершины во вре́менную. Таким образом, всякая вре́менная вершина, входящая в $\mathcal{J}_{C_i}$, либо входит в основную цепь, по которой этот а.п. построен, и её единственным сыном в $\mathcal{J}_{C_i}$ является основная вершина из этой цепи, либо не имеет сыновей в $\mathcal{J}_{C_i}$, т. е. является концевой в $\mathcal{J}_{C_i}$. Усечённый а.п. $\mathcal{J}_{C_i}$, порождённый вершиной C_i, будем называть также *усечённым а.п. с началом в вершине* C_i. Заметим, что Υ_{C_i} и $\mathcal{J}_{C_i}$ могут состоять из единственной вершины C_i.

Малым а.п. Λ_{C_i} с началом в вершине C_i называется а.п., состоящий из вершины C_i и всех её сыновей в G вместе с дугами, ведущими в них из C_i.

3.3. Определение подтверждённости обещаний. Будем говорить, что *основная цепь с началом в вершине* C_i *и концом в вершине* C_j *подтверждает обещание* $\theta = \exists\Diamond\psi \in C_i^+$ или $\theta = \forall\Diamond\psi \in C_i^+$ ($\theta = \forall\Box\psi \in C_i^-$ или $\theta = \exists\Box\psi \in C_i^-$), если каждая вершина этой цепи является полезной вершиной, для последней вершины C_j этой цепи $\psi \in C_j^+$ ($\psi \in C_j^-$) и для каждой другой основной вершины C_k этой цепи $\psi \notin C_k^+$ ($\psi \notin C_k^-$). *Основная цепь с началом в вершине* C_i *подтверждает обещание* $\theta = \exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+$ ($\theta = \forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_i^+$), если каждая вершина этой цепи является полезной вершиной, для последней вершины C_j этой цепи $\psi \in C_j^+$, и для всякой другой основной вершины C_k этой цепи $\varphi \in C_k^+$ и $\psi \notin C_k^+$.

Обещание θ в вершине C_i типа $\exists$ называется *подтверждённым*, если существует основная цепь с началом в вершине C_i, подтверждающая обещание θ. Заметим, что существование основной цепи с началом в вершине C_i, подтверждающей обещание θ, равносильно существованию усечённого а.п. $\mathcal{J}_{C_i}$ с началом в вершине C_i, построенного по этой цепи. Поэтому *обещание* θ *в вершине* C_i *типа* $\exists$ *также называется подтверждённым*, если существует усечённый а.п. $\mathcal{J}_{C_i}$ с началом в вершине C_i, построенный по основной цепи с началом в вершине C_i, подтверждающей это обещание.

Будем говорить, что *основной а.п.* Υ_{C_i} *подтверждает обещание* $\theta = \forall\Diamond\psi \in C_i^+$ ($\theta = \exists\Box\psi \in C_i^-$), если каждая вершина этого а.п. является полезной вершиной, для каждой Υ_{C_i}-концевой вершины C_j этого а.п. $\psi \in C_j^+$ ($\psi \in C_j^-$) и для каждой другой основной вершины C_k этого а.п. $\psi \notin C_k^+$ ($\psi \notin C_k^-$). *Основной а.п.* Υ_{C_i} *подтверждает обещание* $\theta = \forall(\varphi \mho \psi) \in C_i^+$, если каждая вершина этого а.п. является полезной вершиной, для каждой Υ_{C_i}-концевой вершины C_j этого а.п. $\psi \in C_j^+$, и для всякой другой основной вершины C_k а.п. Υ_{C_i} $\varphi \in C_k^+$ и $\psi \notin C_k^+$.

Обещание θ в вершине C_i типа $\forall$ называется *подтверждённым*, если существует основной а.п. Υ_{C_i}, подтверждающий обещание θ.

3.4. Процедура фильтрования. Фильтрование завершённой или размеченной схемы модели состоит в просмотре всех основных полезных вершин графа G, нахождении среди них таких, которые содержат неподтверждённое обещание, и выполнении для этих вершин процедуры разметки из правила 1.

(i) Если начальная вершина $\perp$-помечена, либо во всех полезных основных вершинах всякое содержащееся в них обещание подтверждено, то конец процедуры фильтрования.

(ii) Иначе правило из данного пункта могло применяться $m \geqslant 0$ раз к $m \geqslant 0$ полезным вершинам. Пусть найдена $(m+1)$-я полезная вершина C_i, содержащая неподтвержденное обещание θ. Тогда для неё выполняется процедура $\perp$-разметки с индексом 0 из правила 1, приписывается дополнительная $\perp$-пометка $\perp^{\theta}_{m+1}$: $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$, а к каждой новой помечаемой в этой процедуре вершине приписывается дополнительная $\perp$-пометка $\perp^{\theta *}_{m+1}$. Переход к пункту (i).

Число $m+1$ называется *индексом дополнительной* $\perp$*-пометки*, формула θ — *обещанием в дополнительной* $\perp$*-пометке*, а тип обещания θ — *типом обещания в дополнительной* $\perp$*-пометке*.

Схема модели, получающаяся после фильтрования завершённой (или размеченной — см. также § 7) схемы модели, называется *повторно размеченной*.

3.5. Окончание второй части алгоритма. После фильтрования схемы модели выполняется приведение повторно размеченной схемы модели к новой схеме модели, которую будем называть *заключительной*. Это приведение выполняется в точности так же, как и описанное выше приведение размеченной схемы модели к завершённой. Таким образом, заключительная схема модели либо пуста, либо не содержит $\perp$-помеченных вершин и в каждой основной вершине всякое обещание подтверждено. Если завершённая схема модели является $\top$-помеченной, то в первой части алгоритма был дан ответ «Θ выполнима», и в этом случае считаем, что заключительная схема модели совпадает с завершённой.

Если заключительная схема модели пуста, то алгоритм распознавания выполнимости даёт для исходной формулы ответ «Θ невыполнима». Если заключительная схема модели не пуста, то алгоритм распознавания выполнимости даёт для исходной формулы ответ «Θ выполнима» и строит для неё модель — см. § 4.

§ 4. Построение модели

Третью часть алгоритма распознавания выполнимости составляет построение модели. Построение модели для формулы Θ производится в случае ответа «Θ выполнима». Этот ответ даётся либо по окончании первой части алгоритма в случае завершённой $\top$-помеченной схемы модели, либо по окончании второй части в случае непустой заключительной схемы модели. В п. 4.1 излагается построение модели в первом случае, а в пп. 4.2–4.5 — построение модели во втором. Доказательство истинности формулы Θ в построенной модели проводится в § 6.

4.1. Первый случай построения модели. Пусть G — завершённая Т-помеченная схема модели, т. е. завершённая схема модели, в которой начальная вершина Т-помечена. Построим модель для х.ф. χ_{C_i} произвольной Т-помеченной вершины $C_i^{\top n_i}$ в G. Для этого сначала найдём в G Т-а.п. Υ_{C_i} — основной а.п. с началом в вершине $C_i^{\top n_i}$, каждая вершина которого Т-помечена, а каждая концевая вершина которого является концевой в G. Проведём индукцию по индексу n_i Т-пометки вершины $C_i^{\top n_i}$.

Базис. Если $n_i = 0$, то вершина $C_i^{\top n_i}$ концевая в G и искомый Т-а.п. Υ_{C_i} состоит из единственной вершины $C_i^{\top n_i}$.

Индукционный переход. Пусть для всякой Т-помеченной вершины $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$, где $0 \leqslant n_{i_j} \leqslant n_i - 1$, найден искомый Т-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$ с началом в вершине $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$, длина максимальной цепи которого равна $2n_{i_j}$, последовательность индексов в Т-пометках каждой цепи с началом в вершине $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$ невозрастающая, а её подпоследовательность, состоящая из всех индексов в Т-пометках основных вершин этой цепи, убывающая. Пусть вершина $C_i^{\top n_i}$ имеет m, $m > 0$, сыновей. Тогда каждый её сын $D_{i_j}^{\top n'_{i_j}, C_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n'_{i_j} \leqslant n_i$, Т-помечен и имеет по определению процедуры Т-разметки сына $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$, где $n_{i_j} = n'_{i_j} - 1$. Добавим из G m вершин D_{i_j} и вершину C_i, а также $2m$ дуг $(C_i, D_{i_j}), (D_{i_j}, C_{i_j})$ к m Т-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$ и получим Т-а.п. Υ_{C_i}, длина максимальной цепи которого равна $2n_i$, последовательность индексов в Т-пометках каждой цепи невозрастающая, а её подпоследовательность, состоящая из всех индексов в Т-пометках основных вершин этой цепи, убывающая. Индукционный переход сделан. Отсутствие ориентированных циклов в графе Т-а.п. Υ_{C_i} следует из невозрастания последовательности индексов в Т-пометках каждой цепи и убывания её подпоследовательности, состоящей из всех индексов в Т-пометках основных вершин этой цепи.

Построим теперь по найденному Т-а.п. Υ_{C_i} модель для х.ф. χ_{C_i} вершины $C_i^{\top n_i}$. Удалим из Т-а.п. Υ_{C_i} каждую вре́менную вершину (если они есть), входящую и исходящую из неё дуги и проведём дугу из её родителя в вершину, являющуюся сыном этой вре́менной вершины. В полученном графе каждую вершину C_j переименуем в вершину u_j и обозначим новый граф через Γ. Множество всех пропозициональных переменных из C_j^+ обозначим через C_j^{p+}. Для каждой вершины u_j графа Γ положим $L(u_j) = C_j^{p+}$. Наконец, положим $M = \langle \Gamma, L \rangle$ и объявим M моделью для формулы χ_{C_i}.

Моделью для х.ф. χ_{D_i} вершины $D_i^{\top n_i + 1, C_i}$, имеющей сына $C_i^{\top n_i}$ по определению процедуры Т-разметки, объявляется найденная выше модель для формулы χ_{C_i}. Если вершина $D_i^{\top n_i + 1, C_i}$ есть начальная вершина $D_0^{\top n_0 + 1, C_0}$ графа G, то она имеет сына $C_0^{\top n_0}$. Тогда найденная модель для формулы χ_{C_0}, совпадающая с моделью для формулы χ_{D_0}, объявляется моделью M для формулы Θ. Модель для формулы Θ в случае завершённой Т-помеченной схемы модели построена.

4.2. Общее описание построения модели во втором случае. Пусть G — непустая заключительная схема модели, а B_i — произвольная вершина графа G. Нашей целью является построение модели для формулы χ_{B_i}, откуда, в частности, получается модель для формулы χ_{D_0}. Поскольку $D_0^+ = \{\Theta\}$, $D_0^- = \varnothing$, формулы χ_{D_0} и Θ совпадают, поэтому модель, построенная для формулы χ_{D_0}, будет являться моделью и для формулы Θ.

Если B_i — основная вершина C_i, то модель строится для формулы χ_{C_i}, а если B_i — вре́менная вершина D_i, то она имеет некоторого сына C_i, и моделью для формулы χ_{B_i} объявляется модель, которая строится для формулы χ_{C_i}. Таким образом, построение модели для формулы χ_{B_i} сводится к построению модели для формулы χ_{C_i}.

Построение модели для формулы χ_{C_i} состоит из двух этапов. На первом этапе строится так называемая текущая модель. Если текущая модель построена, т. е. становится закрытой, что будет определено ниже, то первый этап заканчивается и производится приведение этой модели к итоговой, которая и объявляется моделью для формулы χ_{C_i}.

Текущая модель строится по подграфам графа G, из которых аналогично первому случаю построения модели выделяются только основные вершины. Принципиальная трудность построения текущей модели состоит в том, что в графе G могут встретиться основные вершины, содержащие несколько обещаний, в результате чего приходится так «удлинять» текущую модель, чтобы для каждого обещания в основной вершине в модели оказался бы подграф, сопоставленный основной цепи или основному а.п., подтверждающему это обещание.

4.3. Основные определения для текущей модели. Текущую модель будем обозначать через M_n, где $M_n = \langle \Gamma_n, L_n \rangle$, $n \geqslant 0$. Каждая вершина в текущей модели M_n сопоставлена некоторой основной вершине в заключительной схеме модели G. Вершины в текущей модели имеют по три индекса: два верхних и один нижний. Нижний индекс для каждой вершины в модели уникален, а первый верхний — совпадает с индексом основной вершины графа G, которой эта вершина в модели сопоставлена. Значение второго верхнего индекса будет определено ниже в процедуре построения модели. В некоторых выделенных случаях к нижнему и второму верхнему индексам будем приписывать по одному индексу в квадратных скобках.

Начальная вершина текущей модели M_n сопоставляется вершине C_i и обозначается $u_0^{i,0}$. Функция означивания (оценка) L_n определяется следующим образом: $L_n(u_{t_j}^{j,k_j}) = C_j^{p+}$, где C_j — вершина в графе G, которой сопоставлена вершина $u_{t_j}^{j,k_j}$, а C_j^{p+} — множество всех положительных переменных из множества C_j^+.

По определению, M_0 есть $\langle \Gamma_0, L_0 \rangle$, где Γ_0 не содержит дуг и состоит из единственной вершины $u_0^{i,0}$, а $L_0(u_0^{i,0}) = C_i^{p+}$. Если вершина C_i — концевая в заключительной схеме модели G, то заметим, что вследствие выполнения процедуры приведения она $\top$-помечена. Тогда модель M для формулы χ_{C_i} получается из модели M_0, в которой вершина $u_0^{i,0}$ переименовывается в вершину u_0.

Иначе пусть имеется некоторая текущая модель M_n, $n \geqslant 0$. Если в этой модели вершина $u_{t_j}^{j,k_j}$ — концевая, а C_j — не является концевой, то вершина $u_{t_j}^{j,k_j}$ называется активной.

Будем говорить, что основная цепь в схеме модели с началом в вершине C_j и концом в вершине C_h *порождает* цепь в графе Γ_n текущей модели M_n с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ и концом в вершине $u_{t_h}^{h,k_h}$, если каждой основной вершине C_r этой цепи в порождённой цепи сопоставлена вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, и всякая вершина $u_{t_{r'}}^{r',k_{r'}}$ в порождённой цепи, являющаяся сыном вершины $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставлена следующей (сыну сына вершины C_r) основной вершине $C_{r'}$ в основной цепи в схеме модели.

Обещание θ типа $\exists$, содержащееся в вершине C_j, называется *подтверждённым в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$, если существует подпоследовательность некоторой цепи с началом в этой вершине и концом в активной вершине, являющаяся цепью, порождённой основной цепью, подтверждающей это обещание.

Обещание θ типа $\forall$, содержащееся в вершине C_j, называется *подтверждённым в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$, если для всякой цепи с началом в этой вершине и концом в активной вершине существует подпоследовательность этой цепи, являющаяся цепью, порождённой основной цепью, подтверждающей это обещание.

Активная вершина $u_{t_j}^{j,k_j}$ называется *закрытой*, если на некоторой цепи $u_0^{i,0} - u_{t_j}^{j,k_j}$ (т. е. цепи с началом в вершине $u_0^{i,0}$ и концом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$) существует вершина $u_{t_j'}^{j,k_j'}$, отличная от $u_{t_j}^{j,k_j}$, в которой всякое обещание, содержащееся в вершине C_j, подтверждено. Такая закрытая активная вершина обозначается $u_{t_j[t_j']}^{j,k_j[k_j']}$. Если вершина $u_{t_m}^{m,k_m}$ является родителем вершины $u_{t_j[t_j']}^{j,k_j[k_j']}$, то вершины $u_{t_j'}^{j,k_j'}$ и $u_{t_m}^{m,k_m}$ называются соответственно *открывающей* и *закрывающей цикл для вершин цепи* $u_0^{i,0} - u_{t_m}^{m,k_m}$.

Если в текущей модели каждая активная вершина является закрытой, то такая текущая модель называется *закрытой*.

Пусть активная вершина $u_{t_j}^{j,k_j}$ не закрыта. Если для любой цепи $u_0^{i,0} - u_{t_j}^{j,k_j}$ всякая вершина этой цепи, кроме последней, была сопоставлена вершине, отличной от C_j, то всякое обещание, содержащееся в вершине C_j, называется *активным в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$.

Иначе пусть вершина $u_{t_j'}^{j,k_j'}$, отличная от $u_{t_j}^{j,k_j}$ и принадлежащая некоторой цепи $u_0^{i,0} - u_{t_j}^{j,k_j}$, такова, что в ней не подтверждено минимальное число обещаний, содержащихся в вершине C_j, по сравнению с другими вершинами, сопоставленными вершине C_j и принадлежащими одной из указанных цепей. Тогда всякое неподтверждённое обещание в вершине $u_{t_j'}^{j,k_j'}$ называется *активным в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$.

4.4. Определения порождённых подграфов в текущей модели. Будем говорить, что *основной а.п.* Υ_{C_j} *в схеме модели с началом в вершине* C_j *порождает а.п.* Γ_{u_j} *с началом в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$, если каждой основной вершине C_r из Υ_{C_j} в этом а.п. сопоставлена вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, а всякой основной вершине $C_{r'}$, являющейся сыном сына вершины C_r в Υ_{C_j}, сопоставлена вершина $u_{t_{r'}}^{r',k_{r'}}$, являющаяся сыном вершины $u_{t_r}^{r,k_r}$ в Γ_{u_j}.

А.п. Γ_{u_j} называется *порождённым усеченным а.п.* $\mathcal{J}_{C_j}$, если он состоит из цепи, порождённой основной цепью, по которой построен а.п. $\mathcal{J}_{C_j}$. Кроме того, для каждой концевой вре́менной вершины D_{j_h} в $\mathcal{J}_{C_j}$ с родителем $C_{j'}$, также входящим в $\mathcal{J}_{C_j}$, выбирается некоторый её сын C_h, и тогда в графе Γ_{u_j} могут быть добавления. Пусть вершине $C_{j'}$ в $\mathcal{J}_{C_j}$ сопоставлена вершина $u_{t_{j'}}^{j',k_{j'}}$ в а.п. Γ_{u_j}. Если теперь вершина C_h входит в $\mathcal{J}_{C_j}$ и этот граф вместе с дугой (D_{j_h}, C_h) по-прежнему не содержит ориентированных циклов, то в граф Γ_{u_j} добавляется дуга $(u_{t_{j'}}^{j',k_{j'}}, u_{t_h}^{h,k_h})$ в случае её отсутствия, где вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена вершине C_h. Если же граф $\mathcal{J}_{C_j}$ вместе с дугой (D_{j_h}, C_h) содержит ориентированный цикл, либо вершина C_h не входит в $\mathcal{J}_{C_j}$, то в граф Γ_{u_j} добавляются вершина $u_{t_h'}^{h,k_h'}$, сопоставленная вершине C_h (в том случае, если она не была добавлена ранее при рассмотрении другой концевой вре́менной вершины в $\mathcal{J}_{C_j}$), и дуга $(u_{t_{j'}}^{j',k_{j'}}, u_{t_h'}^{h,k_h'})$ (также только тогда, когда она не была добавлена ранее). А.п. Γ_{u_j}, порождённый усеченным а.п. $\mathcal{J}_{C_j}$, определён.

Пусть малый а.п. Λ_{C_j} в схеме модели с началом в вершине C_j состоит из вершины C_j и её сыновей $D_{j_1}, \ldots, D_{j_h}, \ldots, D_{j_r}$. Тогда а.п. Γ_{u_j}, называется *порожденным малым а.п.* Λ_{C_j}, если он состоит из вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, и не более чем r вершин, являющихся её сыновьями, полученных следующим образом. Для каждой вершины D_{j_h}, $1 \leqslant h \leqslant r$, выберем некоторого её сына C_h в графе G. Если ранее ни у какой вершины $D_{j_{h'}}$, $1 \leqslant h' < h$, не выбиралась сыном вершина C_h, то сопоставим вершине C_h вершину $u_{t_h}^{h,k_h'}$ и добавим в а.п. Γ_{u_j} эту сопоставленную вершину вместе с дугой $(u_{t_j}^{j,k_j}, u_{t_h}^{h,k_h'})$. А.п. Γ_{u_j}, порождённый малым а.п. Λ_{C_j}, определён.

А.п. Γ_{u_j} называется *подтверждающим обещание θ типа $\forall$ в вершине C_j*, если его порождает основной а.п. Υ_{C_j}, подтверждающий это обещание.

А.п. Γ_{u_j} называется *подтверждающим обещание θ типа $\exists$ в вершине C_j*, если он порождён усеченным а.п. $\mathcal{J}_{C_j}$, построенным по основной цепи с началом в вершине C_j, подтверждающей это обещание.

4.5. Процедура построения модели. Процедура построения модели состоит из построения закрытой текущей модели и её приведения. Построение закрытой текущей модели состоит из последовательного добавления порождённых а.п. к графу Γ_n текущей модели M_n. Это построение выполняется индукцией по числу n.

Базис. Текущая модель M_n есть M_0.

Индукционный переход. Пусть текущей моделью является $M_n = \langle \Gamma_n, L_n \rangle$. Если текущая модель M_n является закрытой, то переходим к приведению закрытой текущей модели. Иначе пусть $u_{t_j}^{j,k_j}$ — незакрытая активная вершина, сопоставленная вершине C_j. Тогда возможны три случая.

(i) Вершина C_j содержит обещание θ типа $\forall$, являющееся активным в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, и это обещание подтверждается некоторым основным а.п. Υ_{C_j}, отличным от единственной вершины C_j.

(ii) Иначе вершина C_j содержит обещание θ типа $\exists$, являющееся активным в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, и это обещание подтверждается некоторой основной цепью с началом в вершине C_j, по которой построен усеченный а.п. $\mathcal{J}_{C_j}$, отличный от единственной вершины C_j.

(iii) Иначе либо всякое обещание, содержащееся в вершине C_j, подтверждено в а.п. Υ_{C_j} или основной цепи, состоящих из единственной вершины C_j, либо в вершине C_j вообще не содержится обещаний.

Тогда граф Γ_{n+1} состоит из графа Γ_n, в который добавлен соответствующий а.п. Γ_{u_j}: в случае (i) — порождённый а.п. Υ_{C_j}, в случае (ii) — порождённый усеченным а.п. $\mathcal{J}_{C_j}$, в случае (iii) — порождённый малым а.п. Λ_{C_j}. При добавлении порождённого подграфа его начальная вершина отождествляется с $u_{t_j}^{j,k_j}$, а все остальные вершины и дуги, кроме, быть может, в случае (iii) концевых, а также дуг, ведущих в них, добавляются к графу Γ_n. Каждая концевая вершина порождённого подграфа в варианте (iii) вместе с дугой, ведущей в неё, не добавляются только в одном случае: если для данной концевой вершины $u_{t_h}^{h,k_h}$ в Γ_n имеется вершина $u_{t'_h}^{h,k'_h}$ — с тем же первым верхним индексом h — тогда вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ не добавляется, а дуга, ведущая в неё из вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, направляется в вершину $u_{t'_h}^{h,k'_h}$. Оценка L_{n+1} является объединением оценки L_n, определенной на вершинах графа Γ_n, и оценки, определенной в вершинах соответствующего добавляемого а.п. Второй верхний индекс во всех концевых вершинах добавляемого а.п. полагаем равным k_j+1, а в остальных — равным k_j. Текущей моделью является $M_{n+1}=\langle\Gamma_{n+1}, L_{n+1}\rangle$. Индукционный переход сделан.

Приведение закрытой текущей модели. В построенной модели $M=M_n$, $M=\langle\Gamma, L\rangle$ для каждой активной закрытой вершины $u_{t_j[t'_j]}^{j,k_j[k'_j]}$ в этой модели с родителем $u_{t_m}^{m,k_m}$ из графа Γ удаляется вершина $u_{t_j[t'_j]}^{j,k_j[k'_j]}$ вместе с дугой $(u_{t_m}^{m,k_m}, u_{t_j[t'_j]}^{j,k_j[k'_j]})$ и добавляется дуга $(u_{t_m}^{m,k_m}, u_{t'_j}^{j,k'_j})$. Полученная модель M называется приведённой. Затем у каждой вершины приведённой модели удаляются верхние индексы. Полученная модель M объявляется моделью для формулы χ_{C_i}. Конец процедуры.

Построение модели для формулы Θ закончено.

Алгоритм распознавания выполнимости произвольной формулы Θ и построения в случае выполнимости для неё модели сформулирован.

§ 5. Свойства правил алгоритма распознавания выполнимости формул

В этом параграфе для алгоритма устанавливаются свойства правил 1–6 из § 2: свойство правила эквивалентности, три свойства равносильности, свойство правила противоречия и свойство правила завершения. В конце параграфа доказывается завершаемость работы алгоритма за конечное число шагов.

5.1. Свойство правила эквивалентности. В этом пункте устанавливается свойство правила эквивалентности — правила 3. Это правило применяется к формуле θ, принадлежащей множеству положительных либо отрицательных формул в вершине C_i. Оно состоит в пометке этой формулы знаком $\star$ и добавлении формулы θ' в случае её отсутствия в соответствующее множество формул.

Формула θ имеет один из следующих видов:

$$\text{a) } \forall\Box\varphi,\quad \text{b) } \exists\Box\varphi,\quad \text{c) } \forall\Diamond\varphi,\quad \text{d) } \exists\Diamond\varphi,\quad \text{e) } \forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi),\quad \text{f) } \exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi).$$

Тогда соответствующая ей формула θ' имеет вид:

$$\text{a) } (\varphi\wedge\forall\circ\forall\Box\varphi),\quad \text{b) } (\varphi\wedge(\exists\circ\exists\Box\varphi\vee\forall\circ\bot)),$$
$$\text{c) } (\varphi\vee(\forall\circ\forall\Diamond\varphi\wedge\exists\circ\top)),\quad \text{d) } (\varphi\vee\exists\circ\exists\Diamond\varphi),$$
$$\text{e) } (\psi\vee((\varphi\wedge\forall\circ\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi))\wedge\exists\circ\top)),\quad \text{f) } (\psi\vee(\varphi\wedge\exists\circ\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi))).$$

Свойство правила эквивалентности устанавливается леммой 5.1 и заключается в общезначимости формулы $\theta \equiv \theta'$.

Лемма 5.1. *Формулы*

$$a)\ \forall\Box\varphi \equiv (\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi), \quad b)\ \exists\Box\varphi \equiv (\varphi \wedge (\exists\circ\exists\Box\varphi \vee \forall\circ\bot)),$$
$$c)\ \forall\Diamond\varphi \equiv (\varphi \vee (\forall\circ\forall\Diamond\varphi \wedge \exists\circ\top)), \quad d)\ \exists\Diamond\varphi \equiv (\varphi \vee \exists\circ\exists\Diamond\varphi),$$
$$e)\ \forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \equiv (\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\circ\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)) \wedge \exists\circ\top)),$$
$$f)\ \exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \equiv (\psi \vee (\varphi \wedge \exists\circ\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)))$$

общезначимы.

Доказательство. Для установления общезначимости формулы $\theta \equiv \theta'$ в каждом из случаев a)–f) докажем общезначимость формул 1) $(\theta \to \theta')$ и 2) $(\theta' \to \theta)$.

a1) Допустим, что формула $(\forall\Box\varphi \to (\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi))$ не общезначима. Тогда существует модель M, в начальной вершине которой эта формула не является истинной, т. е. $M, u_0 \not\models (\forall\Box\varphi \to (\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi))$. Отсюда следует $M, u_0 \models \forall\Box\varphi$ и $M, u_0 \not\models \varphi$ или $M, u_0 \not\models \forall\circ\forall\Box\varphi$. Из $M, u_0 \models \forall\Box\varphi$ получаем $M, u_0 \models \varphi$. По определению истинности формулы в вершине модели, из $M, u_0 \not\models \forall\circ\forall\Box\varphi$ следует, что у вершины u_0 есть сын u_1, в котором $M, u_1 \not\models \forall\Box\varphi$. Это означает, что в некотором полном пути с началом в вершине u_1 существует вершина u_j, в которой формула φ не истинна, т. е. $M, u_j \not\models \varphi$. Однако последнее в силу достижимости вершины u_j из u_0 противоречит $M, u_0 \models \forall\Box\varphi$.

a2) Допустим, что формула $((\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi) \to \forall\Box\varphi)$ не общезначима. Тогда существует модель M, в которой $M, u_0 \models \varphi$, $M, u_0 \models \forall\circ\forall\Box\varphi$ и $M, u_0 \not\models \forall\Box\varphi$. Если у вершины u_0 сыновей нет, то из $M, u_0 \not\models \forall\Box\varphi$ следует $M, u_0 \not\models \varphi$, что сразу даёт противоречие. Если же вершина u_0 сыновей имеет, то в силу $M, u_0 \models \forall\circ\forall\Box\varphi$ для каждого её сына u_j верно $M, u_j \models \forall\Box\varphi$. Последнее означает, что для всякого полного пути с началом в вершине u_j во всякой его вершине истинна формула φ. Но в силу произвольности выбора сына u_j вершины u_0 и $M, u_0 \models \varphi$ это означает, что и для всякого полного пути с началом в вершине u_0 во всякой его вершине истинна формула φ. Последнее противоречит $M, u_0 \not\models \forall\Box\varphi$. Общезначимость формулы a) доказана.

b1) Допустим, что формула $(\exists\Box\varphi \to (\varphi \wedge (\exists\circ\exists\Box\varphi \vee \forall\circ\bot)))$ не общезначима. Тогда существует модель M, в которой $M, u_0 \models \exists\Box\varphi$, а также $M, u_0 \not\models \varphi$ или $M, u_0 \not\models \exists\circ\exists\Box\varphi$ и $M, u_0 \not\models \forall\circ\bot$. Из $M, u_0 \models \exists\Box\varphi$ следует $M, u_0 \models \varphi$. Если теперь у вершины u_0 нет сыновей, то $M, u_0 \models \forall\circ\bot$, откуда сразу получается противоречие. Если же у вершины u_0 сыновья есть, то из $M, u_0 \not\models \exists\circ\exists\Box\varphi$ следует, что для каждого её сына u_j верно $M, u_j \not\models \exists\Box\varphi$. Последнее означает, что не существует полного пути с началом в вершине u_j, в каждой вершине которого формула φ истинна. Но в силу произвольности выбора сына u_j вершины u_0 это означает, что не существует и полного пути с началом в вершине u_0, в каждой вершине которого формула φ истинна. А это противоречит $M, u_0 \models \exists\Box\varphi$.

b2) Допустим, что формула $((\varphi \wedge (\exists\circ\exists\Box\varphi \vee \forall\circ\bot)) \to \exists\Box\varphi)$ не общезначима. Тогда существует модель M, в которой $M, u_0 \models \varphi$ и $M, u_0 \models \exists\circ\exists\Box\varphi$ или $M, u_0 \models \forall\circ\bot$, а также $M, u_0 \not\models \exists\Box\varphi$. Если у вершины u_0 нет сыновей, то из $M, u_0 \not\models \exists\Box\varphi$ следует $M, u_0 \not\models \varphi$, откуда сразу получается противоречие. Если же вершина u_0 сыновей имеет, то $M, u_0 \not\models \forall\circ\bot$ и, следовательно, верно $M, u_0 \models \exists\circ\exists\Box\varphi$. Тогда существует сын u_1 вершины u_0, для которого верно $M, u_1 \models \exists\Box\varphi$, т. е. существует полный путь с началом в вершине u_1, в каждой вершине которого формула φ истинна. Но тогда существует и полный путь с началом в вершине u_0, в каждой вершине которого формула φ истинна. Последнее противоречит $M, u_0 \not\models \exists\Box\varphi$. Общезначимость формулы b) доказана.

Доказательство леммы для случаев c)–f) проводится аналогично.

5.2. Первое свойство равносильности. Первое свойство равносильности заключается в эквивалентности х.ф. и п.х.ф. каждой вершины C_i, т. е. общезначимости формулы $\chi_{C_i} \equiv \chi^\star_{C_i}$. Общезначимость формулы $(\chi^\star_{C_i} \to \chi_{C_i})$ очевидна. Остаётся доказать общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \chi^\star_{C_i})$. Для этого требуется доказать для каждой помеченной знаком $\star$ положительной (отрицательной) формулы общезначимость импликации, в которой χ_{C_i} влечёт эту формулу (отрицание этой формулы).

Определим для каждой формулы θ, где $\theta \in C_i^+$ или $\theta \in C_i^-$, длину её разбора $l(\theta^+)$ и $l(\theta^-)$, соответственно. Положительную формулу θ в вершине C_i будем обозначать θ^+, а отрицательную — θ^-. Если положительная (отрицательная) формула θ имеет вид $\forall\circ\varphi$, $\exists\circ\varphi$ или является пропозициональной переменной, то полагаем $l(\theta^+)=0$ $(l(\theta^-)=0)$. Иначе в процессе разбора формулы θ по правилам 3–5 возможны следующие случаи.

Правило 3.

$$\begin{gathered}
\text{a) } \theta^+ = \forall\Box\varphi^+,\ \ l(\theta^+) = l((\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi)^+) + 1,\\
\text{b) } \theta^+ = \exists\Box\varphi^+,\ \ l(\theta^+) = l((\varphi \wedge (\exists\circ\exists\Box\varphi \vee \forall\circ\bot))^+) + 1,\\
\text{c) } \theta^+ = \forall\Diamond\varphi^+,\ \ l(\theta^+) = l((\varphi \vee (\forall\circ\forall\Diamond\varphi \wedge \exists\circ\top))^+) + 1,\\
\text{d) } \theta^+ = \exists\Diamond\varphi^+,\ \ l(\theta^+) = l((\varphi \vee \exists\circ\exists\Diamond\varphi)^+) + 1,\\
\text{e) } \theta^+ = \forall(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)^+,\ \ l(\theta^+) = l((\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\circ\forall(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)) \wedge \exists\circ\top))^+) + 1,\\
\text{f) } \theta^+ = \exists(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)^+,\ \ l(\theta^+) = l((\psi \vee (\varphi \wedge \exists\circ\exists(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)))^+) + 1.
\end{gathered}$$

Длина разбора формулы θ^- в случаях a)–f) правила эквивалентности совпадает с длиной разбора формулы θ^+.

Правило 4.

$$\begin{gathered}
\text{a) } \theta^+ = \top^+,\ \ l(\theta^+) = 1,\\
\text{b) } \theta^- = \bot^-,\ \ l(\theta^-) = 1,\\
\text{c) } \theta^+ = (\varphi \wedge \psi)^+,\ \ l(\theta^+) = l(\varphi^+) + l(\psi^+) + 1,\\
\text{d) } \theta^- = (\varphi \vee \psi)^-,\ \ l(\theta^-) = l(\varphi^-) + l(\psi^-) + 1,\\
\text{e) } \theta^- = (\varphi \to \psi)^-,\ \ l(\theta^-) = l(\varphi^+) + l(\psi^-) + 1,\\
\text{f) } \theta^+ = \neg\varphi^+,\ \ l(\theta^+) = l(\varphi^-) + 1,\\
\text{g) } \theta^- = \neg\varphi^-,\ \ l(\theta^-) = l(\varphi^+) + 1.
\end{gathered}$$

Правило 5.

$$\begin{gathered}
\text{a) } \theta^+ = (\varphi \vee \psi)^+,\ \ l(\theta^+) = \max(l(\varphi^+), l(\psi^+)) + 1,\\
\text{b) } \theta^- = (\varphi \wedge \psi)^-,\ \ l(\theta^-) = \max(l(\varphi^-), l(\psi^-)) + 1,\\
\text{c) } \theta^+ = (\varphi \to \psi)^+,\ \ l(\theta^+) = \max(l(\varphi^-), l(\psi^+)) + 1.
\end{gathered}$$

Лемма 5.2. *Для всякой положительной формулы θ в вершине C_i формула $(\chi_{C_i} \to \theta)$ общезначима. Для всякой отрицательной формулы θ в вершине C_i формула $(\chi_{C_i} \to \neg\theta)$ общезначима.*

Доказательство. Для положительной формулы θ в вершине C_i положим $\varphi_\theta = \theta$, а для отрицательной — $\varphi_\theta = \neg\theta$. Тогда требуется доказать общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$. Проведём индукцию по длине k разбора формулы θ, где $k = l(\theta^+)$, если θ положительна, и $k = l(\theta^-)$, если θ отрицательна.

Базис. Если $k = 0$, то формула θ не помечена знаком $\star$. Тогда формула φ_θ является конъюнктивным членом формулы χ_{C_i}, откуда следует $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$.

Индукционный переход. Пусть для всякой формулы θ'^+, для которой $l(\theta'^+) \leqslant k$, и для всякой формулы θ'^-, для которой $l(\theta'^-) \leqslant k$, формула $(\chi_{C_i} \to \varphi_{\theta'})$ общезначима. Докажем, что тогда и для всякой формулы θ^+, для которой $l(\theta^+) = k+1$, для всякой формулы θ^-, для которой $l(\theta^-) = k+1$, общезначима и формула $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$. Очевидно, что формула θ помечена знаком $\star$, причём знаком $\star$ формулы помечаются лишь в правилах 3–5. Поэтому, следуя правилам 3–5, рассмотрим три типа случаев.

Случай 1 — правило 3:

$$\text{a) } \theta^+ = \forall\Box\varphi^+,\quad \text{b) } \theta^+ = \exists\Box\varphi^+,\quad \text{c) } \theta^+ = \forall\Diamond\varphi^+,$$
$$\text{d) } \theta^+ = \exists\Diamond\varphi^+,\quad \text{e) } \theta^+ = \forall(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)^+,\quad \text{f) } \theta^+ = \exists(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)^+.$$

Случаи g)–l) повторяют случаи a)–f) с заменой знака «+» на «−». Тогда вводимая в этом правиле формула θ' есть соответственно:

$$\text{a), } g)\ (\varphi \wedge \forall\circ\forall\Box\varphi),\quad \text{b), } h)\ (\varphi \wedge (\exists\circ\exists\Box\varphi \vee \forall\circ\bot)),$$
$$\text{c), } i)\ (\varphi \vee (\forall\circ\forall\Diamond\varphi \wedge \exists\circ\top)),\quad \text{d), } j)\ (\varphi \vee \exists\circ\exists\Diamond\varphi),$$
$$\text{e), } k)\ (\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\circ\forall(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi)) \wedge \exists\circ\top)),\quad \text{f), } l)\ (\psi \vee (\varphi \wedge \exists\circ\exists(\varphi\, \mathcal{U}\, \psi))).$$

По индукционному предположению из $l(\theta'^+) = l(\theta^+) - 1$, $l(\theta'^-) = l(\theta^-) - 1$ следует, что формула $(\chi_{C_i} \to \varphi_{\theta'})$ общезначима. Из леммы 5.1 следует общезначимость формулы $\theta \equiv \theta'$, что даёт общезначимость формулы $\varphi_\theta \equiv \varphi_{\theta'}$, откуда следует и общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$.

Случай 2 — правило 4:

$$\text{a) } \theta^+ = \top^+,\quad \text{b) } \theta^- = \bot^-,\quad \text{c) } \theta^+ = (\varphi \wedge \psi)^+,\quad \text{d) } \theta^- = (\varphi \vee \psi)^-,$$
$$\text{e) } \theta^- = (\varphi \to \psi)^-,\quad \text{f) } \theta^+ = \neg\varphi^+,\quad \text{g) } \theta^- = \neg\varphi^-.$$

В случаях a), b) общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$ очевидна. В случае f) (случае g)) $\theta' = \varphi$, $l(\theta'^-) = l(\varphi^-) = l(\theta^+) - 1$ ($\theta' = \varphi$, $l(\theta'^+) = l(\varphi^+) = l(\theta^-) - 1$), поэтому по индукционному предположению формула $(\chi_{C_i} \to \varphi_{\theta'})$ общезначима. Для случая f) имеет место $\varphi_\theta = \neg\varphi$, $\varphi_{\theta'} = \neg\varphi$, а для случая g) — $\varphi_\theta = \neg\neg\varphi$, $\varphi_{\theta'} = \varphi$, поэтому в обоих случаях формула $\varphi_\theta \equiv \varphi_{\theta'}$ общезначима. Отсюда следует и общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$. В случае c) положим $\theta_1'^+ = \varphi$, $\theta_2'^+ = \psi$; в случае d) — $\theta_1'^- = \varphi$, $\theta_2'^- = \psi$; в случае e) — $\theta_1'^+ = \varphi$, $\theta_2'^- = \psi$. Тогда в случае c) $\varphi_{\theta_1'} = \varphi$, $\varphi_{\theta_2'} = \psi$; в случае d) $\varphi_{\theta_1'} = \neg\varphi$, $\varphi_{\theta_2'} = \neg\psi$; в случае e) $\varphi_{\theta_1'} = \varphi$, $\varphi_{\theta_2'} = \neg\psi$. Из $l(\theta_1'^+) \leqslant k$, $l(\theta_1'^-) \leqslant k$, $l(\theta_2'^+) \leqslant k$ и $l(\theta_2'^-) \leqslant k$ следует, что по построению и по индукционному предположению формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_{\theta_1'})$ и $(\chi_{C_i} \to \varphi_{\theta_2'})$ общезначимы. Легко проверить, что для каждого из случаев c)–e) формула $((\varphi_{\theta_1'} \wedge \varphi_{\theta_2'}) \to \varphi_\theta)$ общезначима. Отсюда следует и общезначимость формулы $(\chi_{C_i} \to \varphi_\theta)$.

Случай 3 — правило 5:

$$\text{a) } \theta^+ = (\varphi \vee \psi)^+,\quad \text{b) } \theta^- = (\varphi \wedge \psi)^-,\quad \text{c) } \theta^+ = (\varphi \to \psi)^+.$$

В случае a) положим $\theta_1'^{+}=\varphi$, $\theta_2'^{+}=\psi$; в случае b) — $\theta_1'^{-}=\varphi$, $\theta_2'^{-}=\psi$; в случае c) — $\theta_1'^{-}=\varphi$, $\theta_2'^{+}=\psi$. Тогда в случае a) $\varphi_{\theta_1'}=\varphi$, $\varphi_{\theta_2'}=\psi$; в случае b) $\varphi_{\theta_1'}=\neg\varphi$, $\varphi_{\theta_2'}=\neg\psi$; в случае c) $\varphi_{\theta_1'}=\neg\varphi$, $\varphi_{\theta_2'}=\psi$. Из $l(\theta_1'^{+})\leqslant k$, $l(\theta_1'^{-})\leqslant k$, $l(\theta_2'^{+})\leqslant k$ и $l(\theta_2'^{-})\leqslant k$ следует, что по построению и по индукционному предположению хотя бы одна из формул $(\chi_{C_i}\to\varphi_{\theta_1'})$ и $(\chi_{C_i}\to\varphi_{\theta_2'})$ общезначима. Очевидно, что для каждого из случаев a)–c) формулы $(\varphi_{\theta_1'}\to\varphi_\theta)$ и $(\varphi_{\theta_2'}\to\varphi_\theta)$ общезначимы. Отсюда следует и общезначимость формулы $(\chi_{C_i}\to\varphi_\theta)$.

Все случаи разобраны. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Формула $\chi_{C_i}\equiv\chi^{\star}_{C_i}$ общезначима.*

Доказательство следует из леммы 5.2 и произвольности помеченной знаком $\star$ положительной или отрицательной формулы θ в вершине C_i.

5.3. Свойство правила противоречия. Свойство правила противоречия, т. е. правила 1, заключается в невыполнимости х.ф. и п.х.ф. вершины, к которой это правило применяется.

Лемма 5.4. *Если к вершине C_i с х.ф. χ_{C_i} было применено правило 1, то формулы χ_{C_i} и $\chi^{\star}_{C_i}$ невыполнимы.*

Доказательство. Если $\top\in C_i^-$ ($\bot\in C_i^+$), то формула $\chi^{\star}_{C_i}$ имеет вид $\psi\wedge\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$ или $\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$ (соответственно, $\psi\wedge(\varphi\wedge\neg\varphi)$ или $(\varphi\wedge\neg\varphi)$). Тогда в силу невыполнимости формул $\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$ (соответственно, $(\varphi\wedge\neg\varphi)$) формула $\chi^{\star}_{C_i}$ невыполнима. Если же существует такая формула θ, что θ или $\theta\star$ принадлежит C_i^+ и θ или $\theta\star$ принадлежит C_i^-, то формула $\chi^{\star}_{C_i}$ имеет вид $\psi\wedge(\varphi_1\wedge\varphi_2)$ или $(\varphi_1\wedge\varphi_2)$, где φ_1 есть θ или $\theta\star$, а φ_2 есть $\neg\theta$ или $\neg\theta\star$, и также невыполнима в силу невыполнимости формулы $(\varphi_1\wedge\varphi_2)$. Невыполнимость χ_{C_i} следует из невыполнимости $\chi^{\star}_{C_i}$ и общезначимости формулы $\chi_{C_i}\equiv\chi^{\star}_{C_i}$, доказанной в лемме 5.3. Лемма доказана.

5.4. Свойство правила завершения. Свойство правила завершения, т. е. правила 2, заключается в выполнимости х.ф. и п.х.ф. вершины, к которой это правило применяется.

Лемма 5.5. *Если к вершине C_i с х.ф. χ_{C_i} было применено правило 2, то формулы χ_{C_i} и $\chi^{\star}_{C_i}$ выполнимы.*

Доказательство. Пусть Γ состоит из единственной вершины u_0 и не имеет дуг, $M=\langle\Gamma, L\rangle$, C_i^{p+} — все пропозициональные переменные из множества C_i^+, и $L(u_0)=C_i^{p+}$. Тогда $M, u_0\models\chi_{C_i}$ следует из $M, u_0\models\psi$ для каждого члена конъюнкции χ_{C_i}, который в силу правила 2 имеет один из шести видов:

$$\psi=p,\ \text{где } p\in C_i^+,\quad \psi=\neg p,\ \text{где } p\in C_i^-,\quad \psi=\forall\circ\theta,\ \text{где } \forall\circ\theta\in C_i^+,$$
$$\psi=\neg\exists\circ\theta,\ \text{где } \exists\circ\theta\in C_i^-,\quad \psi=\top,\ \text{где } \top\in C_i^+,\quad \psi=\neg\bot,\ \text{где } \bot\in C_i^-.$$

В первых двух случаях $M, u_i\models\psi$ следует из нашего определения $L(u_0)$; в третьем и четвёртом — из определения истинности формул вида $\forall\circ\theta$, $\exists\circ\theta$ и отсутствия сыновей у вершины u_0; в последних двух — из истинности формул $\top$, т. е. $(\varphi\vee\neg\varphi)$, и $\neg\bot$, т. е. $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$, во всякой модели. Из существования модели M, в которой истинна формула χ_{C_i} следует выполнимость последней. Выполнимость $\chi^{\star}_{C_i}$ следует из выполнимости χ_{C_i} и общезначимости формулы $\chi_{C_i}\equiv\chi^{\star}_{C_i}$, доказанной в лемме 5.3. Лемма доказана.

5.5. Второе свойство равносильности. Второе свойство равносильности заключается в эквивалентности х.ф. вре́менной вершины и дизъюнкции х.ф. всех её сыновей.

Лемма 5.6. *Если $C_{i_1},\ldots,C_{i_n}$, $n\geqslant 1$, — все сыновья вершины D_i, то формула $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_n}})$ общезначима.*

Доказательство. Заметим, что х.ф. и п.х.ф. основной вершины меняются только после применений правил 3–5. Поэтому проведём индукцию по общему числу k применений этих правил к сыновьям временной вершины D_i.

Базис. Если $k=0$, то по построению вершина D_i имеет единственного сына C_i, причём $C_i^+=D_i^+$, $C_i^-=D_i^-$. Тогда формула χ_{C_i} совпадает с χ_{D_i}, откуда следует общезначимость формулы $\chi_{D_i}\equiv\chi_{C_i}$.

Индукционный переход. Пусть вершина D_i имеет $l\geqslant 1$ сыновей $C_{i_1},\ldots,C_{i_m},\ldots,C_{i_l}$ и после общего числа k применений к этим сыновьям правил 3–5 общезначимость формулы $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_m}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_l}})$ доказана. Докажем, что тогда и после $(k+1)$-го применения правила 3 или 4 (либо правила 5) к произвольной вершине C_{i_m}, $1\leqslant m\leqslant l$, формула $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi'_{C_{i_m}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_l}})$, $l\leqslant n$ (для правила 5 — формула $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi'_{C_{i_m}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_l}}\vee\chi'_{C_{i'_m}})$, $l\leqslant n-1$) общезначима; здесь $\chi'_{C_{i_m}}$ есть х.ф. вершины C_{i_m} после применения к ней правил 3–5, $C_{i'_m}$ — вершина, добавленная в правиле 5, и $\chi'_{C_{i'_m}}$ — её х.ф. после применения этого правила к вершине C_{i_m}. Рассмотрим три случая:

Случай 1 — правило 3. Если вводимая в этом правиле формула θ' уже содержалась до применения этого правила в соответствующем множестве формул в вершине C_{i_m}, то $\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$ совпадает с $\chi^{\star}_{C_{i_m}}$ и тогда из общезначимости по лемме 5.3 формул $\chi_{C_{i_m}}\equiv\chi^{\star}_{C_{i_m}}$ и $\chi'_{C_{i_m}}\equiv\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$ следует общезначимость формулы $\chi_{C_{i_m}}\equiv\chi'_{C_{i_m}}$, что даёт общезначимость и формулы $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi'_{C_{i_m}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_l}})$. Иначе $\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$ есть $\chi^{\star}_{C_{i_m}}\wedge\varphi_{\theta'}$. Тогда повторяя рассуждения из случая 1 доказательства леммы 5.2 получаем общезначимость формулы $\varphi_\theta\equiv\varphi_{\theta'}$. Так как φ_θ является конъюнктивным членом формулы $\chi^{\star}_{C_{i_m}}$, либо совпадает с ней, то формула $(\chi^{\star}_{C_{i_m}}\to\varphi_\theta)$, а, следовательно, и формула $(\chi^{\star}_{C_{i_m}}\to\varphi_{\theta'})$ общезначимы. Последнее даёт общезначимость формулы $(\chi^{\star}_{C_{i_m}}\to(\chi^{\star}_{C_{i_m}}\wedge\varphi_{\theta'}))$, т. е. формулы $(\chi^{\star}_{C_{i_m}}\to\chi'^{\star}_{C_{i_m}})$. Поскольку формула $(\chi'^{\star}_{C_{i_m}}\to\chi^{\star}_{C_{i_m}})$, т. е. формула $((\chi^{\star}_{C_{i_m}}\wedge\varphi_{\theta'})\to\chi^{\star}_{C_{i_m}})$, общезначима, то формула $\chi^{\star}_{C_{i_m}}\equiv\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$, а, следовательно, и формула $\chi_{C_{i_m}}\equiv\chi'_{C_{i_m}}$ общезначимы. Отсюда и из индукционного предположения следует общезначимость формулы $\chi_{D_i}\equiv(\chi_{C_{i_1}}\vee\ldots\vee\chi'_{C_{i_m}}\vee\ldots\vee\chi_{C_{i_l}})$.

Случай 2 — правило 4:

$$\text{a) } \theta^+=\top^+,\quad \text{b) } \theta^-=\bot^-,\quad \text{c) } \theta^+=(\varphi\wedge\psi)^+,\quad \text{d) } \theta^-=(\varphi\vee\psi)^-,$$
$$\text{e) } \theta^-=(\varphi\to\psi)^-,\quad \text{f) } \theta^+=\neg\varphi^+,\quad \text{g) } \theta^-=\neg\varphi^-.$$

Для a) формула χ_{C_i} имеет вид $\chi'_{C_i}\wedge\top$, а для b) — $\chi'_{C_i}\wedge\neg\bot$, поэтому в обоих случаях общезначимость формулы $\chi_{C_i}\equiv\chi'_{C_i}$ очевидна. Для f) и g) общезначимость формулы $\chi_{C_i}\equiv\chi'_{C_i}$ устанавливается путём повторения рассуждений предыдущего случая (1) этой леммы, а также 2,f) и 2,g) из доказательства леммы 5.2. Если рассматриваемые в случаях 2,c)–e) в этом доказательстве формулы θ'_1 и θ'_2, положительность и отрицательность которых определена в упомянутом доказательстве, уже содержались до применения правила 4 в соответствующих множествах формул в вершине C_{i_m}, то $\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$ совпадает с $\chi^{\star}_{C_{i_m}}$ и тогда из общезначимости по лемме 5.3 формул $\chi_{C_{i_m}}\equiv\chi^{\star}_{C_{i_m}}$ и $\chi'_{C_{i_m}}\equiv\chi'^{\star}_{C_{i_m}}$ следует общезначимость формулы $\chi_{C_{i_m}}\equiv\chi'_{C_{i_m}}$. Иначе в этом правиле была добавлена хотя бы одна из формул θ_1' и θ_2'. Тогда легко проверить, что формулы $(\varphi_\theta \to \varphi_{\theta_1'})$ и $(\varphi_\theta \to \varphi_{\theta_2'})$ общезначимы. Поскольку φ_θ является конъюнктивным членом формулы $\chi^\star_{C_{i_m}}$, либо совпадает с ней, общезначимость последних двух импликаций даёт общезначимость формул $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'}))$, $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_2'}))$ и $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'} \wedge \varphi_{\theta_2'}))$. Заметим, что если добавлялась только формула θ_1', то $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ есть $\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'}$; если добавлялась только формула θ_2', то $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ есть $\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_2'}$; если добавлялась каждая из формул θ_1' и θ_2', то $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ есть $\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'} \wedge \varphi_{\theta_2'}$. Таким образом, при любом добавлении формул θ_1' и θ_2' формула $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to \chi'^\star_{C_{i_m}})$ общезначима. Поскольку $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ содержит конъюнктивным членом формулу $\chi^\star_{C_{i_m}}$, в силу общезначимости формулы $(\chi'^\star_{C_{i_m}} \to \chi^\star_{C_{i_m}})$ получаем общезначимость формулы $\chi^\star_{C_{i_m}} \equiv \chi'^\star_{C_{i_m}}$. Отсюда, дважды применяя лемму 5.3, получаем общезначимость формулы $\chi_{C_{i_m}} \equiv \chi'_{C_{i_m}}$. Итак, для каждого случая a)–g) общезначимость последней формулы доказана. Отсюда и из индукционного предположения следует общезначимость формулы $\chi_{D_i} \equiv (\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi'_{C_{i_m}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_l}})$.

С л у ч а й 3 — правило 5. Заметим, что формулы $(\chi'^\star_{C_{i_m}} \to \chi^\star_{C_{i_m}})$ и $(\chi'^\star_{C_{i_m'}} \to \chi^\star_{C_{i_m}})$ общезначимы, так как каждая из формул $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ и $\chi'^\star_{C_{i_m'}}$ содержит конъюнктивным членом формулу $\chi^\star_{C_{i_m}}$, либо совпадает с ней. Отсюда следует общезначимость формулы $((\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}}) \to \chi^\star_{C_{i_m}})$. Докажем теперь общезначимость формулы $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}}))$. В случае 3 в доказательстве леммы 5.2 рассматриваются формулы θ_1', θ_2' и определяется положительность или отрицательность каждой из них. Если формула θ_1' (или формула θ_2') уже содержалась до применения правила 5 в соответствующем множестве формул в вершине C_{i_m}, то $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ совпадает с $\chi^\star_{C_{i_m}}$ ($\chi'^\star_{C_{i_m'}}$ совпадает с $\chi^\star_{C_{i_m}}$) и тогда общезначимость формулы $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}}))$ доказана. Если же ни θ_1', ни θ_2' не содержались до применения правила 5 в соответствующих множествах формул в вершине C_{i_m}, то $\chi'^\star_{C_{i_m}}$ имеет вид $\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'}$, а $\chi'^\star_{C_{i_m'}}$ — $\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_2'}$. Легко проверить, что формула $(\varphi_\theta \to (\varphi_{\theta_1'} \vee \varphi_{\theta_2'}))$ общезначима. Поскольку φ_θ является конъюнктивным членом формулы $\chi^\star_{C_{i_m}}$, либо совпадает с ней, формула $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge (\varphi_{\theta_1'} \vee \varphi_{\theta_2'})))$ общезначима. Тогда общезначима и формула $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to ((\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_1'}) \vee (\chi^\star_{C_{i_m}} \wedge \varphi_{\theta_2'})))$, т. е. формула $(\chi^\star_{C_{i_m}} \to (\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}}))$. Отсюда, учитывая доказанную общезначимость формулы $((\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}}) \to \chi^\star_{C_{i_m}})$, получаем общезначимость формулы $\chi^\star_{C_{i_m}} \equiv (\chi'^\star_{C_{i_m}} \vee \chi'^\star_{C_{i_m'}})$. Тогда, трижды применяя лемму 5.3, получаем общезначимость формулы $\chi_{C_{i_m}} \equiv (\chi'_{C_{i_m}} \vee \chi'_{C_{i_m'}})$. Отсюда и из индукционного предположения следует общезначимость формулы $\chi_{D_i} \equiv (\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee (\chi'_{C_{i_m}} \vee \chi'_{C_{i_m'}}) \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_l}})$, т. е. формулы $\chi_{D_i} \equiv (\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi'_{C_{i_m}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_l}} \vee \chi'_{C_{i_m'}})$.

Все случаи разобраны. Лемма доказана.

5.6. Третье свойство равносильности. Третье свойство равносильности заключается в равносильности выполнимости х.ф. основной вершины выполнимости х.ф. каждого её сына.

Лемма 5.7. *Если $D_{i_1}, \ldots, D_{i_h}$ — все сыновья вершины C_i, то формула χ_{C_i} выполнима тогда и только тогда, когда выполнима каждая из формул $\chi_{D_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant h$.*

Доказательство. В силу применения правила 6, у вершины C_i уже есть сыновья, поэтому каждая не помеченная знаком $\star$ формула в этой вершине имеет вид $\exists\circ\varphi$, $\forall\circ\varphi$ или является пропозициональной переменной. Пусть $p_1, \ldots, p_s$, $\exists\circ\vartheta_1, \ldots, \exists\circ\vartheta_m$, $\forall\circ\varphi_1, \ldots, \forall\circ\varphi_l$ — все не помеченные знаком $\star$ положительные формулы в вершине C_i, а $q_1, \ldots, q_t$, $\forall\circ\vartheta_{m+1}, \ldots, \forall\circ\vartheta_{m+n}$, $\exists\circ\psi_1, \ldots, \exists\circ\psi_r$ — все не помеченные знаком $\star$ отрицательные формулы в вершине C_i, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $m + n \geqslant 1$ (иначе ранее к вершине C_i было бы применено правило 2 и она не имела бы сыновей). Тогда для вершины C_i сначала было построено $m+n$ сыновей D_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant m + n$, где $\chi_{D_{i_j}} = \theta_j \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_l \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_r$ при $1 \leqslant j \leqslant m$, и $\chi_{D_{i_j}} = \neg\theta_j \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_l \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_r$ при $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$. Затем для каждого множества равных вершин среди $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{m+n}}$ была оставлена лишь одна вершина из этого множества, поэтому число сыновей вершины C_i стало равным h, где $1 \leqslant h \leqslant m + n$. Поскольку х.ф. равных вершин совпадают, мы докажем утверждение леммы для х.ф. каждого из $m + n$ сыновей, откуда будет следовать утверждение леммы и для х.ф. каждого из h сыновей вершины C_i.

Пусть х.ф. каждой вершины D_{i_j} выполнима. Тогда для каждой формулы $\chi_{D_{i_j}}$ существует модель $M^j = \langle \Gamma^j, L^j \rangle$, в которой в выделенной начальной вершине u_0^j верно $M^j, u_0^j \models \chi_{D_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m + n$. Пусть граф Γ состоит из объединения всех графов Γ^j. В каждом Γ^j переименуем выделенную вершину u_0^j в вершину u_j, а остальные вершины графа Γ переименуем так, чтобы они имели только нижний индекс и этот индекс был уникальным и отличным от нуля. Добавим теперь в граф Γ выделенную начальную вершину u_0 и $m + n$ дуг (u_0, u_j), $1 \leqslant j \leqslant m + n$. Определим функцию означивания L. Положим $L(u_0) = \{p_1, \ldots, p_s\}$, а для всякой вершины графа Γ, отличной от u_0, пусть функция означивания L совпадает с функцией означивания L^j, определённой для этой вершины в модели M^j. Очевидно, что в построенной модели $M = \langle \Gamma, L \rangle$ для каждой вершины u_j, $1 \leqslant j \leqslant m + n$, имеет место $M, u_j \models \chi_{D_{i_j}}$. Докажем, что верно и $M, u_0 \models \chi_{C_i}$. Пусть φ_j — произвольная положительная (отрицательная) формула вида $\exists\circ\vartheta_j$ ($\forall\circ\vartheta_j$) в вершине C_i, $1 \leqslant j \leqslant m$ ($m + 1 \leqslant j \leqslant m + n$). Тогда в силу того, что u_0 является родителем u_j, определения истинности формул вида $\exists\circ\varphi$ и $\neg\forall\circ\varphi$ и $M, u_j \models \vartheta_j$ ($M, u_j \models \neg\vartheta_j$) верно и $M, u_0 \models \exists\circ\vartheta_j$ ($M, u_0 \models \neg\forall\circ\vartheta_j$). Далее, если произвольная положительная (отрицательная) формула $\forall\circ\varphi_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, ($\exists\circ\psi_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$) содержится в вершине C_i, то для неё верно $M, u_0 \models \forall\circ\varphi_k$ ($M, u_0 \models \neg\exists\circ\psi_k$), так как для любого сына u_j вершины u_0 верно $M, u_j \models \varphi_k$ ($M, u_j \models \neg\psi_k$). Наконец, если произвольная положительная (отрицательная) пропозициональная переменная p_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, ($q_k$, $1 \leqslant k \leqslant t$) содержится в вершине C_i, то для неё верно $M, u_j \models p_k$ ($M, u_j \models \neg q_k$) в силу определения $L(u_0)$ и того, что множества положительных и отрицательных пропозициональных переменных в вершине C_i не пересекаются, иначе к ней было бы применено правило 1 и она не имела бы сыновей. Таким образом, для каждого конъюнктивного члена φ формулы χ_{C_i} доказано $M, u_0 \models \varphi$, следовательно верно и $M, u_0 \models \chi_{C_i}$, т. е. формула χ_{C_i} выполнима.

Пусть χ_{C_i} выполнима и D_{i_j} — произвольный сын вершины C_i с х.ф. $\chi_{D_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m+n$. Тогда существует модель $M = \langle \Gamma, L \rangle$, для которой верно $M, u_0 \models \chi_{C_i}$. В силу определения истинности положительной (отрицательной) формулы $\exists \bigcirc \vartheta_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, ($\forall \bigcirc \vartheta_j$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$) существует сын u_j вершины u_0, для которого верно $M, u_j \models \vartheta_j$ ($M, u_j \models \neg\vartheta_j$). Кроме того, в силу определения истинности положительных (отрицательных) формул $\forall \bigcirc \varphi_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, ($\exists \bigcirc \psi_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$) для каждого k верно $M, u_j \models \varphi_k$ ($M, u_j \models \neg\psi_k$). Если вершина u_0 недостижима из вершины u_j, то удалим её из графа Γ вместе с дугой (u_0, u_j). Если же вершина u_0 достижима из вершины u_j и не совпадает с u_j, то переименуем вершину u_0 так, чтобы её нижний индекс был отличен от индексов остальных вершин графа Γ. В полученном графе Γ' переименуем вершину u_j, если она ранее не совпадала с вершиной u_0, в выделенную начальную вершину u_0 и положим $M' = \langle \Gamma', L \rangle$. Тогда для этой выделенной начальной вершины u_0 также верно $M', u_0 \models \vartheta_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, ($M', u_0 \models \neg\vartheta_j$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$) и для любого k, $1 \leqslant k \leqslant l$ ($1 \leqslant k \leqslant r$) верно $M', u_0 \models \varphi_k$ ($M', u_0 \models \neg\psi_k$), т. е. $M', u_0 \models \chi_{D_{i_j}}$. Отсюда следует выполнимость формулы $\chi_{D_{i_j}}$.

Лемма доказана.

Заметим, что третье свойство равносильности нельзя усилить до эквивалентности х.ф. основной вершины конъюнкции х.ф. её сыновей. Например, если $C_i^+ = \{\exists\bigcirc p, \exists\bigcirc\neg p\}$, $C_i^- = \varnothing$, то вершина C_i имеет сыновей D_{i_1} и D_{i_2}, где $D_{i_1}^+ = \{p\}$, $D_{i_1}^- = \varnothing$, $D_{i_2}^+ = \{\neg p\}$, $D_{i_2}^- = \varnothing$. Тогда формула $\chi_{C_i} = (\exists\bigcirc p \wedge \exists\bigcirc\neg p)$ выполнима, тогда как формула $(\chi_{D_{i_1}} \wedge \chi_{D_{i_2}}) = (p \wedge \neg p)$ невыполнима. Отсюда следует, что формула $(\chi_{C_i} \to (\chi_{D_{i_1}} \wedge \chi_{D_{i_2}}))$, и, следовательно, формула $\chi_{C_i} \equiv (\chi_{D_{i_1}} \wedge \chi_{D_{i_2}})$ не общезначимы.

5.7. Завершаемость работы алгоритма. В этом пункте формулируется теорема о завершаемости работы алгоритма за конечное число шагов и даётся краткое её доказательство. Детальное доказательство этой теоремы содержится в [7].

Определим множество формул $H(\Theta)$, используемых при исследовании на выполнимость формулы Θ.

Базис. $H(\Theta) = \{\Theta\}$.

Индукционный переход. Пусть $\theta \in H(\Theta)$.

1. Если $\theta = (\varphi \wedge \psi)$, $\theta = (\varphi \wedge \psi)$ или $\theta = (\varphi \to \psi)$, то $\varphi \in H(\Theta)$ и $\psi \in H(\Theta)$.
2. Если $\theta = \neg\varphi$, то $\varphi \in H(\Theta)$.
3. Если $\theta = \forall\bigcirc\varphi$ или $\theta = \exists\bigcirc\varphi$, то $\varphi \in H(\Theta)$.
4. Если $\theta = \forall\Box\varphi$, то $(\varphi \wedge \forall\bigcirc\forall\Box\varphi) \in H(\Theta)$.
5. Если $\theta = \exists\Box\varphi$, то $(\varphi \wedge (\exists\bigcirc\exists\Box\varphi \vee \forall\bigcirc\bot)) \in H(\Theta)$.
6. Если $\theta = \forall\Diamond\varphi$, то $(\varphi \vee (\forall\bigcirc\forall\Diamond\varphi \wedge \exists\bigcirc\top)) \in H(\Theta)$.
7. Если $\theta = \exists\Diamond\varphi$, то $(\varphi \vee \exists\bigcirc\exists\Diamond\varphi) \in H(\Theta)$.
8. Если $\theta = \forall(\varphi \mathcal{U} \psi)$, то $(\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\bigcirc\forall(\varphi \mathcal{U} \psi)) \wedge \exists\bigcirc\top)) \in H(\Theta)$.
9. Если $\theta = \exists(\varphi \mathcal{U} \psi)$, то $(\psi \vee (\varphi \wedge \exists\bigcirc\exists(\varphi \mathcal{U} \psi))) \in H(\Theta)$.

Других формул во множестве $H(\Theta)$ нет.

Теорема 5.1. *Для любой формулы Θ алгоритм распознавания выполнимости за конечное число шагов либо даёт ответ «Θ невыполнима», либо строит конечную модель M и даёт ответ «Θ выполнима», «Θ истинна в модели M».*

Доказательство. Построение завершённой схемы модели происходит за конечное число шагов, что следует из справедливости следующих утверждений. 1) Для любой формулы Θ при построении схемы модели в условии применения и результате применения каждого правила 1–6 участвуют только формулы из множества $H(\Theta)$. 2) Для любой формулы Θ множество $H(\Theta)$ конечно. 3) Число вершин в схеме модели конечно. 4) Распознавание $\perp$-свободной ($\top$-свободной) достижимости произвольной вершины B_i выполняется за конечное число шагов. 5) Рекурсивная процедура $\perp$-разметки ($\top$-разметки) из правила 1 (2) выполняется за конечное число шагов. 6) Каждое из правил 1–6 выполняется за конечное число шагов. 7) Все правила, применяемые к сыновьям произвольной вре́менной вершины D_i, выполняются за конечное число шагов. 8) Размеченная схема модели получается из начальной за конечное число шагов. 9) Приведение размеченной схемы модели к завершённой выполняется за конечное число шагов.

Далее, для любой формулы Θ заключительная схема модели получается из начальной за конечное число шагов, что следует из предшествующего утверждения, а также того, что проверка подтвержденности обещания θ в вершине C_i выполняется за конечное число шагов, а процедура фильтрования выполняется за конечное число шагов.

Наконец, модель M, полученная по завершённой схеме модели с $\top$-помеченной начальной вершиной, является конечной и строится за конечное число шагов; модель M, полученная по непустой заключительной схеме модели, является конечной и строится за конечное число шагов. Отсюда следует, что если для произвольной формулы Θ происходит построение модели, то оно выполняется за конечное число шагов, а сама модель M является конечной.

Теорема доказана.

§ 6. Корректность алгоритма

В этом параграфе доказывается теорема о корректности алгоритма. В случае ответа алгоритма «Θ выполнима» в § 4 сформулировано построение модели M, которая объявляется моделью для формулы Θ. Теорема о корректности алгоритма состоит в утверждении, что формула Θ истинна в построенной модели M.

При построении модели для формулы Θ в § 4 выделены два случая. Первый случай — построение модели по завершённой $\top$-помеченной схеме модели. Второй случай — построение модели по непустой заключительной схеме модели. Для каждого случая построения модели в этом параграфе доказывается отдельная теорема об истинности формулы Θ в построенной модели M. Таким образом, общая теорема о корректности алгоритма следует из этих двух теорем.

6.1. Доказательство корректности алгоритма в первом случае. Пусть модель M построена по завершённой $\top$-помеченной схеме модели — завершённой схеме модели с $\top$-помеченной начальной вершиной. Построение модели в этом случае (см. § 4, п. 4.1) сделано для х.ф. χ_{C_i} произвольной $\top$-помеченной вершины $C_i^{\top n_i}$, а моделью для х.ф. χ_{D_i} вершины $D_i^{\top n_i+1, C_i}$, имеющей по определению процедуры $\top$-разметки сына $C_i^{\top n_i}$, была объявлена модель, построенная для формулы χ_{C_i}. В частности, моделью для формулы Θ, совпадающей с х.ф. χ_{D_0} начальной вершины $D_0^{\top n_0+1, C_0}$ графа G, имеющей сына $C_0^{\top n_0}$, объявлена модель, построенная для формулы χ_{C_0}. Поэтому теорема об истинности формулы Θ в построенной модели M будет следовать из истинности х.ф. χ_{D_i} и χ_{C_i} произвольных $\top$-помеченных вершин $D_i^{\top n_i+1, C_i}$ и $C_i^{\top n_i}$, где $D_i^{\top n_i+1, C_i}$ — родитель вершины $C_i^{\top n_i}$ в модели, построенной для форумулы χ_{C_i}.

Лемма 6.1. *Если $D_i^{\top n_i+1, C_i}$ — произвольная $\top$-помеченная вершина в завершённой схеме модели, а $C_i^{\top n_i}$ — её сын, то формулы χ_{C_i} и χ_{D_i} истинны в модели M, построенной для формулы χ_{C_i}.*

Доказательство. Модель M для формулы χ_{C_i} получается из $\top$-а.п. Υ_{C_i}, найденного в § 4, п. 4.1. путём индукции по числу n_i. Проведём индукцию по этому числу n_i и в данном доказательстве.

Базис. Если $n_i = 0$, то вершина $C_i^{\top n_i}$ — концевая $\top$-помеченная в завершённой схеме модели, а модель для формулы χ_{C_i} состоит из единственной вершины u_0, для которой $L(u_0) = C_i^{p+}$. Тогда $M, u_0 \models \chi_{C_i}$ следует из $M, u_0 \models \varphi$ для каждого члена конъюнкции χ_{C_i}, который в силу правила 2 имеет один из шести видов:

$$\varphi = \top,\text{ где } \top \in C_i^+,\quad \varphi = \bot,\text{ где } \bot \in C_i^-,\quad \varphi = p,\text{ где } p \in C_i^+,$$
$$\varphi = \neg q,\text{ где } q \in C_i^-,\quad \varphi = \forall\circ\theta_1,\text{ где } \forall\circ\theta_1 \in C_i^+,\quad \varphi = \neg\exists\circ\theta_2,\text{ где } \exists\circ\theta_2 \in C_i^-.$$

В первых четырёх случаях $M, u_0 \models \varphi$ следует из нашего определения $L(u_0)$, а в последних двух — из определения истинности формул вида $\forall\circ\varphi$, $\neg\exists\circ\varphi$ и отсутствия сыновей у вершины u_0. Из леммы 5.6 тогда также следует $M, u_0 \models \chi_{D_i}$ для х.ф. вершины $D_i^{\top 1, C_i}$.

Индукционный переход. Пусть для всякой $\top$-помеченной вершины $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$ из $\top$-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$, где $0 \leqslant n_{i_j} \leqslant n_i - 1$, по $\top$-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$ построена модель $M_{i_j} = \langle \Gamma_{i_j}, L_{i_j} \rangle$ с выделенной вершиной u_{i_j}, для которой $L_{i_j}(u_{i_j}) = C_{i_j}^{p+}$, доказано $M_{i_j}, u_{i_j} \models \chi_{C_{i_j}}$, а также $M_{i_j}, u_{i_j} \models \chi_{D_{i_j}}$, где $\chi_{D_{i_j}}$ есть х.ф. родителя $D_{i_j}^{\top n_{i_j}+1, C_{i_j}}$ вершины $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$. Так как $n_i > 0$, вершина $C_i^{\top n_i}$ в $\top$-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$ имеет сыновей — пусть их число равно m, $m > 0$. Тогда каждый её сын $D_{i_j}^{\top n_{i_j}+1, C_{i_j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\top$-помечен и имеет в $\top$-а.п. $\Upsilon_{C_{i_j}}$ сына $C_{i_j}^{\top n_{i_j}}$. По построению, объявляемая модель $M = \langle \Gamma, L \rangle$ для формулы χ_{C_i} состоит из объединения всех Γ_{i_j} с определённой на вершинах из этого множества оценкой, совпадающей с соответствующей оценкой L_{i_j}, добавленной выделенной вершины u_0, для которой $L(u_0) = C_i^{p+}$, и m добавленных дуг (u_0, u_{i_j}), $1 \leqslant j \leqslant m$. Каждый член конъюнкции χ_{C_i} в силу правила 6 имеет один из шести видов:

$$\varphi = p,\text{ где } p \in C_i^+,\quad \varphi = \neg q,\text{ где } q \in C_i^-,$$
$$\varphi = \forall\circ\theta_1,\text{ где } \forall\circ\theta_1 \in C_i^+,\quad \varphi = \exists\circ\theta_2,\text{ где } \exists\circ\theta_2 \in C_i^+,$$
$$\varphi = \neg\exists\circ\theta_3,\text{ где } \exists\circ\theta_3 \in C_i^- \text{ и } \varphi = \neg\forall\circ\theta_4,\text{ где } \forall\circ\theta_4 \in C_i^-.$$

В первых двух случаях $M, u_0 \models \varphi$ следует из нашего определения $L(u_0)$, а в остальных — из правила 6, определения истинности формул вида $\forall\circ\varphi$ и $\exists\circ\varphi$ и индукционного предположения $M_{i_j}, u_{i_j} \models \chi_{D_{i_j}}$. Поэтому верно $M, u_0 \models \chi_{C_i}$, а из леммы 5.6 следует и $M, u_0 \models \chi_{D_i}$ для х.ф. χ_{D_i} вершины $D_i^{\top n_i+1, C_i}$, являющейся родителем вершины $C_i^{\top n_i}$. Индукционный переход сделан. Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Если по завершённой $\top$-помеченной схеме модели построена модель M, то формула Θ истинна в этой модели.*

Доказательство. По определению завершённой $\top$-помеченной схемы модели её начальная вершина $\top$-помечена и имеет вид $D_0^{\top n_0+1, C_0}$.

Тогда модель M для формулы χ_{C_0} построена по Υ-а.п. Υ_{C_0}. В силу леммы 6.1 верно $M, u_0 \models \chi_{D_0}$. Но тогда из совпадения χ_{D_0} и Θ следует и $M, u_0 \models \Theta$. Теорема доказана.

6.2. Вспомогательные утверждения для некоторых видов формул в построенной модели во втором случае. Пусть M — приведённая модель, построенная по заключительной схеме модели (см. § 4, пп. 4.2–4.5). В этом пункте для положительных формул вида $\forall\Box\psi$, $\exists\Box\psi$ и отрицательных формул вида $\exists\Diamond\psi$, $\forall\Diamond\psi$, $\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$, $\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$ доказываются вспомогательные утверждения, на основе которых затем будут доказаны истинность этих положительных и отрицаний отрицательных формул в построенной приведённой модели. Остальные случаи формул указанного вида рассматриваются в п. 6.3.

Вспомогательное утверждение для положительных формул вида $\forall\Box\psi$ и $\exists\Box\psi$ по своей формулировке соотвествует определению истинности формул этого вида в модели M вершине u_j (см. § 1). Вспомогательные утверждения для отрицательных формул вида $\exists\Diamond\psi$, $\forall\Diamond\psi$, $\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$ и $\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi)$, по своим формулировкам соотвествуют отрицанию определения истинности формул этого вида в модели M вершине u_j (см. § 1).

Лемма 6.2. *Если верно $\forall\Box\psi \in C_j^+$ ($\exists\Box\psi \in C_j^+$), то во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^+$.*

Доказательство. Очевидно, что всякий (некоторый) путь в графе Γ содержит конечное число различных вершин, не превышающее число вершин графа Γ. Проведём индукцию по числу встретившихся различных вершин в этом пути.

Базис. Число встретившихся различных вершин в пути с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ равно единице. Тогда этот путь состоит из вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j в схеме модели. По условию верно $\forall\Box\psi \in C_j^+$ ($\exists\Box\psi \in C_j^+$), а в силу применения правил 3a) (3b)), 4c) имеет место $\psi \in C_j^+$. Базисный случай разобран.

Индукционный переход. Пусть для произвольного (некоторого) конечного пути с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ каждой из n встретившихся в данном пути различных вершин $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена соответственно вершина C_h, для которой верно $\forall\Box\psi \in C_h^+$ ($\exists\Box\psi \in C_h^+$) и $\psi \in C_h^+$. Рассмотрим произвольный (некоторый) путь, являющийся продолжением данного с $(n+1)$ различными встретившимися в нём вершинами, и пусть первое вхождение $(n+1)$-й вершины $u_{t_{h'}}^{h',k_{h'}}$, сопоставленной вершине $C_{h'}$, следует в этом пути за вершиной $u_{t_h}^{h,k_h}$, сопоставленной вершине C_h. Тогда в силу применения правил 3a) (3b)), 4c) и 5a) имеет место $\forall\bigcirc\forall\Box\psi \in C_h^+$ ($\exists\bigcirc\exists\Box\psi \in C_h^+$ или $\forall\bigcirc\bot \in C_h^+$), т. е. для вершины $C_{h'}$, так как она является сыном сына вершины C_h, верно $\forall\Box\psi \in C_{h'}^+$ ($\exists\Box\psi \in C_{h'}^+$). Применяя правила 3a) (3b)), 4c), 5a), получаем $\psi \in C_{h'}^+$. Повторяя проведенные рассуждения для каждого вхождения в рассматриваемый путь с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ вершины $u_{t_{h'}}^{h',k_{h'}}$, сопоставленной вершине $C_{h'}$, получаем доказательство леммы для произвольного (некоторого) пути с $(n+1)$ различными встретившимися в нём вершинами. Индукционный переход сделан. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Если верно $\exists\Diamond\psi \in C_j^-$ ($\forall\Diamond\psi \in C_j^-$), то во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопо-*

ставленной вершине C_j, всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 6.2 с заменой правил 3a) (3b)), 4c) и 5a) на правила 3j) (3i)), 4d), 5b).

Лемма 6.4. *Если верно $\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_j^-$ $(\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_j^-)$, то во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, либо 1) всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена соответственно вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$, либо 2) существует вершина $u_{t_m}^{m,k_m}$ в этом пути, сопоставленная вершине C_m, для которой верно $\varphi \in C_m^-$, и всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ пути с началом в $u_{t_j}^{j,k_j}$ и концом в $u_{t_m}^{m,k_m}$, сопоставлена соответственно вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$.*

Доказательство. Очевидно, что всякий (некоторый) путь в графе Γ содержит конечное число различных вершин, не превышающее число вершин графа Γ. Проведём индукцию по числу встретившихся различных вершин в этом пути.

Базис. Число встретившихся различных вершин в пути с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ равно единице. Тогда этот путь состоит из вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j в схеме модели. По условию $\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_j^-$ $(\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_j^-)$, а в силу применения правил 3l) (3k)), 4d) имеет место $\psi \in C_j^-$. Базисный случай разобран.

Индукционный переход. Пусть для произвольного (некоторого) конечного пути с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ с n встретившимися в нём различными вершинами имеет место утверждение этой леммы. Если верно утверждение из п. 2), то оно остается верным и для всякого (некоторого) продолжения этого пути, и поэтому в данном случае лемма доказана. Тогда пусть верно утверждение из п. 1) и каждой из n встретившихся в данном пути различных вершин $u_{t_h}^{h,k_h}$ сопоставлена соответственно вершина C_h, для которой верно $\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_h^-$ $(\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_h^-)$. Рассмотрим произвольный (некоторый) путь, являющийся продолжением данного с $(n+1)$ различными встретившимися в нём вершинами, и пусть первое вхождение $(n+1)$-й вершины $u_{t_{h'}}^{h',k_{h'}}$, сопоставленной вершине $C_{h'}$, следует в этом пути за вершиной $u_{t_h}^{h,k_h}$, сопоставленной вершине C_h. Тогда в силу применения правил 3l) (3k)), 4d), 5b) и исключения случая из п. 2) имеет место $\exists\bigcirc\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_h^-$ $(\forall\bigcirc\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_h^-$ или $\exists\bigcirc\top \in C_h^-)$, т. е. для вершины $C_{h'}$, так как она является сыном сына вершины C_h, верно $\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_{h'}^-$ $(\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi) \in C_{h'}^-)$. Применяя правила 3l) (3k)), 4d), 5b), получаем $\psi \in C_{h'}^-$, и, быть может, $\varphi \in C_{h'}^-$. Повторяя проведенные рассуждения для каждого вхождения в рассматриваемый путь с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ вершины $u_{t_{h'}}^{h',k_{h'}}$, сопоставленной вершине $C_{h'}$, получаем доказательство леммы для произвольного (некоторого) пути с $(n+1)$ различными встретившимися в нём вершинами. Индукционный переход сделан. Лемма доказана.

6.3. Вспомогательные утверждения для обещаний. В этом пункте будут доказаны вспомогательные утверждения для формул, являющихся обещаниями (см. § 3, п. 3.1). Вспомогательные утверждения для четырёх видов обещаний — положительных формул вида $\forall\Diamond\psi$, $\exists\Diamond\psi$, $\forall(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi)$ и $\exists(\varphi \,\mathcal{U}\, \psi)$ по своим формулировкам соответствуют определениям истинности формул этого вида в модели M вершине u_j (см. § 1). Вспомогательное утверждение для двух оставшихся видов обещаний — отрицательных формул вида $\exists\Box\psi$ и $\forall\Box\psi$ по своей формулировке соотвествует отрицанию определения истинности формул этого вида в модели M вершине u_j (см. § 1).

Лемма 6.5. *Если верно $\forall\Diamond\psi \in C_j^+$ ($\exists\Diamond\psi \in C_j^+$), то для любой вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ существует вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$.*

Доказательство. Пусть $u_{t_j}^{j,k_j}$ — произвольная вершина, сопоставленная вершине C_j, для которой верно $\forall\Diamond\psi \in C_j^+$ ($\exists\Diamond\psi \in C_j^+$). Рассмотрим произвольный (некоторый) полный путь в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. не существует вершины $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленной вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$. Тогда с помощью индукции по числу различных вершин в этом полном пути, аналогичной индукции, проведённой в доказательстве леммы 6.2, получаем доказательство того, что в этом полном пути всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$, сопоставлена соответственно вершине C_h, для которой верно $\forall\Diamond\psi \in C_h^+$ ($\exists\Diamond\psi \in C_h^+$). Возможны два случая.

Случай 1. Рассматриваемый путь есть цепь, последняя вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$ которой является концевой. Тогда она сопоставлена концевой $\top$-помеченной вершине $C_r^{\top 0}$, для которой верно $\forall\Diamond\psi \in C_r^+$ ($\exists\Diamond\psi \in C_r^+$) и $\psi \notin C_r^+$. Отсюда по правилам 3c) (3d)), 5a) и 4c) получаем $\forall\circ\forall\Diamond\psi \in C_r^+$, $\exists\circ\top \in C_r^+$ ($\exists\circ\exists\Diamond\psi \in C_r^+$). Однако, поскольку вершина $C_r^{\top 0}$ является концевой и $\top$-помеченной, к ней было применено правило 2, что противоречит $\exists\circ\top \in C_r^+$ ($\exists\circ\exists\Diamond\psi \in C_r^+$). Таким образом, в случае 1 получено противоречие с предположением о том, что утверждение леммы неверно.

Случай 2. Рассматриваемый путь является бесконечным и в процедуре построения закрытой текущей модели ни для какой его вершины $u_{t_h}^{h,k_h}$, сопоставленной C_h, в силу $\forall\Diamond\psi \in C_h^+$ ($\exists\Diamond\psi \in C_h^+$) и $\psi \notin C_h^+$ не выполнялся п. (iii). Тогда пусть начальным участком рассматриваемого пути является наименьшая цепь с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ и концом в вершине $u_{t_m}^{m,k_m}$, закрывающей цикл для вершин цепи $u_0^{i,0}$-$u_{t_m}^{m,k_m}$. Если среди вершин этой цепи имеется вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$, то противоречие с отрицанием утверждения леммы получено. Иначе пусть вершина $u_{t_s'}^{s,k_s'}$, сопоставленная вершине C_s, является сыном вершины $u_{t_m}^{m,k_m}$ и открывает цикл для вершин цепи $u_0^{i,0}$-$u_{t_m}^{m,k_m}$. Тогда следующим участком пути является произвольная (некоторая) наименьшая цепь с началом в вершине $u_{t_s'}^{s,k_s'}$ и концом в вершине $u_{t_{\bar m}}^{\bar m,k_{\bar m}}$, закрывающей цикл для вершин цепи $u_0^{i,0}$-$u_{t_{\bar m}}^{\bar m,k_{\bar m}}$. Согласно процедуре построения модели обещание $\forall(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_s^+$ ($\exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_s^+$) подтверждено в вершине $u_{t_s'}^{s,k_s'}$. Тогда на рассматриваемой цепи существует вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$ (пусть она будет первой по счету, если таковых несколько), сопоставленная вершине C_r, для которой $\psi \in C_r^+$; либо эта вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$ есть $u_{t_{\bar s}}^{\bar s,k_{\bar s}}$, которая, будучи сыном $u_{t_{\bar m}}^{\bar m,k_{\bar m}}$, являлась активной и была удалена при приведении закрытой текущей модели. В последнем случае такой вершиной $u_{t_r}^{r,k_r}$ будем считать сына вершины $u_{t_{\bar m}}^{\bar m,k_{\bar m}}$ по результатам приведения закрытой текущей модели — вершину $u_{t_{\bar s}'}^{\bar s,k_{\bar s}'}$, открывающую цикл для вершин цепи $u_0^{i,0}$-$u_{t_{\bar m}}^{\bar m,k_{\bar m}}$. Итак, вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$, найдена. Таким образом, в случае 2 также получено противоречие с отрицанием утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Если верно* $\exists\Box\psi \in C_j^-$ $(\forall\Box\psi \in C_j^-)$, *то для любой вершины* $u_{t_j}^{j,k_j}$, *сопоставленной вершине* C_j, *во всяком (в некотором) полном пути в графе* Γ *с началом в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$ *существует вершина* $u_{t_r}^{r,k_r}$, *сопоставленная вершине* C_r, *для которой верно* $\psi \in C_r^-$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 6.5 с соответствующей заменой правил 3с), 3d), 5а) и 4с) на правила 3b), 3а), 5b) и 4d).

Лемма 6.7. *Если верно* $\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_j^+$ $(\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_j^+)$, *то для любой вершины* $u_{t_j}^{j,k_j}$, *сопоставленной вершине* C_j, *во всяком (в некотором) полном пути в графе* Γ *с началом в вершине* $u_{t_j}^{j,k_j}$ *существует вершина* $u_{t_r}^{r,k_r}$, *сопоставленная вершине* C_r, *для которой верно* $\psi \in C_r^+$, *и всякая вершина* $u_{t_h}^{h,k_h}$ *этого пути, предшествующая вершине* $u_{t_r}^{r,k_r}$, *соответственно сопоставлена вершине* C_h, *для которой верно* $\varphi \in C_h^+$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 6.5 с соответствующей заменой правил 3с) и 3d) на правила 3е) и 3f). Другое отличие состоит в том, что всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ этого пути, предшествующая вершине $u_{t_r}^{r,k_r}$, соответственно сопоставлена вершине C_h, для которой вместе с $\forall\circ\forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_h^+$, $\exists\circ\top \in C_h^+$ $(\exists\circ\exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi) \in C_h^+)$ имеет место $\varphi \in C_h^+$.

6.4. Лемма об истинности в вершине приведённой модели формулы произвольного вида. Лемма 6.8. *Для произвольной вершины* $u_{t_j}^{j,k_j}$, *сопоставленной вершине* C_j, *и произвольной формулы* θ *верны следующие утверждения: если* $\theta \in C_j^+$, *то* $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$; *если* $\theta \in C_j^-$, *то* $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$.

Доказательство. Пусть $u_{t_j}^{j,k_j}$ — произвольная вершина в приведённой модели, сопоставленная вершине C_j, а θ — произвольная положительная или отрицательная формула. Проведём индукцию по строению формулы θ.

Базис. Формула θ является пропозициональной переменной p. Тогда если $p \in C_j^+$, то в силу в силу определения оценки $L(u_{t_j}^{j,k_j}) = C_j^{p+}$ $p \in L(u_{t_j}^{j,k_j})$, откуда следует $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models p$. Если же $p \in C_j^-$, то $p \notin C_j^+$ (иначе вершина C_j являлась бы $\bot$-помеченной, что невозможно для заключительной схемы модели G) и, следовательно, $p \notin L(u_{t_j}^{j,k_j})$, откуда получается $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models p$.

Индукционный переход. По определению, произвольная формула θ, отличная от пропозициональной переменной, имеет один из следующих видов:

$$\top, \bot, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), \neg\varphi, \forall\circ\varphi,$$
$$\exists\circ\varphi, \forall\Box\psi, \exists\Box\psi, \forall\Diamond\psi, \exists\Diamond\psi, \forall(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi), \exists(\varphi\,\mathcal{U}\,\psi).$$

Пусть для произвольной вершины $u_{t_h}^{h,k_h}$, сопоставленной вершине C_h, и каждой из формул φ и ψ утверждение леммы доказано. Докажем это утверждение для вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, и формулы θ. Рассмотрим все случаи.

(i) $\theta = \top \in C_j^+$ $(\theta = \bot \in C_j^-)$. Тогда, очевидно, $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$ $(M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta)$.

(ii) $\theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_j^+$, $\theta = (\varphi \vee \psi) \in C_j^-$, $\theta = (\varphi \to \psi) \in C_j^-$, $\theta = \neg\varphi \in C_j^+$ или $\theta = \neg\varphi \in C_j^-$. Если $\theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_j^+$, то при построении схемы модели было применено правило 4c), и, следовательно, $\varphi \in C_j^+$ и $\psi \in C_j^+$. По индукционному предположению отсюда следует, что $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \varphi$ и $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \models \psi$, т. е., по определению истинности формулы θ получаем $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$. Случаи $\theta = (\varphi \vee \psi) \in C_j^-$, $\theta = (\varphi \to \psi) \in C_j^-$, $\theta = \neg\varphi \in C_j^+$ и $\theta = \neg\varphi \in C_j^-$ рассматриваются аналогично с применением правил 4d), 4e), 4f), 4g).

(iii) $\theta = (\varphi \vee \psi) \in C_j^+$, $\theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_j^-$ или $\theta = (\varphi \to \psi) \in C_j^+$. Если $\theta = (\varphi \vee \psi) \in C_j^+$, то при построении схемы модели было применено правило 5a), и, следовательно, $\varphi \in C_j^+$ или $\psi \in C_j^+$. По индукционному предположению отсюда следует, что $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \varphi$ или $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \psi$, т. е., по определению истинности формулы θ получаем $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$. Случаи $\theta = (\varphi \wedge \psi) \in C_j^-$ и $\theta = (\varphi \to \psi) \in C_j^+$ рассматриваются аналогично с применением правил 5b) и 5c).

(iv) $\theta = \exists\bigcirc\varphi \in C_j^+$ ($\theta = \forall\bigcirc\varphi \in C_j^-$). Тогда по построению в модели M существует сын $u_{t_h}^{h,k_h}$ вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленный вершине C_h, являющейся сыном некоторой вершины D_h, которая является сыном вершины C_j, причём для вершины D_h, и, следовательно, вершины C_h верно $\varphi \in D_h^+$, $\varphi \in C_h^+$ ($\varphi \in D_h^-$, $\varphi \in C_h^-$). Из индукционного предположения следует $M, u_{t_h}^{h,k_h} \models \varphi$ ($M, u_{t_h}^{h,k_h} \not\models \varphi$), что по определению даёт $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \exists\bigcirc\varphi$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \forall\bigcirc\varphi$), т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$).

(v) $\theta = \forall\bigcirc\varphi \in C_j^+$ ($\theta = \exists\bigcirc\varphi \in C_j^-$). Тогда по построению либо у вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$ вообще нет сыновей — в этом случае по определению $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$); либо в модели M каждый сын $u_{t_h}^{h,k_h}$ вершины $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставлен некоторой вершине C_h, являющейся сыном вершины D_h, которая является сыном вершины C_j, причём для D_h (как и вообще для всякого сына вершины C_j) верно $\varphi \in D_h^+$ ($\varphi \in D_h^-$), откуда следует $\varphi \in C_h^+$ ($\varphi \in C_h^-$). Тогда по индукционному предположению получаем $M, u_{t_h}^{h,k_h} \models \varphi$ ($M, u_{t_h}^{h,k_h} \not\models \varphi$), что в силу произвольности $u_{t_h}^{h,k_h}$ даёт $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \forall\bigcirc\varphi$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \exists\bigcirc\varphi$), т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$).

(vi) $\theta = \forall\Box\psi \in C_j^+$ ($\theta = \exists\Box\psi \in C_j^+$). Тогда в силу леммы 6.2 во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, всякой вершине $u_{t_h}^{h,k_h}$ этого пути сопоставлена соответственно вершина C_h, для которой верно $\psi \in C_h^+$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_h}^{h,k_h} \models \psi$. Тогда по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \forall\Box\psi$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \exists\Box\psi$), т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$.

(vii) $\theta = \exists\Diamond\psi \in C_j^-$ ($\theta = \forall\Diamond\psi \in C_j^-$). Тогда в силу леммы 6.3 во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, всякой вершине $u_{t_h}^{h,k_h}$ этого пути сопоставлена соответственно вершина C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_h}^{h,k_h} \not\models \psi$. Тогда по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \exists\Diamond\psi$ ($M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \forall\Diamond\psi$), т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$.

(viii) $\theta = \exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_j^-$ ($\theta = \forall(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_j^-$). Тогда в силу леммы 6.4 во всяком (в некотором) полном пути в графе Γ с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$, сопоставленной вершине C_j, либо 1) всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ этого пути сопоставлена соответственно вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$ — тогда по индукционному предположению $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \psi$; либо 2) существует вершина $u_{t_m}^{m,k_m}$ в этом пути, сопоставленная вершине C_m, для которой верно $\varphi \in C_m^-$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_m}^{m,k_m} \not\models \varphi$, и всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ пути с началом в $u_{t_j}^{j,k_j}$ и концом в $u_{t_m}^{m,k_m}$, сопоставлена соответственно вершине C_h, для которой верно $\psi \in C_h^-$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_h}^{h,k_h} \not\models \psi$. В обоих случаях по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \exists(\varphi \mathcal{U} \psi)$ $(M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \forall(\varphi \mathcal{U} \psi))$, т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$.

(ix) $\theta = \forall\Diamond\psi \in C_j^+$ $(\theta = \exists\Diamond\psi \in C_j^+)$. Тогда в силу леммы 6.5 во всяком (в некотором) полном пути в графе Г с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ существует вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_r}^{r,k_r} \models \psi$. Тогда по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \forall\Diamond\psi$ $(M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \exists\Diamond\psi)$, т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$.

(x) $\theta = \exists\Box\psi \in C_j^-$ $(\theta = \forall\Box\psi \in C_j^-)$. Тогда в силу леммы 6.6 во всяком (в некотором) полном пути в графе Г с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ существует вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^-$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_r}^{r,k_r} \not\models \psi$. Тогда по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \exists\Box\psi$ $(M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \forall\Box\psi)$, т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \not\models \theta$.

(xi) $\theta = \forall(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_j^+$ $(\theta = \exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \in C_j^+)$. Тогда в силу леммы 6.7 во всяком (в некотором) полном пути в графе Г с началом в вершине $u_{t_j}^{j,k_j}$ существует вершина $u_{t_r}^{r,k_r}$, сопоставленная вершине C_r, для которой верно $\psi \in C_r^+$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_r}^{r,k_r} \models \psi$, а всякая вершина $u_{t_h}^{h,k_h}$ этого пути, предшествующая вершине $u_{t_r}^{r,k_r}$, соответственно сопоставлена вершине C_h, для которой верно $\varphi \in C_h^+$, что даёт по индукционному предположению $M, u_{t_h}^{h,k_h} \models \varphi$. Тогда по определению верно $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \forall(\varphi \mathcal{U} \psi)$ $(M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \exists(\varphi \mathcal{U} \psi))$, т. е. $M, u_{t_j}^{j,k_j} \models \theta$.

Все случаи разобраны. Индукционный переход сделан. Лемма доказана.

6.5. Доказательство корректности алгоритма во втором случае. Докажем теперь для второго случая построения модели лемму, аналогичную лемме 6.1.

Лемма 6.9. *Если D_i — произвольная временная вершина в заключительной схеме модели, C_i — её сын и построена модель M для формулы χ_{C_i}, то формулы χ_{C_i} и χ_{D_i} истинны в этой модели.*

Доказательство. Пусть D_i — произвольная временная вершина в заключительной схеме модели, C_i — её сын и построена модель M для формулы χ_{C_i}. По определению, χ_{C_i} имеет вид $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_m \wedge \neg\theta_{m+1} \wedge \ldots \wedge \neg\theta_{m+n}$, где $m+n \geqslant 1$, $\theta_k \in C_i^+$ при $1 \leqslant k \leqslant m$, $\theta_k \in C_i^-$ при $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$. Тогда по лемме 6.8 $M, u_0 \models \theta_k$ при $1 \leqslant k \leqslant m$, и $M, u_0 \not\models \theta_k$, т. е. $M, u_0 \models \neg\theta_k$ при $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$, откуда следует и $M, u_0 \models \chi_{C_i}$. Из истинности формулы χ_{C_i} в модели M и истинности по лемме 5.6 формулы $(\chi_{C_i} \to \chi_{D_i})$ во всякой модели получаем истинность и формулы χ_{D_i} в модели M. Лемма доказана.

Теорема 6.2. *Если по заключительной схеме модели построена модель M, то формула Θ истинна в этой модели.*

Доказательство. Пусть по заключительной схеме модели построена модель M для формулы χ_{C_0}, где вершина C_0 является некоторым сыном начальной вершины D_0 в заключительной схеме модели. Тогда из леммы 6.9 следует, что формула χ_{D_0} истинна в этой модели M. Но по построению формула χ_{D_0} совпадает с формулой Θ, т. е. формула Θ истинна в построенной модели M. Теорема доказана.

6.6. Теорема о корректности алгоритма. Как уже отмечалось в начале этого параграфа, следующая теорема о корректности алгоритма следует из теорем 6.1 и 6.2.

Теорема 6.3. *В построенной алгоритмом для формулы Θ модели M формула Θ истинна.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что если при распознавании выполнимости формулы Θ ответом алгоритма является «Θ выполнима», то этот ответ верен. Если же формула Θ невыполнима, то алгоритм распознавания выполнимости формул не может дать ответ «Θ выполнима», так как это противоречило бы теореме 6.3 (о корректности). Тогда в силу теоремы 5.1 (о завершаемости) алгоритм даёт ответ «Θ невыполнима». Отсюда получается следствие из теоремы 6.3.

Следствие 6.1. *Если формула Θ невыполнима, то алгоритм распознавания выполнимости даёт ответ «Θ невыполнима».*

Корректность алгоритма доказана.

§ 7. Эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом. Его корректность и полнота

Система аксиом и правил вывода для логики ветвящегося времени предложена в [9]. Там же доказано, что всякая общезначимая формула выводится из этих схем аксиом, т. е. полнота системы аксиом. Эта полнота, однако, доказывается без указания метода вывода общезначимых формул из аксиом, отличного от тривиального. Тривиальный метод состоит в перечислении всех общезначимых формул, являющихся аксиомами, и порождении всевозможных выводов, что практически не даёт возможности построить вывод для конкретной общезначимой формулы, так как не учитывает её структуру. Отметим также, что в работе [9] на графы в моделях для формул было наложено ограничение тотальности: всякая вершина в графе имеет последователя. В общем случае, когда отсутствует ограничение тотальности, в [9] приведена система аксиом с указаниями сведения общего случая к частному. Этот общий случай рассматривается в настоящем параграфе, и формулируется алгоритм построения вывода данной произвольной общезначимой формулы из аксиом, откуда, в частности, также следует и полнота системы аксиом.

Формулируемый ниже алгоритм построения вывода общезначимых формулы из аксиом базируется на алгоритме распознавания выполнимости формул (§§ 2, 3, 5, 6). Для данной общезначимой формулы рассматривается задача распознавания выполнимости её отрицания. Попытка построить для такой формулы модель приводит к неудаче, однако накопленная в построенной схеме модели информация используется для вывода двойного отрицания исходной формулы. Этот процесс начинается с вывода отрицаний х.ф. концевых вершин, а также отрицаний х.ф. вершин, содержащих неподтверждённые обещания, и продолжается «снизу вверх» вплоть до вывода отрицания х.ф. начальной вершины, совпадающей с двойным отрицанием данной общезначимой формулы. Наконец, из вывода двойного отрицания исходной общезначимой формулы получается вывод её самой.

7.1. Основные определения. Следующие формулы называются схемами аксиом (в дальнейшем — просто аксимомами) логики высказываний (л.в.). Это Гильбертовская система аксиом (см., например, [1]).

(AxG1) $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
(AxG2) $((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))$
(AxG3) $((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$
(AxG4) $((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$
(AxG5) $(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$
(AxG6) $(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$
(AxG7) $(\psi \to (\varphi \vee \psi))$
(AxG8) $((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)))$
(AxG9) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi))$
(AxG10) $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

Единственным правилом вывода в логике высказываний называется modus ponens (MP) — из φ и $(\varphi \to \psi)$ следует ψ.

$$\textbf{(MP)} \quad \varphi, (\varphi \to \psi) \vdash \psi$$

Следующие формулы называются схемами аксиом (в дальнейшем — просто аксиомами) логики ветвящегося времени (см. [9]).

(Ax1) всякая формула из Гильбертовской системы аксиом AxG1–AxG10
(Ax2) $\exists\Diamond\varphi \equiv \exists(\top\, \mho\, \varphi)$
(Ax3) $\forall\Diamond\varphi \equiv \forall(\top\, \mho\, \varphi)$
(Ax4) $\forall\Box\varphi \equiv \neg\exists\Diamond\neg\varphi$
(Ax5) $\exists\Box\varphi \equiv \neg\forall\Diamond\neg\varphi$
(Ax6) $\exists\circ(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists\circ\varphi \vee \exists\circ\psi)$
(Ax7) $\forall\circ\varphi \equiv \neg\exists\circ\neg\varphi$
(Ax8) $\exists(\varphi\, \mho\, \psi) \equiv (\psi \vee (\varphi \wedge \exists\circ\exists(\varphi\, \mho\, \psi)))$
(Ax9) $\forall(\varphi\, \mho\, \psi) \equiv (\psi \vee ((\varphi \wedge \forall\circ\forall(\varphi\, \mho\, \psi)) \wedge \exists\circ\top))$
(Ax10) $\forall\circ\top$

Правила вывода в логике ветвящегося времени следующие.

(R1) $(\varphi \to \psi) \vdash (\exists\circ\varphi \to \exists\circ\psi)$
(R2) $(\varphi_1 \to (\neg\varphi_2 \wedge \exists\circ\varphi_1)) \vdash (\varphi_1 \to \neg\forall(\psi\, \mho\, \varphi_2))$
(R3) $(\varphi_1 \to (\neg\varphi_2 \wedge \forall\circ(\varphi_1 \vee \neg\exists(\psi\, \mho\, \varphi_2)))) \vdash (\varphi_1 \to \neg\exists(\psi\, \mho\, \varphi_2))$
(R4) правило (MP)

Эту систему аксиом и правила вывода будем называть также *базовыми* для логики ветвящегося времени.

Напомним, что общезначимой называется формула, истинная во всякой модели (см. § 1). Заметим, что данная система аксиом и правил вывода является корректной: каждая аксиома является общезначимой формулой, и общезначимость формул сохраняется каждым правилом вывода. Доказательство корректности данной системы аксиом и правил вывода проводятся аналогично доказательству леммы 5.1.

Формула Θ называется *выводимой*, что обозначается $\vdash\Theta$, если существует такая конечная последовательность формул, заканчивающаяся формулой Θ, в которой каждая формула является подстановкой в одну из аксиом (т. е. аксиомой) или следует из предыдущих по одному из правил вывода. Эта последовательность называется *выводом формулы* Θ *из аксиом.*

Введём вспомогательные аксиомы и правила вывода, использование которых в выводе общезначимой формулы, может быть заменено нижеследующими выводами этих аксиом и правил вывода из базовых.

7.2. Первое расширение аксиом и правил вывода. Для работы напрямую с одноместными связками $\forall\circ$, $\forall\Diamond$, $\exists\Diamond$, $\forall\Box$ и $\exists\Box$ введем первое расширение базовых аксиом и правил вывода.

(AxA1.1) $\forall\circ(\varphi\wedge\psi)\equiv(\forall\circ\varphi\wedge\forall\circ\psi)$

(AxA1.2) $\forall\Diamond\varphi\equiv(\varphi\vee(\forall\circ\forall\Diamond\varphi\wedge\exists\circ\top))$

(AxA1.3) $\exists\Diamond\varphi\equiv(\varphi\vee\exists\circ\exists\Diamond\varphi)$

(AxA1.4) $\forall\Box\varphi\equiv(\varphi\wedge\forall\circ\forall\Box\varphi)$

(AxA1.5) $\exists\Box\varphi\equiv(\varphi\wedge(\exists\circ\exists\Box\varphi\vee\forall\circ\bot))$

(RA1) $(\varphi\to\psi)\vdash(\forall\circ\varphi\to\forall\circ\psi)$

Построим их выводы. В наших выводах справа от формулы будем указывать то, каким образом она получена в данном выводе, т. е. по каким уже выведенным формулам и правилам вывода. Вывод формулы, проведённый согласно алгоритму вывода из аксиом в логике высказываний (см. [1]), будем обозначать (л.в.).

1. $\vdash\exists\circ(\neg\varphi\vee\neg\psi)\equiv(\exists\circ\neg\varphi\vee\exists\circ\neg\psi)$ (Ax6)
2. $\vdash\neg(\varphi\wedge\psi)\to(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (л.в.)
3. $\vdash(\neg\varphi\vee\neg\psi)\to\neg(\varphi\wedge\psi)$ (л.в.)
4. $\vdash(\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi)\to\exists\circ(\neg\varphi\vee\neg\psi))$ (2,R1)
5. $\vdash(\exists\circ(\neg\varphi\vee\neg\psi)\to\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi))$ (3,R1)
6. $\vdash\exists\circ(\neg\varphi\vee\neg\psi)\equiv\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi)$ (4,5,л.в.)
7. $\vdash\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi)\equiv(\exists\circ\neg\varphi\vee\exists\circ\neg\psi)$ (1,6,л.в.)
8. $\vdash\neg\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi)\equiv\neg(\exists\circ\neg\varphi\vee\exists\circ\neg\psi)$ (7,л.в.)
9. $\vdash\neg\exists\circ\neg(\varphi\wedge\psi)\equiv(\neg\exists\circ\neg\varphi\vee\neg\exists\circ\neg\psi)$ (8,л.в.)
10. $\vdash\forall\circ(\varphi\wedge\psi)\equiv(\forall\circ\varphi\wedge\forall\circ\psi)$ (Ax7,9,л.в.)

Вывод (AxA1.1) построен. Выводы формул (AxA1.2)–(AxA1.5) получаются аналогично с использованием аксиом: для (AxA1.2) — аксиом (Ax3) и (Ax9); для (Ax1.3) — (Ax2) и (Ax8); для (AxA1.4) — (AxA1.3) и (Ax4); для (AxA1.5) — (AxA1.2) и (Ax5). Построим вывод правила (RA1).

1. $(\neg\psi\to\neg\varphi)\vdash(\exists\circ\neg\psi\to\exists\circ\neg\varphi)$ (R1)
2. $((\exists\circ\neg\psi\to\exists\circ\neg\varphi)\to(\neg\exists\circ\neg\varphi\to\neg\exists\circ\neg\psi))$ (л.в.)
3. $((\neg\exists\circ\neg\varphi\to\neg\exists\circ\neg\psi)\to(\forall\circ\varphi\to\forall\circ\psi))$ (Ax7,л.в.)
4. $((\exists\circ\neg\psi\to\exists\circ\neg\varphi)\to(\forall\circ\varphi\to\forall\circ\psi))$ (2,3,л.в.)
5. $(\neg\psi\to\neg\varphi)\vdash(\forall\circ\varphi\to\forall\circ\psi)$ (1,4,л.в.)
6. $((\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi))$ (л.в.)
7. $(\varphi\to\psi)\vdash(\forall\circ\varphi\to\forall\circ\psi)$ (5,6,л.в.)

Вывод вспомогательных аксиом и правила вывода из первого расширения построен. При этом все указанные аксиомы и правило вывода являются корректными (см. п. 7.1).

7.3. Второе расширение аксиом и правил вывода. Заметим, что формулы логики высказываний $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \vee \varphi_1)$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$, $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ и $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$ общезначимы, и, следовательно, для них строится вывод (см. [1]). Поэтому каждая из формул χ_{D_i}, χ_{C_i}, $\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_k}}$ может быть записана без скобок, с произвольным порядком следования х.ф. $\chi_{C_{i_j}}$, а также положительных формул и отрицаний отрицательных формул в х.ф. Таким образом, по выводу некоторой зафиксированной формулы χ_{D_i}, χ_{C_i}, $\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_k}}$, т. е. формулы с некоторой расстановкой скобок и некоторым порядком следования х.ф. $\chi_{C_{i_j}}$, а также положительных формул и отрицаний отрицательных формул, получается вывод и произвольной зафиксированной формулы указанного вида.

Пусть теперь Θ — произвольная общезначимая формула, для которой требуется построить вывод из аксиом. Будем исследовать рассмотренным выше алгоритмом формулу $\neg\Theta$ на выполнимость, строя схему модели.

Следующие формулы составляют второе расширение базовых аксиом и правил вывода. Они вводятся для простейших выводов соотношений между х.ф. и п.х.ф. вершин в схеме модели и осуществления упомянутого выше вывода «снизу вверх».

(AxA2.1) $\chi_{C_i} \equiv \chi^{*}_{C_i}$ для всякой основной вершины C_i

(AxA2.2) $\neg\chi_{D_i} \equiv (\neg\chi_{C_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \neg\chi_{C_{i_k}})$, где $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ — все сыновья произвольной вре́менной вершины D_i

(RA2) $\neg\chi_{D_i} \vdash \neg\chi_{C_i}$ для каждого родителя C_i произвольной вре́менной вершины D_i

Вывод аксиомы (AxA2.1) и формулы $\chi_{D_i} \equiv (\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_k}})$ проводится индукцией из лемм 5.2–5.3 и 5.6, соответственно, с заменой общезначимости получением вывода в логике высказываний с использованием в конечном счёте вывода аксиом (Ax8), (Ax9) и (AxA1.2–AxA1.5) вместо доказательства общезначимости этих формул в лемме 5.1. Аксиома (AxA2.2) выводится из формулы $\chi_{D_i} \equiv (\chi_{C_{i_1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_k}})$ в логике высказываний.

Построим вывод правила (RA2). Пусть C_i — произвольный родитель вершины D_i, полученной по правилу 6 для формулы ψ. Тогда по построению χ_{C_i} есть $\bar{P} \wedge \bar{B}_\exists \wedge \bar{A}_\forall \wedge \psi$. Здесь $\bar{P}$ есть конъюнкция положительных пропозициональных и отрицаний отрицательных пропозициональных переменных; $\bar{B}_\exists$ есть конъюнкция положительных $\exists\circ$-формул и отрицаний отрицательных $\forall\circ$-формул; а $\bar{A}_\forall$ есть конъюнкция положительных $\forall\circ$-формул и отрицаний отрицательных $\exists\circ$-формул. Заметим, что каждая из конъюнкций $\bar{P}$, $\bar{B}_\exists$, $\bar{A}_\forall$ в формуле χ_{C_i} может отсутствовать, тогда как формула ψ по построению присутствует всегда. Возможны два случая: 1) формула ψ положительна, т. е. $\psi \in C_i^+$, и имеет вид $\exists\circ\varphi_1$, где $\varphi_1 \in D_i^+$; 2) формула ψ отрицательна, т. е. $\psi \in C_i^-$, и имеет вид $\forall\circ\varphi_1$, где $\varphi_1 \in D_i^-$.

В первом случае χ_{D_i} имеет вид $\bar{A} \wedge \varphi_1$, а во втором — $\bar{A} \wedge \neg\varphi_1$, причём отсутствие формулы $\bar{A}_\forall$ в χ_{C_i} равносильно отсутствию формулы $\bar{A}$ в χ_{D_i}, и тогда под формулой $\bar{A}$ следует понимать формулу $\top$, а под формулой $\bar{A}_\forall$ — формулу $\forall\circ\top$. Тогда формула $\neg\chi_{D_i}$ — это $\neg(\bar{A} \wedge \psi_1)$, где ψ_1 есть φ_1 в первом случае и $\neg\varphi_1$ — во втором.

В силу замечания в начале этого пункта и вывода в л.в. из $\vdash \neg\chi_{D_i}$ получается $\vdash \neg(\bar{A} \wedge \psi_1)$, а из $\vdash \neg(\bar{A} \wedge \psi_1)$ получается $\vdash (\bar{A} \to \neg\psi_1)$. Отсюда по правилу (RA1) следует $\vdash(\forall\bigcirc\bar{A}\to\forall\bigcirc\neg\psi_1)$. Получим теперь $\vdash(\bar{A}_\forall\to\neg\psi)$ из $\vdash(\forall\bigcirc\bar{A}\to\forall\bigcirc\neg\psi_1)$. Для этого сначала установим $\vdash\bar{A}_\forall\equiv\forall\bigcirc\bar{A}$: случай, когда $\bar{A}$ есть $\top$, следует из (Ax10) и вывода в (л.в.). В оставшемся случае вывод получается из (Ax7), (AxA1.1) и вывода в л.в. Далее, разбирая для формулы ψ рассматриваемые выше два случая и используя (Ax7) и вывод в л.в., получаем $\vdash\neg\psi\equiv\forall\bigcirc\neg\psi_1$. Отсюда из $\vdash\bar{A}_\forall\equiv\forall\bigcirc\bar{A}$, $\vdash(\forall\bigcirc\bar{A}\to\forall\bigcirc\neg\psi_1)$ и л.в. получаем $\vdash(\bar{A}_\forall\to\neg\psi)$, а также $\vdash\neg(\bar{A}_\forall\wedge\psi)$. Отсюда в случае присутствия в χ_{C_i} формул $\bar{P}$ и $\bar{B}_\exists$ выводом в л.в. получаем также и $\vdash\neg(\bar{P}\wedge\bar{B}_\exists\wedge\bar{A}_\forall\wedge\psi)$, т. е. $\vdash\neg\chi_{C_i}$.

Вывод вспомогательных аксиом и правила вывода из второго расширения построен. При этом все указанные аксиомы и правило вывода являются корректными (см. п. 7.1).

7.4. Третье расширение аксиом и правил вывода. В силу общезначимости формулы Θ её отрицание невыполнимо. Тогда из следствия 6.1 получаем, что алгоритм распознавания выполнимости для формулы $\neg\Theta$ даёт ответ «$\neg\Theta$ невыполнима». Согласно §§ 2, 3 такой ответ получается в двух случаях. В первом случае завершённая схема модели пуста, т. е. начальная вершина в размеченной схеме модели $\perp$-помечена (см. § 2). Во втором случае пуста заключительная схема модели, т. е. начальная вершина $\perp$-помечена в повторно размеченной схеме модели (см. § 3). Построим сначала вывод формулы Θ для первого случая. Для этого введём вспомогательное правило вывода.

(RA3) Для каждой основной или вре́менной вершины $B_i^{\perp n_i}$ в схеме модели $\vdash\neg\chi_{B_i}$.

Базис. Пусть вершина $B_i^{\perp n_i}$ является основной вершиной $C_i^{\perp n_i}$, $n_i=0$ (индекс $\perp$-пометки определяется в правиле 1 в § 2). Тогда она концевая, а ее х.ф. $\chi^*_{C_i}$ имеет вид $\bar{A}\wedge\varphi\wedge\neg\varphi$ в силу применения правила 1 к формуле φ, причем $\bar{A}$ может отсутствовать. Тогда в силу вывода в л.в. $\vdash(\varphi\to\varphi)$, и справедливости $\vdash((\bar{A}\wedge\varphi)\to\varphi)$, получаем $\vdash\neg\chi^*_{C_i}$. Отсюда в силу (AxA2.1) и вывода в л.в. $\vdash\neg\chi_{C_i}$. Пусть теперь вершина $B_i^{\perp n_i}$ является вре́менной вершиной $D_i^{\perp n_i}$, $n_i=0$. Тогда из (AxA2.2) следует и $\vdash\neg\chi_{D_i}$.

Индукционный переход. Пусть для всякой $\perp$-помеченной основной или вре́менной вершины $B_{i_j}^{\perp n_{i_j}}$ с индексом $\perp$-пометки n_{i_j}, где $0\leqslant n_{i_j}+1\leqslant n_i$, доказано $\vdash\neg\chi_{B_{i_j}}$. Тогда вершина $C_i^{\perp n_i}$ имеет среди своих сыновей хотя бы одну вершину $D_{i_j}^{\perp n_{i_j}}$. Тогда из (RA2) следует $\vdash\neg\chi_{C_i}$ для всякой основной вершины с индексом $\perp$-пометки n_i. Но тогда из (AxA2.2) следует и $\vdash\neg\chi_{D_i}$ для всякого родителя $D_i^{\perp n_i}$ вершины $C_i^{\perp n_i}$. Таким образом, для произвольной основной или вре́менной вершины $B_i^{\perp n_i}$ верно $\vdash\neg\chi_{B_i}$. Индукционный переход сделан.

Вывод правила (RA3) построен. При этом данное правило вывода является корректным (см. п. 7.1).

Лемма 7.1. *Если для формулы $\neg\Theta$ алгоритм распознавания выполнимости построил размеченную схему модели с $\perp$-помеченной начальной вершиной, то формула Θ выводима.*

Доказательство. Пусть при распознавании выполнимости формулы $\neg\Theta$ в размеченной схеме модели начальная вершина $\perp$-помечена, т. е. имеет вид $D_0^{\perp n_0}$, где $D_0^{\perp +}=\{\neg\Theta\}$, $D_0^{\perp -}=\varnothing$. Тогда правило вывода (RA3) даёт вывод формулы $\neg\chi_{D_0}$, т. е. $\vdash\neg\neg\Theta$. Отсюда с помощью (AxG10) и (R4) получаем $\vdash\Theta$. Лемма доказана.

Вывод формулы Θ в первом случае невыполнимости формулы $\neg\Theta$ построен. При этом каждая базовая и вспомогательная аксиома, а также каждое базовое и вспомогательное правило вывода являются корректными (см. п. 7.1), т. е. сохраняют общезначимость. Отсюда получается следствие из леммы 7.1.

Следствие 7.1. *Если для формулы $\neg\Theta$ алгоритм распознавания выполнимости построил размеченную схему модели с $\perp$-помеченной начальной вершиной, то формула Θ общезначима.*

7.5. Четвёртое расширение аксиом и правил вывода. Будем строить теперь вывод формулы Θ для второго случая — когда при распознавании выполнимости формулы $\neg\Theta$ начальная вершина $\perp$-помечена в повторно размеченной схеме модели (см. § 3). В этом случае алгоритм распознавания выполнимости формул даёт ответ «$\neg\Theta$ невыполнима» ввиду неподтверждения обещаний. Для этого сначала введём вспомогательное правило для вывода отрицания конъюнкции х.ф. вре́менной вершины и стандартного исполнения обещания (см. § 3). Заметим, что по этому правилу вывод указанной формулы получается при любом порядке применения правил алгоритма (см. § 2) к сыновьям вре́менной вершины и их положительным и отрицательным формулам.

Пусть к вершине C_{i_k}, являющейся сыном вершины D_i, после неотрицательного числа применений лишь правил 3 и 4 было применено правило 5, в результате чего у вершины D_i появился ещё один сын — вершина $C_{i_{k'}}$ (либо вершина $C_{i_{k'}}$ была отождествлена с другим сыном вершины D_i — в этом случае её будем также обозначать $C_{i_{k'}}$). Эту вершину $C_{i_{k'}}$ с зафиксированными сразу после применения правила множествами $C^+_{i_{k'}}$ и $C^-_{i_{k'}}$ будем называть вершиной, полученной из вершины C_{i_k} по правилу 5, а вершину C_{i_k} со множествами $C^+_{i_k}$ и $C^-_{i_k}$, зафиксированными сразу после применения этого правила, назовём альтернативой вершине $C_{i_{k'}}$ и будем обозначать также $C_{i_{k''}}$. Вершины, полученные из вершин $C_{i_{k'}}$ и $C_{i_{k''}}$, будем также называть полученными и из вершины C_{i_k}.

(RA4) Если вершина D_i содержит обещание θ, для каждого сына C_{i_h} вершины D_i, содержащего исполнение ψ обещания θ, $\vdash \neg\chi_{C_{i_h}}$ и ψ' — стандартное исполнение обещания θ, то $\vdash \neg(\chi_{D_i} \wedge \psi')$.

Построим вывод этого правила. Рассмотрим процесс построения сыновей вершины D_i — вершин $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$. Пусть C_{i_j} — первый по построению сын вершины D_i. Тогда после положительного числа применений правил к вершине C_{i_j} и, быть может, вершинам, полученным из вершины C_{i_j}, а также возможного применения правила 3 к обещанию θ появится конечное множество вершин, содержащих пока не помеченное знаком $\star$ полное обещание θ. При этом для каждой вершины, полученной из C_{i_j} верно следующее: или она становится $\perp$-помеченной, или будет содержать пока не помеченное полное обещание θ. Следующим шагом в работе с произвольной вершиной C_{i_k}, содержащей пока не помеченное полное обещание θ, является применение к нему правила 5. Тогда появляется вершина $C_{i_{k'}}$, полученная из вершины C_{i_k} и содержащая по построению отложенное обещание, а альтернатива вершине $C_{i_{k'}}$, обозначаемая через $C_{i_{k''}}$, содержит исполнение ψ обещания θ. Пусть $C_{i_{k'},1}, \ldots, C_{i_{k'},l'}, \ldots, C_{i_{k'},r'}$ — все вершины, полученные из вершины $C_{i_{k'}}$, а $C_{i_{k''},1}, \ldots, C_{i_{k''},l''}, \ldots, C_{i_{k''},r''}$ — все вершины, полученные из вершины $C_{i_{k''}}$. Тогда, аналогично выводу аксиомы (AxA2.2) и с использованием (RA3), получаем $\vdash \chi_{C_{i_{k'}}} \equiv (\chi_{C_{i_{k'},1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k'},l'}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k'},r'}})$ и $\vdash \chi_{C_{i_{k''}}} \equiv (\chi_{C_{i_{k''},1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k''},l''}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k''},r''}})$.

Так как исполнение ψ обещания θ содержится в вершине $C_{i_{k''}}$, то ψ содержится и во всякой вершине $C_{i_{k''},l''}$, $1 \leqslant l'' \leqslant r''$. Отсюда по условию для каждой формулы $\chi_{C_{i_{k''},l''}}$ имеет место $\vdash \neg\chi_{C_{i_{k''},l''}}$, и, следовательно, $\vdash \neg\chi_{C_{i_{k''}}}$, $\vdash \neg(\chi_{C_{i_{k''},l''}} \wedge \psi')$. Тогда по (AxA2.1) $\vdash \neg\chi^{\star}_{C_{i_{k''}}}$ и, следовательно, $\vdash \neg(\chi^{\star}_{C_{i_{k''}}} \wedge \bar{\psi}')$, где $\bar{\psi}'$ — стандартное отложенное обещание θ. По построению, после применения правила 5 формулы $(\chi^{\star}_{C_{i_{k''}}} \wedge \bar{\psi}')$ и $(\chi^{\star}_{C_{i_{k'}}} \wedge \psi')$, где ψ' — стандартное исполнение обещания θ, совпадают, т. е. $\vdash \neg(\chi^{\star}_{C_{i_{k'}}} \wedge \psi')$. Тогда из (AxA2.1) следует $\vdash \neg(\chi_{C_{i_{k'}}} \wedge \psi')$. Далее, выводом в логике высказываний получаем, $\vdash (\chi_{C_{i_{k'}}} \wedge \psi') \equiv ((\chi_{C_{i_{k'},1}} \wedge \psi') \vee \ldots \vee (\chi_{C_{i_{k'},l'}} \wedge \psi') \vee \ldots \vee (\chi_{C_{i_{k'},r'}} \wedge \psi'))$, из $\vdash \chi_{C_{i_{k'}}} \equiv (\chi_{C_{i_{k'},1}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k'},l'}} \vee \ldots \vee \chi_{C_{i_{k'},r'}})$, откуда с учётом $\vdash \neg(\chi_{C_{i_{k'}}} \wedge \psi')$ получаем $\vdash \neg(\chi_{C_{i_{k'},l'}} \wedge \psi')$, для любого l, где $1 \leqslant l' \leqslant r'$.

В силу произвольности выбора вершины C_{i_k}, содержащей не помеченное знаком $\star$ полное обещание θ, в которой к полному обещанию θ было применено правило 5, для всякого сына C_{i_h} вершины D_i получено $\vdash \neg(\chi_{C_{i_h}} \wedge \psi')$. С использованием (AxA2.2) выводом в логике высказываний получаем $\vdash (\chi_{D_i} \wedge \psi') \equiv \bigvee_{h=1}^{r} (\chi_{C_{i_h}} \wedge \psi')$, где C_{i_h} — все сыновья вершины D_i, $1 \leqslant h \leqslant r$. С учётом $\vdash \neg(\chi_{C_{i_h}} \wedge \psi')$, $1 \leqslant h \leqslant r$, отсюда следует $\vdash \neg(\chi_{D_i} \wedge \psi')$. Вывод правила (RA4) построен. При этом данное правило вывода является корректным (см. п. 7.1), так как все используемые в данном построении выводимые формулы общезначимы.

7.6. Определения множеств вершин, отвергающих обещания. Рассмотрим схему модели, полученную после применения процедуры фильтрования, выполненной для размеченной схемы модели. Аналогично вспомогательному правилу (RA3) нашей целью является построение вывода вспомогательного правила вывода $\vdash \neg\chi_{B_i}$ для каждой основной вершины, содержащей неподтверждённое обещание, а также для всех вершин, ставших вследствие этого $\perp$-помеченными с дополнительной $\perp$-пометкой. В отличие от элементарного противоречия, отрицание которого выводится в базисном случае построения вывода (RA3), противоречие от неподтверждения обещания в основной вершине зависит от определённых вершин, являющихся её сыновьями. Двумя достаточными множествами таких вершин являются так называемые множества вершин, отвергающих обещания типа $\forall$, либо типа $\exists$.

Найденная в процедуре фильтрования (см. § 3) $(m+1)$-я полезная вершина C_i, содержащая неподтверждённое обещание θ, называется $(m+1)$-*начальной*. Все вершины с индексом дополнительной $\perp$-пометки $m+1$ называются $(m+1)$-*разобранными*. Те вершины, которые были (или остались) полезными и не стали m'-разобранными ни для какого положительного m', $m' \leqslant m$, называются $(m+1)$-*допустимыми*.

Пусть $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ — основная $(m+1)$-начальная вершина, содержащая неподтверждённое обещание θ, имеющее тип $\forall$ (тип $\exists$). Тогда множество $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ (множество $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) называется *множеством вершин, отвергающих обещание θ в вершине $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$*, и состоит из всех $(m+1)$-допустимых вершин, обладающих следующими свойствами. 1a) Если основная вершина входит в $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$), то в это множество входит и ровно один из ее сыновей. 1b) Если вре́менная вершина входит в $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$), то в $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) входят все её $(m+1)$-допустимые сыновья. 2) Если множество $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) удовлетворяет требованиям 1a) и 1b) и вершина $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ не является сыном никакой вре́менной вершины из $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$), то эта вершина исключается из $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$). Уточним теперь процесс построения множества $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$).

(i) В начале построения $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}=\{C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}\}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}=\{C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}\}$).

(ii) Если для каждой основной вершины из $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) в схеме модели существует сын, являющийся вре́менной вершиной из множества $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$), то сына D_i вершины $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ называем начальной вершиной этого множества. Если теперь вершина $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ не является сыном никакой вре́менной вершины из $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$), то эта вершина исключается из $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$). Считаем, что множество $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) построено.

(iii) Иначе существует некоторая основная $(m+1)$-допустимая вершина, принадлежащая $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) и содержащая обещание θ типа $\forall$ (типа $\exists$), не подтвержденное в этой вершине. Пусть это вершина C_j. Тогда у неё существуют сыновья в схеме модели (иначе вершина C_j оказалась бы $\perp$-помеченной на этапе построения схемы модели, либо обещание θ — подтвержденным в вершине C_j), и каждый сын этой вершины не принадлежит $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$). Так как обещание θ типа $\forall$ (типа $\exists$) не подтверждено в $(m+1)$ допустимой вершине C_j, то существуют $(m+1)$-допустимые сыновья $C_{j_1},\ldots,C_{j_r}$ вершины D_j — некоторого сына вершины C_j (если обещание θ имеет тип $\exists$, мы берём вершину D_j полученную по правилу 6 для отложенного обещания θ), и в каждой вершине C_{j_k}, $1\leqslant k\leqslant r$, обещание θ содержится, но не подтверждено. Тогда добавляем во множество $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) вершины D_j, $C_{j_1},\ldots,C_{j_r}$ и переходим к п. (ii).

Множества $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ и $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$ вершин, отвергающих в вершине $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ обещание θ типа $\forall$ или $\exists$, соответственно, построены. В силу конечности схемы модели множества $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ и $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$ строятся за конечное число шагов.

7.7. Пятое расширение аксиом и правил вывода. Обозначим через $R^{\forall}_{C_i}$ ($R^{\exists}_{C_i}$) дизъюнкцию х.ф. всех вершин, входящих во множество $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ ($\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$) — множество вершин отвергающих обещание θ типа $\forall$ (типа $\exists$). В этом расширении вводятся вспомогательные правила вывода импликаций, в которых $R^{\forall}_{C_i}$ ($R^{\exists}_{C_i}$) влечёт отрицание стандартного исполнения ψ' (см. § 3) обещания θ.

(RA5.1) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{1}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\forall$ и стандартным исполнением ψ' обещания θ

$$\vdash (R^{\forall}_{C_i}\to\neg\psi').$$

(RA5.2) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{1}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным исполнением ψ' обещания θ

$$\vdash (R^{\exists}_{C_i}\to\neg\psi').$$

(RA5.3) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m'}}$ ($B_k^{\perp n_k, \perp^{\theta_*}_{m'}}$), $0<m'\leqslant m$, $\vdash\neg\chi_{C_k}$ ($\vdash\neg\chi_{B_k}$), то и для вершины $C_i^{\perp 0, \perp^{\theta}_{m+1}}$ с неподтверждённым обещанием θ

типа $\forall$ и стандартным исполнением ψ' обещания θ

$$\vdash (R^{\forall}_{C_i} \to \neg\psi').$$

(RA5.4) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0,\, \perp^{\theta}_{m'}}$ $(B_k^{\perp n_k,\, \perp^{\theta}_{m'}})$, $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ $(\vdash \neg\chi_{B_k})$, то и для вершины $C_i^{\perp 0,\, \perp^{\theta}_{m+1}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным исполнением ψ' обещания θ

$$\vdash (R^{\exists}_{C_i} \to \neg\psi').$$

Построим сначала вывод правила (RA5.1). Установим, что для произвольной вершины B_j, принадлежащей $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$, $\vdash (\neg\chi_{B_j} \to \neg\psi')$. Тогда с помощью $|\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}| - 1$ применений (AxG8) получим и $\vdash (R^{\forall}_{C_i} \to \neg\psi')$. Пусть сначала B_j — вре́менная вершина D_j и C_{j_h} — произвольный её сын. Тогда если он содержит исполнение ψ обещания θ, то не принадлежит $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$ и является $\perp$-помеченным без дополнительной $\perp$-пометки. Тогда по (RA3) $\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$. Отсюда по (RA4) $\vdash \neg(\chi_{D_i} \wedge \psi')$, т. е. $\vdash (\chi_{D_j} \to \neg\psi')$. Если же B_j — основная вершина C_j, то она имеет родителя $D_{j'}$ из множества $\mathcal{R}^{\forall}_{C_i}$, для которого выше было установлено $\vdash (\chi_{D_{j'}} \to \neg\psi')$. Но тогда из (AxA2.2) следует $\vdash (\neg\chi_{D_{j'}} \to \neg\chi_{C_j})$, т. е. $\vdash (\chi_{C_j} \to \chi_{D_{j'}})$, откуда получаем $\vdash (\chi_{C_j} \to \neg\psi')$. Вывод правила (RA5.1) построен.

Вывод правила (RA5.2) совпадает с выводом правила (RA5.1). Вывод правила (RA5.3) отличается от вывода правила (RA5.1) лишь тем, что вершина C_{j_h} может содержать исполнение ψ обещания θ и быть $\perp$-помеченной с индексом m' дополнительной $\perp$-пометки, $0 < m' \leqslant m$. Но тогда $\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$ по предположению в (RA5.3) вместо (RA3). Вывод правила (RA5.3) построен. Вывод правила (RA5.4) повторяет вывод правила (RA5.3). В силу корректности предыдущих аксиом и правил вывода правила (RA5.1)–(RA5.4) также являются корректными.

7.8. Шестое расширение аксиом и правил вывода. Сначала введём две вспомогательные аксиомы, первая из которых позволяет проводить в логике ветвящегося времени вывод, подобный выводу в логике высказываний с участием (MP), а вторая является развитием правила вывода (RA2).

(AxA6.1) $(\forall\bigcirc(\varphi \to \psi) \to (\forall\bigcirc\varphi \to \forall\bigcirc\psi))$.

(AxA6.2) Для каждого родителя C_i произвольной вершины D_i $\vdash (\forall\bigcirc\neg\chi_{D_i} \to \neg\chi_{C_i})$.

Выведем аксиому (AxA6.1). Разбирая формулу $\neg\Theta$, где $\Theta = (\forall\bigcirc(\varphi \to \psi) \to (\forall\bigcirc\varphi \to \forall\bigcirc\psi))$, рассмотренным выше алгоритмом, получаем её невыполнимость. Тогда из леммы 7.1 получаем $\vdash \Theta$, т. е. $\vdash (\forall\bigcirc(\varphi \to \psi) \to (\forall\bigcirc\varphi \to \forall\bigcirc\psi))$. Вывод аксиомы (AxA6) построен.

Вывод аксиомы (AxA6.2) повторяет вывод правила (RA2) с одним отличием: в выводе правила (RA2) $\vdash (\forall\bigcirc\bar{A} \to \forall\bigcirc\neg\psi_1)$ получается из $\vdash \neg\chi_{D_i}$, т. е. из $\vdash (\bar{A} \to \neg\psi_1)$, а в выводе данной аксиомы — из $\vdash \forall\bigcirc\neg\chi_{D_i}$, т. е. из $\vdash \forall\bigcirc(\bar{A} \to \neg\psi_1)$, по (AxA6.1) и (MP). Вывод аксиомы (AxA6.2) построен. В силу корректности предыдущих аксиом и правил вывода аксиомы (AxA6.1)–(AxA6.2) также являются корректными.

7.9. Седьмое расширение аксиом и правил вывода. Следующие четыре правила вывода являются вспомогательными для применения в итоге правил (R2) и (R3), в которых в роли φ_1 выступают формулы $R^{\forall}_{C_i}$ и $R^{\exists}_{C_i}$, соответственно.

(RA7.1) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_1^\theta}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\forall$
$$\vdash (R^{\forall}_{C_i} \to \exists \circ R^{\forall}_{C_i}).$$

(RA7.2) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_1^\theta}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным обещанием θ' формулы θ
$$\vdash (R^{\exists}_{C_i} \to \forall \circ (R^{\exists}_{C_i} \vee \neg\theta')).$$

(RA7.3) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp_{m'}^{\delta}}$ $(B_k^{\perp n_k, \perp_{m'}^{\delta_*}})$, $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ $(\vdash \neg\chi_{B_k})$, то и для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_{m+1}^\theta}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\forall$
$$\vdash (R^{\forall}_{C_i} \to \exists \circ R^{\forall}_{C_i}).$$

(RA7.4) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp_{m'}^{\delta}}$ $(B_k^{\perp n_k, \perp_{m'}^{\delta_*}})$, $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ $(\vdash \neg\chi_{B_k})$, то и для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_{m+1}^\theta}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным обещанием θ' формулы θ
$$\vdash (R^{\exists}_{C_i} \to \forall \circ (R^{\exists}_{C_i} \vee \neg\theta')).$$

Выведем правило (RA7.1). Получим сначала $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg R^{\forall}_{C_i})$, откуда будет следовать $\vdash (\neg\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i})$, и по (Ax7) и выводу в логике высказываний получим вывод искомого правила.

Из определения $R^{\forall}_{C_i}$ и вывода в логике высказываний получаем $\vdash \neg R^{\forall}_{C_i} \equiv \wedge_{B_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{B_j}$. Тогда по (RA1) и (AxA1.1) $\vdash \forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \equiv \equiv \wedge_{B_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \forall\circ\neg\chi_{B_j}$. Если основная вершина C_j входит в $\mathscr{R}^{\forall}_{B_i}$, то для неё существует сын D_j, принадлежащий этому множеству, и в силу (AxA6.2) $\vdash (\forall\circ\neg\chi_{D_j} \to \neg\chi_{C_j})$, откуда $\vdash (\wedge_{B_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \forall\circ\neg\chi_{B_j} \to \neg\chi_{C_j})$ и $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg\chi_{C_j})$. Поскольку последнее утверждение верно для каждой основной вершины $C_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}$, то после вывода в логике высказываний получаем $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{C_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{C_j})$.

Если вершина B_j, принадлежащая $\mathscr{R}^{\forall}_{C_i}$, есть D_j, то её произвольный сын C_{j_h} либо $\perp$-помечен без дополнительной $\perp$-пометки, либо входит в $\mathscr{R}^{\forall}_{C_i}$. В первом случае по (RA3) $\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$ и, следовательно, $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg\chi_{C_{j_h}})$. Во втором случае $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{C_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{C_j})$, и тогда тоже $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg\chi_{C_{j_h}})$. Отсюда после вывода в логике высказываний получаем $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{C_{j_h} \in \mathscr{D}_j} \neg\chi_{C_{j_h}})$, где $\mathscr{D}_j$ — множество сыновей вершины D_j. Тогда по (AxA2.2) получаем $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg\chi_{D_j})$. Поскольку такой вывод имеет место для каждой вершины D_j из множества $\mathscr{R}^{\forall}_{C_i}$, то $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{D_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{D_j})$. Объединяя последний результат с $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{C_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{C_j})$ при помощи вывода в логике высказываний, получаем $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \wedge_{B_j \in \mathscr{R}^{\forall}_{C_i}} \neg\chi_{B_j})$, т. е. $\vdash (\forall\circ\neg R^{\forall}_{C_i} \to \neg R^{\forall}_{C_i})$. Вывод правила (RA7.1) построен.

Вывод правила (RA7.3) отличается от вывода правила (RA7.1) разбором дополнительного случая: вершина C_{j_h} может быть $\perp$-помеченной с индексом m' дополнительной $\perp$-пометки, $0 < m' \leqslant m$. Но тогда $\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$ по предположению в (RA7.3) вместо (RA3). Вывод правила (RA7.3) построен.

Выведем правило (RA7.2). Согласно определению $R^{\exists}_{C_i}$ требуется доказать $\vdash(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))$.

Пусть сначала вершина B_j, принадлежащая $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$, есть основная вершина C_j. По построению χ_{C_j} есть $\bar{P}\wedge\bar{B}_{\exists}\wedge\bar{A}_{\forall}\wedge\bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ есть стандартное отложенное обещание θ, а остальные обозначения те же, что и в выводе правила (RA2). Также по построению χ_{D_j} есть $(\bar{A}\wedge\theta')$, где D_j является сыном вершины C_j, полученным по правилу 6 для формулы $\bar{\theta}$. Тогда из (AxA1.1) и вывода в логике высказываний $\vdash\bar{A}_{\forall}\equiv\forall\circ\bar{A}$, откуда следует $\vdash(\chi_{C_j}\to\forall\circ\bar{A})$. Из вывода в л.в. следует $\vdash(\bar{A}\to(\bar{A}\vee\neg\theta'))$ и $\vdash(\bar{A}\vee\neg\theta')\equiv((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')$, откуда в силу (RA1) и вывода в логике высказываний получается $\vdash(\forall\circ\bar{A}\to\forall\circ((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta'))$. Тогда из выводимости в логике высказываний формулы $(\varphi\to(\varphi\vee\psi))$ по (RA1) получаем $\vdash(\forall\circ\varphi\to\forall\circ(\varphi\vee\psi))$, где φ есть $((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')$, а ψ есть $(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta')$, т. е. $\vdash(\forall\circ((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\to\forall\circ(((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\vee(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta')))$. В силу замечания в п. 7.3

$$\vdash(((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\vee(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))\equiv(((\bar{A}\wedge\theta')\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j})\vee(\neg\theta'\vee\neg\theta')).$$

Так как $(\bar{A}\wedge\theta')$ есть χ_{D_j}, $D_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$, и $\vdash(\neg\theta'\vee\neg\theta')\equiv\neg\theta'$,

$$\vdash((((\bar{A}\wedge\theta')\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j})\vee(\neg\theta'\vee\neg\theta'))\to(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta')),$$

а, следовательно, и $\vdash((((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\vee(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))\to(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee$ $\vee\neg\theta'))$. Тогда после применения правила (RA1) получаем

$$\vdash(\forall\circ(((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\vee(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta')),$$

откуда следует

$$\vdash(\forall\circ((\bar{A}\wedge\theta')\vee\neg\theta')\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta')),$$

после чего $\vdash(\forall\circ\bar{A}\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))$, а, значит, и $\vdash(\chi_{C_j}\to$ $\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))$. Последнее утверждение верно для каждой вершины C_j, принадлежащей $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$, поэтому после конечного числа применений (AxG8) получаем $\vdash(\bigvee_{C_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}}\chi_{C_j}\to\forall\circ(\bigvee_{B_j\in\mathcal{R}^{\exists}_{B_i}}\chi_{B_j}\vee\neg\theta'))$.

Если вершина B_j, принадлежащая $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$, есть вре́менная вершина D_j, то её произвольный сын C_{j_k} либо $\perp$-помечен без дополнительной $\perp$-пометки, либо входит в $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$. В первом случае по (RA3)

$\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$ и, следовательно, $\vdash (\chi_{C_{j_h}} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$. Во втором случае в силу $\vdash (\bigvee_{C_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{C_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$ тоже получаем $\vdash (\chi_{C_{j_h}} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$. Отсюда после $|\mathcal{D}_j| - 1$ применений (AxG8) получаем $\vdash (\bigvee_{C_j \in \mathcal{D}_j} \chi_{C_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$, где $\mathcal{D}_j$ — множество сыновей вершины D_j. Тогда в силу (AxA2.2) получаем $\vdash (\chi_{D_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$.

Такой вывод имеет место для каждой вершины D_j из множества $\mathcal{R}^{\exists}_{C_i}$, поэтому $\vdash (\bigvee_{D_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{D_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$. Объединяя при помощи (AxG8) последний результат с $\vdash (\bigvee_{C_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{C_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$, получаем $\vdash (\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \to \forall\bigcirc(\bigvee_{B_j \in \mathcal{R}^{\exists}_{C_i}} \chi_{B_j} \vee \neg\theta'))$, т. е. $\vdash (R^{\exists}_{C_i} \to \forall\bigcirc(R^{\exists}_{C_i} \vee \neg\theta'))$. Вывод правила (RA7.2) построен.

Вывод правила (RA7.4) отличается от вывода правила (RA7.2) разбором дополнительного случая: вершина C_{j_h} может быть $\perp$-помеченной с индексом m' дополнительной $\perp$-пометки, $0 < m' \leqslant m$. Но тогда $\vdash \neg\chi_{C_{j_h}}$ по предположению в (RA7.4) вместо (RA3). Вывод правила (RA7.4) построен.

Вывод вспомогательных правил из седьмого расширения аксиом и правил вывода построен. В силу корректности предыдущих аксиом и правил вывода правила (RA7.1)–(RA7.4) также являются корректными.

7.10. Восьмое расширение аксиом и правил вывода. Введём сначала два вспомогательных правила вывода, получающихся из правил вывода (R2) и (R3), для работы со всеми вариантами обещаний.

(RA8.1) Если θ — обещание типа $\forall$, θ' — стандартное обещание формулы θ, а ψ' — стандартное исполнение обещания θ, то $(\varphi \to (\neg\psi' \wedge \exists\bigcirc\varphi)) \vdash (\varphi \to \neg\theta')$.

(RA8.2) Если θ — обещание типа $\exists$, θ' — стандартное обещание формулы θ, а ψ' — стандартное исполнение обещания θ, то $(\varphi \to (\neg\psi' \wedge \forall\bigcirc(\varphi \vee \neg\theta'))) \vdash (\varphi \to \neg\theta')$.

Выведем эти правила. Для стандартного обещания $\theta' = \forall(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$ ($\theta' = \exists(\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2)$) правило (RA8.1) (правило (RA8.2)) совпадает с правилом (R2) (с правилом (R3)). Для стандартного обещания $\theta' = \forall\Diamond\varphi_2$ ($\theta' = \exists\Diamond\varphi_2$) правило (RA8.1) (правило (RA8.2)) получается из аксиомы (Ax3) и правила (R2) (аксиомы (Ax2) и правила (R3)). Для стандартного обещания $\theta' = \neg\exists\Box\varphi_2$ ($\theta' = \neg\forall\Box\varphi_2$) правило (RA8.1) (правило (RA8.2)) получается из аксиом (Ax5), (Ax3) и правила (R2) (аксиом (Ax4), (Ax2) и правила (R3)). Все случаи разобраны. Вывод правил (RA8.1) и (RA8.2) построен.

Выведем теперь вспомогательные правила для вывода импликаций, в которых для каждого множества вершин, отвергающих обещание, дизъюнкция х.ф. этих вершин влечёт отрицание стандартного обещания.

(RA8.3) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_1^{\theta}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\forall$ и стандартным обещанием θ' формулы θ

$$\vdash (R^{\forall}_{C_i} \to \neg\theta').$$

(RA8.4) Для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_1^{\theta}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным обещанием θ' формулы θ

$$\vdash (R^{\exists}_{C_i} \to \neg\theta').$$

(RA8.5) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp_{m'}^{\theta}}$ ($B_k^{\perp n_k, \perp_{m'}^{\theta}}$), $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ ($\vdash \neg\chi_{B_k}$), то и для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_{m+1}^{\theta}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\forall$ и стандартным обещанием θ' формулы θ

$$\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to \neg\theta').$$

(RA8.6) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp_{m'}^{\theta}}$ ($B_k^{\perp n_k, \perp_{m'}^{\theta}}$), $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ ($\vdash \neg\chi_{B_k}$), то и для вершины $C_i^{\perp 0, \perp_{m+1}^{\theta}}$ с неподтверждённым обещанием θ типа $\exists$ и стандартным обещанием θ' формулы θ

$$\vdash (R_{C_i}^{\exists} \to \neg\theta').$$

Пусть ψ' — стандартное исполнение обещания θ. Выведем сначала правило (RA8.3) (правило (RA8.4)). По правилу (RA5.1) (правилу (RA5.2)) получаем $\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to \neg\psi')$ ($\vdash (R_{C_i}^{\exists} \to \neg\psi')$). А по правилу (RA7.1) (правилу (RA7.2)) получаем $\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to \exists\bigcirc R_{C_i}^{\forall})$ ($\vdash (R_{C_i}^{\exists} \to \forall\bigcirc(R_{C_i}^{\exists} \vee \neg\theta'))$). Тогда из вывода в логике высказываний получаем $\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to (\neg\psi' \wedge \exists\bigcirc R_{C_i}^{\forall}))$ ($\vdash (R_{C_i}^{\exists} \to (\neg\psi' \wedge \forall\bigcirc(R_{C_i}^{\exists} \vee \neg\theta')))$). Отсюда по правилу (RA8.1) (по правилу (RA8.2)) следует $\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to \neg\theta')$ ($\vdash (R_{C_i}^{\exists} \to \neg\theta')$). Вывод правила (RA8.5) (правила (RA8.6)) отличается лишь заменой правила (RA5.1) (правила (RA5.2)) на правило (RA5.3) (на правило (RA5.4)) и правила (RA7.1) (правила (RA7.2)) на правило (RA7.3) (на правило (RA7.4)). Вывод правил (RA8.3)–(RA8.6) построен. В силу корректности предыдущих аксиом и правил вывода правила (RA8.1)–(RA8.6) также являются корректными.

7.11. Девятое расширение аксиом и правил вывода. Сначала введём два правила для вывода отрицания х.ф. вершины, являющейся сыном основной вершины $C_i^{\perp 0, \perp_m^{\theta}}$, $m \geqslant 1$, содержащей неподтверждённое обещание θ. Понятие начальной вершины множества $R_{C_i}^{\forall}$ (множества $R_{C_i}^{\exists}$) введено в п. 7.6 (ii).

(RA9.1) Если D_i — начальная вершина множества $R_{C_i}^{\forall}$, то

$$\vdash \neg\chi_{D_i}.$$

(RA9.2) Если D_i — начальная вершина множества $R_{C_i}^{\exists}$, то

$$\vdash \neg\chi_{D_i}.$$

Выведем правило (RA9.1). По правилам (RA8.3) и (RA8.5) получаем $\vdash (R_{C_i}^{\forall} \to \neg\theta')$, где θ' — стандартное обещание формулы θ. В силу вхождения D_i в $\mathcal{R}_{C_i}^{\forall}$ после конечного числа применений аксиом (AxG6), (AxG7) получаем $\vdash (\chi_{D_i} \to R_{C_i}^{\forall})$, откуда следует $\vdash (\chi_{D_i} \to \neg\theta')$, т. е. $\vdash \neg(\chi_{D_i} \wedge \theta')$. Из вхождения обещания θ в вершину $C_i^{\perp 0, \perp_m^{\theta}}$, являющуюся родителем вершины D_i, и неподтверждённости этого обещания следует вхождение θ в D_i и представление χ_{D_i} в виде $(\bar{A} \wedge \theta')$. Так как $\vdash (\bar{A} \wedge \theta' \wedge \theta') \equiv (\bar{A} \wedge \theta')$, то $\vdash (\chi_{D_i} \wedge \theta') \equiv \chi_{D_i}$, откуда с учетом $\vdash \neg(\chi_{D_i} \wedge \theta')$ следует $\vdash \neg\chi_{D_i}$. Вывод правила (RA9.1) построен.

Вывод правила (RA9.2) совпадает с выводом правила (RA9.1) с заменой правила (RA8.3) на правило (RA8.4) и правила (RA8.5) на правило (RA8.6).

Введём теперь правила вывода отрицаний х.ф. $\perp$-помеченных вершин с дополнительными $\perp$-пометками, аналогичные правилу вывода отрицаний х.ф. $\perp$-помеченных вершин без дополнительных $\perp$-пометок.

(RA9.3) Для каждой основной или вре́менной вершины $B_i^{\perp n_i, \perp_1^{\bar{\theta}}}$, где $\bar{\theta}$ обозначает θ или $\theta*$,

$$\vdash \neg\chi_{B_i}.$$

(RA9.4) Если для всякой вершины $C_k^{\perp 0, \perp_{m'}^{\theta}}$ $(B_k^{\perp n_k, \perp_{m'}^{\theta*}})$, $0 < m' \leqslant m$, $\vdash \neg\chi_{C_k}$ $(\vdash \neg\chi_{B_k})$, то и для каждой основной или вре́менной вершины $B_i^{\perp n_i, \perp_{m+1}^{\bar{\theta}}}$, где $\bar{\theta}$ обозначает θ или $\theta*$,

$$\vdash \neg\chi_{B_i}.$$

Выведем правило (RA9.3) индукцией по n_i.

Базис. Если тип обещания θ есть $\forall$ $(\exists)$ и вершина $B_i^{\perp n_i, \perp_1^{\bar{\theta}}}$ есть основная вершина $C_i^{\perp 0, \perp_1^{\theta}}$, то по правилу (RA9.1) (правилу (RA9.2)) для некоторого её сына $D_{i'}$, получаем $\vdash \neg\chi_{D_{i'}}$. Тогда по правилу (RA2) получаем $\vdash \neg\chi_{C_i}$. Если же теперь вершина $B_i^{\perp n_i, \perp_1^{\bar{\theta}}}$ есть вре́менная вершина $D_i^{\perp 0, \perp_1^{\theta*}}$, то по определению процедуры $\perp$-разметки и из аксиомы (AxA2.2) следует и $\vdash \neg\chi_{D_i}$.

Индукционный переход. Совпадает с индукционным переходом в выводе правила (RA3).

Вывод правила (RA9.3) построен.

Вывод правила (RA9.4) совпадает с выводом правила (RA3) с использованием в индукционном переходе предположения в правиле вывода (RA9.4). В силу корректности предыдущих аксиом и правил вывода правила (RA9.1)–(RA9.4) также являются корректными.

Лемма 7.2. *Если для формулы $\neg\Theta$ алгоритм распознавания выполнимости построил повторно размеченную схему модели с $\perp$-помеченной начальной вершиной, то формула Θ выводима.*

Доказательство. Пусть при распознавании выполнимости формулы $\neg\Theta$ в размеченной схеме модели начальная вершина $\perp$-помечена с индексом m, $m \geqslant 1$, дополнительной $\perp$-пометки. Если $m = 1$, то $\vdash \neg\chi_{D_0}$ по правилам (RA9.3). А если $m > 1$, то после применений правил (RA9.3) и (RA9.4) получаем также $\vdash \neg\chi_{D_0}$. Так как $D_0^{\perp +} = \{\neg\Theta\}$, $D_0^{\perp -} = \varnothing$, то $\neg\chi_{D_0}$ есть $\neg\neg\Theta$. Отсюда по (AxG10) и (R4) получаем $\vdash \Theta$. Лемма доказана.

Вывод формулы Θ построен. При этом каждая базовая и вспомогательная аксиома, а также каждое базовое и вспомогательное правило вывода являются корректными (см. п. 7.1), т. е. сохраняют общезначимость. Отсюда получается следствие из леммы 7.2.

Следствие 7.2. *Если для формулы $\neg\Theta$ алгоритм распознавания выполнимости построил повторно размеченную схему модели с $\perp$-помеченной начальной вершиной, то формула Θ общезначима.*

7.12. Корректность и полнота. В этом пункте об эффективном алгоритме построения выводов общезначимых формул из аксиом доказываются две теоремы: теорема о полноте (теорема 7.1) и теорема о корректности (теорема 7.2).

Пусть Θ — произвольная общезначимая формула. Тогда применяя алгоритм распознавания выполнимости для формулы $\neg\Theta$, получаем размеченную, либо повторно размеченную схему модели с $\perp$-помеченной начальной вершиной. Строя вывод для отрицаний х.ф. концевых вершин, отрицаний х.ф. вершин, содержащих неподтверждённые обещания, и продолжая выводить отрицания х.ф. вершин, являющихся родителями тех вершин, для которых уже выведены отрицания их х.ф., мы получаем в итоге отрицание х.ф. начальной вершины, т. е. $\vdash \neg\neg\Theta$, откуда и следует $\vdash \Theta$.

Теорема 7.1. *Если формула Θ общезначима, то* $\vdash\Theta$.

Доказательство. В силу общезначимости формулы Θ её отрицание невыполнимо. Доказательство теоремы теперь следует из лемм 7.1 и 7.2, в доказательстве которых указывается процесс построения вывода формулы Θ по построенным размеченной и повторно размеченной схемам моделей, соответственно. Теорема доказана.

При этом каждая базовая и вспомогательная аксиома являются общезначимыми формулами, а каждое базовое и вспомогательное правило вывода сохраняет общезначимость (см. следствие 7.1 и следствие 7.2). Отсюда получается теорема 7.2.

Теорема 7.2. *Если формула Θ выводима, то она общезначима.*

Алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом сформулирован. Его корректность и полнота доказаны.

§ 8. Полнота алгоритма распознавания выполнимости формул

С использованием теорем 7.1 и 7.2 мы теперь получаем доказательство теоремы 8.1 (о полноте) и следствия 8.1 (о конечности модели).

Теорема 8.1 (о полноте). *Если формула Θ выполнима, то алгоритм строит конечную модель M и даёт ответ «Θ выполнима, Θ истинна в модели M».*

Доказательство. Требуется доказать, что если формула Θ выполнима, то алгоритм строит конечную модель M и даёт ответ «Θ выполнима, Θ истинна в модели M». В силу теоремы 5.1 (о завершаемости) для любой формулы Θ алгоритм распознавания выполнимости за конечное число шагов либо даёт ответ «Θ невыполнима», либо строит конечную модель M и даёт ответ «Θ выполнима, Θ истинна в модели M». Допустим, что для формулы Θ алгоритм даёт ответ «Θ невыполнима». Тогда и для формулы $\neg\neg\Theta$ алгоритм распознавания выполнимости даёт ответ «$\neg\neg\Theta$ невыполнима». По теореме 7.1 отсюда следует, что формула $\neg\Theta$ выводима. Тогда по теореме 7.2 формула $\neg\Theta$ общезначима, что означает невыполнимость формулы Θ. Отсюда следует, что если формула Θ выполнима, то алгоритм всегда строит конечную модель M и даёт ответ «Θ выполнима, Θ истинна в модели M». Теорема доказана.

Поскольку из существования бесконечной модели для формулы по определению следует её выполнимость, то теперь с помощью теоремы 6.3 (о корректности) мы получаем также доказательство того, что если формула имеет бесконечную модель, то она имеет и конечную модель, т. е. доказательство следствия 8.1.

Следствие 8.1. *Если формула имеет бесконечную модель, то она имеет и конечную модель.*

Полнота алгоритма распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя Ю. И. Янова. Автор благодарит С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. Автор благодарит В. Б. Алексеева, М. В. Захарьящева, О. М. Касим-Заде, М. Ю. Мошкова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984.
2. Хелемендик Р. В. Применение временных логик к анализу логических игр и головоломок // Труды III Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (22–27 июня 1998 г.) — М.: Диалог-МГУ. — 1998. — С. 112–114.

3. Хелемендик Р. В. Приложения логик линейного и ветвящегося времени. Алгоритм распознавания выполнимости формул // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. — 2000. — Вып. 1 (22). — С. 176–191.
4. Хелемендик Р. В. О выводе общезначимых формул из аксиом в логике ветвящегося времени // Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.) — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова. — С. 88–89.
5. Хелемендик Р. В. О методе решения шахматных задач с помощью формул логики ветвящегося времени // Алгебра, логика и кибернетика: Материалы Международной конференции. — Иркутск: изд-во ГОУ ВПО «Иркутский государственный педагогический университет». — 2004. — С. 215–216.
6. Хелемендик Р. В. Об использовании схем моделей при исследовании на выполнимость формул логики ветвящегося времени и построении вывода общезначимых формул из аксиом // VI International congress on mathematical modeling (Book of abstracts) September 20–26, 2004, Nizhny Novgorod, University of Nizhny Novgorod. — P. 388.
7. Хелемендик Р. В. Алгоритм распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени и его применение. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2005.
8. Emerson E. A., Clark E. M. Using branching time temporal logic to synthesize synchronization skeletons // Science of Computer Programming, Dec. 1982. — V. 2. — P. 241–266.
9. Emerson E. A., Halpern J. I. Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time // Journal of Computer and System Sciences, Feb. 85. — V. 30, № 1. — P. 1–24.
10. Emerson E. A. Temporal and modal logic. Handbook of theoretical computer science. — Ed. By J.van Leeuwen, Elsevier Science Publishers, 1990. — P. 997–1072.
11. Emerson E. A. Automated temporal reasoning about reactive systems // Logics for concurrency. Lecture Notes in Computer Science. — V. 1043. — Berlin: Springer. — 1996. — P. 41–101.

Поступило в редакцию 7 III 2006