АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2006, том 40, № 1, с. 1–62

УДК 523

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД В ОКОЛОСОЛНЕЧНОМ ДОПЛАНЕТНОМ ОБЛАКЕ: ВЛИЯНИЕ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ НА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ДИСКЕ

© 2006 г. А. В. Колесниченко, М. Я. Маров

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Поступила в редакцию 22.08.2005 г.

В рамках проблемы реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце на ранней стадии его существования, сформулирована полная система уравнений двухфазной многокомпонентной механики с учетом относительного движения фаз, процессов коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Эти уравнения предназначены для схематизированных постановок и численного решения специальных модельных задач по взаимосогласованному моделированию структуры, динамики, теплового режима и химического состава околосолнечного диска на разных этапах его эволюции, в частности, развитых турбулентных движений коагулирующей газовзвеси, приводящих к формированию пылевого субдиска, его гравитационной неустойчивости и последующему образованию и росту планетезималей. С целью феноменологического описания турбулентных течений дискового вещества проведено теоретико-вероятностное осреднение по Фавру стохастических уравнений гетерогенной механики, получены определяющие соотношения для турбулентных потоков межфазной диффузии и тепла, а также для тензоров "относительных" и рейнольдсовых напряжений, необходимые для замыкания уравнений масштаба среднего движения. Особое внимание уделено исследованию влияния инерционных эффектов пылевых частиц на характеристики турбулентности в диске, в частности, на дополнительную генерацию турбулентной энергии крупными частицами в окрестности экваториальной плоскости прото-Солнца. Разработан полуэмпирический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости в двухфазной дисковой среде с учетом обратных эффектов переноса диспергированной фазы (или тепла) на развитие турбулентности с целью моделирования неоднородной по высоте термогидродинамической структуры субдиска и его атмосферы. Проанализирован возможный "режим предельного насыщения" атмосферы субдиска мелкодисперсными частицами пыли, благодаря которому интенсифицируются различные механизмы коагуляции в турбулизованной среде. Для установившегося режима движения при осаждении твердых частиц к центральной плоскости диска под действием ускорения тяготения исследован параметрический метод моментов решения интегро-дифференциального уравнения коагуляции Смолуховского для функции распределения частиц по размерам, который базируется на априорной принадлежности искомой функции распределения к определенному параметрическому классу распределений.

ВВЕДЕНИЕ

Вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации. Это вещество, являющееся в общем случае пылевой плазмой, замагничено и находится в состоянии сильной турбулизации. Понимание эволюции протопланетного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании Земли и планет – вопроса, глубинно связанного с основополагающей проблемой космогонии, решение которой является на сегодняшний день крупнейшей задачей науки (см. Шмидт, 1957; Сафронов, 1982; Галимов, 2001). По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения турбулизованного протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой компоненты к экваториальной (центральной) плоскости диска[1], перпендикулярной оси вращения (Toomre, 1964; Сафронов, 1969; 1982; Goldreich, Ward, 1973; Nakagawa и др., 1986; Makalkin, 1994; Youdin, Shu, 2002). Именно из вещества субдиска, как теперь

[1] Сплющивание вращающегося допланетного облака является следствием противоборства двух основных динамических сил – гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, самогравитация диска и электромагнитные явления. Дисковое вещество вследствие вязкостных сил трения (возникающих вследствие относительного сдвига элементов газовзвеси при орбитальном движении) дрейфует к прото-Солнцу по очень пологой спиральной траектории по мере того, как его момент количества движения передается наружу – из внутренних областей диска во внешние.

стало ясно, и образовалась Солнечная планетная система путем возникновения дискретных центров уплотнения и последующего их роста (см., например, Сафронов, 1982; 1987). Важно подчеркнуть, что одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно происхождения и структуры околозвездных газопылевых аккреционных дисков любого рода является их турбулентная природа (Zel'dovich, 1981; Фридман, 1989; Dubrulle, 1993; Balbus, Hawley, 1998; Richard, Zahn, 1999; Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 2001).

В связи с этим при адекватном численном моделировании эволюции допланетного облака, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, необходимо, в общем случае, учитывать динамические процессы взаимодействия турбулизованного газа и пыли, в частности, учитывать модификацию твердыми частицами энергии турбулентности несущей фазы (т.е. обратное влияние пылевой компоненты на турбулентный и тепловой режимы газовой составляющей диска), влияние турбулентности на скорости фазовых переходов (испарение, конденсацию в охлаждающемся диске), на скачкообразные процессы аккумуляции дисперсных частиц (коагуляцию и дробление при взаимном соударении частиц друг с другом в потоке вещества) и, наконец, на осаждение сквозь газ твердых частиц к центральной плоскости диска, где они образуют уплощенный пылевой слой (субдиск). Мелкодисперсные твердые частицы (относительно малоинерционная составляющая газовзвеси) оказывают, как правило, ламинаризующее влияние на двухфазное турбулентное течение (за счет возрастания дополнительной диссипации), в то время как крупные частицы усиливают генерацию пульсационной энергии за счет формирования вихревого следа. Следует отметить, что пылевая фаза может не приниматься во внимание только лишь на самой начальной стадии эволюции рассматриваемой космической системы, когда почти все первичные (межзвездные) твердые частицы уже испарились[2]. На более поздних стадиях эволюции допланетного облака, по мере охлаждения диска, конденсации твердых частиц и увеличения их в размерах (в основном в результате процессов коагуляции), а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роли пылевой составляющей существенно возрастают. В этом случае при моделировании дисковой среды важно учитывать влияние пыли на турбулентность потока, которое в общем случае не является однозначным и сильно зависит от величины объемного содержания (концентрации) и инерционности твердых частиц. В частности, на определенных этапах эволюции гетерогенной смеси становятся существенными такие механизмы воздействия пылевой компоненты на турбулентность в диске, как турбулентный "диффузионный" перенос дисперсной составляющей, обусловленный пространственной неравномерностью распределения пылевых частиц в диске, генерирование дополнительных турбулентных возмущений за счет коллективных эффектов, связанных с межчастичными столкновениями твердых частиц (Шрайбер и др. 1980), образование вихревых структур за обтекаемыми крупными частицами при отрыве несущего газового потока, а также совместное влияние этих двух механизмов турбулизации течения и т.д. Помимо этого, само присутствие в турбулентном потоке полидисперсной примеси существенно усложняет гидродинамику диска, способствуя реализации дополнительных режимов течения космического вещества. В частности, увеличение концентрации твердых частиц в гетерогенном потоке, связанное с процессом оседания пыли к центральной плоскости диска под действием вертикальной компоненты тяготения прото-Солнца, приводит к дополнительному локальному усилению генерации турбулентной энергии потока, обусловленной ростом поперечного градиента относительной скорости фаз в окрестности экваториальной плоскости, т.е. к ретурбулизации течения (ср. Goldreich, Ward, 1973).

Помимо этого, эффективность механизмов аккреции вещества в допланетном облаке (особенно на стадии формирования субдиска) также в значительной степени зависит от интенсивности его турбулизации. Причем влияние турбулентности на процесс коагуляции частиц в различных ситуациях может сказываться совершенно неожиданным образом, однако, по-видимому, турбулентность всегда способствует коагуляции (Волощук, Седунов, 1975). Так, если внутренний колмогоровский масштаб турбулентности λ_K меньше или сравним с размером дисперсных частиц, то имеет место турбулентное блуждание частиц (аналогичное броуновскому), приводящее к их взаимному столкновению, т.е. к турбулентной коагуляции (дополняющей эффективную в спокойном газе гравитационную коагуляцию). Для частиц, размеры которых значительно меньше λ_K, влияние турбулентности на эволюцию тонкодисперсной пылевой компоненты происходит по иным каналам. В этом случае усиление различных коагуляционных процессов (вызванных другими, нежели турбулентность, причинами) будет протекать в результате интенсивного турбулентного перемешивания частиц на расстояниях, бо́льших колмогоровского масштаба, когда за счет хаотических турбулентных пульсаций число взаимных столкновений твердых частиц в единицу времени

[2] Войдя в состав допланетного диска, пылевые частицы либо испарились, попав в его внутреннюю высокотемпературную область, либо сохранились частично (или полностью) в более удаленных от Солнца и потому более холодных областях.

существенно увеличивается[3] по сравнению с ламинарным течением[4]. Поэтому эффективным механизмом аккумуляции твердых частиц становится, наряду с гравитационной, негравитационная аккреция, связанная, например, с броуновской коагуляцией, электрической коагуляцией, турбулентно-броуновской коагуляцией заряженных и нейтральных частиц и т.п. В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газовзвеси, что приводит, в конечном счете, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости протозвезды. Таким образом, турбулентность газопылевой среды, вопреки мнению многих исследователей (см. например, обзор (Макалкин, 2003)), так или иначе способствует формированию субдиска, гравитационная неустойчивость которого приводит в конечном итоге к образованию планетезималей.

И наконец, имеются серьезные аргументы в пользу предположения, что в период образования околосолнечного допланетного диска и первых шагов его эволюции плазменные эффекты играли существенную роль. Космическая плазма в общем случае является пылевой, т.е. содержит мельчайшие частицы пыли. Так как любой аккреционный диск содержит твердые частицы различных размеров, то существует, по-видимому, некоторый граничный линейный масштаб[5] (зависящий от величины электромагнитного и гравитационного полей, заряда и плотности частиц), который разделяет достаточно малые частицы, являющиеся частью пылевой плазмы, и достаточно большие частицы, движение которых определяется воздействием неэлектромагнитных сил. Известно, что основными физическими процессами, определяющими поверхностный заряд пылинок, являются фотоэлектронная эмиссия и столкновения с электронами плазмы и положительными ионами (см., например, Альвен, Аррениус, 1979). Вместе с тем, твердая частица в космической плазме чаще заряжается отрицательно до потенциала порядка нескольких вольт в результате столкновений с электронами[6]. При движении электропроводной двухфазной среды в электромагнитном поле на заряженные частицы действует пондеромоторная сила Лоренца, что приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, особенно при турбулизации течения (см., например, Верещагин и др., 1974; Бусройд, 1975). В частности, турбулентной пылевой плазме свойственны такие уникальные свойства, как высокая диссипативность, способность к самоорганизации и образованию упорядоченных структур.

Синергетические процессы самоорганизации в термодинамически открытой системе допланетного облака на фоне крупномасштабного сдвигового течения космического вещества, связанного с его дифференциальным вращением, также являются важнейшим механизмом, формирующим свойства облака на разных стадиях его эволюции, включая формирование вязкого аккреционного диска вокруг молодого Солнца, проходившего стадию T Тельца, формирование пылегазового субдиска, разрушение последнего в результате гравитационной неустойчивости и возникновение дискретных центров уплотнения с последующим образованием и ростом планетезималей. Это относится также и к формированию в диске разнообразных мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. Barge, Sommeria, 1995; Tanga и др., 1996; Chavanis, 1999; Колесниченко, 2004)), в результате чего происходит самопроизвольное образование и рост конденсированной пылевой компоненты[7], интенсификация фазовых переходов и тепломассопереноса при различных значениях термогидродинамических параметров несущей и дисперсной фаз, существенная модификация спектра колебаний в сильно запыленной среде и т.п.

Как известно, допланетные аккреционные диски обладают значительной вязкостью, что приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного "собственного" источника тепловой энергии в них. По современным представлениям наиболее вероятными причинами вязкости дифференциально вращающихся дисков являются сдвиговая турбулентность (Горькавый, Фридман, 1994; Fridman и др., 2003), а также хаотические магнитные поля (см. Armitage и др., 2001), причем энергия последних часто

[3] Далее будем считать, что каждое столкновение частиц приводит к их объединению (это, так называемая быстрая коагуляция, не учитывающая сил отталкивания), однако сам механизм прилипания (адгезии) в данной работе не обсуждается.

[4] Турбулентные пульсации могут способствовать втягиванию мелкодисперсных частиц в гидродинамический след или в зону действия индукционных сил в случае одноименно заряженных частиц, а также могут содействовать электростатической коагуляции путем разрушения экранировки (Волощук, Седунов, 1975).

[5] Обычно он бывает порядка 10^{-5}–10^{-7} м.

[6] В тех случаях, когда частица попадает в область плазмы с большим количеством надтепловых электронов, ее отрицательный потенциал может достигнуть значений порядка нескольких тысяч вольт, в результате чего она окажется захваченной плазмой.

[7] Один из возможных сценариев образования и роста пылевых частиц в плазме состоит из следующих этапов: сначала образуются первичные кластеры; после прохождения критического размера начинается этап гетерогенной конденсации; на следующем этапе на первый план выходят процессы коагуляции и агломерации (слипания); наконец, на последнем этапе становится наиболее важной поверхностная рекомбинация ионов, приводящая к постоянному осаждению материала на поверхности изолированных многозарядных частиц.

сравнима с энергией гидродинамической турбулентности[8].

Существует обширная журнальная литература по моделированию эволюции околосолнечного допланетного облака без пылевой составляющей (см., например, пространную библиографию к обзору (Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 2001)). Вместе с тем немногочисленные публикации по запыленным дисковым системам охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к проблеме, а полученные в них результаты носят ограниченный характер, поскольку обсуждаемые в них модели турбулентности двухфазных сред "газ – твердые частицы" не могут быть признаны вполне удовлетворительными (см., например, Weidenschilling, 1977; 1980; Sekiya, Nakagawa,1988; Cuzzi и да., 1993; Dubrulle 1993; Dubrulle и др.,1995; Stepinski, Valageas, 1996; 1997; Goodmann, Pindor, 2000; Takeuchi, Lin, 2002; 2003; Youdin, Goodman, 2004). Это обусловлено, в частности, тем, что существующая в настоящее время теория турбулентности гетерогенных течений несовершенна, что связано как с незавершенностью "классической" теории гидродинамической турбулентности, так и с дополнительными разнообразными режимами двухфазных турбулентных течений, реализуемыми в диске при варьировании объемного содержания и размеров твердых частиц в потоке газовзвеси.

В связи с этим нами в представленном цикле работ, применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, предпринята попытка разработки континуальной модели гетерогенной дисковой среды, учитывающей совместное влияние магнитогидродинамических эффектов и эффектов турбулентности на динамику и процессы тепло- и массопереноса в дифференциально вращающемся космическом веществе, с учетом инерционных свойств полидисперсной примеси твердых частиц, процессов коагуляции и излучения. В настоящей работе, открывающей этот цикл, мы, не касаясь плазменных эффектов, остановимся, в основном, на следующих четырех аспектах проблемы построения модели среды диска:

– на формулировании базовой системы уравнений сохранения массы, импульса и энергии для мгновенных (актуальных) параметров течения газопылевой смеси и излучения, предназначенных для численного моделирования околосолнечного допланетного диска на разных стадиях его эволюции (в частности ламинарной стадии образования субдиска) и в пространственных зонах, расположенных на различных расстояниях от протозвезды;

– на весовом осреднении (по Фавру) стохастических уравнений движения двухфазной механики с целью феноменологического описания осредненного течения газовзвеси и процессов турбулентного тепло- и массопереноса в газопылевом диске;

– на выводе определяющих соотношений для корреляционных характеристик турбулентного двухфазного течения, необходимых для замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения;

– на моделировании коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом диске с учетом обратного влияния полидисперсной составляющей на интенсивность турбулентности несущего газа.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД В ДОПЛАНЕТНОМ ГАЗОПЫЛЕВОМ ОБЛАКЕ

Наиболее адекватное моделирование движения газовзвеси в газопылевом аккреционном диске можно провести, по-видимому, в рамках механики гетерогенных турбулизованных сред с учетом специфики физико-химических свойств фаз, процессов тепло- и массопереноса и излучения, химических реакций, фазовых переходов, процессов коагуляции, дробления и т.д. Изучение эволюции подобных сред связано с привлечением новых термогидродинамических параметров и решением уравнений более сложных, чем те, с которыми приходится иметь дело в "обычной" гидродинамике. При этом детальное описание внутрифазных и межфазных взаимодействий в гетерогенных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения достоверных результатов и их понимания здесь особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям.

Как правило, в перечисленных выше и некоторых других известных работах по континуальному моделированию турбулизованных аккреционных дисков с учетом пылевой составляющей исходят из уравнений неразрывности, движения и энергии для каждой фазы в отдельности (Nakagawa и др., 1981; Weidenschilling, 1984; Hayashi и др., 1985; Nakagawa, Sekiya и др. 1986; Schmitt и др., 1997; Balbus, Hawley, 1998). При этом авторам приходится эвристически задавать законы межфазных взаимодействий, в частности, интенсивности обмена импульсом и энергией между фазами. Такой подход является аналогом тринадцатимоментного метода Грэда (Grad, 1949), получившего

[8] Хаотические магнитные поля, тянущиеся вместе с аккрецируемой плазмой, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению диска и испытывающие пересоединение на границах между хаотическими ячейками, также должны вносить значительный вклад в вязкость во внутренней области диска и во внешних слоях его атмосферы, где достигается достаточная степень ионизации вещества. Важную роль в физике аккреции могут играть также и крупномасштабные магнитные поля (см. Eardley, Lightman, 1975).

широкое распространение, например, в кинетической теории многокомпонентной плазмы. Последующее осреднение взаимосвязанных гидродинамических уравнений для отдельных фаз (с целью описания турбулизованных движений) приводит не только к громоздким уравнениям масштаба среднего движения, что связано с необходимостью удержания в их структуре большого количества корреляционных моментов пульсирующих параметров (таких, например, как $\overline{\rho'_g \mathbf{u}'_g}$, $\overline{\rho'_d \mathbf{u}'_d \mathbf{u}'_d}$, $\overline{T' \mathbf{u}'_d}$, $\overline{\rho'_g T'}$ и т.п.), но и к затруднениям физической интерпретации каждого отдельного члена в осредненных уравнениях. Для преодоления указанных трудностей и с целью упрощения задачи некоторые авторы часто прибегают к необоснованному отбрасыванию ряда корреляционных слагаемых, что, конечно, сужает область применения подобного подхода.

Вместе с тем моделирование эволюции турбулизованного газопылевого облака возможно провести в рамках односкоростного приближения гетерогенной механики, аналогичного моментному методу Чепмена–Энскога решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентных газовых смесей (см., например, Чепмен, Каулинг, 1960; Маров, Колесниченко, 1987). Своеобразие этого подхода в рассматриваемом случае состоит в том, что несмотря на разницу гидродинамических скоростей отдельных фаз и связанную с этим необходимость учета динамических и инерционных эффектов их относительного движения, континуальное описание дисковой среды возможно проводить исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии для системы в целом, дополненных определяющими (замыкающими) соотношениями для ряда термогидродинамических потоков, как внутрифазных, так и межфазных. В частности, для потоков межфазной диффузии (или относительных скоростей фаз) могут быть использованы обобщенные соотношения Стефана–Максвелла, выведенные для гетерогенных смесей с достаточной полнотой и логической стройностью методами неравновесной термодинамики в работе (Колесниченко, Максимов, 2001). Важно подчеркнуть, что применение только одного суммарного континуума для моделирования газопылевого космического вещества позволяет, при использовании средневзвешенного осреднения Фавра (Favre, 1969), выполнить осреднение гидродинамических уравнений для дисковой среды в целом достаточно аккуратно (см., например, Marov, Kolesnichenko, 2002).

Основные допущения

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность эффектов неоднофазности в солнечном допланетном облаке (фазовые переходы, химические реакции, теплообмен, гравитационное взаимодействие, пульсационное и хаотическое движение, вращение, радиация, коагуляция и т.п.) с необходимостью требуют разумной схематизации описания движения газопылевой среды. В связи с этим будем в данной работе предполагать, что движение дисперсной смеси[9] в допланетном диске можно адекватно описать при следующих допущениях:

1) пылевые частицы[10] (под которыми далее мы будем понимать твердофазный конденсат) – твердые и недеформируемые, сферичны по форме и полидисперсны;

2) предполагается несжимаемость вещества пылевых частиц, $\rho_d = \text{const}$;

3) истинная плотность частиц пыли много больше истинной плотности газовой составляющей системы, $\rho_d \gg \rho_g$;

4) объемная концентрация дисперсной фазы не очень велика ($s^2 \ll 1$), так что членами порядка s^2 можно пренебречь;

5) несущая фаза – сжимаемый многокомпонентный совершенный газ;

6) можно пренебречь диффузионным переносом молекул всех химических сортов друг относительно друга, $\mathbf{u}_{\alpha(k)} \equiv \mathbf{u}_\alpha$;

7) вязкость и теплопроводность дисперсной фазы можно не учитывать, $\mathbf{\Pi}_d = 0$, $\mathbf{q}_d = 0$;

8) предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;

9) суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;

10) гетерогенные реакции на поверхности твердых частиц можно не учитывать;

11) вкладом от межфазных границ[11]) (приповерхностного слоя твердых частиц) в энергетику дисковой системы в целом можно пренебречь;

12) считается, что при описании динамического взаимодействия фаз вращением твердых частиц можно пренебречь;

13) теплообмен между дисперсными частицами и несущим газом можно не учитывать.

---

[9] Дисперсная фаза с точки зрения термодинамики и механики сплошной среды может рассматриваться как “псевдогаз”, “псевдомолекулами” которого являются дисперсные частицы.

[10] В данной работе мы будем понимать под пылевыми частицами твердые тела с размерами от одного микрона до нескольких сотен метров.

[11] Наличие в гетерогенных системах межфазных границ, моделируемых математическими поверхностями, на которых терпят разрыв непрерывности поля различных термодинамических параметров, приводит к весьма серьезным осложнениям континуальной теории многофазных многокомпонентных систем (см. Нигматулин, 1978).

Таким образом, предполагается моделировать гетерогенный континуум, состоящий из двух соприкасающихся друг с другом фаз – несущей газовой фазы солнечного состава и дисперсной фазы твердых конденсированных частиц сложного химического состава (см., например, Дорофеева, Макалкин, 2004), находящийся при общей абслютной температуре T и давлении p[12] и достаточно хорошо перемешанный внутри каждого элементарного макрообъема $\delta\mathcal{V}$ дисковой среды[13]. Предполагается, что каждая фаза представляет собой гомогенную n-компонентную смесь (причем каждое геохимически значимое вещество допланетного облака присутствует в каждой фазе α).

Далее для обозначения фазы будем использовать нижний греческий индекс α, β, …, а нижние латинские индексы в круглых скобках типа (k) или (i) у любой величины будем относить к молекулярной составляющей фазы. Газовая фаза ($\alpha = g$) является несущей средой[14], описываемой моделью вязкой жидкости. Дисперсная фаза ($\alpha = d$), присутствующая в виде твердых включений (столкновениями между которыми мы пренебрегать, однако, не будем), является невязкой и нетеплопроводной. Для каждой из двух фаз в каждой пространственно-временнóй точке $(\mathbf{x}, t)$ определим массовую плотность, гидродинамическую скорость, внутреннюю энергию и другие термогидродинамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей химической составляющей смеси. При этом в качестве характеристик фазы будем использовать величины, осредненные как по совокупному элементарному макрообъему $\delta\mathcal{V} = \sum_\alpha \delta\mathcal{V}_\alpha$, относящемуся к гетерогенной системе в целом, так и по части $\delta\mathcal{V}_\alpha$ элементарного объема, занимаемого отдельной фазой α. В частности, наряду с распределенной (размазанной по совокупному объему $\delta\mathcal{V}$) массовой плотностью $\tilde{\rho}_\alpha$ фазы α, далее будем использовать истинную (физическую) плотность ρ_α (равную отношению массы частиц фазы α в элементарном макрообъеме $\delta\mathcal{V}$ к части этого объема $\delta\mathcal{V}_\alpha$, которую фаза занимает), определяемую выражением

$$\rho_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha / s_\alpha, \quad s_\alpha \equiv \delta\mathcal{V}_\alpha / \delta\mathcal{V}, \quad \sum_\alpha s_\alpha = 1, \tag{1}$$

где s_α – так называемое объемное содержание[15] (или объемная концентрация) α-фазы. Именно истинная (ρ_α), а не распределенная ($\tilde{\rho}_\alpha$) плотность фазы совместно с другими параметрами состояния, например, такими, как температура T_α, внутренняя энергия e_α и энтропия S_α, определяет термодинамические свойства элементарной макрочастицы α-фазы в различных ее состояниях. Кроме того, величины s_α непосредственно влияют и на гидродинамическое движение фаз, поскольку фигурируют в соответствующих уравнениях движения. Одновременно будем предполагать, что между отдельными химическими компонентами k дисковой системы возможны r независимых химических реакций, включая межфазные реакции и случаи, когда химические превращения сводятся просто к перемещению компоненты k из одной фазы в другую.

Предполагая далее локальное термодинамическое равновесие в пределах каждой фазы, а также локальное термодинамическое равновесие излучения с веществом, воспользуемся для описания гидродинамических движений в газопылевой среде (с соответствующими физико-химическими свойствами) феноменологической теорией многожидкостных взаимопроникающих континуумов, учитывающей, в частности, динамические эффекты из-за несовпадения гидродинамических скоростей $\mathbf{u}_\alpha$ фаз, входящих в состав системы (см., например, Нигматулин, 1978; Колесниченко, Максимов, 2001).

Сохранение массы

Монодисперсная газопылевая среда. Рассмотрим сначала случай, когда все сконденсированные частицы допланетного газопылевого диска в каждом элементарном макрообъеме $\delta\mathcal{V}$ независимо от их размеров имеют одну и ту же мгновенную гидродинамическую скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$. Массовую плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и среднемассовую гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (мгновенную скорость движения центра тяжести элементарного макрообъема газовзвеси с центром в точке $\mathbf{x}$) газопылевой смеси в целом определим соотношениями

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha = \rho_g(1-s) + \rho_d s, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \rho^{-1}\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \frac{\rho_g(1-s)}{\rho}\mathbf{u}_g + \frac{\rho_d s}{\rho}\mathbf{u}_d, \tag{3}$$

[12] Заметим, что это есть условие только термического и механического равновесия фаз, но не полного фазового равновесия, для которого дополнительно требуется еще и совпадение химических потенциалов фаз (являющихся ключевым понятием теории фазового равновесия). Кроме того, при химическом равновесии, т.е. равновесном распределении химических компонентов между двумя фазами их химические потенциалы должны иметь постоянное значение в обеих фазах.

[13] Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного макрообъема $\delta\mathcal{V}$ должны быть намного больше линейных размеров дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера L_{hydr}.

[14] Иногда для обозначения газовой и конденсированной фаз вместо буквенных будем использовать цифровые индексы, отнеся нижний индекс $\alpha = 1$ к газовой фазе, а $\alpha = 2$ – к параметрам дисперсной фазы.

[15] Параметр s_α часто называют фазовой насыщенностью.

где $\rho_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – соответственно истинная массовая плотность и гидродинамическая скорость фазы α; $s_d(\mathbf{x}, t)$ – мгновенное значение объемной концентрации дисперсной фазы, $(s_g + s_d = 1)$; индекс “d” у параметра s_d далее будем опускать, $s_d \equiv s$.

Для моделирования химического состава, особенно на ранних этапах эволюции допланетного облака (см., например, Willacy и др., 1998; Дорофеева, Макалкин, 2004), необходимо в общем случае привлекать уравнения баланса масс для каждой химической компоненты фазы, которые могут быть представлены в форме уравнений сохранения частиц сорта k в фазе α. С учетом сделанных выше допущений эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha n_{\alpha(k)}) + \nabla(s_\alpha n_{\alpha(k)}\mathbf{u}_\alpha) = \sigma_{\alpha(k)} \equiv \equiv \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha(k),\rho}\xi_\rho + \delta_{2\alpha}\mathring{n}_{\alpha(k)}, \quad (\alpha = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

или

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho}\right) + \nabla(s_\alpha n_{\alpha(k)}\mathbf{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha(k)}, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}). \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{d}(\ldots)/\mathrm{d}t \equiv \partial(\ldots)/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla(\ldots)$ – субстанциональная производная, связанная с движением элементарного макрообъема газопылевой среды в целом; $\nabla(\ldots) = \sum_l \mathbf{i}_l\,\partial(\ldots)/\partial x_l$ – векторный дифференциальный оператор; $\mathbf{i}_l$ $(l = 1\ 2, 3)$ – суть декартовы единичные векторы, параллельные соответствующим осям координат; величина $\nabla\cdot b$ является дивергенцией $\mathbf{b}$; $n_{\alpha(k)}(\mathbf{x}, t)$ – число частиц химического вещества k в единице объема, занимаемого фазой α (счетная концентрация); $\mathbf{w}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – мгновенная диффузионная скорость фазы α, удовлетворяющая, в силу определения среднемассовой скорости $\mathbf{u}$, соотношению

$$\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \tag{6}$$

или

$$\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0, \quad \mathbf{J}_\alpha \equiv \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \tag{7}$$

где $\rho_\alpha = \sum_k M_{(k)}\,n_{\alpha(k)}$; $\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – массовый диффузионный поток частиц α-фазы; $\sigma_{\alpha(k)}$ – скорость образования числа частиц компоненты k в единице объема среды за счет химических реакций и фазовых переходов (испарения и конденсации вещества), а также процессов дробления и коагуляции дисперсной составляющей; $\xi_\rho(\mathbf{x}, t)$ – скорость ρ-й химической реакции (включая межфазовые реакции и фазовые переходы), $\rho = 1, 2, \ldots, r$; $\nu_{\alpha(k),\rho}$ – стехиометрический коэффициент компоненты k в фазе α по отношению к ρ-й химической реакции[16], стехиометрическое уравнение которой символически может быть записано в виде (см., например, Пригожин, Дефей, 1966)

$$\sum_\alpha\sum_k \nu_{\alpha(k),\rho} M_{(k)} = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

– принцип сохранения общей массы в ρ-й химической реакции; $M_{(k)}$ – молекулярная масса k-й компоненты; $\mathring{n}_{\alpha(k)}$ – величина, описывающая изменение числовой концентрации химической компоненты k в пылевой фазе, связанное с процессами дробления или слипания сконденсированных частиц в газопылевом облаке.

Из (4), при условии сохранения массы всех химических компонентов в пылевой фазе в процессе трансформации твердых частиц ($\sum_k M_{(k)}\mathring{n}_{\alpha(k)} = 0$), следует дифференциальное уравнение сохранения

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}\right) + \nabla(\rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\rho=1}^{r}\nu_{\alpha,\rho}\xi_\rho, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{9}$$

для распределенной массовой плотности

$$\tilde{\rho}_\alpha \equiv s_\alpha \sum_k M_{(k)} n_{\alpha(k)} = \rho_\alpha s_\alpha, \tag{10}$$

α-фазы. Здесь $\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum_k M_{(k)}\,\nu_{\alpha(k),\rho}$; величина $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$ характеризует интенсивность перехода массы из фазы α в фазу β (или наоборот, тогда $\sigma_{\alpha\beta} < 0$) за счет химических реакций и процессов испарения или конденсации вещества в допланетном облаке; при этом $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$. Для дальнейших целей целесообразно ввести в рассмотрение массовые фазовые концентрации $C_\alpha(\mathbf{x}, t)$

$$C_\alpha \equiv \frac{\tilde{\rho}_\alpha}{\rho} = \frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}, \quad \sum_\alpha C_\alpha = 1 \tag{11}$$

[16] Стехиометрические коэффициенты компонентов, образующихся при протекании реакции (слева направо) считаются положительными, а коэффициенты расходующихся при этом компонентов – отрицательными.

и относительную скорость пыли и газа $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}_{dg} = (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$; тогда уравнениям (9) можно придать более компактный вид

$$\rho \frac{dC_\alpha}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$
$$\mathbf{J}_{1,2} = \begin{cases} \rho C_1 \mathbf{w}_1 = -\rho C_1 C_2 \mathbf{w}, \\ \rho C_2 \mathbf{w}_2 = \rho C_1 C_2 \mathbf{w}. \end{cases} \tag{12}$$

Закон сохранения массы в целом, получающийся в результате суммирования (4) по индексам k и α, с учетом (7) и (8) принимает обычную форму

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{13}$$

как и в однофазном континууме. Отметим, что излучение не изменяет уравнение непрерывности (13), поскольку оно "не обладает" массой.

Далее будем предполагать, что в процессе эволюции газопылевого облака материал твердых включений остается несжимаемым, т.е. истинная (физическая) плотность пыли $\rho_d = \text{const}$. Тогда мгновенное уравнение (12) для пыли сводится к уравнению

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) = -\nabla \cdot (s\mathbf{w}_d) + \rho_d^{-1} \sigma_{dg},$$
$$\mathbf{w}_d = C_g \mathbf{w} = (1 - s)\frac{\rho_g}{\rho}\mathbf{w}, \tag{14}$$

позволяющему найти объемное содержание $s(\mathbf{x}, t)$ пылевой составляющей в двухфазном потоке при заданной относительной скорости фаз $\mathbf{w}$. Таким образом, для расчета параметров ρ и s (а следовательно, и плотности газа ρ_g, см. соотношение (2)), можно использовать уравнения (13) и (14) вместо двух уравнений (9).

Интенсивность силового взаимодействия фаз и характеристики излучения в газопылевом облаке сильно зависят от характерного размера твердых включений (например, характерного объема одной частицы пыли $\tilde{U}_d(\mathbf{x}, t)$) и полного их числа $N_d \equiv s\sum_k n_{d(k)}$ в единице совокупного объема газовзвеси. В случае, если все твердофазные конденсаты являются сферическими или близкими к ним по форме с характерным диаметром Ферета $\tilde{d}(\mathbf{x}, t)$, то $\tilde{U}_d = (\pi/6)\tilde{d}^3$. Балансовое уравнение для полного числа дисперсных частиц $N_d(\mathbf{x}, t)$ можно получить, используя (4); в результате будем иметь

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{N_d}{\rho}\right) + \nabla \cdot (N_d \mathbf{w}_d) = \sigma_{N_d} \equiv$$
$$\equiv \sum_k \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{d(k),\rho} \xi_\rho + \mathring{N}_d, \tag{15}$$

где источниковый член $\mathring{N}_d \equiv \sum_k \mathring{n}_{\alpha(k)}$, характеризующий изменение полной числовой плотности разномасштабных твердых частиц за счет процессов коагуляции и дробления, определяется в общем случае кинетическим уравнением Смолуховского (см. уравнение (29)). По известным параметрам N_d и s можно определить важную характеристику коагулирующей смеси в двухфазном потоке – характерный объем $\tilde{U}_d(\mathbf{x}, t)$ (или средний линейный размер $\tilde{d}_d$) твердых включений:

$$\tilde{U}_d = s/N_d, \quad \tilde{d}_d = \sqrt[3]{(6/\pi)(s/N_d)}. \tag{16}$$

Следует отметить, что если при численном моделировании эволюции газопылевого облака не принимать во внимание процессы дробления и коагуляции твердых частиц ($\mathring{N}_d = 0$), процессы испарения и конденсации ($\sigma_{dg} = 0$), а также предположить несжимаемость материала включений ($\rho_d = \text{const}$), то будем иметь $\tilde{U}_d = \text{const}$. При этих допущениях $\tilde{\rho}_d = s_d = \rho_d \tilde{U}_d N_d$, и уравнение (15) (с нулевой правой частью) является просто следствием уравнения (14) сохранения массы второй фазы, которое в этом случае принимает простой вид

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) + \nabla \cdot (s\mathbf{w}_d) = 0, \quad \mathbf{w}_d = C_g \mathbf{w}. \tag{14*}$$

Межфазная диффузия

Как уже говорилось выше, обобщенные соотношения Стефана–Максвелла могут служить исходными при анализе процессов фазовой диффузии в газопылевом диске. Диффузия в многокомпонентной смеси газов подробно рассмотрена методами кинетической теории в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда (1961). Их основной результат состоит в том, что скорость относительной диффузии $(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)})$ двух компонент газа может быть вызвана факторами, не влияющими непосредственно на эти компоненты, например термодинамическими силами, действующими на молекулы прочих компонент смеси. Скорости $(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)})$ находятся (в первом приближении метода Чепмена–Энскога решения уравнений Больцмана) из системы уравнений Стефана–Максвелла

$$\sum_j \frac{n_{(j)}n_{(k)}}{n^2\mathcal{D}_{(jk)}}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - k_{T(k)}\nabla \ln T = \mathbf{d}_{(k)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p}\left\{-\rho_{(k)}\mathbf{F}_{(k)} + \nabla p_{(k)} - C_{(k)}\sum_j(-\rho_{(j)}\mathbf{F}_{(j)} + \nabla p_{(j)})\right\},$$

$$(k = 1, 2, \ldots),$$

которым можно придать вид уравнений движения отдельных компонент смеси (см., например, “Примечание И” в монографии Чепмена и Каулинга (1960)).

$$\rho_{(k)}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p_{(k)} + \rho_{(k)}\mathbf{F}_{(k)} +$$

$$+\sum_j k_B T\frac{n_{(j)}n_{(k)}}{n\mathcal{D}_{(jk)}}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - k_B k_{T(k)} n\nabla T.$$

Здесь $\rho_{(k)} = M_{(k)}n_{(k)}$, $C_{(k)} = \rho_{(k)}/\rho$, $p_{(k)}$ – соответственно массовая плотность, массовая концентрация и парциальное давление частиц сорта k; $p = \sum_k p_{(k)}$ – полное давление смеси (закон Дальтона), $p_{(k)} = n_{(k)}k_B T$; k_B – постоянная Больцмана; $n = \sum_k n_{(k)}$, $\rho = \sum_k \rho_{(k)}$ – соответственно полные числовая и массовая плотности многокомпонентной смеси; $\mathcal{D}_{(jk)}$ – бинарные коэффициенты диффузии; $\mathbf{F}_{(k)}$ – внешняя объемная сила (на единицу массы k-й компоненты); $k_{T(k)}$ – термодиффузионное отношение.

В работе (Колесниченко, 1998) указанные отношения Стефана–Максвелла для многокомпонентных смесей были выведены методами неравновесной термодинамики, а в работе (Колесниченко, Максимов, 2001) они были обобщены и на гетерогенные смеси (причем им также можно придать вид уравнений движения отдельных фаз системы). В рассматриваемом здесь однодавленческом приближении ($p_g = p_d$) эти соотношения для межфазовой диффузии принимают следующий вид:

$$\sum_\beta R_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) - pk_{T\alpha}\frac{\nabla T}{T} =$$

$$= \mathbf{d}_\alpha \equiv -\tilde{\rho}_\alpha\mathbf{K}_\alpha + s_\alpha\nabla p_\alpha - C_\alpha\sum_\beta(-\tilde{\rho}_\beta\mathbf{K}_\beta + s_\beta\nabla p_\beta) \equiv \tag{17}$$

$$\equiv \rho_\alpha s_\alpha\frac{d_\alpha\mathbf{u}_\alpha}{dt} + s_\alpha\nabla p - \rho_\alpha s_\alpha\mathbf{F}_\alpha - \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

где $d_\alpha(\ldots)/dt = \partial(\ldots)/\partial t + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla(\ldots)$ – субстанциональная производная, вдоль траектории центра масс α-фазы, заключенной внутри элементарного макрообъема $\delta\mathcal{V}$ многофазной среды; $\mathbf{\Pi}_\alpha$ – парциальный тензор вязких напряжений; $R_{\alpha\beta}$ – коэффициент межфазного трения для фаз α и β (коэффициент $R_{\alpha\beta}$ отражает взаимодействие двух фазовых континуумов и поэтому его часто удобно записать в симметричном виде $R_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta\theta_{\alpha\beta}$, где параметры $\theta_{\alpha\beta}$ не зависят, по крайней мере грубо, от пропорций смеси), $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$[17]; $\mathbf{F}_\alpha$ – внешняя массовая сила, отнесенная к единице массы вещества фазы α;

$$\tilde{\rho}_\alpha\mathbf{K}_\alpha \equiv -\tilde{\rho}_\alpha\frac{d_\alpha\mathbf{u}_\alpha}{dt} + \tilde{\rho}_\alpha\mathbf{F}_\alpha + \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\alpha - \frac{1}{2}\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}\mathbf{w}_{\alpha\beta} \tag{18}$$

– обобщенная термодинамическая сила, сопряженная с диффузионным потоком $\mathbf{J}_\alpha$; величины $\mathbf{d}_\alpha$ также имеют смысл обобщенных термодинамических сил, вызывающих относительное движение фаз ($\sum_\alpha\mathbf{d}_\alpha = 0$); $k_{T\alpha}$ – термофоретическое отношение, причем $\sum_\alpha k_{T\alpha} = 0$. Для определения величины термофоретической силы в литературе предложен целый ряд теоретических формул (см, например, Soo и др., 1960; Медников, 1981). Следует, однако, отметить, что в случае дисперсных частиц, размер которых, как правило, значительно меньше характерного размера неоднородностей температуры в диске, силу, связанную с термофорезом, можно не учитывать. Последнее слагаемое в правой части уравнения (17), равное $\frac{1}{2}\sum_\beta\mathbf{w}_{\alpha\beta}\sum_{\rho=1}^r\nu_{\alpha,\rho}\xi_\rho$, описывает изменение импульса фазы α при фазовых переходах (напомним, что $\mathbf{w}_{\alpha\beta} = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta$). В рассматриваемом нами случае двухфазной газопылевой дисковой системы этим слагаемым учитывается утрата импульса частицами пылевой фазы за счет перехода массы части их в газовую фазу при испарении или приобретение дополнительного импульса дисперсной фазой за счет образования (из газовой составляющей) новых твердых частиц при конденсации.

[17] Более тонкий анализ межфазного взаимодействия показывает, что эффекты больших градиентов макроскопических параметров, вращения твердых частиц, нестационарности установления профиля скоростей около частиц, деформации дисперсных частиц и некоторые другие, могут приводить к появлению дополнительных сил в левой части уравнений (17). Таковыми, кроме стоксовой силы трения, могут быть сила Сэфмена (связанная с неоднородностью профиля скорости несущего газа), “наследственная” сила Бассе (учитывающая предысторию движения на поведение дисперсных частиц), сила Магнуса или Жуковского (сила дополнительного воздействия на вращающиеся дисперсные частицы из-за градиентов в поле средних скоростей несущей фазы) и т.д.

Тем не менее далее этим слагаемым мы также будем в большинстве случаев пренебрегать, поскольку практически оно всегда много меньше стоксовой силы трения $\mathbf{F}_{\mathrm{fric},\,\alpha} = \sum_\beta R_{\alpha\beta}\mathbf{w}_{\alpha\beta}$, возникающей из-за эффектов вязкости фаз (см., например, Нигматулин, 1987), и точно равно нулю при отсутствии фазовых переходов. Важно лишний раз подчеркнуть, что в отличие от классических безынерционных соотношений Стефана–Максвелла для относительных скоростей компонентов $\mathbf{w}_{(jk)} = \mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}$, законы межфазной диффузии, описываемые обобщенными соотношениями (17), учитывают инерцию относительного движения фаз.

Для двухфазной газопылевой дисковой среды соотношения (17) принимают вид уравнений движения газа и пыли[18]

$$\begin{cases} R_{\mathrm{gd}}\mathbf{w} \equiv (1-s)s\rho_{\mathrm{d}}\rho_{\mathrm{g}}\theta_{\mathrm{dg}}\mathbf{w} = \rho_{\mathrm{g}}(1-s)\dfrac{\mathrm{d_g}\mathbf{u}_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + \\ + (1-\mathrm{s})\nabla\mathrm{p} - \rho_{\mathrm{g}}(1-\mathrm{s})\mathbf{g} - \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_{\mathrm{g}}, \\ -R_{\mathrm{dg}}\mathbf{w} = \rho_{\mathrm{d}}s\dfrac{\mathrm{d_d}\mathbf{u}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + s\nabla p - \rho_{\mathrm{d}}s\mathbf{g}, \end{cases} \tag{17*}$$

где $\mathbf{F}_{\mathrm{d}} = \mathbf{F}_{\mathrm{g}} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ – объемная сила на единицу массы, связанная в общем случае как с гравитационным притяжением звезды, так и с гравитационным притяжением самого газопылевого облака.

Искомое диффузионное соотношение для вектора относительной скорости пыли и газа $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{u}_{\mathrm{d}} - \mathbf{u}_{\mathrm{g}})$ можно получить из тех членов уравнений (18), которые описывают действие трения, если каждый из них разделить на соответствующую величину $s_\alpha\rho_\alpha$, вычесть один из другого и выделить слагаемое с $\mathbf{w}$. Записывая истинные скорости фаз в виде $\mathbf{u}_{\mathrm{d}} = (C_{\mathrm{g}}\mathbf{w} + \mathbf{u})$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{g}} = (-C_{\mathrm{d}}\mathbf{w} + \mathbf{u})$ и предполагая, что $\rho_{\mathrm{d}} \gg \rho_{\mathrm{g}}$, в результате получим определяющее соотношение для $\mathbf{w}$ (аналог закона Дарси для фильтрации)

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}_{\mathrm{d}}\tilde{\rho}_{\mathrm{g}}}R_{\mathrm{dg}}\mathbf{w} \equiv \rho\theta_{\mathrm{gd}}\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d_g}\mathbf{u}_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d_d}\mathbf{u}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho_{\mathrm{d}}-\rho_{\mathrm{g}}}{\rho_{\mathrm{g}}\rho_{\mathrm{d}}}\nabla p - \frac{1}{\tilde{\rho}_{\mathrm{g}}}\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_{\mathrm{g}} \cong -\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}}\nabla p, \tag{19}$$

которое далее будет рассматриваться нами при моделировании фазовой диффузии в диске как основное. Отметим, что гравитационные силы при таком вычитании взаимно уничтожились, однако их воздействие на процесс движения газопылевой среды проявляется посредством градиента давления (см., например, уравнения (192) и (194)). При написании (19) нами не делалось различия между субстанциональными производными для отдельных фаз и системы в целом, т.е. предполагалось, что $\mathrm{d_d}/\mathrm{d}t \cong \mathrm{d_g}/\mathrm{d}t \cong \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, что справедливо в механике смесей лишь в так называемом диффузионном приближении. В общем случае, т.е. при учете ускорения диффузионных потоков относительно центра тяжести, надлежит использовать точное преобразование

$$\frac{\mathrm{d_d}\mathbf{u}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d_g}\mathbf{u}_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{w}_{\mathrm{d}}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{\mathrm{d}} - (\mathbf{w}_{\mathrm{d}}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u} + C_{\mathrm{g}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{g}}\mathbf{w} - C_{\mathrm{d}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{d}}\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{J}(\mathbf{w}^2) \approx \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \tag{20}$$

где $\mathcal{J}(\mathbf{w}^2) \equiv C_{\mathrm{g}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{g}}\mathbf{w} - C_{\mathrm{d}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{d}}\mathbf{w}$ – квадратичная по $\mathbf{w}$ функция, которая часто может быть опущена (см. Youdin, Goodman, 2004), в частности, для мелкодисперсной пассивной примеси, поскольку для них величина $|\mathbf{w}|$ мала. Тогда определяющее диффузионное соотношение для вектора относительной скорости фаз принимает более сложный вид:

$$\rho\theta_{\mathrm{gd}}\mathbf{w} \cong -\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} - (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u} - C_{\mathrm{g}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{g}}\mathbf{w} + C_{\mathrm{d}}(\mathbf{w}\cdot\nabla)C_{\mathrm{d}}\mathbf{w} + \frac{\nabla p}{\rho_{\mathrm{g}}}. \tag{19*}$$

Коэффициент сопротивления. Коэффициент трения R_{dg} между газовым и пылевым континуумами определяется в литературе различными формулами в зависимости от характерного диаметра $\tilde{d}_{\mathrm{d}}$ частиц дисперсной фазы (см., например, Стернин и др., 1980; Шрайбер и др., 1987). Если характерный размер сферических твердых частиц $\tilde{d}_{\mathrm{d}} \ll \lambda_{\mathrm{g}}$, где λ_{g} – длина свободного пробега молекул в газовой фазе, то величина R_{dg} задается формулой Эпстей-

[18] Заметим, что общий вид уравнений движения и неразрывности у нас и у различных авторов, изучающих газовзвеси применительно к аккреционным дискам, одинаков. Отличие связано лишь с наличием члена – $s\nabla p$ в уравнении движения (17*) для газа и отсутствием члена $s\nabla p$ в уравнении движения (17*) для пыли. Их появление в континуальной гетерогенной механике связано, в конечном счете, с учетом эффекта присоединенных масс (из-за ускоренного движения твердых частиц относительно несущего газа, когда в последнем возникают возмущения порядка размера частиц) и силы Архимеда, которые при больших значениях $\rho_{\mathrm{d}}/\rho_{\mathrm{g}}$ (характерных для газовых потоков с твердыми частицами) часто намного меньше других слагаемых уравнений движения (см. Нигматулин, 1978). Вместе с тем, поскольку эти силы пропорциональны не только плотности газа, но и локальному ускорению среды, либо разности локальных ускорений газовой среды и твердых частицы, вполне возможны ситуации, когда указанные дополнительные члены уравнений (17*) будут соизмеримы с аэродинамической силой Стокса.

на (Epstein, 1924). Для крупнодисперсных сферических конденсатов с диаметрами, превышающими длину свободного пробега молекул газа, коэффициент сопротивления определяется законом Стокса (Stokes, 1851). Таким образом, для коэффициентов сопротивления R_{dg} (или θ_{dg}) гладкой шарообразной частицы имеем (см., например, Weidenschilling, 1977; Garaud и др., 2005)

$$R_{dg} = \begin{cases} \dfrac{2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g c_{sg}}{\tilde{d}_d\rho_d}, \\ \text{когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g \text{ (режим Эпстейна)}, \\ \dfrac{2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g}{\tilde{d}_d\rho_d}C_D(\mathrm{Re}_d)|\mathbf{w}|, \\ \text{когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g \text{ (режим Стокса)}, \end{cases} \tag{21}$$

или

$$\theta_{dg} = \begin{cases} \dfrac{2c_{sg}}{\tilde{d}_d\rho_d}, \text{ когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g, \\ \dfrac{2}{\tilde{d}_d\rho_d}C_D(\mathrm{Re}_d)|\mathbf{w}|, \text{ когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g. \end{cases} \tag{21*}$$

Здесь c_{sg} – скорость звука в газе (см. ниже формулу (57)); $\mathrm{Re}_d = \tilde{d}_d|\mathbf{w}|/\nu_g$ – число Рейнольдса для пыли; ν_g – коэффициент молекулярной кинематической вязкости газовой составляющей смеси, $\nu_g = \lambda_g c_g/2$; $C_D(\mathrm{Re}_d)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления (так называемая стандартная кривая сопротивления), который имеет достаточно сложный характер. В литературе известно значительное количество формул, аппроксимирующих стандартную кривую (см., например, Шлихтинг, 1974; Стернин и др., 1980; Медников, 1981). В частности, в астрофизике широкое распространение получило выражение (Whipple, 1972)

$$C_D(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 9\mathrm{Re}_d^{-1}, & \mathrm{Re}_d \le 1, \\ 9\mathrm{Re}_d^{-0.6}, & 1 \le \mathrm{Re}_d \le 800, \\ 0.165, & \mathrm{Re}_d \ge 800. \end{cases} \tag{22}$$

На наш взгляд, не менее удобной является трехчленная формула

$$C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}(1 + 0.179\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathrm{Re}_d), \quad (0.1 < \mathrm{Re}_d < 10^3) \tag{22*}$$

достоинством которой является возможность применения в широком диапазоне значений Re_d.

Следует отметить, что в реальных многофазных потоках условия обтекания частиц, как правило, существенно отличаются от идеализированных условий, в которых применима стандартная кривая. В газопылевом облаке космические частицы имеют, в общем случае, неправильную форму и шероховатую поверхность, движутся неравномерно в турбулизованном потоке газа, который является разреженным и сжимаемым. Каждый из названных факторов, разумеется, изменяет (порой существенно) условия обтекания частицы в диске и величину силы аэродинамического сопротивления. Рассмотрим кратко их влияние, не учитываемое, как правило, в астрофизической литературе.

1. Степень отличия формы частиц от шарообразной в гетерогенной механике принято характеризовать коэффициентом формы β ($\beta \ge 1$), который представляет собой отношение поверхности реальной частицы к поверхности шара того же объема. В работе (Горбис, 1970) предложены формулы для вычисления аэродинамических коэффициентов сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d, \beta)$, которые в случае существенно неизометрической формы пылевых частиц имеют более высокие значения по сравнению со стандартной кривой.

2. Авторами работы (Стернин и др., 1980) установлен факт увеличения (по сравнению со стандартной кривой) коэффициента сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d)$ частиц с заметной шероховатостью, если она соизмерима с толщиной пограничного слоя.

3. Турбулизация течения также оказывает существенное влияние на величину $C_D(\mathrm{Re}_d)$. Как отмечается в работе (Стернин, Шрайбер, 1994), по данным различных авторов, например, в области $20 < \mathrm{Re}_d < 100$ значения C_D колеблются в пределах $(0.01\text{–}3)C_D^*$ (здесь и ниже C_D^* соответствует стандартной кривой). Важно отметить, что влияние турбулентности уменьшается с уменьшением числа Рейнольдса Re_d. Для сравнительно небольших Re_d можно использовать формулы Лопеса и Даклера (см., например, Стернин и др., 1980)

$$C_D(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 60.75\varepsilon^{1/3}\mathrm{Re}_d^{-1}, \\ \mathrm{Re}_d < 50, \ 0.05 < \varepsilon < 0.5, \\ 0.0498(1 + 150/\mathrm{Re}_d)^{1.565} + 1.5\varepsilon, \\ 50 < \mathrm{Re}_d < \mathrm{Re}_d^*, \quad 0.07 < \varepsilon < 0.5, \end{cases}$$

где ε – относительная степень турбулентности, т.е. отношение среднеквадратичной пульсационной скорости к осредненной скорости скольжения; $\mathrm{Re}_d^* = \min\{0.9\mathrm{Re}_{crit}, 700\}$, Re_{crit} – критическое значение числа Рейнольдса: $\ln\mathrm{Re}_{crit} = 5.477\text{–}15.8\varepsilon$ ($\varepsilon \le 0.15$); $\ln\mathrm{Re}_{crit} = 3.371\text{–}1.75\varepsilon$ ($\varepsilon > 0.15$).

4. Значительное влияние на аэродинамическое сопротивление частиц оказывают сжимаемость и разреженность набегающего потока. Роль этих факторов определяется прежде всего значениями

чисел Маха, $\mathrm{Ma} = |\mathbf{u}_g|/c_{sg}$, и Кнудсена, Kn. В высокоскоростном течении газовзвеси в диске значительную роль играет сжимаемость несущего газа. Из многочисленных обобщенных зависимостей, имеющихся в литературе, приведем формулу Карлсона и Хоглунда (см., например, Стернин и др., 1980)

$$C_D(\mathrm{Re_d}) = 9\mathrm{Re_d^{-1}}(1 + 0.179\mathrm{Re_d^{1/2}} + 0.013\mathrm{Re_d})\times$$
$$\times\frac{[1 + \exp(-0.427\mathrm{Ma}^{-4.63} - 3\mathrm{Re_d^{-0.88}})]}{1 + \mathrm{Re_d^{-1}Ma}[3.82 + 1.28\exp(-1.25\mathrm{Ma^{-1}Re_d})]}, \quad (22^{**})$$

где $\mathrm{Re_d} < 100$, $\mathrm{Ma} < 2$. Здесь два первых сомножителя в числителе соответствуют стандартной кривой, третий учитывает влияние сжимаемости, а знаменатель – разреженности.

В работе (Hunter и др., 1981) для области $\mathrm{Re_d} < 10^3$ приводится зависимость

$$C_D(\mathrm{Re_d}) = (C_D^* - 2)\times$$
$$\times\exp\left[-3.07\gamma^{1/2}\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Re_d}}\frac{1 + \mathrm{Re_d}(12/28 + 0.584\mathrm{Re_d})}{1 + 11.28\mathrm{Re_d}}\right] +$$
$$+\frac{1}{\gamma^{1/2}\mathrm{Ma}}\left[\frac{5.6}{\mathrm{Ma} + 1} + 1.7\left(\frac{T_d}{T}\right)^{1/2}\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{Re_d}}{2\mathrm{Ma}}\right) + 2,$$

где T_d – температура твердых частиц.

5. При пониженном давлении газа[19] в диске может возникнуть скольжение газовой составляющей среды по поверхности твердой частицы, что также приводит к уменьшению коэффициента аэродинамического сопротивления. Разреженность среды характеризуется числом Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda_g/\tilde{d}_d$. Обычно различают четыре области значений Kn: свободномолекулярное обтекание ($\mathrm{Kn} > 10$), переходный режим ($10 > \mathrm{Kn} > 0.25$), течение со скольжением ($0.25 > \mathrm{Kn} > 0.01$), континуальное обтекание (эффект разреженности отсутствует, $\mathrm{Kn} < 0.01$). Для первых трех областей коэффициент аэродинамического сопротивления можно представить в виде $C_D = \varphi C_D^*$, где коэффициент φ определяется известной формулой Милликена (см., например, Фукс, 1955)

$$\varphi = \{1 + \mathrm{Kn}[1.55 + 0.471\exp(-0.596/\mathrm{Kn})]\}^{-1}.$$

С увеличением разреженности влияние сжимаемости на коэффициент сопротивления вырождается. Все перечисленные усовершенствования формулы (22) легко могут быть учтены при численном моделировании строения допланетного газопылевого диска, например, на стадии образования субдиска.

[19] Например, Wasson (1985) получил следующие оценки давления в центральной плоскости околосолнечного диска: 2×10^{-5} г/см^3 на $r = 1$ а. е. и 5×10^{-7}–2×10^{-6} г/см^3 на $r = 3$ а. е.

Возвращаясь к формуле (21*) для коэффициента $\theta_{dg}(\mathrm{Re_d})$ заметим, что выражения (21*) удобны только для монодисперсной пыли с заданным характерным линейным размером включений $\tilde{d}_d$, так как в этом случае θ_{dg} не зависит от объемной концентрации дисперсной фазы s и полной числовой плотности твердых частиц N_d. Однако при учете процессов коагуляции, происходящих в газопылевом допланетном облаке, т.е. с учетом многофракционности пылевой составляющей целесообразно переписать (21*) в виде, явно зависящем от параметров s и N_d, которые определяются уравнением Смолуховского. При использовании формулы (16), выражение (21*) для $\theta_{dg}(s, N_d, \mathrm{Re_d})$ преобразуется к виду

$$\theta_{dg} = \theta_{dg}(s, N_d, \mathrm{Re_d}) =$$
$$= \begin{cases}(4/3\pi)^{1/3}\rho_d^{-1}s^{-1/3}c_{sg}N_d^{1/3}, \text{ когда } \tilde{d}_d \ll \lambda_g,\\ (4/3\pi)^{1/3}\rho_d^{-1/3}s^{-1/3}N_d^{1/3}C_D(\mathrm{Re_d})|\mathbf{w}|,\\ \text{когда } \tilde{d}_d \gg \lambda_g.\end{cases} \quad (23)$$

Учет многофракционности пыли

Рассмотрим теперь более детально методику расчета величины $N_d(\mathbf{x}, t)$ в случае учета многофракционности пылевой составляющей системы. Реальное допланетное облако полидисперсно, т.е. в элементарном макрообъеме $\delta\mathcal{V}$ присутствуют сконденсированные частицы разных размеров $d_{d,k}$. Этот фактор можно учесть, если разбить пылевую составляющую на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется, вообще говоря, своими термогидродинамическими параметрами, т.е. вместо одной дисперсной фазы, необходимо рассматривать m фаз (где m – число фракций), каждая из которых имеет свои макрохарактеристики

$$d_{d,k},\ n_{d,k},\ s_{d,k} = n_{d,k}(\pi/6)d_{d,k}^3,$$
$$\rho_{d,k},\ \mathbf{u}_{d,k}\ldots \quad (k = 1, \ldots, m), \quad (24)$$

где $\mathbf{u}_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ – гидродинамическая скорость твердых частиц k-й фракции.

Будем далее считать, что вещество разных фракций одно и то же ($\rho_{d,1} = \rho_{d,2} = \ldots = \rho_{d,m} = \rho_d = \mathrm{const}$) и что твердофазные конденсаты фракции “1” составляют группу частиц наименьшего размера (первичные частицы), фракции “2” – группу двойных частиц и т.д. до максимального размера. Для упрощения анализа процесса коагуляции, происходящего в $(m + 1)$-фазном полидисперсном потоке, предположим также, что все твердые частицы являются сферическими или близкими к ним по форме с диаметрами Ферета $d_{d,k}$. Так как размер одинаковых по химическому составу твердых частиц после слипания возрастает пропорционально кубическому корню из количества первичных конденсатов ее составляющих ($d_{d,k} = d_{d,1}\sqrt[3]{k}$), то объемная концентрация дисперсных частиц k-й фракции определяется соотношением

$$s_{d,k} = n_{d,k}(\pi/6)d_{d,k}^3 = U_1 k n_{d,k}, \qquad (25)$$

где $n_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ – числовая плотность частиц k-й фракции (их число в единице совокупного объема газовзвеси); $U_1 = (\pi/6)d^3$, $d \equiv d_{d,1}$ – соответственно объем и диаметр одной частицы наименьшего размера. Тогда объемное содержание $s(\mathbf{x}, t)$, распределенная массовая плотность $\tilde{\rho}_d(\mathbf{x}, t)$ и гидродинамическая скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$ всего пылевого континуума выражаются в виде

$$s \equiv \sum_{k=1}^{m} s_{d,k} = U_1 \sum_{k=1}^{m} k n_{d,k},$$
$$\tilde{\rho}_d = \rho_d \sum_{k=1}^{m} s_{d,k}, \quad s\mathbf{u}_d = \sum_{k=1}^{m} s_{d,k}\mathbf{u}_{d,k}. \qquad (26)$$

В дисперсной смеси, в которой макроскопические скорости фракций отличаются друг от друга, т.е. фракции j и k движутся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{u}_{d,j} - \mathbf{u}_{d,k}$ ($j, k = 1, \dots m$), будут происходить столкновения между частицами разных фракций, что приведет к обмену массой, импульсом и энергией между фракциями. Учет этого обстоятельства, важного на последней стадии образования субдиска (когда возможно появление в потоке фракции “отраженных” от субдиска частиц, имеющих отличную от “падающих” частиц среднюю или макроскопическую скорость) и на этапе образования планетезималей (после развала субдиска), сильно усложнит задачу моделирования эволюции допланетного газопылевого облака (см. Колесниченко, 2001). В данной работе мы, однако, будем предполагать, что частицы вещества (“псевдомолекулы”), принадлежащие к различным пылевым континуумам (фракциям), двигаются с одной и той же гидродинамической скоростью, $\mathbf{u}_{d,k} \equiv \mathbf{u}_d$ ($k = 1, \dots, m$).

Выше уже упоминалось, что в процессе аккумуляции крупных твердых частиц в газопылевом облаке основными механизмами формирования их размеров являются процессы дробления и коагуляции. Механизм дробления сталкивающихся твердых тел основательно изучен (см., например, Стернин, Шрайбер, 1994) и при необходимости может быть учтен; поэтому далее, для того чтобы не перегружать деталями задачу моделирования эволюции диска, распад частиц рассматриваться не будет. В этом случае изменение числовой плотности $n_{d,k}$ фракции k может произойти только в результате уменьшения числа частиц этой фракции при соединении их с другими пылевыми частицами, а также в результате увеличения количества частиц этой фракции в результате слипания более мелких конденсатов. Тогда система кинетических уравнений, описывающая процесс коагуляции, может быть записана в виде (Смолуховский, 1936)

$$\mathring{n}_{d,k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - \sum_{j=1}^{m} K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \qquad (27)$$

где $\mathring{n}_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ – полная скорость изменения концентрации $n_{d,k}(\mathbf{x}, t)$ пылевых частиц k-й фракции за счет процессов коагуляции; $K_{kj}(d_k, d_j)$ – коэффициент (ядро) коагуляции для частиц k-го и j-го размеров, характеризующий эффективность коагуляционного взаимодействия, определяется как среднее число столкновений частиц размера d_k с частицами размера d_j в единице объема в единицу времени при единичной концентрации того и другого сорта. Поскольку подобное взаимодействие двух разновеликих частиц в потоке усложнено влиянием окружающей среды, характером взаимодействия в ламинарном или турбулентном потоке, а также силовыми полями (гравитацией, электромагнитным полем, молекулярным взаимодействием), то определение ядра коагуляции представляет самостоятельную сложную задачу (см., например, Волощук, 1984; Мазин, 1971). В работе (Колесниченко, 2001) проанализированы различные механизмы коагуляции[20] применительно к турбулизованному газопылевому облаку и приведены соответствующие выражения для коэффициентов K_{kj}. С использованием (27), система мгновенных уравнения сохранения числа частиц k-й фракции пылевой фазы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathring{n}_{d,k} + \nabla \cdot (n_{d,k}\mathbf{u}_d) = n_{d,k} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - n_{d,k}\sum_{j=1}^{m} K_{kj} n_{d,j}, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \qquad (28)$$

Из (28) следует балансовое уравнение для полного числа $N'_d = \sum_k n_{d,k}$ дисперсных частиц в еди-

[20] Коагуляция частиц в газопылевом потоке может быть вызвана одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц. Это, прежде всего, гравитационная коагуляция, электрическая коагуляция, броуновская коагуляция, турбулентная коагуляция и различные их сочетания типа турбулентно-броуновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, броуновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т.п.

нице совокупного объема газовзвеси, определяемого только процессами коагуляции (см. (15))

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N'_{\mathrm{d}}}{\rho}\right)+\nabla\cdot(N'_{\mathrm{d}}\mathbf{w}_{\mathrm{d}}) = \sum_k \overset{\circ}{n}_{\mathrm{d},k} = \tag{29}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}\sum_{j=1}K_{kj}n_{\mathrm{d},k}n_{\mathrm{d},j},$$

причем правая часть (29) равна половине второго члена в правой части уравнения (28), поскольку увеличения общего числа пылевых частиц в единице объема во время коагуляции не происходит. В пространственно-однородном случае, когда все константы коагуляции приблизительно одинаковы $K_{kj} = K$, уравнение (29) $\partial N'_{\mathrm{d}}\partial t = -(K/2)N'^2_{\mathrm{d}}$ (с начальным условием $N'_{\mathrm{d}}(0) = N'_{\mathrm{d}0}$) имеет простое решение $N'_{\mathrm{d}}(t) = N'_{\mathrm{d}0}/(1+qt)$, где $q = KN'_{\mathrm{d}0}/2$, которое позволяет определить (по наклону прямой) константу коагуляции K экспериментально.

Заметим, что суммирование левых и правых частей уравнений системы (28) по k, предварительно умноженных на массу отдельной пылевой частицы k-й фракции $M_{\mathrm{d},k} = \rho_{\mathrm{d}}U_1k$, приводит, с учетом закона сохранения полной массы пылевых частиц в процессе коагуляции $\sum_k M_{\mathrm{d},k}\overset{\circ}{n}_{\mathrm{d},k} = 0$, к уравнению (14*), позволяющему рассчитать полную объемную концентрацию пыли s в двухфазном полидисперсном потоке.

Важно также иметь в виду, что количество нелинейных дифференциальных уравнений (28), требуемых для описания пространственно-временного распределения всей совокупности размеров пылевых частиц в диске, в общем случае неограниченно. Вместе с тем при численном моделировании процессов коагуляции на основе системы (28) приходится использовать конечное (m) число уравнений. При этом, конечно, возможна “потеря материала”, поскольку некоторое количество частиц может коагулировать до размеров, превышающих наибольший из учитываемых при таком подходе размеров $d_{\mathrm{d},m}$. В связи с этим для наших целей более предпочтительной является другая, интегральная форма записи системы уравнений коагуляции (28).

Для получения этой формы предположим, что число частиц с объемом от U до $U + \mathrm{d}U$, находящихся в момент времени t в элементарном объеме в окрестности точки $\mathbf{x}$, равно $f(U, \mathbf{x}, t)\mathrm{d}U$. Функция $f(U, \mathbf{x}, t)$, характеризующая спектр размеров частиц, по определению удовлетворяет следующему нормировочному соотношению

$$N_{\mathrm{d}}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty f(U, \mathbf{x}, t)\mathrm{d}U. \tag{30}$$

Очевидно, что формулой

$$s(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty Uf(\mathbf{x}, t, U)\mathrm{d}U \tag{31}$$

определяется суммарная объемная концентрация пылевых частиц. Поскольку объем частиц k-го размера равен kU_1, то числовая плотность $n_{\mathrm{d},k}$ частиц k может быть выражена через $f(\mathbf{x}, t, U)$ следующим образом:

$$n_{\mathrm{d},k} = f(kU_1, \mathbf{x}, t)U_1. \tag{32}$$

Если воспользоваться этим соотношением, то после операции $U_1 \longrightarrow \mathrm{d}U$ из (28) можно получить следующее кинетическое уравнение коагуляции

$$\frac{\partial f(U, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla\cdot[f(U, \mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{\mathrm{d}}] \equiv$$
$$\equiv \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(U, \mathbf{x}, t)}{\rho}\right) + \nabla\cdot[f(U, \mathbf{x}, t)\mathbf{w}_{\mathrm{d}}] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^U f(W, \mathbf{x}, t)f(U-W, \mathbf{x}, t)K(W, U-W)\mathrm{d}W - \tag{33}$$
$$- f(U, \mathbf{x}, t)\int_0^\infty f(W, \mathbf{x}, t)K(W, U)\mathrm{d}W,$$

являющееся обобщением на случай пространственно-неоднородных движений газовзвеси известного уравнения Мюллера для описания коагулирующей дисперсной среды (см., например, Волощук, 1984). Здесь $K(W, U)$ – симметричное по аргументам ядро коагуляции, определяющее поведение диспергированной смеси во времени. Для решения этого уравнения необходимо потребовать выполнения соглашений $f(U, \mathbf{x}, t) \longrightarrow 0$ при $U \longrightarrow 0$ и $U \longrightarrow \infty$, а также задать начальное условие $f(U, \mathbf{x}, 0) = f_0(U, \mathbf{x})$ и граничные условия.

Кинетическое уравнение (33) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого в общем случае можно получить только численными методами, поскольку члены, описывающие конвекцию пылевых частиц, к сожалению, чрезвычайно усложняют стандартное уравнение коагуляции (см., например, Lissauer, Stewart, 1993). В литературе известен ряд точных аналитических решений нестационарного пространственно-однородного аналога уравнения (33) для некоторых простых по структуре ядер коагуляции (линейных по каждому из аргументов в отдельности), основанных на применении интегрального преобразования Лапласа (см., например, Сафронов, 1969; Волощук, 1984). В связи с этим следует отметить следующее. Наиболее теоретически продвинутыми к настоящему времени являются исследования процессов коагуляции для ядер $K(W, U) = \Lambda_0$, не зависящих от объемов коагулирующих частиц. Решение уравнения коагуляции с ядром $K(W, U) = \Lambda_1 WU$ вряд ли можно считать физически реализуемым, поскольку оно не обладает свойствами непрерывности во времени (начиная с некоторого времени число частиц в системе становится отрицательным (Волощук, 1984)). Аналитическое решение кинетического уравнения с ядром, пропорциональным сумме объемов коагулирующих частиц $K(W, U) = \Lambda_2(W + U)$, было получено Сафроновым (1969) в связи с исследованиями эволюции допланетного газопылевого облака. Однако до сих пор не найдено ни одной дисперсной системы, для которой микрофизика коагуляционного процесса в точности приводила бы к ядрам подобного типа.

Вместе с тем при гидродинамическом моделировании газопылевого диска часто не требуется полного знания функции распределения частиц по размерам, а достаточно лишь информации о поведении во времени и в пространстве ее нескольких первых моментов типа $N_d(\mathbf{x}, t)$, $s(\mathbf{x}, t)$ и т.п. В этом случае можно воспользоваться одним из возможных приближенных методов решения кинетического уравнения коагуляции, в частности, методом моментов. В Приложении А проиллюстрированы возможности этого метода на примере решения кинетического уравнения коагуляции (33) для случая, когда распределение частиц по размерам зависит от одной пространственной координаты z, что соответствует установившемуся режиму движения пыли, при осаждении твердых частиц под действием силы тяжести в субдиск.

Сохранение полного количества движения

При моделировании допланетного облака приходится решать уравнения радиационной гидродинамики для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные термогидродинамические и радиационные параметры газопылевой дисковой среды. При линейном размере совокупного элементарного объема $\delta\mathcal{V}$, значительно большего длины пробега излучения λ_{rad}, пренебрегать энергией и давлением излучения нельзя. Довольно очевидно, что в случае локального равновесия излучения с веществом, когда плотность энергии излучения $E_{rad} = aT^4/\rho$ (на единицу массы), а давление излучения

$$p_{rad} = \frac{\rho E_{rad}}{3} = \frac{1}{3}aT^4, \tag{34}$$

в уравнениях гетерогенной механики следует везде к внутренней энергии $E(\mathbf{x}, t)$ и тепловому давлению $p(\mathbf{x}, t)$ вещества добавлять энергию и давление излучения, а также вводить в рассмотрение процесс лучистой теплопроводности. Здесь $a = 4\sigma/c$, σ, c – соответственно постоянная плотности излучения, постоянная Стефана–Больцмана и скорость света.

Мгновенное уравнение сохранения полного количества движения газопылевого вещества можно получить, например, суммируя уравнения движения отдельных фаз (17*). В результате дифференциальное уравнение сохранения импульса дисковой среды в целом (с учетом поля излучения), зависящее, в отличие от уравнения неразрывности (13), от относительного движения фаз, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \\ = -\nabla p_{sum} + \nabla\cdot\mathbf{\Pi}^*_{sum} + \rho\mathbf{g}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\nabla\cdot(\mathbf{ab}) \equiv \sum_k\sum_l \mathbf{i}_l\frac{\partial(a_k b_1)}{\partial x_k}$ – дивергенция диадика $\mathbf{ab} = \sum_k\sum_l \mathbf{i}_l\mathbf{i}_k(a_k b_1)$ (см. Приложение); $p_{sum}(\mathbf{x}, t)$ – полное давление, равное сумме теплового давления газопылевой смеси и давления излучения, $p_{sum} = p + p_{rad}$;

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^*_{sum} \equiv \mathbf{\Pi}_{sum} + \mathbf{\Pi}_{rel} = \mathbf{\Pi}_g + \mathbf{\Pi}_{rad} - \\ -(1-s)\rho_g\mathbf{w}_g\mathbf{w}_g - s\rho_d\mathbf{w}_d\mathbf{w}_d; \end{aligned} \tag{36}$$

$\mathbf{\Pi}_{sum}(\mathbf{x}, t)$ – суммарный тензор вязких напряжений[21], равный сумме тензора вязких напряжений для гетерогенной смеси $\mathbf{\Pi} = \sum_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha \cong \mathbf{\Pi}_g$ (т.к. по предположению $\mathbf{\Pi}_d \cong 0$) и тензора лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rad}$; $\mathbf{\Pi}_\alpha$ – тензор вязких напряжений фазы α, зависящий от тензора скоростей деформаций, определяемого полем скоростей соответствующей фазы;

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{rel} \equiv -\sum_\alpha \tilde{\rho}_\alpha\mathbf{w}_\alpha\mathbf{w}_\alpha = \\ = -(1-s)\rho_g\mathbf{w}_g\mathbf{w}_g - s\rho_d\mathbf{w}_d\mathbf{w}_d \end{aligned} \tag{37}$$

[21] Тензор вязких напряжений представляет собой тензор второго ранга или диадик (см. Приложение В).

– тензор “относительных” напряжений[22], возникающий из-за динамических эффектов относительного движения твердых частиц и газа (см, например, Колесниченко, Максимов, 2001)); $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\Psi$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\mathbf{x}, t)$ – ньютоновский гравитационный потенциал. Когда масса газопылевого облака составляет несколько процентов от массы центрального тела или точнее, когда $\mathcal{M}_{\text{disk}}/\mathcal{M}_\odot \le h_{\text{disk}}/R$, где h_{disk} и R полутолщина и радиус диска соответственно (см., например, Hersant и др., 2004), можно пренебречь самогравитацией частиц диска; в этом случае будем иметь

$$\Psi = \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{g} = -\nabla\Psi = \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \tag{38}$$

где $\mathcal{M}_\odot$ – масса центрального тела (звезды); G – гравитационная постоянная; $|\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – центральный радиус-вектор, $\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{i}_k x_k$; центр масс протозвезды здесь и далее принят за начало системы отсчета. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны,

$$\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\mathbf{r}| + \Psi_{\text{cr}} \tag{38*}$$

и потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla 2\Psi_{\text{cr}} = 4\pi G\rho$, где $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа.

Тензор относительных напряжений $\mathbf{\Pi}_{\text{rel}}$ для газопылевого диска можно записать в нескольких эквивалентных формах, удобных при написании модельных уравнений движения в различных системах координат. Используя (6) и (12), будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{\text{rel}} &\equiv -(1-s)\rho_{\text{g}}\mathbf{w}_{\text{g}}\mathbf{w}_{\text{g}} - s\rho_{\text{d}}\mathbf{w}_{\text{d}}\mathbf{w}_{\text{d}} = \\ &= -(1-s)\rho_{\text{g}}\mathbf{u}_{\text{g}}\mathbf{u}_{\text{g}} - s\rho_{\text{d}}\mathbf{u}_{\text{d}}\mathbf{u}_{\text{d}} + \rho\mathbf{u}\mathbf{u} = \\ &= -s\rho_{\text{d}}C_{\text{g}}\mathbf{w}\mathbf{w} = \\ &= -s\rho_{\text{d}}C_{\text{g}}(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 w_1 w_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 w_1 w_2 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 w_1 w_3 + \\ &\quad + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 w_2 w_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 w_2 w_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 w_2 w_3 + \\ &\quad + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 w_3 w_1 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 w_3 w_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 w_3 w_3).\end{aligned} \tag{39}$$

[22] В гетерогенных средах осложняются законы, описывающие относительное движение фаз, ибо это движение определяется не диффузионным механизмом (столкновение молекул при их хаотическом движении), а процессами взаимодействия фаз как макроскопических систем. Эти процессы описываются с помощью сил и более последовательного учета инерции фаз. Наличие тензора относительных напряжений в суммарном уравнении движения смеси приводит к кардинальному отличию гетерогенной механики от механики многокомпонентной, для которой возможно пренебрежение членами, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha$ (так называемое диффузионное приближение в механике смесей).

Важно отметить, что при моделировании динамики допланетного облака эти дополнительные напряжения должны приниматься во внимание, когда в нем присутствуют фракции относительно крупных твердых частиц (≥1 мм), поскольку в этом случае имеется существенная разница скоростей между фазами, т.е. скорость относительного движения фаз $\mathbf{w}$ по порядку величины может быть равной гидродинамической скорости суммарного континуума $\mathbf{u}$. Вместе с тем для очень мелких частиц ($\ll$1 мм, при числе Стокса Stk $\ll 1$; см. формулу (100)), когда частицы успевают реагировать на изменение параметров несущей среды, может быть использовано приближение пассивной примеси[23] – двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной (в общем случае многокомпонентной) среды с определенными эффективными теплофизическими свойствами (плотностью, газовой постоянной, теплоемкостью, и т.п) (см. Колесниченко, 2000). Далее мы будем пользоваться, в основном, представлением тензора $\mathbf{\Pi}_{\text{rel}}$ через вектор скорости относительного движения фаз $\mathbf{w} \equiv \mathbf{u}_{\text{d}} - \mathbf{u}_{\text{g}}$.

Известно (см, например, Тассуль, 1982), что тензор лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{\text{rad}}$ по своей структуре похож на тензор вязких напряжений для вещества $\mathbf{\Pi}$, поэтому можно написать[24],

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{\text{sum}} &= (\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_{\text{rad}}) \cong 2(\mu_{\text{g}} + \mu_{\text{rad}})\mathring{\mathbf{D}} + \\ &\quad + (\xi_{\text{g}} + 5/3\mu_{\text{rad}})(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \\ \mathring{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} - 1/3\mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{u},\end{aligned} \tag{40}$$

где $\mathring{\mathbf{D}}$ – тензор скоростей деформаций; $\mathbf{D} = 1/2(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\text{transp}})$ – тензор деформаций; $\mathbf{I}$ – единичный тензор (или единичный диадик $\mathbf{I} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$); $\mu_{\text{g}}(\rho, T)$, $\xi_{\text{g}}(\rho, T)$ – соответственно молекулярные коэффициенты динамической и объемной вязкости газа; $\mu_{\text{rad}} = 4aT^4/15c\tilde{\kappa}\rho$ – коэффициент лучис-

[23] В другом крайнем случае (при Stk $\gg 1$), когда крупные твердые частицы в дисковой системе не изменяют своего состояния в соответствии с изменениями параметров газа, также можно рассматривать однофазное течение, но уже чистого газа, причем обратное влияние крупных тел может быть учтено путем введения распределенных источников сопротивления. Наконец, в случае, когда $C_{\text{d}} \ll 1$, присутствие редких частиц газопылевой смеси не влияет на параметры течения газа и поэтому можно воспользоваться приближением единичной частицы; здесь вначале решаются уравнения движения газа, а затем по известным его параметрам определяются траектории частиц и изменение их состояния вдоль траекторий (см., например, Garaud и др., 2005).

[24] Если учитывать взаимодействие между веществом и излучением до членов самого низкого порядка по $|\mathbf{u}|/c$, то в компоненты $(\mathbf{\Pi}_{\text{rad}})_{ik}$ тензора лучистых касательных напряжений входят и следующие члены: $-c^{-2}(u_i(\mathbf{q}_{\text{rad}})_k + u_k(\mathbf{q}_{\text{rad}})_i + \delta_{ik}u_s(\mathbf{q}_{\text{rad}})_s)$, где $\mathbf{q}_{\text{rad}}$ – вектор лучистого потока тепла, определенный формулой (48) (см., например, Hazlehurst, Sargent, 1959).

той вязкости; $\tilde{\kappa}$ – полная непрозрачность среды (осредненная по Росселанду), которая, в свою очередь, также зависит от ρ, s, N_d, T и химического состава газа (см. формулы (72) и (73)).

Сохранение внутренней энергии

Мгновенное уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) для гетерогенной газопылевой среды в целом, с учетом сделанных выше предположений, может быть записано в виде (Колесниченко, Максимов, 2001)

$$\rho\frac{d}{dt}(E_{sum}) = -\nabla\cdot\mathbf{q}_{sum} - p_{sum}\nabla\cdot\mathbf{u} + \Phi_u + \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha. \tag{41}$$

Здесь $\mathbf{K}_\alpha \cong -\frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \mathbf{F}_\alpha - \frac{1}{2\tilde{\rho}_\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\mathbf{w}_{\alpha\beta}$ – обобщенная термодинамическая сила диффузии, включающая "инерционное слагаемое" и слагаемое, обязанное фазовым переходам (см. (18)); $E_{sum} = E + E_{rad}$ – полная внутренняя энергия дисковой системы (вещество плюс излучение) на единицу массы; $E(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_\alpha C_\alpha e_\alpha$ – внутренняя энергия вещества[25]; $e_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $h_\alpha(\mathbf{x}, t)$ $(=e_\alpha + p/\rho_\alpha)$ – соответственно парциальная внутренняя энергия и энтальпия (на единицу массы) вещества α-фазы; E_{rad} – плотность энергии излучения (на единицу массы), определяемая законом Стефана–Больцмана $E_{rad} = aT^4/\rho$; $\mathbf{q}_{sum} = \mathbf{q} + \mathbf{q}_{rad}$ – плотность полного потока энергии в системе; $\mathbf{q}_{rad}$ – удельный поток энергии, переносимой излучением[26]; $\mathbf{q}$ – удельный поток энергии, связанный с тепловым движением частиц фазового вещества (т.е. определяемый теплопроводностью) и с переносом парциальных энтальпий потоками фазовой диффузии; $\Phi_u \cong \mathbf{\Pi}_{sum} : \nabla\mathbf{u}$ – диссипативная функция, представляющая собой скорость, с которой теплота порождается вязким трением газа в единичном объеме в единицу времени. При написании (41) мы воспользовались предположением об аддитивности термодинамических функций (внутренней энергии, энтальпии и т.п.) по массам входящих в гетерогенную систему фаз, что допустимо только в случае пренебрежения вкладом в термодинамические функции от приповерхностного (кнудсеновского) слоя твердых частиц.

[25] Отметим, что введенная нами в рассмотрение внутренняя энергия газопылевой смеси в целом является истинной внутренней энергией смеси, поскольку не содержит вклада от кинетической энергии межфазной диффузии.

[26] Перенос энергии излучением должен учитываться всегда, поскольку он велик даже при малой плотности энергии излучения (из-за большой скорости фотонов).

Последнее слагаемое в уравнении (41), с учетом (17) и (18), может быть переписано в виде $\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha\cdot(-\mathbf{d}_\alpha + s_\alpha\nabla p)$, где $\mathbf{d}_g = -\mathbf{d}_d = R_{gd}\mathbf{w}$ (без учета термофореза). Тогда для дополнительного источника тепла, связанного с диссипацией кинетической энергии диффузии, будем иметь (аналог джоулева нагрева для плазмы)

$$\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha = -C_d\mathbf{w}\cdot(-\mathbf{d}_g + s_g\nabla p) + C_g\mathbf{w}\cdot(-\mathbf{d}_d + s_d\nabla p) = R_{gd}|\mathbf{w}|^2 = s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p,$$

поскольку $s^2 \ll 1$. Здесь $\sigma = (\rho_d - \rho_g)/\rho$ – относительное превышение плотности пылевых частиц над плотностью газа; для малых твердых частиц $s\sigma \ll 1$, и последним слагаемым в этом соотношении можно пренебречь.

Важно отметить, что в уравнении притока тепла (41) фигурирует истинная внутренняя энергия газопылевой среды E на единицу массы, которая определена путем вычитания из полной энергии U_{tot} вещества дисковой системы потенциальной и кинетической энергий всех фаз (Колесниченко, Максимов, 2001)

$$\begin{aligned} E &= U_{tot} - \sum_\alpha C_\alpha\psi_\alpha - \sum_\alpha \frac{1}{2}C_\alpha|\mathbf{u}_\alpha|^2 = \\ &= U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 - \sum_\alpha C_\alpha\frac{1}{2}|\mathbf{w}_\alpha|^2 = \\ &= U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 - C_dC_g|\mathbf{w}|^2/2. \end{aligned} \tag{42}$$

Вместе с тем, если определить внутреннюю энергию газопылевой системы соотношением $E^* = U_{tot} = \Psi = 1/2|\mathbf{u}|^2$, то она будет включать в себя и макроскопическую кинетическую энергию фаз в системе центра масс, т.е. $E^* = E + C_dC_g|\mathbf{w}|^2/2$. Если теперь записать уравнение (41) через переопределенную таким образом внутреннюю энергию E^*, то оно примет более привычный вид, т.е. не будет содержать слагаемых $R_{gd}|\mathbf{w}|^2 = s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p$. Действительно, балансовое уравнение для кинетической энергии межфазной диффузии, с учетом (19*) и векторного преобразования $(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c} = \mathbf{ab} : \nabla\mathbf{c})$, может быть записано в виде

$$\rho\frac{d}{dt}(C_dC_g|\mathbf{w}|^2/2) \approx \rho C_dC_g\frac{d}{dt}(|\mathbf{w}|^2/2) \cong -R_{gd}|\mathbf{w}|^2 + \mathbf{\Pi}_{rel} : \nabla\mathbf{u} + s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p, \tag{43}$$

поскольку, с точностью до членов второго порядка относительно $\mathbf{w}$, имеем

$$\rho\frac{d}{dt}(C_dC_g|\mathbf{w}|^2/2) = \rho C_dC_g\frac{d}{dt}(|\mathbf{w}|^2/2) +$$

$$+ (|\mathbf{w}|^2/2)\left\{C_\mathrm{d}\rho\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} + C_\mathrm{g}\rho\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\} =$$

$$= \rho C_\mathrm{d}C_\mathrm{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\mathbf{w}|^2/2)(C_\mathrm{d} - C_\mathrm{g})\nabla\cdot(\rho C_\mathrm{g}C_\mathrm{d}\mathbf{w}) \approx$$

$$\approx \rho C_\mathrm{d}C_\mathrm{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\mathbf{w}|^2/2).$$

И все-таки используемая нами в уравнении притока тепла (41) величина E, по-видимому, более заслуживает наименования внутренней энергии, чем величина E^*, поскольку внутренняя энергия должна содержать только вклад от теплового движения и короткодействующих молекулярных взаимодействий и не содержать каких-либо макроскопических слагаемых (см. Де Гроот, Мазур, 1964).

Другие формы записи энергетического уравнения для газовзвеси. Далее нам потребуются энергетические уравнения, записанные в несколько других формах. Введем суммарную энтальпию $H_\mathrm{sum} = H + H_\mathrm{rad}$ вещества и излучения в диске, где

$$\begin{cases} H \equiv \sum\limits_\alpha C_\alpha h_\alpha = \sum\limits_\alpha C_\alpha(e_\alpha + p/\rho_\alpha) = E + p/\rho, \\ H_\mathrm{rad} = E_\mathrm{rad} + p_\mathrm{rad}/\rho = 4/3aT^4/\rho, \\ H_\mathrm{sum} = E_\mathrm{sum} + p_\mathrm{sum}/\rho. \end{cases} \tag{44}$$

Тогда, с учетом выражения (42) и преобразования $\rho\mathrm{d}E_\mathrm{sum}/\mathrm{d}t + p_\mathrm{sum}\nabla\cdot\mathbf{u} = \rho\mathrm{d}H_\mathrm{sum}/\mathrm{d}t - \mathrm{d}p_\mathrm{sum}/\mathrm{d}t$, являющегося следствием определений (44) и уравнения неразрывности смеси (13), будем иметь

$$\rho\frac{\mathrm{d}H_\mathrm{sum}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{sum}}{\mathrm{d}t} - \nabla\cdot\mathbf{q}_\mathrm{sum} + \\ + \Phi_u + R_\mathrm{gd}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p. \tag{45}$$

Это уравнение соответствует первому закону термодинамики (т.е. закону сохранения тепловой энергии).

Перепишем теперь уравнение (45) в переменных $T(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$. Для большинства целей, относящихся к рассматриваемой нами проблеме моделирования эволюции аккреционного диска, достаточно будет аппроксимировать парциальные энтальпии газа и пыли (на единицу массы) с помощью выражений: $h_\mathrm{g} = c_{\mathrm{Pg}}T + h_\mathrm{g}^0$, $h_\mathrm{d} = c_{\mathrm{Pd}}T + h_\mathrm{g}^0$, где h_α^0 – энтальпия фазы α при нулевой температуре (так называемая теплота образования); $c_{\mathrm{P}\alpha}$ – удельная теплоемкость (при постоянном давлении) фазы α. Теплофизические величины $c_{\mathrm{P}\alpha}$ и h_α^0 будем далее считать постоянными, аппроксимирующими реальные дисковые теплоемкости $c_{\mathrm{P}\alpha}(T)$ и парциальные теплоты образования $h_\alpha^0(T)$ в ограниченном температурном интервале. Тогда можно написать

$$H = c_\mathrm{P}T + \sum_\alpha C_\alpha h_\alpha^0, \\ H_\mathrm{rad} = E_\mathrm{rad} + p_\mathrm{rad}/\rho = 4/3aT^4/\rho, \tag{46}$$

где $c_\mathrm{P} = \sum_\alpha c_{\mathrm{P}\alpha}C_\alpha = \rho^{-1}\{\rho_\mathrm{g}(1-s)c_{\mathrm{Pg}} + s\rho_\mathrm{d}c_\mathrm{d}\}$ – полная удельная теплоемкость системы “газ-твердые частицы” при постоянном давлении. Используя теперь выражения (46), а также уравнения (9), (12), (13), получим

$$\rho\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \equiv \rho\sum_\alpha C_\alpha\frac{\mathrm{d}h_\alpha}{\mathrm{d}t} + \rho\sum_\alpha h_\alpha\frac{\mathrm{d}C_\alpha}{\mathrm{d}t} = \\ = \rho c_\mathrm{P}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \sum_\alpha h_\alpha(-\nabla\cdot J_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) = \\ = \rho c_\mathrm{P}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \nabla\cdot\left[\sum_\alpha h_\alpha\mathbf{J}_\alpha\right] + \\ + \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho\xi_\rho + \nabla T\cdot\left[\sum_\alpha c_{\mathrm{P}\alpha}\mathbf{J}_\alpha\right], \tag{47}$$

где соотношением $q_\rho \equiv \sum_\alpha h_\alpha\nu_{\alpha,\rho} = q_\rho^0 + \sum_\alpha c_{\mathrm{P}\alpha}\nu_{\alpha,\rho}$ введена так называемая теплота реакции ρ, равная разности произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагентов ($\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum_{k=1}^{N} M_{(k)}\nu_{\alpha(k),\rho}$); заметим, что величина $q_\rho^0 = \sum_\alpha h_\alpha^0\nu_{\alpha,\rho}$ может интерпретироваться как теплота фазового перехода ρ при нулевой температуре. Последнее слагаемое в правой части (47) представляет собой эффект так называемых “диффундирующих теплоемкостей”, который мал и потому его, как правило, не учитывают.

Полный поток энергии $\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_\alpha h_\alpha\mathbf{J}_\alpha$, связанный с тепловым движением частиц вещества в гетерогенном континууме[27], согласно (Колесни-

[27] Напомним, что для диффундирующих смесей можно дать различные определения потока тепла, причем каждому определению потока тепла соответствует своя специфическая форма выражения для производства энтропии $\sigma_{(S)}$; выбор в каждом конкретном случае зависит от удобства рассмотрения проблемы.

ченко, Максимов, 2001) может быть записан в традиционном виде[28]

$$\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_\alpha h_\alpha \mathbf{J}_\alpha \equiv \mathbf{q} - \rho C_g C_d (h_d - h_g)\mathbf{w} = -\chi_g \nabla T,$$

или

$$q = \sum_\alpha h_\alpha \mathbf{J}_\alpha - \chi_g \nabla T, \tag{48}$$

обобщающем на гетерогенные среды аналогичное соотношение для многокомпонентных гомогенных смесей (см. Гиршфельдер и др., 1961). Подобным же образом, если исключить из рассмотрения области диска близкие к поверхности протозвезды, можно записать для вектора лучистого потока тепла закон теплопроводности

$$\mathbf{q}_{rad} = -\chi_{rad} \nabla T. \tag{48*}$$

Здесь χ_g – молекулярный коэффициент теплопроводности газа, $\chi_{rad} = 4acT^3/(3\tilde{\kappa}\rho)$ – коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества (см. формулу (71)).

Подставляя (47), (48) и (48*) в уравнение (44), окончательно найдем

$$\begin{aligned}\rho c_{P,\,sum}\frac{dT}{dt} &= \frac{dp_g}{dt} + \nabla\cdot(\chi_{sum}\nabla T) - 4p_{rad}\nabla\cdot\mathbf{u} + \\ &+ \Phi_u + R_{gd}\mathbf{w}^2 - s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p_g - \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho \xi_\rho,\end{aligned} \tag{49}$$

где введены обозначения $\chi_{sum} = \chi_g + \chi_{rad}$ и $c_{P,\,sum} = c_P + 16aT^3/3\rho$.

Наконец, получим балансовое уравнение для удельной энтропии $S = \sum_\alpha C_\alpha S_\alpha$ суммарного континуума, моделирующего газопылевую среду диска в целом, которое обычно называют общим уравнением переноса тепла (здесь S_α – энтропия единицы массы α-фазы). Воспользуемся для этого фундаментальным соотношением Гиббса (см., например, Пригожин, Дефей, 1966) для однотемпературного гетерогенного многокомпонентного радиационного континуума в однодавленческом приближении, которое, будучи записанным вдоль траектории движения центра масс элементарного объема $\delta\mathcal{V}$, принимает вид (Колесниченко, Максимов, 2001)

$$\begin{aligned}T\frac{dS_{sum}}{dt} &= \frac{dE_{sum}}{dt} + p_{sum}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \\ &- \sum_\alpha \sum_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} \frac{d}{dt}\left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho}\right),\end{aligned} \tag{50}$$

где $\mu_{\alpha(k)}$ – химический потенциал k-й компоненты в α-фазе. С помощью уравнений (9), (13) и (41) соотношению Гиббса (50) можно придать вид уравнения баланса

$$\rho\frac{dS_{sum}}{dt} + \nabla\cdot\left\{\frac{1}{T}\left(\mathbf{q}_{sum} - \sum_\alpha G_\alpha \mathbf{J}_\alpha\right)\right\} = \sigma_{(S)}, \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned}0 \le T\sigma_{(S)} &= -(\mathbf{J}_q + \mathbf{q}_{rad})\frac{\nabla T}{T} - \sum_\alpha \mathbf{w}_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha + \\ &+ \mathbf{\Pi}_{sum} : \nabla\mathbf{u} + \sum_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha : \nabla\mathbf{w}_\alpha + \sum_{\rho=1}^{r} A_\rho \xi_\rho\end{aligned} \tag{52}$$

– рассеяние энергии в необратимых процессах, являющееся локальной мерой неравновесности системы; $G_\alpha = \rho_\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{n} n_{\alpha(k)} = e_\alpha + p/\rho_\alpha - TS_\alpha$ – свободная энергия Гиббса элементарной макрочастицы α-фазы;

$$A_\rho \equiv -\sum_{\alpha=1} \sum_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} \nu_{\alpha(k),\,\rho} \tag{53}$$

– химическое сродство ρ-й реакции, протекающей, в общем случае, между компонентами, находящимися в разных фазах.

Отметим, что конкретное представление скорости производства энтропии ($T\sigma_{(S)}$) в виде билинейной формы используется в неравновесной термодинамике для установления методом Онзагера определяющих соотношений, линейно связывающих между собой термодинамические потоки и сопряженные им термодинамические силы в рассматриваемом необратимом процессе. В частности, именно таким образом были выведены в работе (Колесниченко, Максимов, 2001) обобщенные соотношения Стефана–Максвелла (17) для гетерогенных сред.

Термодинамическое уравнение состояния

В качестве термического состояния многокомпонентной газовой фазы диска (уравнения для дав-

[28] В (48) мы пренебрегли термофоретическим эффектом, $k_{P\alpha} = 0$.

ления) будем использовать далее бароклинное уравнение состояния для смеси совершенных газов

$$p_g = \sum_{(k)} p_{(k)} = k_B T \sum_k n_{g(k)} = \rho_g \mathcal{R}_g T, \qquad (54)$$

где $\mathcal{R}_g = k_B \sum_k n_{g(k)}/\rho_g = k_B/\mathcal{M}_g$; $\mathcal{M}_g$ – средняя молекулярная масса частиц газовой составляющей, которая далее считается постоянной.

Используя исходное предположение о равенстве парциальных давлений в фазах $p_g = p_d = p$, запишем уравнение состояния вещества диска в виде

$$\begin{gathered} p = \rho\mathcal{R}T, \quad \mathcal{R}(C_g, s) = \mathcal{R}_g\rho_g/\rho = \\ = \mathcal{R}_g C_g/(1-s) \cong \mathcal{R}_g C_g \end{gathered} \qquad (55)$$

(заметим, что в рассматриваемом здесь случае величина $\mathcal{R}$ не является константой). Приближенное равенство в формуле (55) имеет место для случая газовзвеси с малым объемным содержанием конденсированной фазы (т.е. когда $s \ll 1$, что в данной работе предполагается; тем не менее и в этом случае динамическое воздействие твердых частиц на газовый поток может оказаться существенным из-за огромного влияния силы гравитации). Таким образом, газопылевая дисковая среда в целом может рассматриваться как совершенный газ с показателем адиабаты γ и скоростью звука c_s, определяемыми соотношениями

$$\begin{gathered} \gamma \equiv \frac{c_P}{c_P - \mathcal{R}} \cong \frac{\rho_g c_{Pg} + s\rho_d c_{Pd}}{\rho_g(c_{Pg} - \mathcal{R}_g) + s\rho_d c_{Pd}}, \\ 1 \le \gamma \le \gamma_g \equiv \frac{c_{Pg}}{c_{Pg} - \mathcal{R}_g}, \end{gathered} \qquad (56)$$

$$\begin{gathered} c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma\mathcal{R}T \cong c_{sg}^2\frac{\gamma\rho_g}{\gamma_g\rho}, \\ c_s < c_{sg} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_g}\right)_{S_g} = (\gamma_g\mathcal{R}_g T)^{1/2}, \end{gathered} \qquad (57)$$

где γ_g и c_{sg} – показатель адиабаты и изотермическая скорость звука в чистом газе. Для газа солнечного состава, состоящего на 98% из водорода и гелия, показатель адиабаты $\gamma_g = 1.45$, а средняя молекулярная масса $\mathcal{M}_g = 2.39$.

Радиационные процессы

Лучистый теплообмен оказывает определяющее влияние на состояние и движение турбулизованного высокотемпературного допланетного облака. Между тем, взаимодействие лучистого теплообмена и турбулентности почти не исследовано, вследствие чего до последнего времени оно не учитывалось в литературе и при моделировании эволюции газопылевого диска. Так как в действительности такое взаимодействие может быть существенным (см., например, Иевлев, 1975), то далее будет предпринята попытка учесть его (хотя бы отчасти) в рамках развиваемого в работе подхода. В связи с этим, рассмотрим более детально некоторые основные понятия теории переноса излучения, которые понадобятся нам для указанных целей.

Излучение и поглощение фотонов[29] описывается уравнением переноса излучения, которое для локально-равновесной (в любой точке пространства и в любой момент времени) газопылевой среды принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = \rho\kappa_\nu(B_\nu - I_\nu). \qquad (58)$$

Здесь $I_\nu \equiv I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t)$ – спектральная интенсивность излучения, определенная таким образом, что $I_\nu d\nu d\mathbf{\Omega}$ описывает энергию фотонов в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, пересекающих в единицу времени единичный элемент поверхности с нормалью $\mathbf{\Omega}$ в пределах телесного угла $d\Omega$, ориентированного в направлении $\mathbf{\Omega}$; $B_\nu(T) \equiv (2h\nu^3/c^2)[\exp(h\nu/k_B T) - 1]^{-1}$ – функция Планка; h – постоянная Планка; $\kappa_\nu(\mathbf{x}, t)$ – полный спектральный коэффициент ослабления (непрозрачность), выражающийся через сечения элементарных физических процессов в газопылевой смеси соотношением

$$\begin{gathered} \rho\kappa_\nu = (1-s)\sum_k n_{g(k)}\sigma_{(k)}(\nu) + \\ + N_d\frac{\pi\tilde{d}_{fd}^2}{4}Q_d(m(\nu), \tilde{d}_d); \end{gathered} \qquad (59)$$

$\sigma_{(k)}(\nu) \equiv \sigma_{a(k)}(\nu)[1 - \exp(h\nu/k_B T)] + \sigma_{s(k)}^{\text{eff}}$ – сечение ослабления излучения частоты ν в расчете на одну молекулу газа сорта k, равное сечению поглощения фотонов (исправленное на индуцированное испускание излучения) плюс эффективное сечение рассеяния; $Q_d = Q_{ds} + Q_{da}$; Q_{ds}, Q_{da} – соответственно факторы эффективности для рассеяния и поглощения света на пылевых частицах (безразмерные величины, рассчитываемые на основе теории Ми); $m(\nu)$ – комплексный показатель преломления вещества пылинки. С функцией I_ν связаны используемые в работе моменты:

$$E_{\text{rad},\nu}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{c\rho}\int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t)d\mathbf{\Omega} \qquad (60)$$

[29] Известно, что рассеяние непосредственным образом не отражается на тепловом режиме среды. Именно поэтому в задачах радиационной гидродинамики рассеянием излучения, как правило, пренебрегают (что мы и будем делать далее) и рассматривают только истинный коэффициент ослабления κ_ν и истинную функцию источников излучения B_ν (без учета рассеяния).

– спектральная плотность энергии (на единицу массы вещества),

$$\mathbf{q}_{\text{rad},\,\nu}(\mathbf{x},t) = \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{\Omega},t)\mathbf{\Omega}\,\mathrm{d}\mathbf{\Omega} \quad (61)$$

– спектральная поток энергии по направлению $\mathbf{\Omega}$. Полные плотность энергии и поток получаются интегрированием соответствующих монохроматических величин по частоте

$$E_{\text{rad}}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} E_{\text{rad},\,\nu}(\mathbf{x},t)\mathrm{d},$$
$$\mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{q}_{\text{rad},\,\nu}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\nu. \quad (62)$$

Уравнение (58), записанное вдоль направления распространения излучения, принимает более простой вид

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}l} = \rho\kappa_\nu(B_\nu - I_\nu). \quad (63)$$

Здесь l – координата вдоль луча; член $c^{-1}\partial I_\nu/\partial t$ в уравнении (58) далее будем опускать, поскольку характерные времена при движении газопылевой среды много больше, чем l^*/c, где l^* – длина луча. Если определить оптическую толщину слоя газопылевой среды (с длиной луча l) вдоль направления распространения излучения выражением

$$\tau_\nu = \int_0^l \rho\kappa_\nu \mathrm{d}l, \quad (64)$$

то легко можно проинтегрировать уравнение (63); в результате получим следующее выражение для интенсивности излучения из области, имеющей полную оптическую толщину τ_ν:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\exp(-\tau_\nu) + $$
$$+ \int_{\tau_{\nu1}=0}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau_{\nu1})\exp[-(\tau_\nu - \tau_{\nu1})]\mathrm{d}\tau_{\nu1}, \quad (65)$$

где $I_\nu(0)$ – постоянная интегрирования, которая имеет смысл интенсивности излучения в некоторой точке на луче, в которой примем координату l равной нулю, $l = 0$. При удалении точки $l = 0$ на очень большое расстояние из (65) следует

$$I_\nu \approx \int_{-\infty}^{l} B_\nu(l_1)\exp\left(-\int_{l_2-l_1}^{l}\rho\kappa_\nu(l_2)\mathrm{d}l_2\right)\rho\kappa_\nu(l_1)\mathrm{d}l_1. \quad (66)$$

Выражения (65) и (66) позволяют в идеале найти, при известных оптических свойствах среды (т.е. распределении $\kappa_\nu(\mathbf{x}, t)$) и граничных условий на центральной плоскости диска, интенсивность $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t)$ в разных точках и по разным направлениям, после чего по формулам (61) и (62) можно будет рассчитать распределение лучистого теплового потока $\mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)$.

Вместе с тем, в уравнения притока тепла (41) или (45) входит дивергенция потока излучения $\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}}$. Часто, при известном распределении I_ν, эту величину можно найти, не вычисляя $\mathbf{q}_{\text{rad}}$ по (62). Проинтегрировав стационарное уравнение (58) по всему спектру частот и по телесному углу Ω, получим следующее общее выражение для вклада радиации в тепловой баланс газопылевой среды диска

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}} = -\int_{\nu=0}^{\infty}\int_{4\pi} \mathbf{\Omega}\nabla I_\nu \mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu = $$
$$= \int_{\nu=0}^{\infty}\left\{4\pi\rho\kappa_\nu B_\nu(T) - \int_{4\pi}\rho\kappa_\nu I_\nu \mathrm{d}\Omega\right\}\mathrm{d}\nu, \quad (67)$$

где первый член соответствует спонтанно излучаемой, а второй – поглощаемой радиационной энергии в единице объема в единицу времени. Вычисления вклада излучения в уравнение притока тепла (41) по формуле (67) в общем случае очень сложны. Однако, они значительно упрощаются в следующих двух случаях, важных при моделировании различных этапов эволюции допланетного газопылевого облака:

1. При очень малой оптической толщине газопылевого диска. В этом случае в (67) можно пренебречь членом с I_ν, т.е. в уравнении притока тепла можно принять

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}} \cong 4\pi\int_{\nu=0}^{\infty}\rho\kappa_\nu B_\nu(T)\mathrm{d}\nu. \quad (68)$$

При очень высоких температурах этот член может быть существенным даже при малой оптической толщине газа (см. Иевлев, 1975), например, в приповерхностном слое диска

2. При очень большой оптической плотности газопылевого диска для излучения всех частот ν, существенных в энергетическом отношении. В этом случае применимо диффузионное приближение для лучистого переноса тепла (приближение лучистой теплопроводности), когда поле излучения I_ν оказывается лишь слегка анизотропным. При умножении уравнение переноса излучения (58) на $\mathbf{\Omega}$ и интегрировании по всем углам, получим (с учетом того, что изотропный член с $\rho\kappa_\nu B_\nu$ не зависит от направления и потому не вносит вклада в интеграл)

$$\int_{4\pi}\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla I_\nu)\mathrm{d}\Omega = -\rho\kappa_\nu\mathbf{q}_{\text{rad},\,\nu}, \quad (69)$$

откуда для полного потока тепла будем иметь

$$\mathbf{q}_{\mathrm{rad}} = -\int\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\kappa_\nu}\int\limits_{4\pi}\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla I_\nu)\mathrm{d}\Omega. \qquad (70)$$

Если для слегка анизотропного поля излучения в левой части (69) оставить в рассмотрении только наиболее значащую изотропную часть, то

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{\mathrm{rad}} &= -\int\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\kappa_\nu}\int\limits_{4\pi}\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla I_\nu)\mathrm{d}\Omega \cong \\ &\cong -\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\rho\kappa_\nu}\left(\nabla B_\nu\int\limits_{4\pi}\mathbf{\Omega}\right)\mathbf{\Omega}\mathrm{d}\Omega = \\ &= -\frac{c}{3\rho}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\kappa_\nu}\nabla B_\nu \mathrm{d}\nu = -\frac{c}{3\rho}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\kappa_\nu}\nabla T\mathrm{d}\nu = \\ &= -\frac{4caT^3}{3\rho\tilde{\kappa}}\nabla T = -\chi_{\mathrm{rad}}\nabla T,\end{aligned} \qquad (71)$$

где введена в рассмотрение так называемая полная непрозрачность среды $\tilde{\kappa}(\rho, s, T, N_\mathrm{d})$, которая определяется как росселандово среднее по обратным величинам $/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности (см. Pollack и др., 1985)

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{4aT^3}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}(1/\kappa_\nu)(\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T)\mathrm{d}\nu = \frac{\int\limits_{\nu=0}^{\infty}(1/\kappa_\nu)(\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T)\mathrm{d}\nu}{\int\limits_{\nu=0}^{\infty}(\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T)\mathrm{d}\nu} \qquad (72)$$

(поскольку $\int_{\nu=0}^{\infty}\mathrm{d}B_\nu/\mathrm{d}T\mathrm{d}\nu = 4aT^3$). Диффузионное приближение справедливо, если поле излучения изотропно на расстояниях, сравнимых со средней длиной свободного пробега фотонов: $\lambda_\nu = 1/\kappa_\nu$ или малых по сравнению с ней. Отметим также, что уравнение (71) с очень хорошей точностью выражает вектор лучистого потока $\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}$ во внутренних областях газопылевого диска. Однако в приповерхностных слоях диска оптическая толща порядка единицы или меньше, и поток уже не определяется этим локальным выражением. Поэтому нужно использовать нелокальное решение (68) уравнения переноса, которое обычно используют при изучении звездных атмосфер.

Оптические свойства пылинок. Спектральную непрозрачность среды, связанную с пылевой составляющей, определяемую соотношением (59), удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}\kappa_\nu(\rho, s, N_\mathrm{d}) &= \frac{\pi\tilde{d}_\mathrm{d}^2}{4\rho}N_\mathrm{d}Q_\mathrm{d}(m(\nu), d_\mathrm{d}) = \\ &= \frac{\pi^{1/3}6^{2/3}}{4\rho}s^{2/3}N_\mathrm{d}^{1/3}[Q_{\mathrm{da}}(m(\nu), d_\mathrm{d}) + Q_{\mathrm{ds}}(m(\nu), d_\mathrm{d})],\end{aligned} \qquad (73)$$

явно зависящем от первых моментов s и N_d (см. (30) и (31)) функции распределения $f(U, \mathbf{x}, t)$ пылевых частиц по размерам. Расчеты рассеяния и поглощения света сферическими твердыми телами с комплексным показателем преломления m предполагается проводить на основе теории Ми. Заметим, что, например, $m = \infty$ соответствует бесконечной диэлектрической проницаемости, $m = 1.33$ соответствует частичкам льда (для видимых длин волн), $m = 1.33–0.09i$ соответствует грязному льду (льду с поглощающими примесями), $m = 1.27–1.37i$ соответствует пылинкам из железа.

Размер сферической твердой частицы обычно выражают через безразмерный параметр $x(\nu) = \pi d_\mathrm{d}/\lambda$, где $\lambda = c/\nu$ – длина волны света. Для малых x фактор эффективности рассеяния света на пылевых частицах Q_{ds} становится очень малым; при $|mx| \ll 1$ имеем обычную формулу рэлеевского рассеяния

$$Q_{\mathrm{ds}} = 8/3x^4\left|(m^2-1)/(m^2-2)\right|^2, \qquad (74)$$

а фактор эффективности поглощения в этом случае дается соотношением

$$Q_{\mathrm{da}} = -4x\mathrm{Im}[(m^2-1)/(m^2+2)], \qquad (75)$$

где Im означает, что нужно брать мнимую часть.

Базовая система уравнений дисковой гидродинамики

Суммируем (для удобства ссылок) приведенные выше уравнения движения двухфазной полидисперсной среды, состоящей из газа и пыли. Эти уравнения (опорный базис модели), учитывающие относительное движение фаз, процессы коагуляции и фазовые переходы, а также различные физико-химические и радиативные процессы, предназначены, в частности, для континуального описания пространственно-временной эволюции состава, динамики и теплового режима газопылевого облака на последней ламинарной стадии эволюции допланетного диска (после затухания турбулентных движений[30]) в зонах субдиска, расположенных на различных расстояниях от прото-Солнца (см., например, Nakagawa, Sekiya, 1986).

[30] Отметим, что в областях диска, близких к прото-Солнцу, полного затухания турбулентности может и не быть из-за возмущающего воздействия на среду магнитных полей, корпускулярных потоков и т.п.

Существенным также является и то, что эти уравнения, описывающие мгновенное состояние турбулизованного допланетного облака на любой стадии его эволюции, могут рассматриваться как исходные при изучении осредненного движения дисковой системы, когда с целью феноменологического описания гидродинамических и физико-химических процессов приходится проводить теоретико-вероятностное осреднение стохастических уравнений движения. Итак, имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \left(\dfrac{d}{dt}\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right),\\ \rho\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{s\rho_d}{\rho}\right) = -\nabla\cdot\mathbf{J}_d+\sum\limits_{\rho=1}^{r}\nu_{d,\rho}\xi_\rho,\\ \left(\mathbf{J}_d = \rho C_d C_g\mathbf{w},\ C_g = 1-\dfrac{s\rho_d}{\rho},\ \rho_d = \mathrm{const}\right),\\ \rho\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{N_d}{\rho}\right) = -\nabla\cdot(N_d C_g\mathbf{w})-\\ -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(W,U)f(W)f(U)dWdU+\sum\limits_k\sum\limits_{\rho=1}^{r}\nu_{d(k),\rho}\xi_\rho,\\ \rho\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla(p+p_{rad})+\nabla(\mathbf{\Pi}_{sum}-\mathbf{J}_d\mathbf{w})+\rho\dfrac{G\mathcal{M}_\odot}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},\\ (\rho c_{V_g}+4aT^3/3)\dfrac{dT}{dt} =\\ = -\nabla\cdot(\mathbf{J}_q+\mathbf{q}_{rad})-(p+4p_{rad})\nabla\cdot\mathbf{u}+\Phi_u+\\ -s\rho_d C_g\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{w}^2}{2}\right)-\sum\limits_{\rho=1}^{r}q_\rho\xi_\rho,\ (\rho_g\cong\rho-s\rho_d),\\ p = p_g = \rho_g\mathcal{R}_g T, \quad p_{rad} = aT^4/3.\end{cases} \tag{76}$$

Гидродинамические уравнения движения (76) должны быть дополнены соответствующими выражениями для скоростей фазовых переходов ξ_ρ и определяющими соотношениями для термодинамических потоков

$$\begin{cases}\mathbf{\Pi}_{sum} = (\mu_g+\mu_{rad})[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^{transp}]+\\ +(\xi_g-2/3\mu_g+\mu_{rad})(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I},\\ \mathbf{w}\cong\dfrac{1}{\rho\theta_{dg}}\left(-\dfrac{d\mathbf{w}}{dt}-(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\dfrac{1}{\rho_g}\nabla p_g\right),\\ \mathbf{J}_q = -\chi_g\nabla T, \quad \mathbf{q}_{rad} = -\chi_{rad}\nabla T,\end{cases} \tag{77}$$

а также выражениями для коэффициентов коагуляции $K(W, U)$ (см. Колесниченко, 2001) и коэффициентов молекулярного переноса $\mu_g(s, T)$, $\xi_g(s, T)$, $\chi_g(s, T)$, $\theta_{dg}(s, N_d, \mathrm{Re})$ и лучистой теплопроводности $\chi_{rad}(s, N_d, T)$. Для выписанной системы уравнений двухфазной механики (76)–(77) необходимо задать начальные и граничные условия, выбор которых требует в каждом конкретном случае специального рассмотрения, поскольку, как правило, моделируется не дисковая система в целом, имеющая, скажем, такие естественные границы, как экваториальная плоскость диска или его внешняя граница, а ее отдельные области.

Важно подчеркнуть, что приведенная система уравнений (76)–(77), описывающая при заданных начальных и граничных условиях также и все детали мгновенного состояния стохастических термогидродинамических полей турбулизованного течения газопылевой дисковой среды и их вариации, зачастую не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Это обусловлено тем, что применение численных методов влечет за собой аппроксимацию колоссального пространственно-временного поля параметров турбулизованного потока конечным числом узлов сетки, которое нужно использовать, чтобы решить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать гидродинамические уравнения (76)–(77) только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные структурные параметры подобной стохастической среды, а все более мелкие масштабы моделировать феноменологически. Стохастичность в данном случае означает существование ансамбля возможных реализаций пульсирующих полей течения газовзвеси, для которой определено понятие статистически среднего (математически ожидаемого) значения для всех термогидродинамических параметров.

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ГАЗОПЫЛЕВОМ ДИСКЕ

Прежде чем приступить к разработке основ феноменологической теории турбулентности многофазных сред применительно к моделированию эволюции околосолнечного допланетного диска, отметим еще раз следующее: имеющиеся на сегодняшний день подходы к описанию многофазных турбулентных течений несовершенны (см., например, Шрайбер и др., 1987). Это обусловлено как незавершенностью “классической” теории турбулентности в “обычной” гидромеханике, так и кардинальным усложнением картины турбулентного течения газа в присутствии дисперсной примеси. Следует иметь в виду, что проблема обратного влияния твердых частиц на характеристики течения, являясь одной из фундаментальных проблем механики гетерогенных сред, в полной мере все еще не решена. Это касается, в частности, способов учета коллективных эффектов, связанных с межчастичным взаимодействием, роль которых возрастает с увеличением концентрации и размера частиц. Например, с межчастичными столкновениями связан механизм интенсивной хаотизации движения крупных частиц (так называемая псевдотурбулентность), которые слабо увлекаются турбулентными пульсациями несущей среды (см. Шрайбер и др., 1980). Таким образом, в силу отмеченной специфики турбулентных течений в гетерогенных средах, любые теоретические подходы к их описанию и развитые на их основе математические модели всегда будут ограничены, так как относятся, по существу, к строго определенному диапазону концентраций и инерционности дисперсной фазы. Сказанное имеет отношение и ко всем существующим на сегодняшний день моделям эволюции газопылевого диска, которые охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к проблеме.

Перейдем теперь к выводу базовых уравнений баланса вещества, количества движения и энергии для дисковой газопылевой турбулизованной среды, предназначеных для постановки и численного решения конкретных задач по взаимосогласованному моделированию термогидродинамических параметров допланетного облака на разных этапах его эволюции, и проанализируем физический смысл отдельных членов этих уравнений. Для того чтобы функции, входящие в эти уравнения, были гладкими и непрерывными с непрерывными первыми производными, необходимо провести осреднение уравнений (76) по времени или по ансамблю. Достигнутый в последнее время прогресс в развитии и применении полуэмпирических моделей турбулентности первого порядка замыкания (так называемых градиентных моделей) для однородной сжимаемой жидкости (см., например, Таунсенд, 1959; Ван Мигем, 1977; Колесниченко, Маров, 1999) позволяет получить обобщения некоторых из подобных моделей и на случай сдвиговых течений двухфазной газопылевой смеси, описываемой нами в рамках одножидкостного континуума. Вывод замыкающих (определяющих) соотношений для турбулентных потоков фазовой диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений Рейнольдса в данной работе мы проведем традиционным способом, основанным на понятии пути смешения.

Выбор оператора осреднения

Известно, что в теориях турбулентности жидкости и газа применяются различные способы осреднения полей физических величин, например, временное осреднение

$$\overline{\mathcal{A}} \equiv (1/\Delta t) \int\limits_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}t, \tag{78}$$

когда интервал осреднения Δt пульсирующего параметра $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ предполагается достаточно большим по сравнению с характерным периодом пульсаций и существенно малым по сравнению с временным периодом изменения осредненного поля $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$; пространственное осреднение, посредством интегрирования по пространственному объему; пространственно-временное осреднение; теоретико- вероятностное осреднение по ансамблю возможных реализаций и т.п. (см., например, Монин, Яглом, 1992). Последний подход, использующий понятие ансамбля, то есть бесконечной совокупности стохастических гидродинамических систем одинаковой природы, отличающихся друг от друга состоянием поля скоростей и/или других термогидродинамических параметров движения в данный момент времени, является наиболее фундаментальным. Согласно известной гипотезе об эргодичности, для стационарного случайного процесса средние по времени и ансамблю идентичны. Не обсуждая далее преимущества и недостатки различных способов осреднения, отметим лишь, что практика построения феноменологических моделей для изучения турбулентных движений показывает, что способы введения осредненных характеристик движения, вообще говоря, несущественны для составления полной системы осредненных гидродинамических уравнений, если потребовать в процессе любого осреднения выполнения постулатов Рейнольдса

$$\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}}, \quad \overline{a\mathcal{A}} = a\overline{\mathcal{A}}, \quad \overline{\overline{\mathcal{A}}\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}\,\overline{\mathcal{B}}. \tag{79}$$

Здесь $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$ – некоторые пульсирующие характеристики турбулентного поля физических параметров системы; $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$ и $\overline{\mathcal{B}}(\mathbf{x}, t)$ – их средние значения, a – константа. Будем также предполагать, что любой используемый оператор осреднения в (79) коммутирует с операторами дифференцирования и интегрирования как в пространстве, так и во времени[31]

$$\begin{cases} \overline{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)/\partial t} = \partial \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}/\partial t, \\ \overline{\int \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}t} = \int \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}\mathrm{d}t, \\ \overline{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)/\partial x_j} = \partial \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}/\partial x_j, \\ \overline{\int \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}x_j} = \int \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}\mathrm{d}x_j. \end{cases} \tag{80}$$

В классических теориях турбулентности однородных несжимаемых жидкостей, разработанных к настоящему времени достаточно полно (см., например, Монин, Яглом, 1992), осреднения для всех без исключения термогидродинамических параметров обычно вводятся некоторым одинаковым способом и, как правило, без весовых коэффициентов. При осреднении по времени (78), или при теоретико-вероятностном осреднении по ансамблю возможных реализаций

$$\overline{\mathcal{A}} \equiv \lim_{N \to \infty} \sum_{p-1}^{N} \mathcal{A}^{(p)}/N, \tag{81}$$

(где суммирование ведется по набору реализаций, а соответствующее среднее поле $\overline{\mathcal{A}}$ определяется как математически ожидаемое значение величины $\mathcal{A}$ для ансамбля одинаковых систем), актуальное значение параметра $\mathcal{A}$ представляется в виде суммы осредненной $\overline{\mathcal{A}}$ и пульсационной $\mathcal{A}'$ составляющих: $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A}'$ (причем $\overline{\mathcal{A}'} = 0$). При этом разделение реального стохастического движения на "медленно" изменяющееся непрерывное среднее и быстро колеблющееся турбулентное (нерегулярное, пульсирующее около средних значений) полностью зависит от выбора пространственно-временно́й области, для которой определены средние величины. Размер этой области фиксирует масштаб среднего движения[32]. Все вихри большего размера вносят вклад в осредненное движение, определенное осредненными значениями термогидродинамических параметров. Все вихри меньшего размера, отфильтрованные в процессе осреднения, вносят вклад в "мелкомасштабное" турбулентное движение, определенное соответствующими пульсациями тех же самых структурных параметров.

Вместе с тем подобный способ осреднения (одинаковый для всех переменных) в случае двухфазного континуума с пульсирующей суммарной плотностью ρ приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям масштаба среднего движения, что связано с необходимостью удержания в их структуре корреляций типа $\overline{\rho'\mathbf{u}'}$, $\overline{\rho'\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$, $\overline{\rho' C'_\alpha \mathbf{u}'}$ и т. п. (появление которых обусловлено нелинейностью конвективных членов исходных уравнений для мгновенного движения), но и к затруднениям физической интерпретации отдельных членов осредненных уравнений. В связи с этим далее при разработке моделей газопылевой среды диска мы будем использовать, наряду с "обычными" средними значениями для некоторых пульсирующих параметров, так называемое средневзвешенное значение (среднее по Фавру (Favre, 1969)) для ряда других параметров, задаваемое, например, соотношением

$$\langle \mathcal{A} \rangle \equiv \overline{\rho \mathcal{A}}/\overline{\rho} = \\ = \left[\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \rho^{(p)} \mathcal{A}^{(p)} \right] \Big/ \left[\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \rho^{(p)} \right]; \tag{82}$$

при этом: $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A} \rangle + \mathcal{A}''$, $\overline{\mathcal{A}''} \neq 0$; здесь $\mathcal{A}''$ соответствующая турбулентная пульсация. Таким образом, для обозначения средних величин далее мы будем употреблять два символа: черта сверху означает осреднение по ансамблю (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение. Двойной штрих используется далее для обозначения пульсаций относительно величины, осредненной по Фавру. Заметим, что осреднение по Фавра ряда пульсирующих термогидродинамических параметров гетерогенного континуума в значительной степени упрощает запись и анализ осредненных гидродинамических уравнений. Это связано с тем, что при обычном осреднении корреляции типа $\overline{\rho'\mathcal{A}'}$, $\overline{\rho'\mathcal{A}'\mathbf{u}'}$ и т.д. фигурируют в осредненных уравнениях движения в явном виде. В то время как при осреднении по Фавру эти корреляции скрыты в соответствующих членах уравнений, которые имеют более простой вид.

Приведем некоторые, широко используемые далее, свойства средневзвешенного осреднения, которые легко выводятся из определения (82) и

[31] Заметим, что при временно́м (пространственном) осреднении некоторые из соотношений (79)–(80) выполняются только приближенно, хотя они будут тем точнее, чем меньше средние значения $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$ изменяются во времени (и/или пространстве) в рассматриваемой области интегрирования.

[32] Процедура получения уравнений для крупномасштабной турбулентности может быть различной: "сглаженные" значения термогидродинамических параметров могут быть введены, в частности, с помощью функции-фильтра $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\mathcal{A}(\mathbf{x}', t)\mathrm{d}\mathbf{x}'$ (Leonard, 1974) или при составлении уравнений баланса (количества движения, массы и т.п.) для каждой ячейки расчетной сетки (Иевлев, 1970).

соотношений Рейнольдса (80) (см., например, Ван Мигем, 1977)

$$\begin{cases} \overline{\rho\mathcal{A}''} = 0, \quad \overline{\mathcal{A}''} = -\overline{\rho'\mathcal{A}''}/\bar{\rho}, \\ \overline{\rho\mathcal{A}\mathcal{B}} = \bar{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathcal{B}\rangle + \overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''}, \\ \overline{\nabla\langle\mathcal{A}\rangle} = \nabla\langle\mathcal{A}\rangle, \\ (\mathcal{A}\mathcal{B})'' = \langle\mathcal{A}\rangle\mathcal{B}'' + \langle\mathcal{B}\rangle\mathcal{A}'' + \mathcal{A}''\mathcal{B}'' - \overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''}/\bar{\rho}, \\ \overline{\rho d\mathcal{A}/dt} = \bar{\rho}D\langle\mathcal{A}\rangle/Dt + \nabla\cdot\overline{(\rho\mathcal{A}''\mathbf{u}'')}, \end{cases} \tag{83}$$

где

$$D(\ldots)/Dt \equiv \partial(\ldots)/\partial t + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla(\ldots) \tag{84}$$

– субстанциональная производная для осредненного движения.

Осредненные уравнения баланса масс

Итак, будем рассматривать турбулизованную двухфазную среду диска, как континуальную среду, мгновенные движения которой могут быть описаны системой гидродинамических уравнений (76) при случайной выборке начальных и граничных условий[33]. Тогда макроуравнения турбулентного движения газопылевой среды можно получить (в удобной для дальнейшего исследования форме) путем стохастического осреднения по ансамблю уравнений (76), при использовании средневзвешенных значений для таких характеристик потока, как скорость $\langle\mathbf{u}\rangle$ температура $\langle T\rangle$ массовые концентрации $\langle C_\alpha\rangle$ и т.п. Однако давление p и плотность ρ среды, а также все "молекулярные" термодинамические потоки $\mathbf{J}_\alpha$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{\Pi}$, ξ_ρ удобно осреднять "обычным" образом, т.е. без использования весовых коэффициентов[34].

Осредненное уравнение неразрывности. Легко видеть, что осредненная плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость $\langle\mathbf{u}\rangle = \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle) = 0, \qquad \text{или} \quad \bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) - \nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle = 0. \tag{85}$$

По поводу этого уравнения важно подчеркнуть следующее: при известных трудностях моделирования двойных корреляций $\overline{\rho'\mathbf{u}'}$, появляющихся при "обычном" осреднении без веса уравнения (13) для истинных значений плотности и гидродинамической скорости двухфазной системы, сохранение стандартной формы (85) для осредненного уравнения неразрывности является убедительным аргументом в пользу использования средневзвешенного осреднения $\langle\mathbf{u}\rangle$ для полной гидродинамической скорости течения (см. Колесниченко, Маров, 1999).

В частности, широко используемая далее формула (83), может быть получена только с учетом уравнения (85) путем осреднения операторного соотношения $\rho d\mathcal{A}/dt = \partial(\rho\mathcal{A})/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathcal{A}\mathbf{u})$; в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\rho\frac{d\mathcal{A}}{dt}} &= \frac{\partial\overline{(\rho\mathcal{A})}}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho\mathcal{A}\mathbf{u}}) = \\ &= \frac{\partial\overline{(\rho\mathcal{A})}}{\partial t} + \nabla\cdot[\bar{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle + \overline{\rho\mathcal{A}''\mathbf{u}''}] = \\ &= \bar{\rho}\frac{D}{Dt}\langle\mathcal{A}\rangle + \nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{turb}}, \end{aligned} \tag{83*}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho\mathcal{A}''\mathbf{u}''} = \bar{\rho}\langle\mathcal{A}''\mathbf{u}''\rangle \tag{86}$$

для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости течения и некоторой переносимой субстанции $\mathcal{A}$. Таким образом, формулой (86) вводится в рассмотрение так называемый турбулентный поток, связанный с переносом субстанции $\mathcal{A}$ турбулентными пульсациями гидродинамической скорости системы.

Приведем уже здесь формулу для турбулентного потока $\mathbf{J}_V^{\mathrm{turb}}$ удельного объема $V(\mathbf{x}, t)$ $(\equiv 1/\rho)$. Поток $\mathbf{J}_V^{\mathrm{turb}}$ играет важную роль в рассматриваемом нами подходе и фигурирует во многих осредненных уравнениях движения, например, в осредненном энергетическом уравнении (см. формулу (126*)). Используя соотношение $V'' = -\rho'/\rho\bar{\rho}$, которое следует непосредственно из определения

[33] Это возможно для пространственно-временны́х масштабов, заключенных между масштабами молекулярных движений и минимальными масштабами турбулентности (линейный размер и время существования наименьших из вихрей), которые, как правило, на несколько порядков (по крайней мере на три порядка) превосходят масштабы молекулярных движений, т.е. расстояние между молекулами, а тем более размеры молекул (см., например, Ван Мигем, 1977).

[34] Осреднение по Фавру уравнений движения для двухфазного течения газовзвеси, описываемой в рамках одножидкостного континуума, выполнено в данной работе, по-видимому, впервые.

пульсации v'' ($v'' = v - \langle v\rangle = 1/\rho - 1/\bar\rho = -\rho'/\rho\bar\rho$), из (86) получим

$$\mathbf{J}_v^{\rm turb} \equiv \overline{\rho v''\mathbf{u}''} = -\overline{\rho'\mathbf{u}''}/\bar\rho = \overline{\mathbf{u}''}. \qquad (87)$$

Далее везде будем исходить из того, что в газопылевом потоке флуктуируют только объемное содержание пыли s и истинная плотность газа $\rho_{\rm g}$ (это кардинальное предположение развиваемого здесь подхода); тогда из формулы (2) следует

$$\frac{\rho'}{\bar\rho} \cong (1-\bar s)\frac{\rho'_{\rm g}}{\bar\rho} + \langle\sigma\rangle s' = \langle S_{\rm g}\rangle\frac{\rho'_{\rm g}}{\bar\rho_{\rm g}} + \langle\sigma\rangle s', \qquad (88)$$

где введено обозначение

$$\langle\sigma\rangle \equiv (\rho_{\rm d} - \bar\rho_{\rm g})/\bar\rho \cong \rho_{\rm d}/\bar\rho \qquad (89)$$

для осредненного превышения плотности пылевых частиц над плотностью газовзвеси и использовано выражение

$$\langle C_{\rm g}\rangle \equiv \frac{\overline{(1-s)\rho_{\rm g}}}{\bar\rho} \cong \frac{(1-\bar s)\bar\rho_{\rm g}}{\bar\rho} \cong \frac{\bar\rho_{\rm g}}{\bar\rho}, \qquad (90)$$

для осредненной массовой концентрации газовой фазы ($\langle C_{\rm d}\rangle \equiv \rho_{\rm d}\bar s/\bar\rho \cong \bar s\langle\sigma\rangle$, $\langle C_{\rm g}\rangle + \langle C_{\rm d}\rangle = 1$). Из (88) в (87) вытекает следующее выражение для турбулентного потока удельного объема $\mathbf{J}_v^{\rm turb}$ в газопылевой среде

$$\mathbf{J}_v^{\rm turb} \equiv -\overline{\rho'\mathbf{u}''}/\bar\rho = -\langle\sigma\rangle\overline{s'\mathbf{u}''} - \left(1 - \frac{\rho_{\rm d}\bar s}{\bar\rho}\right)\frac{\overline{\rho'_{\rm g}\mathbf{u}''}}{\bar\rho_{\rm g}}. \qquad (91)$$

Следует отметить, что выражения (88) и (90) для величин ρ' и $\langle C_{\rm g}\rangle$ (как и многие подобные им, которые будут появляться в дальнейшем) справедливы лишь в том случае, когда выполняются неравенства $\overline{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}/\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}} \ll 1$ и $\langle\mathcal{A}''\mathcal{B}''\rangle \ll 1$ для любых пульсирующих термодинамических параметров $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, не равных скорости газопылевого потока $\mathbf{u}$; малость подобного рода отношений далее всюду нами предполагается без специальных оговорок.

Осредненное уравнение диффузии дисперсной составляющей дисковой системы. Применяя оператор осреднения (83*) к диффузионному уравнению (12) для дисперсных частиц, получим балансовое уравнение для концентрации пыли:

$$\bar\rho\frac{D\langle C_{\rm d}\rangle}{Dt} + \nabla\cdot(\bar{\mathbf{J}}_{\rm d} + \mathbf{J}_{\rm d}^{\rm teub}) = \overline{\sigma_{\rm dg}},$$
$$\overline{\sigma_{\rm dg}} \equiv \sum_{\rho=1}^{r}\nu_{{\rm d},\rho}\bar\xi_\rho. \qquad (92)$$

Здесь $\langle C_{\rm d}\rangle = \rho_{\rm d}\bar s/\bar\rho$; $\bar{\mathbf{J}}_{\rm d}$ – осредненный “молекулярный” диффузионный поток пыли, определяемый соотношением (см. формулу (12))

$$\bar{\mathbf{J}}_{\rm d} \equiv \overline{\rho C_{\rm d}C_{\rm g}\mathbf{w}} \cong \bar\rho\langle C_{\rm d}\rangle\langle C_{\rm g}\rangle\bar{\mathbf{w}} \cong \rho_{\rm d}\frac{\bar\rho_{\rm g}}{\bar\rho}\bar s\bar{\mathbf{w}}; \qquad (93)$$

$$\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb} \equiv \overline{\rho C''_{\rm d}\mathbf{u}''} = \rho_{\rm d}\overline{s\mathbf{u}''} \qquad (94)$$

– так называемый, турбулентный поток диффузии вещества дисперсной фазы (для диффузионного потока газа можно написать $\mathbf{J}_{\rm g}^{\rm turb} \equiv \overline{\rho C''_{\rm g}\mathbf{u}''} = -\overline{\rho C''_{\rm d}\mathbf{u}''} = -\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb}$).

Отметим, что если записать турбулентный поток пыли в виде $\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb} = \rho_{\rm d}\bar s\,\mathbf{J}_v^{\rm turb} + \rho_{\rm d}\overline{s'\mathbf{u}''}$, то отсюда, с учетом (91), можно получить следующее представление для турбулентного потока удельного объема

$$\mathbf{J}_v^{\rm turb} = -\langle\sigma\rangle\frac{\bar\rho}{\rho_{\rm d}\bar\rho_{\rm g}}\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb} - (1-\bar s)\frac{\overline{\rho'_{\rm g}\mathbf{u}''}}{\bar\rho_{\rm g}}. \qquad (91^*)$$

Это выражение для $\mathbf{J}_v^{\rm turb}$ далее нам понадобится.

Для замыкания осредненного уравнения (92) необходимо иметь определяющее соотношение для турбулентного диффузионного потока пыли $\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb} \equiv \bar\rho\langle C''_{\rm d}\mathbf{u}''\rangle$. Известно, что имеется несколько подходов к моделированию подобного рода корреляционных моментов второго порядка, различающихся степенью сложности (см., например, Marov, Kolesnichenko, 2002). Здесь мы ограничимся наиболее простым градиентным соотношением, которое выведем традиционным способом, вводя понятие пути смешения[35]. Предположим для этого, что перенос каких-либо полевых характеристик $\mathcal{A}$ потока турбулентными пульсациями среды происходит как диффузионный процесс и что можно допустить существование некоторого эффективного пути смешения $\xi_{\mathcal{A}}$ субстанции $\mathcal{A}$, представляющего собой расстояние, на которое перемещаются турбулентные моли (вихри) в потоке, прежде чем они разрушатся за счет взаимодействия с другими возмущениями. Если обозначить через $\mathcal{A}''_{\rm L}$ лагранжеву турбулентную пульсацию переносимой субстанции $\mathcal{A}$, соответствующую эйлеровой пульсации $\mathcal{A}''$, а через $\xi_{\mathcal{A}}$ – эффективный путь смешения, то можно написать $\mathcal{A}''_{\rm L} =$

[35] В последнее десятилетие для моделирования турбулентных однофазных потоков в тонких аккреционных дисках стали применяться более глубокие по физическому содержанию дифференциальные модели турбулентности. Данные модели включают в себя кроме уравнений для осредненных величин дополнительные дифференциальные уравнения переноса важнейших характеристик структуры турбулентности (см., например, Dubrulle, 1992).

$= \mathcal{A}'' + \xi_{\mathcal{A}}\nabla(\langle\mathcal{A}\rangle)$ (см., например, Ван Мигем, 1977). Будем теперь считать, что вихри, смещаясь на расстояние $\xi_{\mathcal{A}}$ сохраняют в лагранжевом объеме ту же удельную плотность пыли, которой она обладала на исходном уровне[36]; тогда $(C_\mathrm{d})''_\mathrm{L} \cong 0$, или $C''_\mathrm{d} = -\xi_\mathrm{d}\nabla\langle C_\mathrm{d}\rangle$. Отсюда диффузионный поток $\mathbf{J}^T_\mathrm{d}$ пылевой составляющей системы в рамках градиентных представлений равен

$$\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} \equiv \overline{\rho C''_\mathrm{d}\mathbf{u}''} = -\bar{\rho}\langle\mathbf{u}''\xi_\mathrm{d}\rangle\cdot\nabla\langle C_\mathrm{d}\rangle = \\ = -\bar{\rho}\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}\cdot\nabla\langle C_\mathrm{d}\rangle = -\bar{\rho}\rho_\mathrm{d}\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}\cdot\nabla\left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}}\right), \tag{95}$$

где диада $\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} \equiv \langle\mathbf{u}''\xi_\mathrm{d}\rangle$ определяет несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии пыли, учитывающий в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости и концентрации твердых частиц вдоль разных осей координат. Соотношение (95) эквивалентно утверждению, что турбулентный поток пылевой фазы пропорционален градиенту средней концентрации $\langle C_\mathrm{d}\rangle$ и имеет по отношению к нему обратное направление. Важно иметь в виду, что применение градиентной гипотезы не исключает всех затруднений, связанных с проблемой замыкания, поскольку необходимо еще определить (экспериментально или на базе качественного физического анализа) соответствующие коэффициенты турбулентного переноса.

В случае изотропного турбулентного поля можно считать, что тензор $\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}$ шаровой, $\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} = I\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}$, т.е. определяется одним коэффициентом турбулентной диффузии пыли $\mathbf{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}(\mathbf{x})$ (некоторая статистическая характеристика турбулентности); тогда

$$\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} = -\bar{\rho}D^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}\nabla\langle C_\mathrm{d}\rangle \equiv \\ \equiv -D^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}\frac{\rho_\mathrm{d}\bar{\rho}_\mathrm{g}}{\bar{\rho}}[\nabla\bar{s} - \bar{s}\nabla\ln\bar{\rho}_\mathrm{g}], \tag{96}$$

и осредненное диффузионное уравнение (92) принимает вид

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\langle C_\mathrm{d}\rangle}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}_\mathrm{g}\langle C_\mathrm{d}\rangle\bar{\mathbf{w}} - \frac{\bar{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\nabla\langle C_\mathrm{d}\rangle\right\} = \bar{\sigma}_{\mathrm{dg}}, \tag{92*}$$

где ν^{turb} – турбулентный аналог коэффициента кинематической вязкости газопылевой смеси (см. ниже); $\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}} \equiv \nu^{\mathrm{turb}}/\mathrm{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}$ – турбулентное число Шмидта для дисперсной фазы (безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от природы пылевой субстанции и являющийся некоторой функцией безразмерных характеристик потока). В рамках градиентной теории число Шмидта вычисляется по формуле $\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}} = \xi_u/\xi_\mathrm{d}$, где ξ_u – длина пути смешения по скорости. Заметим, что впервые зависимость числа Шмидта от концентрации пылевых частиц была получена в работе (Абрамович, Гиршович, 1973).

[36] Предполагается, что пылевая субстанция обладает свойством неуничтожимости: количество ее в элементарном объеме не изменяется, пока она движется, не смешиваясь с окружающим газом.

Коэффициент турбулентного переноса; число Стокса. Прежде всего, отметим, что коэффициенты турбулентного переноса в любой турбулизованной среде, в отличие от соответствующих коэффициентов молекулярного переноса, описывают не просто ее теплофизические свойства, но и состояние турбулентного поля и потому непосредственно зависят от масштаба осреднения пульсирующих термогидродинамических параметров. Именно по этой причине способ введения осредненных характеристик турбулентного движения является решающим при разработке методов экспериментального определения подобного рода коэффициентов переноса. В основе наиболее продвинутого подхода к моделированию коэффициентов турбулентной диффузии лежит предположение о полном увлечении частиц турбулентными пульсациями того масштаба, который играет основную роль в механизме сближения частиц (приближение пассивной примеси). Если твердые частицы очень малы, и в силу этого их движение практически ничем не отличается от движения несущих молей газа, то для них имеет место равенство коэффициентов турбулентной диффузии частиц пыли $\mathrm{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}$ и турбулентной вязкости ν^{turb} газа. В этом случае $\mathrm{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d}$ зависит только от масштаба турбулентных пульсаций несущего газа и оценивается, например, выражением

$$\mathrm{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} \sim \nu^{\mathrm{turb}} = \sqrt{b}l \sim (\varepsilon l)^{1/3}l = \varepsilon^{1/3}l^{4/3}, \\ \text{когда } l > \lambda_\mathrm{K}, \tag{97}$$

в котором использованы следующие обозначения: b – турбулентная энергия газопылевой среды в целом (см. (107); $\varepsilon \cong b^{3/2}/l \cong \nu^3_\mathrm{g}/\lambda^4_\mathrm{K}$ – скорость диссипации турбулентной энергии газа (см. формулу (125*); $\lambda_\mathrm{K} \cong (\nu^3_\mathrm{g}/\varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский (внутренний) масштаб турбулентности; $l(\mathbf{x})$ – длина пути перемешивания по Прандтлю (числовой множитель можно включить в значение l). В дальнейшем мы будем называть l пространственным масштабом турбулентности в данной точке потока.

Следует однако отметить, что многочисленные экспериментальные данные (см., например, Медников, 1981) подтверждают равенство $\mathrm{D}^{\mathrm{turb}}_\mathrm{d} \cong \nu^{\mathrm{turb}}$ лишь для очень мелких частиц, когда безразмерное число Стокса в крупномасштабном пульсационном движении $\mathrm{Stk} \ll 1$. Заметим, что в общем случае для турбулизованного гетерогенного потока можно ввести несколько чисел Стокса Stk, равных отношению времени динамической релаксации пылевых частиц к тем или иным временны́м масштабам течения (например, к временно́му колмогоровскому масштабу турбулентности $\tau_K \cong (\nu_g/\varepsilon)^{1/2}$, или к крупномасштабному пульсационному движению среды $\tau_L \propto b/\varepsilon$), которые характеризуют инерционность частиц по отношению к выбранному масштабу течения в турбулентном потоке. В случае кеплеровского дифференциального вращения твердых частиц в диске, где имеется градиент осредненной скорости в радиальном направлении, важно учитывать инерционность частиц при анализе процесса релаксации осредненных скоростей фаз. Для этого удобно ввести число Стокса в осредненном движении, которое мы запишем в следующем виде $\mathrm{Stk} = \omega_{\mathrm{turb}}\tau_{\mathrm{relax}}$, где τ_{relax} – время динамической релаксации (динамической инерционности) частиц; ω_{turb} – нижний предел частоты турбулентных пульсаций несущего газа в диске, принадлежащий наиболее крупным вихрям с масштабом L (макромасштаб турбулентности); тогда частота ω_{turb} определяет медленные макроскопические изменения параметров течения (которые, вообще говоря, не связаны с турбулентностью) и согласно Сафронову (1969) задается в виде $\omega_{\mathrm{turb}} = \Omega_{\mathrm{K,\,mid}}$, где $\Omega_{\mathrm{K,\,mid}} \equiv \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/r^3}$ – орбитальная частота (кеплеровская угловая скорость в районе центральной плоскости диска). В работе (Cuzzi и др., 1993) эта оценка была несколько уточнена $\omega_{\mathrm{turb}} \approx \zeta\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}$, где $\zeta \approx 0.0126$.

Для малых сферических частиц (например, с диаметром $\leqslant$1 см на 1 а. е., или ~600 см на 10 а. е.) время динамической релаксации определяется законом Эпстейна (см. формулу (21))

$$\tau_{\mathrm{relax}}^{\mathrm{Ep}} = \frac{\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g}{\rho R_{dg}} = \frac{\rho_d\tilde{d}_d}{2\rho c_{sg}}, \quad \tilde{d}_d < \lambda_g \tag{98}$$

(длина свободного пробега молекул газа $\lambda_g \sim 1$ см на 1 а. е.). Однако, для грубодисперсных сферических частиц эта формула несколько видоизменяется. Наиболее простое выражение для τ_{relax} можно получить, когда число Рейнольдса для пыли $\mathrm{Re}_d = \tilde{d}_d|\mathbf{w}|/\nu_g = 2\tilde{d}_d|\mathbf{w}|/\lambda_g c_{sg}$ имеет достаточно малые значения, $\mathrm{Re}_d < 1$ (что имеет место для так называемых стоксовых частиц). Это неравенство справедливо, например, для частиц с диаметрами между 1 и 10 см на 1 а. е., и с диаметрами между 600 и 1000 см на 10 а.е. (Dubrulle и др., 1995). В этом случае, согласно формуле (22), коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}$ и время динамической релаксации τ_{relax} будет определяться законом Стокса

$$\tau_{\mathrm{relax}}^{\mathrm{St}} = \frac{\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g}{\bar{\rho}R_{dg}} = \frac{\tilde{d}_d\rho_d}{2\bar{\rho}C_D(\mathrm{Re}_d)|\mathbf{w}|} \cong \cong \frac{\tilde{d}_d\rho_d\mathrm{Re}_d}{18\bar{\rho}|\mathbf{w}|} = \frac{\rho_d\tilde{d}_d^2}{9\bar{\rho}c_{sg}\lambda_g} = \frac{\rho_d\tilde{d}_d^2}{18\bar{\rho}\nu_g}, \quad \tilde{d}_d > \lambda_g. \tag{99}$$

Таким образом, инерционность стоксовой частицы зависит от характеристик среды, в которой она движется. Кроме того, если частицы не слишком малы (и в силу этого увлекаются несущими их молями газа не полностью), то их относительные скорости, приобретаемые за счет турбулентных пульсаций, существенно зависят от их массы. Заметим, что в случае движения нестоксовой частицы ее инерционность зависит от числа Рейнольдса для пыли Re_d и может быть записана в виде

$$\tau_{\mathrm{relax}} = \tau_{\mathrm{relax}}^{\mathrm{St}}/C(\mathrm{Re}_d), \tag{99*}$$

где

$$C(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 1 + 0.179\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathrm{Re}_d, & \mathrm{Re}_d \le 10^3; \\ 0.0183\mathrm{Re}_d, & \mathrm{Re}_d > 10^3 \end{cases}$$

– некоторая поправочная функция, учитывающая влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы (коэффициент аэродинамического сопротивления частицы равен $C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}C(\mathrm{Re}_d)$). Разность пульсационных скоростей частиц разного размера обусловливает их сближение и увеличивает вероятность столкновений[37]. Таким образом, для полидисперсной дисковой среды справедлива формула (сравни например, Cuzzi и др., 1993)

$$\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}} = \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{D_d^{\mathrm{turb}}} \cong (1 + \mathrm{Stk})\sqrt{1 + 3|\overline{\mathbf{w}}|^2/2b}, \quad \text{где } \mathrm{Stk} = \zeta\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}\frac{\rho_d\tilde{d}_d^2}{18\rho\nu_g C(\mathrm{Re}_d)}. \tag{100}$$

Определяющее уравнение для осредненной скорости относительного движения. Осредняя определяющее уравнение (19*) для актуальных значений вектора $\mathbf{w}$, в результате получим

$$\bar{\rho}\theta_{gd}\overline{\mathbf{w}} \cong -\frac{D\overline{\mathbf{w}}}{Dt} - \overline{(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}_g}\nabla\bar{p} =$$

[37] С этим обстоятельством связан также и инерционный механизм коагуляции частиц в турбулентном потоке.

$$= -\frac{\mathrm{D}\bar{\mathbf{w}}}{\mathrm{D}t} - \mathbf{J}_v^{\mathrm{turb}} \cdot \nabla\bar{\mathbf{w}} - \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla\mathbf{w}'} - (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla)\langle\mathbf{u}\rangle -$$

$$- \overline{(\mathbf{w}' \cdot \nabla)\mathbf{u}''} + \frac{1}{\bar{\rho}_{\mathrm{g}}}\nabla\bar{p} - \tag{101}$$

$$- (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla)\mathbf{J}_v^{\mathrm{turb}} = -\frac{\mathrm{D}\bar{\mathbf{w}}}{\mathrm{D}t} - (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla)\langle\mathbf{u}\rangle + \frac{1}{\bar{\rho}_{\mathrm{g}}}\nabla\bar{p}.$$

При написании этого соотношения мы пренебрегли пульсациями $\mathbf{w}'$ относительной скорости (что справедливо лишь для тех случаев, когда скорость осредненного относительного движения фаз $\bar{\mathbf{w}}$ намного больше скорости пульсаций $\mathbf{w}'$, т.е. для достаточно крупных частиц) и произведениями осредненных термодинамических потоков различной природы, как членами второго порядка малости. Кроме этого нами использовано тождественное преобразование

$$\overline{\mathrm{d}\mathcal{A}}/\mathrm{d}t \equiv \mathrm{D}\bar{\mathcal{A}}/\mathrm{D}t + \mathbf{J}_v^{\mathrm{turb}} \cdot \nabla\bar{\mathcal{A}} + \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla\mathcal{A}'}, \tag{102}$$

которое может быть получено путем осреднения субстанциональной производной $\mathrm{d}\mathcal{A}/\mathrm{d}t$, предварительно записанной в виде $\mathrm{d}\mathcal{A}/\mathrm{d}t = \mathrm{D}\mathcal{A}/\mathrm{D}t + \mathbf{u}'' \cdot \nabla\mathcal{A} = \mathrm{D}\mathcal{A}/\mathrm{D}t + \mathbf{u}'' \cdot \nabla\bar{\mathcal{A}} + \mathbf{u}'' \cdot \nabla\mathcal{A}$.

Осредненное уравнение коагуляции Смолуховского

Турбулентность приводит к двоякого рода явлениям, влияющим на процесс коагуляции в дисперсной системе. Во-первых, под действием турбулентных пульсаций частицы приобретают дополнительную относительную скорость, что в свою очередь изменяет ядро коагуляции $K(W, U)$, характеризующее вероятность столкновения частиц в системе (см., например, Волощук, 1984). Здесь с известной определенностью пока можно говорить о двух эффектах, ускоряющих коагуляцию. Первый из них связан с увеличением коэффициента захвата за счет турбулентного перемешивания, в результате чего число столкновений твердых частиц существенно увеличивается по сравнению с ламинарным потоком. Второй эффект связан с наличием сдвига в поле скоростей турбулентного потока, который приводит к изменению условий захвата в области значений $K(W, U)$, близких к нулю, и увеличивает вероятность коагуляции мелких частиц (см., например, Woods и др., 1972).

Явления второго типа связаны с коллективным поведением частиц в турбулизованной системе. Турбулентность, увеличивая локальные неоднородности распределения коагулирующих частиц до масштабов, сравнимых со средним расстоянием между частицами, приводит к возникновению флуктуаций функции распределения частиц по размерам $f(U, \mathbf{x}, t)$ на макроскопических расстояниях. С физической точки зрения это колебание концентрации частиц с объемом U в силу нелинейного характера уравнений коагуляции (33) приводит к тому, что в области с повышенной концентрацией частиц коагуляция ускоряется, а с пониженной – замедляется, так что в среднем это приводит к иной скорости коагуляции, чем в однородном случае (U = const), и способствует более быстрому появлению крупных частиц.

Такой процесс может быть описан формальным осреднением уравнения коагуляции (33)

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}}\right) + \nabla \cdot [\mathbf{J}_f^{\mathrm{turb}}(U) + \overline{f(U)}\langle C_{\mathrm{g}}\rangle\bar{\mathbf{w}}] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^U \overline{f(W)}\,\overline{f(U-W)}K(W, U-W)\mathrm{d}W -$$

$$- \overline{f(U)}\int_0^\infty \overline{f(W)}K(W, U)\mathrm{d}W + \tag{103}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^U \overline{f'(W)f'(U-W)}K(W, U-W)\mathrm{d}W -$$

$$- \int_0^\infty \overline{f'(U)f'(W)}K(W, U)\mathrm{d}W,$$

где

$$\mathbf{J}_f^{\mathrm{turb}}(U) \equiv \overline{\rho(f/\rho)''\mathbf{u}''} = -\bar{\rho}\mathrm{D}_U^{\mathrm{turb}}\nabla\left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}}\right) \tag{104}$$

– турбулентный поток пылевых частиц объема U; $\langle C_{\mathrm{g}}\rangle = (1 - \bar{s})\bar{\rho}_{\mathrm{g}}/\bar{\rho}$; $\mathrm{D}_U^{\mathrm{turb}}$ – коэффициент турбулентной диффузии для частиц U-фракции, выражение для которого получено, например, в работе (Schmitt и др. 1997). Уравнение (103) является незамкнутым, поскольку функция $\gamma(U, W, \mathbf{x}, t) \equiv \equiv \overline{f'(U, \mathbf{x}, t)f'(W, \mathbf{x}, t)}$ не определена. Уравнение для $\gamma(U, W, \mathbf{x}, t)$ можно получить умножением исходного уравнения (33) на f и последующим стохастическим осреднением по ансамблю возможных реализаций, в результате чего получится уравнение, содержащее среднее от произведения трех функций f'. Подобная операция приводит к бесконечной цепочке уравнений. Проблема замыкания последней может быть решена лишь путем введения какой-либо гипотезы.

Если проинтегрировать уравнение (103) по размеру U, то уравнение для осредненного полного числа дисперсных частиц $\overline{N}_d(\mathbf{x}, t)$ будет иметь следующий вид:

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{N}_d}{\bar{\rho}}\right) = -\nabla\cdot\left(\mathbf{J}^{turb}_{N_d} + \frac{\overline{N}_d(1-\bar{s})\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}}\overline{\mathbf{w}}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(W, U)\overline{f}(W, \mathbf{x}, t)\overline{f}(U, \mathbf{x}, t)dWdU - \tag{105}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(W, U)\gamma(U, W, \mathbf{x}, t)dWdU + \sum_k\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{d(k),\rho}\bar{\xi}_\rho,$$

где

$$\mathbf{J}^{turb}_{N_d} = \int_U \mathbf{J}^{turb}_f(U)dU \tag{106}$$

– турбулентный поток числа пылевых частиц, для которого справедливо представление $\mathbf{J}^{turb}_{N_d} = \overline{N_d\mathbf{u}''} = \mathbf{J}^{turb}_d/\rho_d\tilde{U}_d$. Так как функция $\gamma(U, W, \mathbf{x}, t)$ должна быть положительно определенной в силу своей симметрии по U и W, то коагуляция в турбулизованной среде с неравномерно распределенными частицами должна происходить быстрее. В заключение заметим, что вопрос о влиянии флуктуаций на скорость коагуляции, несмотря на свою важность, до настоящего времени является практически неразработанным и требует своего решения.

Осредненное уравнение движения для газопылевой дисковой среды

Осредняя по Фавру мгновенное уравнение движения (35) газопылевой смеси, рассматриваемой как единое целое, при учете (83*) получим

$$\bar{\rho}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle) + \nabla\cdot(\bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle) =$$
$$= -\nabla\bar{p}_{sum} + \nabla\cdot(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{sum} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{rel}) + \bar{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \tag{107}$$

где

$$\mathbf{R} \equiv -\overline{\rho\mathbf{u}''\mathbf{u}''} = -\bar{\rho}\langle\mathbf{u}''\mathbf{u}''\rangle \tag{108}$$

– так называемый тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений, который, будучи записанным в декартовой системе координат, принимает вид:

$$R_{ij} \equiv -\overline{\rho u_i'' u_j''} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u_1''^2} & -\overline{\rho u_1'' u_2''} & -\overline{\rho u_1'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_2'' u_1''} & -\overline{\rho u_2''^2} & -\overline{\rho u_2'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_3'' u_1''} & -\overline{\rho u_3'' u_2''} & -\overline{\rho u_3''^2} \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Тензор Рейнольдса является симметричным тензором второго ранга и описывает турбулентные напряжения, обусловленные пульсациями поля турбулентных скоростей газопылевого континуума в целом. Известно (см., например, Монин, Яглом, 1992), что в развитом турбулентном потоке однофазного течения, т.е. при больших значениях глобального числа Рейнольдса $Re_{glob} = Lu_0/\nu$, соответствующих крупномасштабным движениям (здесь u_0 – типичные изменения скорости газопылевой смеси на расстояниях порядка макромасштаба турбулентности L; ν – эффективный коэффициент кинематической вязкости газовзвеси) можно пренебречь осредненным тензором вязких напряжений среды $\overline{\mathbf{\Pi}}$ по сравнению с напряжениями Рейнольдса $\mathbf{R}$, за исключением тонких областей так называемого вязкого подслоя, граничащих с твердой подложкой (в рассматриваемом нами случае такой подложкой является тонкий слой пыли, примыкающие к центральной плоскости диска). Это справедливо и для допланетного дифференциально вращающегося кеплеровского диска с характерным значением числа Рейнольдса $Re_{glob} \geq 10^{10}$, поскольку турбулентная вязкость его вещества на 8 и более порядков выше молекулярной, что следует из наблюдаемого распределения углового момента и массы в Солнечной системе и в многочисленных системах молодых звезд с дисками (см., например, Richard, Zahn, 1999). Следует, однако, иметь в виду, что сказанное не относится к осредненному тензору “напряжений относительного движения фаз” $\overline{\mathbf{\Pi}}_{rel}$, влияние которого на двухфазное течение дисковой среды может быть сопоставимым по порядку величины с тензором Рейнольдса $\mathbf{R}$. В частности, в окрестности субдиска, где значительна концентрация пылевых частиц достаточно крупных размеров (и, следовательно, $\overline{\mathbf{w}} \gg 0$) эти “сдвиговые” напряжения действуют особенно эффективно, приводя к дополнительной турбулизации потока, правда, в объеме, сопоставимом с объемом пылевого слоя, т.е. малом по сравнению со всем объемом диска (см., например, Goldrich, Ward, 1973).

Можно показать, используя консервативность $(\mathbf{u}'')_L \cong 0$ лагранжевых пульсаций среднемассовой скорости газопылевого потока, что тензор Рейнольдса $\mathbf{R}$ (в случае изотропного турбулентного поля) связан с градиентами $\nabla\langle\mathbf{u}\rangle$ осредненной по Фавру скорости течения следующим определяющим соотношением[38] (см., например, Колесниченко, Маров, 1999)

$$\mathbf{R} = -2/3\bar{\rho}b\mathbf{I} + 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\mathring{\mathbf{D}},\quad \mathring{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{D} - 1/3\mathbf{I}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle) \tag{110}$$

или

$$\mathbf{R} = -2/3\bar{\rho}b\mathbf{I} + \bar{\rho}\nu^{\text{turb}}(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + (\langle\mathbf{u}\rangle)^{\text{transp}}) - 2/3\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\mathbf{I}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle), \tag{111}$$

где $\mathbf{D} \equiv 1/2(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + (\langle\mathbf{u}\rangle)^{\text{transp}})$ – тензор осредненных деформаций; $\mathring{\mathbf{D}}$ – тензор осредненных скоростей деформаций[39], ν^{turb} – кинематический коэффициент турбулентной вязкости газопылевой смеси (возможная в дифференциально вращающемся газопылевом облаке анизотропия коэффициентов турбулентной вязкости ν^{turb} (см. Сафронов, 1969) подробно проанализирована в работе (Колесниченко, 2000)).

В соотношение (110) входит ключевая в теории турбулентности величина

$$b \equiv \overline{\rho|u''|^2}/2\bar{\rho} \tag{112}$$

– осредненное значение кинетической энергии турбулентных пульсаций среднемассовой скорости газопылевого континуума (турбулентная энергия), для нахождения которой необходимо иметь, в общем случае, соответствующее балансовое уравнение (см. (145)). Отметим, что поскольку в развитом турбулентном потоке создается непрерывное распределение пульсаций скорости $\mathbf{u}''$ на самых различных частотах f (от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения), то дисперсию (112) часто удобно представлять в виде суммы соответствующих величин, относящихся к разным частотам

$$b = \int_0^\infty b(f)\,\mathrm{d}f, \tag{113}$$

где $b(f)$ – доля турбулентной энергии газопылевой смеси, соответствующая полосе частот $\mathrm{d}f$ (энергетический спектр величины b).

[38] Определяющие соотношения для тензора рейнольдсовых напряжений $\mathbf{R}$ (110) и для осредненного тензора вязких напряжений $\overline{\mathbf{\Pi}}$ были получены методами неравновесной термодинамики, исходя из осредненного соотношения Гиббса в работе (Marov, Kolesnichenko, 2002).

[39] Здесь и далее оставлены прежние обозначения $\mathbf{D}$ и $\mathring{\mathbf{D}}$ и для осредненных тензоров деформации и скоростей деформации, что не должно привести к двусмысленности (сравни с формулой (40)).

Осредненный тензор "относительных" напряжений $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}}$ в уравнении (107) (напомним, что тензор $\mathbf{\Pi}_{\text{rel}}$ возникает из-за инерционных эффектов относительного движения низко дисперсной фракции твердых частиц и газа (см. формулу (37)) можно, с учетом принятых нами выше предположений, преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} &\equiv -\overline{\rho C_d C_g \mathbf{w}\mathbf{w}} \equiv \\ &\equiv -\overline{\rho C_d C_g}(\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'}) - \overline{\mathbf{w}\mathbf{w}(\rho C_d C_g)'} \equiv \\ &\equiv -(\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'})(\bar{\rho}\langle C_d\rangle\langle C_g\rangle + \overline{\rho C''_d C''_g}) - \\ &\quad - 2\overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}'(\rho C_d C_g)'} - \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'(\rho C_d C_g)'} \cong \\ &\cong -\bar{s}\rho_d\langle C_g\rangle(\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'}) - \\ &\quad - 2\overline{\mathbf{w}}(\rho_d\overline{\mathbf{w}'s'}\langle C_g\rangle + \overline{\rho C''_g\mathbf{w}'}\langle C_d\rangle + \overline{\rho C''_d C''_g\mathbf{w}'}).\end{aligned} \tag{114}$$

Для двухфазного турбулентного потока в соотношениях типа (114) всеми корреляциями обычно пренебрегают и учитывают только первый член (см., например, Зуев, Лепешинский, 1981; Картушинский, 1984):

$$\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} \cong -\bar{s}\rho_d\langle C_g\rangle\overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}}, \tag{115}$$

что справедливо лишь в том случае, когда скорость осредненного относительного движения фаз $\overline{\mathbf{w}}$ намного больше скорости пульсаций $\mathbf{w}'$, т.е. для достаточно крупных твердых частиц. Для менее инерционных мелко- и среднедисперсных частиц нужно учитывать, вообще говоря, два первых члена в (114); тогда

$$\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} = -\bar{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{R}_{\text{rel}}, \tag{116}$$

где $\mathbf{R}_{\text{rel}} \equiv -\bar{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'}$ – дополнительный тензор рейнольдсовых напряжений, обусловленный пульсациями поля относительных скоростей фаз. В рамках градиентных моделей возможны два подхода к определению подобного рода парных корреляций. Согласно первому из них корреляционные моменты $\mathbf{R}_{\text{rel}}$ для относительно мелких частиц выражаются непосредственно через рейнольдсовы напряжения $\mathbf{R}$ газопылевого континуума в целом, т.е. $\mathbf{R}_{\text{rel}} = \beta\mathbf{R}$, где β – коэффициент вовлечения дисперсных частиц в пульсационное движение газа (см., например, Гавин и др., 1984). Вторым способом определения дополнительных турбулентных напряжений $\mathbf{R}_{\text{rel}}$ является использование градиентных соотношений типа (111) с заменой осредненных скоростей $\langle\mathbf{u}\rangle$ на $\overline{\mathbf{w}}$ и определением соответствующего коэффициента "турбулентной вязкости" (см., например, Melville, Bray, 1979).

Уравнение баланса для осредненной внутренней энергии смеси

Осредненное энергетическое уравнение для газопылевой дисковой системы в целом получим, осредняя по ансамблю возможных реализаций уравнение энергии (45) для мгновенного движения; в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H_{sum}\rangle}{Dt} = \overline{\frac{dp_{sum}}{dt}} - \nabla\cdot(\mathbf{q}^{turb}_{sum} + \bar{\mathbf{q}}_{sum}) + \\ + \overline{\Phi_u} + \overline{R_{gd}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p}, \tag{117}$$

где $\mathbf{q}^{turb}_{sum} = \mathbf{q}^{turb} + \mathbf{q}^{turb}_{rad}$;

$$\mathbf{q}^{turb} \equiv \overline{\rho H''\mathbf{u}''} \cong \langle c_p\rangle\overline{\rho T''\mathbf{u}''} + \sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle \mathbf{J}^{turb}_\alpha \tag{118}$$

– турбулентный поток тепла, возникающий благодаря корреляции между пульсациями энтальпии H'' вещества и гидродинамической скорости $\mathbf{u}''$;

$$\mathbf{q}^{turb}_{rad} \equiv \overline{\rho H''_{rad}\mathbf{u}''} \cong \langle c_{p,\,rad}\rangle\overline{\rho T''\mathbf{u}''}, \\ \langle c_{p,\,rad}\rangle \equiv 16a\langle T\rangle^3/3\bar{\rho} \tag{119}$$

– турбулентный радиационный поток тепла. Приближенные соотношения для потоков тепловой энергии (118) и (119) записаны с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Формулу (118) легко получить, используя алгебраические свойства (83) осреднения Фавра и выражение

$$H'' = \sum_\alpha [h''_\alpha\langle C_\alpha\rangle + \langle h_\alpha\rangle C''_\alpha + (C''_\alpha h''_\alpha)''] = \\ = \langle c_p\rangle T'' + \sum_\alpha C''_\alpha\langle h_\alpha\rangle + (c''_p T'')'' \tag{120}$$

для пульсации удельной энтальпии вещества диска. Здесь $h''_\alpha = c_{p\alpha}T''$ – пульсация парциальной энтальпии фазы α ($c_{p\alpha} = \mathrm{const}$);

$$\langle c_p\rangle = \sum_\alpha c_{p\alpha}\langle C_\alpha\rangle, \quad c''_p = \sum_\alpha c_{p\alpha}C''_\alpha \tag{121}$$

– соответственно осредненная и пульсационная составляющие удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении. Осредненные значения для энтальпий излучения и вещества, входящие в уравнение (117), определяются соотношениями

$$\langle H_{rad}\rangle \cong 4/3a\langle T\rangle^4/\bar{\rho}, \\ \langle H\rangle \cong \langle c_p\rangle\langle T\rangle + \sum_\alpha h^0_\alpha\langle C_\alpha\rangle, \tag{122}$$

которые следуют из (43) и (44).

Субстанциональную производную от суммарного давления в уравнении (117) удобно представить, с учетом формулы (102), в виде

$$\overline{dp_{sum}/dt} \equiv D\bar{p}_{sum}/Dt + \mathbf{J}^{turb}_v\cdot\nabla\bar{p}_{sum} + \overline{\mathbf{u}''\cdot\nabla p'_{sum}} = \\ = D\bar{p}_{sum}/Dt + \mathbf{J}^{turb}_v\cdot\nabla\bar{p}_{sum} + \\ + \nabla\cdot(\overline{p'_{sum}\mathbf{u}''}) - \overline{p'_{sum}\nabla\cdot\mathbf{u}''}. \tag{123}$$

Кроме того, величину $\overline{\Phi_u}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\overline{\Phi_u} \equiv \bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \overline{\mathbf{\Pi}_{sum} : \nabla\mathbf{u}''} = \\ = \bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} : \mathbf{D} + \bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle, \tag{124}$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle \equiv \overline{\mathbf{\Pi}_{sum} : \nabla\mathbf{u}''} \tag{125}$$

– скорость диссипации турбулентной кинетической энергии газопылевой смеси в тепло под действием “молекулярной” вязкости (вторая ключевая характеристика в теории турбулентности). Можно показать (см. Marov, Kolesnichenko, 2002), что в случае развитой турбулентности диссипативное слагаемое (125) несколько упрощается

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle \cong \bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} : \nabla\mathbf{J}^{turb}_v + \overline{\mathbf{\Pi}' : \nabla\mathbf{u}'} \approx \\ \approx \overline{\mathbf{\Pi}' : \nabla\mathbf{u}'} \equiv \bar{\rho}\varepsilon \geq 0; \tag{125*}$$

заметим, что величина ε (“истинная” диссипация турбулентной энергии) всегда положительна. Подставляя (123) и (125*) в (117), получим следующее выражение для осредненного энергетического уравнения газопылевой смеси

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H_{sum}\rangle}{Dt} = \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} - \nabla\cdot(\mathbf{q}^{turb}_{sum} - \overline{p'_{sum}\mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{sum}) + \\ + \bar{\mathbf{\Pi}}_{sum} : \mathbf{D} + \overline{R_{gd}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p} + \\ + \mathbf{J}^{turb}_v\cdot\nabla\bar{p}_{sum} - \overline{p'_{sum}\nabla\cdot\mathbf{u}''} + \bar{\rho}\varepsilon. \tag{126}$$

Для замыкания уравнения (126) необходимы определяющие соотношения для турбулентных потоков тепла; эти соотношения, полученные в монографии (Marov, Kolesnichenko, 2002), имеют вид

$$\mathbf{q}^{turb} = \overline{p'\mathbf{u}''} - \chi^{turb}\left\{\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\right\} + \\ + \sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\mathbf{J}^{turb}_\alpha, \tag{127}$$

$$\mathbf{q}^{turb}_{rad} = \overline{p'_{rad}\mathbf{u}''} - \chi_{rad}\left\{\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}_{rad}}{\bar{\rho}\langle c_{p,\,rad}\rangle}\right\}, \tag{128}$$

где

$$\chi^{\text{turb}} = \bar{\rho}\langle c_p\rangle \frac{\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}, \quad \chi_{\text{rad}} = \frac{4ac\langle T\rangle^3}{3\kappa\bar{\rho}} \tag{130}$$

– соответственно коэффициент турбулентной теплопроводности газопылевой среды и коэффициент турбулентной лучистой теплопроводности; $\langle c_p\rangle = [\bar{\rho}_g(1-\bar{s}) + \rho_d\bar{s}\,c_{pd}]/\bar{\rho}$ – осредненная удельная теплоемкость (при постоянном давлении) для суммарного континуума[40]. В соответствии с выражением (127) существуют два механизма передачи тепловой энергии через газовзвесь:

1) под действием осредненного градиента температуры (точнее, потенциальной температуры) для осредненного движения

$$\theta \equiv \text{const}\langle T\rangle/\bar{p}^{\langle\mathcal{R}\rangle/\langle c_p\rangle}, \tag{131}$$

поскольку $\frac{\nabla\theta}{\theta} = \frac{1}{\langle T\rangle}\left(\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\right) \approx \frac{1}{\langle T\rangle}(\nabla_z\langle T\rangle + G_a)$, где $G_a \equiv g_z/\langle c_p\rangle$ – адиабатический градиент температуры в газопылевом диске (см. уравнение (177));

2) потоками турбулентной диффузии $\mathbf{J}_\alpha^{\text{turb}} = -\bar{\rho}\,D^{\text{turb}}\nabla\langle C_\alpha\rangle$ (см. (96)), причем каждая частица вещества фазы α переносит с собой в среднем $\langle h_\alpha\rangle$ тепловой энергии (заметим, что поскольку $\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha^{\text{turb}} = 0$, то и $D_d^{\text{turb}} = D_g^{\text{turb}} = D^{\text{turb}}$).

Следует также отметить, что первые члены в (127) и (128) не играют роли потока энергии, поскольку величина $\overline{p'_{\text{sum}}\mathbf{u}''}$ выпадает из полного энергетического уравнения (126), и оставлены в формулах (127) и (128) только из соображений удобства.

Приведем теперь полезную при моделировании турбулизованной газовзвеси форму записи соотношения (127). Используя (96) для преобразования (127), в результате будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{\text{turb}} &= \overline{p'\mathbf{u}''} - \chi^{\text{turb}}\left(\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\right) - \\ &- D^{\text{turb}}\bar{\rho}\sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\nabla\langle C_\alpha\rangle = \\ &= \overline{p'\mathbf{u}''} - \frac{\chi^{\text{turb}}}{\langle c_p\rangle}\left(\nabla\langle H\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}}\right),\end{aligned} \tag{127*}$$

где нами сделано обычное для теории турбулентности предположение о равенстве единице турбулентного числа Льюиса, $\text{Le}^{\text{turb}} = \chi^{\text{turb}}/\bar{\rho}\langle c_p\rangle D^{\text{turb}} = 1$ (см. Монин, Яглом, 1992).

Уравнение (126) иногда удобно записать через осредненную суммарную энергию $\langle E_{\text{sum}}\rangle$ вещества и излучения. Используя для этого преобразование

$$\begin{aligned}&\bar{\rho}\text{D}\langle E_{\text{sum}}\rangle/\text{D}t + \bar{p}_{\text{sum}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle = \\ &= \rho\text{D}\langle H_{\text{sum}}\rangle/\text{D}t - \text{D}\bar{p}_{\text{sum}}/\text{D}t\end{aligned} \tag{132}$$

(являющееся следствием соотношения $\langle H_{\text{sum}}\rangle = \langle E_{\text{sum}}\rangle + \bar{p}_{\text{sum}}/\bar{\rho}$ и осредненного уравнения неразрывности (85)), для развитого турбулентного течения в диске получим

$$\begin{aligned}&\bar{\rho}\frac{\text{D}\langle E_{\text{sum}}\rangle}{\text{D}t} + \nabla\cdot(\mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} - \overline{p'_{\text{sum}}\mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{\text{sum}}) = \\ &= -\bar{p}_{\text{sum}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} : \mathbf{D} + \\ &+ \overline{R_{gd}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma\mathbf{w}\cdot\nabla p} + \mathbf{J}^{\text{turb}}\cdot\nabla\bar{p}_{\text{sum}} - \\ &- \overline{p'_{\text{sum}}\nabla\cdot\mathbf{u}''} + \bar{\rho}\varepsilon.\end{aligned} \tag{126*}$$

Турбулентный поток удельного объема в газопылевой среде

Получим теперь окончательное соотношение для турбулентного потока удельного объема $\mathbf{J}_v^{\text{turb}}$ (см. формулу (91*)). Для его вывода найдем сначала выражение для турбулентных пульсаций плотности ρ'_g в газовой составляющей смеси, в качестве уравнения состояния которой возьмем, как и прежде, уравнение состояния совершенного многокомпонентного газа

$$p = p_g = k_B T\sum_k n_{g(k)} = \rho_g\mathcal{R}_g T, \tag{133}$$

где

$$\mathcal{R}_g = k_B\sum_k n_{g(k)}/\rho_g = k_B\sum_k Z_k \tag{134}$$

– так называемая "газовая постоянная" для смеси газов; $Z_k = n_{g(k)}/\rho_g$ – удельная (на единицу массы газового континуума) числовая плотность k-ой компоненты. Представляя актуальные значения величин $\mathcal{R}_g$ и T в виде сумм осредненных и пульса-

[40] Далее мы будем считать, что в диске $\text{Sc}^{\text{turb}} = \text{Pr}^{\text{turb}}$, поскольку обычно в турбулизованной смеси предполагают равенство турбулентных коэффициентов диффузии и температуропроводности ($\chi^{\text{turb}}/\bar{\rho}\langle c_p\rangle = D^{\text{turb}}$), что равносильно равенству путей смешения для вещества и тепла.

ционных значений ($\mathcal{R}_g = \langle\mathcal{R}_g\rangle + \mathcal{R}_g''$, $T = \langle T\rangle + T''$) перепишем (133) следующим образом

$$p = \langle\mathcal{R}_g\rangle\rho_g\langle T\rangle + \mathcal{R}_g''\rho_g\langle T\rangle + \langle\mathcal{R}_g\rangle\rho_g T'' + \mathcal{R}_g''\rho_g T'' =$$
$$\cong \langle\mathcal{R}_g\rangle\rho_g\langle T\rangle + k_B\rho_g\langle T\rangle\sum_{k=1}^{n} Z_k'' + \tag{135}$$
$$+ \langle\mathcal{R}_g\rangle\rho_g T'' + k_B\rho_g\sum_{k=1}^{n}(Z_k''T'').$$

Если теперь применить к (135) оператор статистического осреднения, то получим осредненное уравнение состояния для теплового давления газовзвеси

$$\bar{p} = \langle\mathcal{R}_g\rangle\bar{\rho}_g\langle T\rangle + k_B\bar{\rho}_g\sum_{k=1}^{n}\langle Z_k''T''\rangle \cong \cong \langle\mathcal{R}_g\rangle\bar{\rho}_g\langle T\rangle \tag{136}$$

(заметим, что пульсационный член в осредненном уравнении состояния (136) в теории турбулентности обычно опускают), которое используем для исключения произведения $\langle\mathcal{R}_g\rangle\langle T\rangle$ из (135); в результате для пульсаций ρ_g' будем иметь (Маров, Колесниченко, 1987)

$$\frac{\rho_g'}{\bar{\rho}_g} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho_g T''}{\bar{\rho}_g\langle T\rangle} - \frac{k_B\langle T\rangle\rho_g}{\bar{p}}\sum_{k=1}^{n} Z_k''. \tag{137}$$

Известно, что относительными пульсациями давления для течений газа с малыми числами Маха (Ma), почти всегда можно пренебречь по сравнению с относительными пульсациями температуры. Эта гипотеза (Morkovin, 1961), проверенная вплоть до Ma = 5, справедлива, по-видимому, и для турбулентных движений в тонких аккреционных дисках: движение вдоль r- и z-направлений происходят с дозвуковыми скоростями, а скорость вращения u_φ превосходит скорость звука c_{gs} (условие тонкости диска $h_{disk} \ll r$ вместе с выражением $h_{disk} \approx c_{gs}/\Omega_{K,\,mid}$ для толщины диска требует $h_{disk}/r \approx \approx c_{gs}/u_\varphi \ll 1$). Далее будем также предполагать, что средняя масса газовой составляющей газовзвеси не флуктуирует, поэтому $\sum_{k=1}^{n} Z_k'' = (n_g/\rho_g)'' = 0$. Тогда, при учете (137), корреляционный член (содержащий пульсации истинной плотности газа) в соотношении (91*) можно переписать в виде

$$-\frac{\overline{\rho_g'\mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g} - \frac{\overline{\rho C_g T''\mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g\langle T\rangle} \cong \langle C_g\rangle\frac{\overline{\rho T''\mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g\langle T\rangle} = \frac{\langle T''\mathbf{u}''\rangle}{\langle T\rangle} \tag{138}$$

(здесь, как и всюду далее, члены с тройными корреляциями отброшены). Для окончательного преобразования этого выражения воспользуемся определяющим соотношением (127) для турбулентного потока тепла (118):

$$-\frac{\overline{\rho_g'\mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g} \cong \frac{1}{\langle T\rangle}\overline{\rho T''\mathbf{u}''} \cong$$
$$\cong \frac{1}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\mathbf{J}_\alpha^{turb}\right). \tag{139}$$

Наконец, подставляя (96) и (139) в (91*) и учитывая (130), в результате получим следующее определяющее соотношение для турбулентного потока удельного объема гетерогенной смеси

$$\mathbf{J}_v^{turb} = -\langle\sigma\rangle\frac{\bar{\rho}}{\rho_d\bar{\rho}_g}\mathbf{J}_d^{turb} +$$
$$+ \frac{1}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\mathbf{J}_\alpha^{turb}\right) \cong \tag{140}$$
$$\cong \bar{\rho}\frac{\nu^{turb}}{\mathrm{Sc}^{turb}}\left[\frac{\rho_d}{\bar{\rho}_g}\nabla\left(\frac{\bar{s}}{\bar{\rho}}\right) - \frac{1}{\langle T\rangle}\left(\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\right)\right].$$

Балансовые энергетические уравнения

В турбулизованном течении дискового вещества, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое разнообразие всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергий движения твердых частиц и газа, вносящих свой вклад в сохраняющуюся осредненную суммарную энергию. Для наиболее точного истолкования отдельных слагаемых энергетического баланса рассмотрим полную систему уравнений энергии для осредненных полей пульсирующих термогидродинамических параметров газопылевого облака, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии газопылевого потока. Умножая скалярно уравнение движения (107) на скорость $\langle\mathbf{u}\rangle$ и учитывая формулу (38) для гравитационной силы, после необходимых преобразований получим следующую субстанциональную форму уравнения живых сил для осредненного движения дискового вещества (теорема количества движения)

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}(|\langle\mathbf{u}\rangle|^2/2) + \nabla\cdot[(\mathbf{I}\bar{p}_{sum} - \mathbf{R} - \overline{\mathbf{\Pi}_{sum}^*})\langle\mathbf{u}\rangle] = \tag{141}$$
$$= p_{sum}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle - (\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}_{sum}^*}):\nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\langle\Psi\rangle.$$

Здесь $-\nabla\langle\Psi\rangle = \mathbf{g} = G\mathcal{M}_\odot\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$; $|\langle\mathbf{u}\rangle|^2/2$ – удельная кинетическая энергия осредненного движения вещества диска. Хотя уравнение (141) имеет энергетическую природу, оно не является законом сохранения энергии в турбулизованном континууме: уравнение (141) описывает закон превращения кинетической энергии осредненного движения газовзвеси в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учета необратимого перехода механической энергии диска в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (141): величина $\nabla \cdot (\bar{p}_{\rm sum}\langle\mathbf{u}\rangle)$ связана с оттоком механической энергии из единицы объема дисковой среды за единичный интервал времени; дивергенция $\nabla \cdot [(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}^*_{\rm sum}})\langle\mathbf{u}\rangle]$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение $(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}^*_{\rm sum}})$ в осредненной движущейся системе "газозвесь плюс излучение" совершает работу в единичном объеме; величина $\bar{p}_{\rm sum}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle$ (>0, или <0) связана со скоростью обратного адиабатического превращения осредненной внутренней энергии (тепла) $\langle E_{\rm sum}\rangle$ в механическую энергию системы (см. уравнение (126*)) и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единичном объеме против осредненного суммарного давления $\bar{p}_{\rm sum}$ потоком движущейся газовзвеси; знак величины $\bar{p}_{\rm sum}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться $(\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle > 0)$ или сжиматься $(\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle < 0)$; величина $(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}^*_{\rm sum}}) : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$ представляет собой полную скорость необратимого превращения кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии (см. уравнения (126*), (144) и (149)), причем диссипация энергии происходит как под влиянием "молекулярной" вязкости со скоростями $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$ и $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$, так и под влиянием турбулентной вязкости со скоростью $\mathbf{R} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$.

Если сложить уравнение (141) и уравнение баланса потенциальной энергии вещества диска

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\langle\Psi\rangle}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\langle\Psi\rangle) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle\langle\Psi\rangle) = \bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle \cdot \nabla\langle\Psi\rangle, \tag{142}$$

то в результате получим следующее уравнение переноса осредненной механической энергии турбулизованного газопылевого потока

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{|\langle\mathbf{u}\rangle|^2}{2} + \langle\Psi\rangle\right) + \nabla \cdot [(\mathbf{I}\bar{p}_{\rm sum} - \mathbf{R} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel})\langle\mathbf{u}\rangle] = \bar{p}_{\rm sum}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle - (\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel}) : \nabla\mathbf{D}. \tag{143}$$

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии относительного движения фаз. Осредняя уравнение (43) и пренебрегая корреляционными членами третьего порядка (и тем самым турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии[41], а также произведениями термогидродинамических потоков (например, членами типа $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} : \nabla\mathbf{J}_v^{\rm turb}$) в осредненном газопылевом континууме, как величинами второго порядка малости, в результате получим

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\langle C_{\rm d}\rangle\langle C_{\rm g}\rangle|\overline{\mathbf{w}}|^2/2) \approx \bar{\rho}\langle C_{\rm d}\rangle\langle C_{\rm g}\rangle\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(|\overline{\mathbf{w}}|^2/2) \cong \cong -\overline{R_{\rm gd}|\mathbf{w}|^2 + s\sigma\mathbf{w} \cdot \nabla p} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} : \mathbf{D} - \bar{\rho}\sigma_{\rm rel}, \tag{144}$$

где

$$\bar{\rho}\sigma_{\rm rel} \equiv -\overline{\mathbf{\Pi}'_{\rm rel} : \nabla\mathbf{u}'}. \tag{145}$$

Здесь диссипация тепла $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} : \mathbf{D}$ (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой тензором относительных напряжений над градиентом осредненной скорости $\nabla\langle\mathbf{u}\rangle \neq 0$ вследствие относительного сдвига скоростей фаз при орбитальном движении дискового вещества), связана со скоростью перехода осредненной кинетической энергии диффузии в кинетическую энергию осредненного движения газопылевой смеси в целом (сравни с (141)); $\sigma_{\rm rel}$ – дополнительный источник генерирования турбулентной энергии b, связанный с присутствием средних и крупных инерционных частиц в потоке (см. уравнение (149*)). Следует иметь в виду, что согласно (Gore, Crowe, 1989) только за крупными частицами (при числах Рейнольдса обтекания частиц $\mathrm{Re_d} > 400$) возникают турбулентные вихревые следы, дестабилизирующие течение газовой составляющей и трансформирующие энергию осредненного относительного движения в высокочастотные компоненты энергетического спектра турбулентности. Мелкие же частицы ($\mathrm{Re_d} < 110$) преимущественно подавляют энергию турбулентности, расходуя ее на собственное ускорение (т.е. на вовлечение в пульсационное движение полидисперсного потока), причем с уменьшением инерционности частиц (до определенной степени) ламинаризирующее воздействие дисперсной фазы на поток возрастает. Что касается частиц средних размеров ($110 < \mathrm{Re_d} < 400$), то они оказывают смешанное влияние на дисковую турбулентность.

[41] Турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии как величиной третьего порядка малости мы пренебрегаем и тем самым не рассматриваем конкретный вид связанного с наличием мелкодисперсных частиц дополнительного диссипативного члена (см. Danon и др., 1977) в уравнении переноса турбулентной энергии газопылевой среды (149), рассматриваемой как единое целое. Важно отметить, что в случае течения со средними и крупными частицами, время релаксации которых значительно, величина дополнительной диссипации энергии турбулентности будет пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (149) (см., например, Вараксин, 2003).

Баланс турбулентной энергии. Рассмотрим теперь уравнение переноса турбулентной энергии $b \equiv \overline{|\mathbf{u}''|^2}/2$ газопылевого вещества аккреционного диска. Это фундаментальное в теории турбулентности уравнение, или некоторые его модификации, лежит в основе многих современных полуэмпирических теорий турбулентности (см. Монин, Яглом, 1992; Колесниченко, Маров, 1999). С помощью уравнения для b в случае гетерогенной среды можно, в частности, проанализировать динамическое воздействие дисперсной фазы на интенсивность турбулентности в газопылевой дисковой среде, а также разработать феноменологический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости среды с учетом влияния обратных эффектов переноса пыли и "потенциальной" температуры на затухание (поддержание) сдвиговой турбулентности в допланетном облаке. Балансовое уравнение для b может быть получено различными способами (см. Marov, Kolesnichenko, 2002), одним из которых мы воспользуемся и в рассматриваемом здесь случае двухфазной среды.

Пусть $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho d\mathcal{A}/dt = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{A}} + \sigma_{\mathcal{A}}$, где $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$ и $\sigma_{\mathcal{A}}$ – соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объемная плотность источника признака $\mathcal{A}$. Например, для уравнения движения (35):

$$\mathcal{A} \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{J}_{\mathcal{A}} \equiv -\mathbf{\Pi}^*_{\text{sum}}, \quad \sigma_{\mathcal{A}} \equiv -p_{\text{sum}}\mathbf{I} + \rho\mathbf{g}. \qquad (146)$$

Легко показать (для чего нужно умножить тождество $d\mathcal{A}''/dt = d\mathcal{A}/dt - D\langle\mathcal{A}\rangle/Dt - \mathbf{u}'' \cdot \nabla\langle\mathcal{A}\rangle$ на $\rho\mathcal{A}''$ и осреднить результат по Рейнольдсу), что балансовое уравнение для среднеквадратичной пульсации $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$ имеет следующий общий вид (см. Колесниченко, 1995)

$$\bar{\rho}\underbrace{\frac{D\langle\mathcal{A}''^2/2\rangle}{Dt}}_{\text{Конвекция}} + \nabla \cdot \underbrace{(\overline{\rho\mathcal{A}''^2\mathbf{u}''/2 + \mathcal{A}''\mathbf{J}_{(A)j}})}_{\text{Диффузия}} =$$
$$= \underbrace{-\mathbf{J}^{\text{turb}}_A \cdot \nabla\langle\mathcal{A}\rangle}_{\text{Воспроизводство}} + \underbrace{\overline{\mathcal{A}''\sigma_{\mathcal{A}}}}_{\text{Перераспределение}} \underbrace{- \bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathcal{A}}\rangle}_{\text{Диссипация}}, \qquad (147)$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathcal{A}}\rangle \equiv -\overline{\mathbf{J}_{\mathcal{A}} \cdot \nabla\mathcal{A}''} \qquad (148)$$

– скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$. Обобщенное уравнение переноса (147) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временнóе распределение дисперсии $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, диффузии, образования дисперсии за счет обмена энергии между осредненным и пульсационным движением, перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$ вследствие "молекулярных" процессов переноса.

Подставим теперь (146) в (147) и (148); в результате получим следующее уравнение переноса турбулентной энергии газопылевой смеси

$$\bar{\rho}\frac{Db}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}^{\text{turb}}_b = \mathbf{R} : \mathbf{D} - \mathbf{J}^{\text{turb}}_v \cdot \nabla\bar{p}_{\text{sum}} + \overline{p'_{\text{sum}}\nabla \cdot \mathbf{u}''} - \bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \qquad (149)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{J}^{\text{turb}}_b \equiv \overline{\rho(|\mathbf{u}''|^2/2 + p'_{\text{sum}}/\rho)\mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{\Pi}_{\text{sum}} + \mathbf{\Pi}_{\text{rel}}) \cdot \mathbf{u}''}, \\ \bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle \equiv \overline{(\mathbf{\Pi}_{\text{sum}} + \mathbf{\Pi}_{\text{rel}}) : \nabla\mathbf{u}''}. \end{cases} \qquad (150)$$

Оценки отдельных членов уравнения (149), проведенные для случая развитой турбулентности в монографии (Marov, Kolesnichenko, 2002), позволяют несколько его упростить

$$\bar{\rho}\frac{D\overline{|\mathbf{u}''|^2/2}}{Dt} + \nabla \cdot \{\overline{\rho(|\mathbf{u}''|^2/2 + p'_{\text{sum}})\mathbf{u}''} - (\mathbf{\Pi}^*_{\text{sum}})' \cdot \mathbf{u}''\} =$$
$$= \mathbf{R} : \mathbf{D} + \overline{p'_{\text{sum}}\nabla \cdot \mathbf{u}'} - \mathbf{J}^{\text{turb}}_v \cdot \nabla\bar{p}_{\text{sum}} - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}, \qquad (149^*)$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle = (\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}}) : \nabla\mathbf{J}^{\text{turb}}_v +$$
$$+ \overline{\mathbf{\Pi}'_{\text{sum}} : \nabla\mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{\Pi}'_{\text{rel}} : \nabla\mathbf{u}'} \cong \bar{\rho}\varepsilon - \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}.$$

Первый член в левой части уравнения (149*) характеризует изменение во времени (и конвективный перенос осредненным движением) кинетической энергии турбулентности диска b, а второй член – отражает перенос энергии турбулентных пульсаций за счет процессов турбулентной "диффузии"; величина (диссипация энергии)

$$\mathbf{R} : \mathbf{D} \equiv -2/3\bar{\rho}b\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}} \qquad (150^*)$$

(см. формулу (B.11)) в правых частях уравнений (141) и (149*) фигурирует с разными знаками и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осредненного движения в энергию турбулентности газопылевой дисковой среды, рассматриваемой как целое[42] (этот

[42] Следует подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора пространственно-временного масштаба осреднения турбулентного движения. В случае мелкомасштабной турбулентности величина $\mathbf{R} : \mathbf{D}$ всегда положительна, так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию осредненного движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций (это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности). Вместе с тем, крупномасштабными турбулентными вихрями кинетическая энергия турбулентности может передаваться энергии осредненного движения (см., например, Ван Мигем, 1977).

гидродинамический механизм генерации турбулентности в дифференциально вращающемся кеплеровском диске рассматривается в настоящей работе как основной (см. Фридман, 1989)); величина $\overline{p'_{\rm sum}\nabla\cdot\mathbf{u}'}$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии газовзвеси в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций суммарного давления $p'_{\rm sum}$ дисковой системы и расширения или сжатия турбулентных вихрей ($\nabla\cdot\mathbf{u}' > 0$ или $\nabla\cdot\mathbf{u}' < 0$); величина $\mathbf{J}_V^{\rm turb}\cdot\nabla\bar{p}_{\rm sum}$ представляет собой скорость перехода (в единице объема среды) между турбулентной и осредненной внутренней энергиями диска, причем мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них величина $\mathbf{J}_V^{\rm turb}\cdot\nabla\bar{p}_{\rm sum} > 0$, а крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией (для которых $\mathbf{J}_V^{\rm turb}\cdot\nabla\bar{p}_{\rm sum} < 0$ (см. Колесниченко, Маров, 1999)), напротив, преобразовывают тепловую энергию газопылевого потока в осредненную кинетическую энергию пульсаций скорости (следует отметить, что этот механизм генерации турбулентности в диске, предложенный в работе (Lin, Papaloizou, 1980) как основной, не может рассматриваться в таком качестве, поскольку он не всеобъемлющий и носит временный характер (см. Ruden, Pollack, 1991; Nomura, 2002)); парная корреляция $\bar{\rho}\varepsilon \equiv \equiv \overline{\mathbf{\Pi}'_{\rm sum}:\nabla\mathbf{u}'} > 0$ в развитом турбулентном потоке (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений[43] над турбулентными вихрями с градиентом пульсационной скорости, $\nabla\mathbf{u}' \neq 0$) представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости (см. уравнение (126*)); наконец, величину $\bar{\rho}\,\sigma_{\rm rel} = -\overline{\mathbf{\Pi}'_{\rm rel}:\nabla\mathbf{u}'} > 0$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесенную к единице времени и единице объема), совершаемую пульсациями тензора относительных напряжений над турбулентными вихрями (см. уравнение (145)), можно интерпретировать как дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом диске, возникающую из-за инерционных эффектов относительного движения дисперсной и газовой фаз и связанную с образованием вихревого следа за крупными частицами с размерами >1 см (см., например, Зайчик, Вараксин, 1999). Отметим, что именно с этим механизмом турбулизации потока фракцией крупномасштабных частиц сантиметрового размера и более (рождающихся благодаря процессам коагуляции и оседания в окрестности центральной плоскости допланетного облака) можно связать часть того дополнительного источника турбулизации течения газовзвеси в окрестности тонкого пылевого слоя (см. Goldreich, Ward, 1973), которая, по мнению многих исследователей, в значительной степени предотвращает дальнейшее оседание мелких пылевых частиц (микронных размеров) в субдиск и тем самым отодвигает во времени момент наступления прямой гравитационной неустойчивости этого слоя[44] (см., например, Сафронов, 1969; Weidenschilling, 1884; Goodmann, Pindor, 2000).

Корреляцию $\bar{\rho}\,\sigma_{\rm rel}$ с точностью до тройных корреляционных членов можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\sigma_{\rm rel} &= \overline{(s\rho_{\rm d}C_{\rm g}\mathbf{w}\mathbf{w})':\nabla\mathbf{u}'} = \\ &= \rho_{\rm d}\bar{\mathbf{w}}\bar{\mathbf{w}}\overline{sC_{\rm g}:\nabla\mathbf{u}'} + 2\rho_{\rm d}\bar{\mathbf{w}}\overline{sC_{\rm g}\mathbf{w}':\nabla\mathbf{u}'} + \\ &+ \rho_{\rm d}\overline{sC_{\rm g}\mathbf{w}'\mathbf{w}':\nabla\mathbf{u}'} \cong \\ &\cong \rho_{\rm d}\bar{\mathbf{w}}\bar{\mathbf{w}}:(\langle C_{\rm g}\rangle\overline{s'\nabla\mathbf{u}'} + \bar{s}\overline{C'_{\rm g}\nabla\mathbf{u}'}) + \\ &+ 2\rho_{\rm d}\bar{s}\langle C_{\rm g}\rangle\bar{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}':\nabla\mathbf{u}'},\end{aligned} \tag{151}$$

из которого видно, что дополнительная генерация турбулентности в запыленном диске (в частности, в субдиске, в котором присутствуют относительно крупные твердые частицы) может возникнуть вследствие осредненного динамического скольжения фаз, коррелированности пульсаций объемного содержания пылевых частиц и концентрации газовой составляющей смеси с пульсационной скоростью потока, а также вследствие пульсационного межфазового скольжения. Как уже неоднократно подчеркивалось, для мелких частиц, для которых эффектами инерции можно пренебречь ($\mathbf{\Pi}_{\rm rel} \cong 0$), этот дополнительный источник турбулизации диска мал.

В заключении этого раздела отметим, что, как правило, в астрофизической литературе энергетическое уравнения (126*) для газопылевой дисковой системы записывают в предположении стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, при

[43] Напомним, что величина пульсаций $\mathbf{\Pi}'$ тензора вязких напряжений определяется эффективным (учитывающим наличие дисперсной добавки) коэффициентом кинематической вязкости газопылевой среды, рассматриваемой как целое; таким образом, чем больше степень вовлечения мелкодисперсных частиц в пульсационное движение, тем большее влияние они оказывают на величину пульсационной составляющей тензора $\mathbf{\Pi}$, вызывая дополнительную диссипацию турбулентной энергии газовзвеси.

[44] Для достижения критической плотности в пылевом слое необходима очень высокая степень его успокоения и уплощения (Сафронов, 1969).

котором производство турбулентной энтропии S^{turb} газопылевого вещества примерно равно ее диссипации[45]. Если такое условие принять для баланса величины S^{turb}, то будем иметь (см. формулу (166))

$$2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \overline{p'_{\text{sum}}\nabla \cdot \mathbf{u}'} - \\ - \mathbf{J}_v^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p}_{\text{sum}} - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}} \approx 0, \tag{152}$$

и уравнения (126*) для развитого турбулентного потока можно преобразовать к виду

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\langle E_{\text{sum}}\rangle}{\mathrm{D}t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} - \overline{p'_{\text{sum}}\mathbf{u}''}) \cong \\ \cong - \bar{p}_{\text{sum}}\nabla \cdot \langle \mathbf{u}\rangle + 2(\bar{\rho}\nu^{\text{turb}} + \mu_{\text{rad}})\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \\ + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}} + \overline{R_{\text{gd}}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma\mathbf{w} \cdot \nabla p}, \tag{153}$$

или, с учетом (144),

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\langle E_{\text{sum}}\rangle + \langle C_{\text{d}}\rangle\langle C_{\text{g}}\rangle|\mathbf{w}|^2/2) \cong \\ \cong -\nabla \cdot (\mathbf{q}^{\text{turb}} - \overline{p'_{\text{sum}}\mathbf{u}''} + \mathbf{q}_{\text{rad}}^{\text{turb}}) - \bar{p}_{\text{sum}}\nabla \cdot \langle \mathbf{u}\rangle + \\ + 2(\bar{\rho}\nu^{\text{turb}} + \mu_{\text{rad}})\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} : \mathbf{D}. \tag{154}$$

Таким образом, уравнение для внутренней энергии осредненного турбулизованного газопылевого континуума, записанное через абсолютную температуру, принимает вид

$$\bar{\rho}\langle c_p\rangle\frac{\mathrm{D}\langle T\rangle}{\mathrm{D}t} - \\ - \nabla \cdot \left\{\chi^{\text{turb}}\left(\nabla\langle T\rangle - \frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\right) + \chi_{\text{rad}}\nabla\langle T\rangle\right\} = \\ = \frac{\mathrm{D}\bar{p}_{\text{sum}}}{\mathrm{D}t} + 2(\bar{\rho}\nu^{\text{turb}} + \mu_{\text{rad}})\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} + \\ + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} : \mathbf{D} - \sum_{s=1}^{r}\langle q_s\rangle\bar{\xi}_s + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}} + R_{\text{gd}}|\overline{\mathbf{w}}|^2. \tag{153*}$$

Здесь мы пренебрегли энергией диссипации $\overline{\Phi_u}$ (в единичном объеме в единицу времени) за счет “молекулярной” вязкости газопылевой смеси по сравнению с “фрикционным теплом” $2\bar{\rho}\,\nu^{\text{turb}}\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}$ за счет вязких рейнольдсовых напряжений, возникающих вследствие относительного сдвига элементов газовзвеси при орбитальном движении дискового вещества, а также кинетической энергией диффузии по сравнению с внутренней энергией газовзвеси. Следует отметить, что наличие внутреннего источника нагрева допланетного диска, связанного с турбулентной вязкостью, удовлетворяет современным астрофизическим данным[46] и всем космохимическим ограничениям. Кроме того, в уравнении (153*) при сделанных предположениях появляется дополнительный источник нагрева газопылевой среды, связанный с диссипацией энергии под влиянием “молекулярной” диффузии $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} : \mathbf{D}$, играющий важную роль в субдиске, где относительные скорости фаз могут быть значительными.

Закон сохранения полной энергии для турбулизованной смеси. Складывая уравнения балансов для внутренней энергии (126*), механической энергии (143), кинетической энергии межфазной диффузии (144) и турбулентной энергии дисковой системы (149), в результате получим субстанциональную форму закона сохранения полной осредненной энергии двухфазной газопылевой смеси и излучения[47] в диске

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\langle U_{\text{tot}}\rangle = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{J}}_U + \mathbf{J}_U^{\text{turb}}), \tag{155}$$

где

$$\langle U_{\text{tot}}\rangle = \langle E_{\text{sum}}\rangle + \langle\Psi\rangle + \frac{1}{2}|\langle\mathbf{u}\rangle|^2 + \\ + \langle C_{\text{d}}\rangle\langle C_{\text{g}}\rangle|\overline{\mathbf{w}}|^2/2 + \overline{|\mathbf{u}''|^2}/2 \tag{156}$$

– осредненная полная энергия газовзвеси и излучения (см. формулу (42));

$$\bar{\mathbf{J}}_U \equiv \overline{\mathbf{q}_{\text{sum}} + (\mathbf{I}p_{\text{sum}} - \mathbf{\Pi}_{\text{sum}} - \mathbf{\Pi}_{\text{rel}}) \cdot \mathbf{u}} \cong \\ \cong \bar{\mathbf{q}}_{\text{sum}} + (\mathbf{I}\bar{p}_{\text{sum}} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}}) \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + \\ + \overline{p_{\text{sum}}\mathbf{u}''} - \overline{\mathbf{\Pi}'_{\text{sum}} \cdot \mathbf{u}''} - \overline{\mathbf{\Pi}'_{\text{rel}} \cdot \mathbf{u}''} \tag{157}$$

– осредненный актуальный поток полной энергии а двухфазной газовзвеси;

$$\mathbf{J}_U^{\text{turb}} \equiv \bar{\rho}\langle U''_{\text{tot}}\mathbf{u}''\rangle = \\ = \overline{\rho\left(H_{\text{sum}} - p_{\text{sum}}/\rho + \Psi + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + C_{\text{d}}C_{\text{g}}|\mathbf{w}|^2/2\right)\mathbf{u}''} = \\ = \mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} - \overline{p_{\text{sum}}\mathbf{u}''} + \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2\mathbf{u}''/2} - \mathbf{R} \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + \mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} \tag{158}$$

– турбулентный поток полной энергии смеси.

[45] К сожалению, некоторые авторы при моделировании диска просто используют ламинарное энергетическое уравнение с заменой коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент турбулентной вязкости, не принимая во внимание все тонкости вывода энергетического уравнения для турбулизованнной газовзвеси.

[46] В стационарном состоянии это тепло, выделяющееся внутри диска из-за вязкости, не накапливается, а переносится к его поверхности (в основном излучением), а затем излучается с верхней и нижней поверхностей диска наружу.

[47] В этом разделе для полной энергии системы “вещество плюс излучение” мы оставили обозначение U_{tot} (ср. с формулой (42)).

Объединяя формулы (157) и (158), получим следующее выражение для суммарного потока полной энергии турбулизованного течения газопылевой смеси

$$\bar{\mathbf{J}}_U + \mathbf{J}_U^{\text{turb}} = \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2\mathbf{u}''/2} - \overline{(\mathbf{\Pi}'_{\text{sum}} + \mathbf{\Pi}'_{\text{rel}}) \cdot \mathbf{u}''} + \\ + \mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} + \bar{\mathbf{q}}_{\text{sum}} + (\mathbf{I}\bar{p}_{\text{sum}} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} - \mathbf{R}) \cdot \langle\mathbf{u}\rangle. \tag{159}$$

Здесь $\bar{\mathbf{q}}_{\text{sum}} + \mathbf{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}}$ – суммарный поток тепла, обусловленный как осредненным молекулярным, так и турбулентным переносом; $\bar{p}_{\text{sum}}\langle\mathbf{u}\rangle$ – поток “механической” энергии; $(\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}} + \mathbf{R}) \cdot \langle\mathbf{u}\rangle$ – суммарный поток энергии, обусловленный работой вязких, относительных и турбулентных напряжений; $\overline{\rho|\mathbf{u}''|^2/2} - \overline{(\mathbf{\Pi}'_{\text{sum}} + \mathbf{\Pi}'_{\text{rel}}) \cdot \mathbf{u}''}$ – “диффузионный” поток вихревой турбулентной энергии. Заметим, что член $\overline{p_{\text{sum}}\mathbf{u}''}$ в (158) и (159) не играет роли потока энергии, так как он выпадает из суммарного потока энергии (159).

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТ В ГАЗОПЫЛЕВОМ ДИСКЕ

Рассмотрим теперь полуэмпирический метод определения коэффициента кинематической турбулентной вязкости ν^{turb} в двухфазной дисковой среде, учитывающий влияние инерционных эффектов средне- и крупнодисперсных частиц на дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом облаке. Далее основным источником турбулентности в диске будем считать сдвиг скорости космического вещества (когда кинетическая энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии осредненного движения), связанный с дифференциальностью его углового вращения вокруг прото-Солнца (см., например, Dubrulle, 1993; Горькавый, Фридман, 1994). Каждый слой вещества с радиусом r дифференциально вращающегося тонкого диска[48] ($h_{\text{disk}}(r) \ll r$), лежащего в окрестности плоскости $r\varphi$ (расположенной при $z = 0$ в цилиндрических координатах), движется практически точно по третьему закону Кеплера, т.е. при приближении к центральному телу (с массой $\mathcal{M}_\odot$) вращается все быстрее: кеплеровская орбитальная скорость $u_\varphi(r) = r\Omega_{\text{K, mid}}(r) = \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/r}$, а угловая скорость орбитального вращения $\Omega_{\text{K, mid}}(r)$ растет по закону $r^{-3/2}$. Подобное движение – типичный случай крупномасштабного сдвигового течения, исследование которого возможно в рамках инвариантного моделирования развитых турбулентных течений неоднородных сред, разработанного в монографии (Колесниченко, Маров, 1999).

α-параметризация вязкости допланетного диска

Впервые коэффициент турбулентной вязкости в астрофизическом газофазном диске был смоделирован в ставшей уже классической работе (Shakura, Sunyaev, 1973), в которой авторы, используя концепцию Колмогорова для динамического коэффициента турбулентной вязкости $\mu_{\text{g}}^{\text{turb}} = \bar{\rho}_{\text{g}} u_{\text{g}}^{\text{turb}} l_{\text{g}}^{\text{turb}}$ (где $u_{\text{g}}^{\text{turb}}$ среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, ограниченная скоростью звука в газе, вычисленной в центральной плоскости диска, $u_{\text{g}}^{\text{turb}} \le c_{\text{sg}}|_{z=0} \cong \sqrt{\bar{p}_{\text{g}}/\bar{\rho}_{\text{g}}}\big|_{z=0}$; $l_{\text{g}}^{\text{turb}}$ – так называемая длина перемешивания Прандтля, ограниченная полутолщиной h_{disk} диска, $l_{\text{g}}^{\text{turb}} \le h_{\text{disk}} \approx c_{\text{sg}}|_{z=0}/\Omega_{\text{K, mid}}$; ρ_{g}, p_{g} – соответственно массовая плотность и давление в газофазном диске), получили соотношение

$$R_{r\varphi} = \bar{\rho}_{\text{g}}\nu_{\text{g}}^{\text{turb}}(r) r \partial_r (u_\varphi/r) = \\ = -3/2\bar{\rho}_{\text{g}} u_{\text{g}}^{\text{turb}} l_{\text{g}}^{\text{turb}} \Omega_{\text{K, mid}}(r) = -\alpha\bar{p}_{\text{g}}|_{z=0}, \\ \alpha \le 1 \tag{160}$$

между r, φ-компонентой тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $R_{r\varphi}$ и тепловым давлением p_{g} газа. Значение дискового параметра Шакуры–Сюняева (безразмерного свободного параметра) α, характеризующего степень возбуждения турбулентных движений, может быть прокалибровано эмпирически при помощи зависящих от времени спектров, получаемых, в частности, при наблюдении вспышек в двойных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая найдены значения $0.01 \le \alpha \le 1$ (см., например, Eardley и др.,1978). Модели турбулизованных аккреционных дисков, построенные с применением соотношения (160), относятся к так называемым вязким α-дискам. Определение параметра α на основе различных предположений о природе физических процессов, действующих в диске, было темой многочисленных исследований (см., например, обширную библиографию к статье Макалкина, 2004). В частности, ряд авторов (см. Dubrulle, 1993; Cabot и др., 1987), которые использовали α-модель при рассмотрении таких физических механизмов турбулентности в протопланетном диске, как дифференциальное вращение, тепловая конвекция и т.п. пришли к значению параметра $\alpha \sim 10^{-3}$, которое лучше других удовлетворяет астрофизическим ограничениям.

[48] Отметим, что толщина диска не постоянна, а увеличивается с расстоянием от прото-Солнца (в первом приближении $h_{\text{disk}}(r) \propto r$).

Некоторые критические замечания. Главное достоинство подобного эвристического подхода к описанию дисковой турбулентности состоит в его относительной простоте: достаточно заменить в уравнениях звездной гидродинамики коэффициент молекулярной вязкости ν на коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{turb}(r)$, чтобы как-то учесть процессы турбулизации космической среды в аккреционном диске (так, собственно, и поступает большинство астрофизиков, пренебрегая, по существу, почти всеми корреляционными членами в осредненных уравнениях движения). Вместе с тем важно иметь в виду, что подход Шакуры–Сюняева, разработанный авторами специально для моделирования тонких (однородных по вертикали, т.е. бесструктурных) астрофизических дисков и не учитывающий зависимости коэффициента турбулентной вязкости от высоты, целесообразно использовать только при глобальном (одномерном по r) моделировании эволюции солнечного допланетного диска с параметрами, осредненными по его толщине. Однако в последнее время этот подход стал некритично применяться в астрофизической литературе и в двухмерных (r, z) моделях, так или иначе связанных с моделированием деталей вертикального строения диска, в частности, с расчетом распределения по высоте термогидродинамических параметров в пылевом субдиске, что, конечно, неправильно.

Кроме того, следует иметь в виду, что формула (160), выведенная для газофазных дисков, естественно, не учитывает обратные эффекты переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в диске[49], что при моделировании многих существенных для космогонии явлений необходимо делать. Например, при адекватном моделировании эволюции допланетного облака как вязкого газопылевого диска, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, важно учитывать динамические процессы взаимодействия газа и пыли, и, в частности, принимать во внимание обратное влияние инерционных свойств пылевых частиц на интенсивность турбулентности и тепловой режимы субдиска. Аргументом в пользу подобного общего подхода является следующее: частицы пыли, составляющие лишь около 2% массы околосолнечного допланетного облака, могут не приниматься в расчет лишь только на самой начальной стадии эволюции рассматриваемой космической системы, когда почти все первичные (межзвездные) пылевые частицы испарились. На более поздних стадиях ее эволюции, по мере охлаждения допланетного облака, конденсации твердых частиц и значительного увеличения их в размерах в результате процессов коагуляции, оседания дисперсной фазы к центральной плоскости диска, а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой компоненты газовзвеси существенно возрастает (см., например, Cuzzi и др., 1993). Причем, на первый взгляд, турбулентное перемешивание мешает диффузионному разделению пылевой и газовой составляющих в гравитационном поле прото-Солнца, препятствуя опусканию мелкодисперсных твердых частиц к его экваториальной плоскости (где они образуют уплощенный пылевой слой), и, тем самым, задерживает формирование критической массы субдиска, при которой возникает его гравитационная неустойчивость (Сафронов, 1969). Однако, с другой стороны, как уже нами неоднократно отмечалось выше, при турбулентном режиме течения действенным механизмом аккумуляции средне- и крупномасштабных твердых частиц становится негравитационная аккреция, связанная, в частности, с ростом массы частиц в результате различных механизмов турбулентной коагуляции. Кроме того, турбулентность способствует формированию мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих наиболее благоприятные условия слипания пылевых частиц между собой. В подобных вихревых образованиях число столкновений (в единицу времени) существенно увеличивается, а относительные скорости столкновений существенно уменьшаются по сравнению с ламинарными условиями (за счет совместного когерентного мезомасштабного движения частиц и мелкомасштабных турбулентных пульсаций их относительных скоростей внутри вихревых структур), что также способствует росту конденсированной составляющей субдиска (см. Barge, Sommeria, 1995; Tanga и др., 1996; Chavanis, 1999; Колесниченко, 2004). С ростом инерционности твердых частиц они во все меньшей степени вовлекаются в пульсационное движение газового несущего потока. Таким образом, турбулентность, в конечном счете, способствует эффективности оседания пылевых частиц к центральной плоскости диска, и тем самым формированию критической массы субдиска, гравитационная неустойчивость и распад которого приводит к образованию планетезималей.

Как известно, характер воздействия дисперсной фазы на динамику турбулентного течения газовзвеси не является однозначным, а существенно зависит от инерционности и величины объемного содержания (концентрации) пылевых частиц, поскольку они могут оказывать на поток как ламинаризирующее, так и турбулизирующее воздействие (см. Шрайбер и др., 1987). В работе (Колес-

[49] Указанный эффект заключается в том, что благодаря различию концентраций пылевого вещества, смешанного со средой (при турбулентной диффузии), или различию температур (при переносе тепла) в отдельных точках дисковой среды возникают дополнительные архимедовы силы, способствующие или препятствующие развитию турбулентности в диске.

ниченко, 2000) были исследованы порождаемые вращением течения дискового вещества, когда твердые частицы газовзвеси начинают оказывать обратное влияние на ее характеристики. Предложено обобщение формулы (160) для коэффициента турбулентной вязкости на случай учета малоинерционной пылевой составляющей, когда можно было воспользоваться диффузионным приближением (при котором двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной “многокомпонентной” среды с известными эффективными теплофизическими свойствами). Полученные поправки к коэффициенту турбулентной вязкости, учитывающие обратный эффект переноса мелкодисперсной примеси и тепла на развитие турбулентности, рекомендовано учитывать при моделировании образования уплощенного пылевого слоя в диске.

Вместе с тем в астрофизической литературе все еще остается открытым вопрос о влиянии средне- и крупнодисперсных частиц на процессы турбулентного тепло- и массопереноса в допланетном газопылевом диске и их вкладе в поправочный множитель к коэффициенту турбулентной вязкости газовзвеси. Определение такого рода поправки представляет собой весьма не простую задачу и требует более глубокого изучения структуры турбулентности газовзвеси. В следующем разделе нами будет сделана попытка теоретического определения коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} в потоке газовзвеси с крупными инерционными частицами пыли.

Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в пылевом субдиске

Прежде чем приступить к определению указанной поправки к коэффициенту ν^{turb}, напомним, что связь между коэффициентом турбулентной вязкости и энергией турбулентности газовзвеси определяется при помощи соотношения Колмогорова (1942) (см. формулу (97))

$$\nu^{turb} = \gamma^* l\sqrt{b}, \tag{161}$$

где $l = l(\mathbf{x})$ – масштаб турбулентности в данной точке потока (числовой множитель γ^* можно включить в значение l). Для турбулизованного сдвигового потока, обтекающего бесконечную плоскость (в рассматриваемом случае – экваториальную плоскость диска, $z = 0$), локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{x})$ можно принять пропорциональным толщине рассматриваемого тонкого слоя

$$l(z) = \gamma^*\kappa z \tag{162}$$

или

$$l(z) = \gamma^*\kappa z\Phi(\mathrm{Re_{glob}}, \mathrm{Ri}, \mathrm{K}), \tag{163}$$

где Φ – некоторая безразмерная функция; κ – постоянная Кармана, которую можно положить равной $\propto 0.4$.

Следует иметь в виду, что вывод адекватного дифференциального уравнения для масштаба $l(\mathbf{x})$ является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории сдвиговой турбулентности. Дело в том, что параметр $l(\mathbf{x})$ не может, в общем случае, быть определен только через одноточечные моменты пульсирующей скорости. Являясь мерой расстояния между двумя точками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в турбулизованном потоке, на котором двухточечные корреляторы $\langle \mathbf{u}''(\mathbf{x}_1)\mathbf{u}''(\mathbf{x}_2)\rangle$ еще заметно отличаются от нуля, масштаб $l(\mathbf{x})$ может быть найден из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путем их интегрирования по расстоянию между точками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ (см., например, Иевлев, 1975). Вместе с тем даже в случае известного дифференциального уравнения для $l(\mathbf{x})$ возникает сложная проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб $l(\mathbf{x})$ не стремится к нулю (см. Лайхтман, 1970). Именно по этим причинам для обеспечения эффективности практических расчетов локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{x})$ часто задается в виде чисто эмпирически найденных функций или находится с помощью алгебраической формулы типа (163), учитывающей только геометрию потока, расстояние до стенки и т.п. и не зависящей от особенностей течения жидкости[50].

Внутреннее равновесие в структуре дисковой турбулентности. Перейдем теперь к выводу искомой поправки к коэффициенту $\nu^{turb}(\mathbf{x})$. Ограничимся в нашем анализе некоторой упрощенной статистической схемой турбулентности в двухфазной среде на основе одного только уравнения переноса турбулентной энергии (149*) (однопараметрическая модель турбулентности[51]). Если пренебречь в уравнении (149*) малыми членами (все необходимые оценки можно найти, например, в монографии (Marov, Kolesnichenko, 2002)), то, с учетом формулы (110) для тензора Рейнольдса и формулы (140) для турбулентного потока удельного объема $\mathbf{J}_v^{turb}$, его можно переписать в виде

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \langle \mathbf{u}\rangle \cdot \nabla b\right) + \nabla \cdot \mathbf{J}_b^{turb} \cong -2/3 b\bar{\rho}\nabla \cdot \langle \mathbf{u}\rangle +$$

---

[50] В некоторых случаях, по-видимому, можно использовать формулу Прандтля–Никурадзе для величины $l(z)$, которую применительно к рассматриваемому здесь плоскому случаю можно записать в виде $l(z) = \gamma 0.4z[1 - 1.1(z/h_{disk}) + 0.6(z/h_{disk})^2 - 0.15(z/h_{disk})^3]$.

[51] Для двухфазных течений начало разработки двухпараметрической модели турбулентности $b - \varepsilon$ было положено в работах (Elghobashi, Abou-Arab, 1982; 1983).

$$+2\bar{\rho}\nu\overset{\circ}{\mathbf{D}}:\overset{\circ}{\mathbf{D}}+\langle\sigma\rangle\frac{\bar{\rho}}{\rho_d\bar{\rho}_g}\mathbf{J}^{\text{turb}}_{\text{dz}}g_z+ \tag{164}$$

$$+\frac{g_z}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\left(\mathbf{q}^{\text{turb}}-\sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\mathbf{J}^{\text{turb}}_\alpha\right)_z-\bar{\rho}\varepsilon+\bar{\rho}\sigma_{\text{rel}},$$

где g_z – вертикальная компонента тяготения прото-Солнца (см. уравнение (177)). Как уже подчеркивалось, вклад дополнительной диссипации в величину ε существенен только для относительно мелких пылевых частиц, вследствие чего в балансовом уравнении (164) для крупнодисперсной пыли он заметной роли не играет[52].

Для придания уравнению (164) необходимого для дальнейших целей вида, используем развитую в работе (Колесниченко, 1998) базисную концепцию двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды в виде двух взаимосвязанных континуумов (открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства диска непрерывно – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса[53]. Для дискового вещества континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных уравнений движения гетерогенной среды (76), предназначен для исследования эволюции осредненных полей термогидродинамических характеристик газовзвеси (включая также возможные крупные вихревые образования). Подсистема турбулентного хаоса для диска (вихревой континуум с внутренней структурой), состоит в общем случае из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей[54] – ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур ("многомолекулярных" образований).

[52] Этот вклад учтен в диссипативном члене $2\bar{\rho}\,\nu^T\overset{\circ}{\mathbf{D}}:\overset{\circ}{\mathbf{D}}$.

[53] Использование концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной жидкости явилось той отправной точкой, которая позволила феноменологически развить гидродинамическую модель структурированной турбулентности как процесса самоорганизации в открытых неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами (см. Колесниченко, 2004).

[54] В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными, когерентная турбулентная структура может быть определена как связная, жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т.е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой. Образование гранул в солнечной фотосфере служит наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулентном потоке, которые появляются на фоне мелкомасштабного турбулентного движения.

Для подсистемы турбулентного хаоса постулируем фундаментальное тождество Гиббса (Колесниченко, 1998)

$$\delta E^{\text{turb}} = T^{\text{turb}}\delta S^{\text{turb}} - p^{\text{turb}}\delta(1/\bar{\rho}), \tag{165}$$

с помощью которого можно известным образом (см., например, де Гроот, Мазур, 1964) определить термодинамическую структуру вихревого континуума, т.е. ввести в рассмотрение удельную внутреннюю энергию $E^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$, удельную энтропию $S^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$, давление $p^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) \equiv 2/3\,\bar{\rho}\,E^{\text{turb}}$ и температуру[55] $T^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ турбулизации. Различные соотношения между параметрами E^{turb}, S^{turb}, T^{turb} и p^{turb}, которые могут быть получены обычным способом, могут интерпретироваться тогда, как "уравнения состояния" рассматриваемой подсистемы. Далее будем считать, что внутренняя энергия подсистемы турбулентного хаоса $E^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ тождественна энергии турбулентности $E^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}/2\bar{\rho} = b(\mathbf{x}, t)$ и что подсистема "турбулентного хаоса" в термодинамическом смысле является "идеальным газом", $\bar{\rho}\,b = 3/2p^{\text{turb}} = 3/2\mathcal{R}_{\text{gd}}\bar{\rho}\,T^{\text{turb}}$, где $\mathcal{R}_{\text{gd}} = k_B/\mathcal{M}_{\text{gd}}$, $\mathcal{M}_{\text{gd}}$ – средняя молекулярная масса частиц газовзвеси (кардинальные предположения модели). При использовании тождества Гиббса (165), уравнение (164) принимает вид

$$\bar{\rho}T^{\text{turb}}\frac{DS^{\text{turb}}}{Dt}+\nabla\mathbf{J}^{\text{turb}}_b \cong 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\overset{\circ}{\mathbf{D}}:\overset{\circ}{\mathbf{D}}-\frac{1}{\bar{\rho}_g}J^{\text{turb}}_{\text{dz}}g_z+$$
$$+\frac{g_z}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\left(\mathbf{q}^{\text{turb}}-\sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\mathbf{J}^{\text{turb}}_\alpha\right)_z-\bar{\rho}\varepsilon+\bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}, \tag{166}$$

которому, по аналогии с (51), можно придать форму уравнения баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}S^{\text{turb}})+\nabla\cdot\left(\bar{\rho}S^{\text{turb}}\langle\mathbf{u}\rangle+\frac{\mathbf{J}^{\text{turb}}_b}{T^{\text{turb}}}\right)=$$
$$=\sigma_{S^{\text{turb}}}\equiv\sigma^e_{S^{\text{turb}}}+\sigma^i_{S^{\text{turb}}}.$$

Воспользуемся теперь уравнением (166) для анализа стационарно- неравновесного режима развитой ($\text{Re}_{\text{glob}} \gg 1$) турбулентности газопылевой смеси в дисковой системе. Для его реализации должен, естественно, существовать какой-то постоянно действующий механизм турбулизации среды (каким является, например, крупномасштабный сдвиг скорости потока космического вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца, или термоконвективная крупномасштабная неустойчивость), передающий кинетическую энергию осредненно-

[55] Термодинамическая температура турбулизации подсистемы турбулентного T^{turb} хаоса, не сводится, в общем случае, к абсолютной температуре.

го течения вихревому движению на больших масштабах и не позволяющий подсистеме турбулентного хаоса достигнуть в течение длительного времени полного термодинамического равновесия. Мощность подобного источника энергии должна быть такой, чтобы скомпенсировать, в частности, расход турбулентной энергии, рассеиваемой в тепло за счет “молекулярной” вязкости. Известно, что для подобного стационарно-неравновесного режима практически вся расходуемая энергия турбулентности без заметных потерь передается (вниз по цепочке разномасштабных вихрей в процессе их дробления) через инерционный интервал к диссипативному интервалу (см. Ландау, Лифшиц, 1988). Тогда в структуре подсистемы турбулентного хаоса устанавливается такое внутреннее равновесие[56], при котором $DS^{turb}/Dt \cong 0$ (энтропия хаоса не меняется вдоль пути элемента массы газовзвеси) и поток энтропии турбулизации постоянен, $\mathbf{J}_{(S^{turb})} \equiv \mathbf{J}_b^{turb}/T^{turb} \cong \text{const}$ (Колесниченко, 2003). Это означает, что производство $\sigma^i_{S^{turb}}$ энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется ее оттоком $\sigma^e_{S^{turb}}$, т.е. суммарное возникновение энтропии S^{turb} отсутствует, $\sigma_{S^{turb}} = \sigma^e_{S^{turb}} + \sigma^i_{S^{turb}} \cong 0$. Таким образом, подсистема турбулентного хаоса экспортирует свою энтропию во “внешнюю среду”, т.е. отдает ее подсистеме осредненного движения. Важно иметь в виду, что как раз такого рода условия являются достаточными для возникновения диссипативных когерентных структур в “открытом” вихревом континууме (см. Пригожин, Стенгерс, 1994).

Вывод поправочной функции к коэффициенту ν^{turb}. Итак, в случае локально-стационарного состояния развитого турбулентного течения в диск уравнение (166) может быть записано в виде

$$\nu^{turb}(1 - R_f - K_f)\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}} + \sigma_{rel} - \varepsilon \approx 0, \qquad (167)$$

где нами, по аналогии с безразмерным динамическим числом Ричардсона

$$R_f \equiv -\frac{g_z\left(\mathbf{q}^{turb} - \sum\limits_\alpha \langle h_\alpha\rangle \mathbf{J}_\alpha^{turb}\right)_z}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle 2\bar{\rho}\nu^{turb}\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}} = \frac{1}{Sc^{turb}}\frac{\frac{g_z}{\langle T\rangle}\left(\nabla_z\langle T\rangle + \frac{g_z}{\langle c_p\rangle}\right)}{2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}} = \frac{Ri}{Sc^{turb}}, \qquad (168)$$

учитывающим влияние термической конвекции вещества на порождение турбулентности в диске по сравнению с динамическими факторами (здесь Ri – градиентное число Ричардсона), введено безразмерное динамическое число Колмогорова[57]

$$K_f \equiv \frac{(g_z/\bar{\rho}_g)(\mathbf{J}_d^{turb})_z}{2\bar{\rho}\nu^{turb}\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}} = -\frac{1}{Sc^{turb}}\frac{(g_z/\bar{\rho}_g)\nabla_z\langle C_d\rangle}{2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}} = -\frac{1}{Sc^{turb}}\frac{\langle\sigma\rangle g_z[\nabla_z\bar{s} - \bar{s}\nabla_z \ln\bar{\rho}_g]}{2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}} = \frac{K}{Sc^{turb}}, \qquad (169)$$

являющееся критерием динамической активности пылевых частиц в турбулизованном сдвиговом потоке дискового вещества (Колесниченко, 2000). Введенные безразмерные параметры являются критериями динамической активности бароклинного вещества диска. Из (168) следует, что $Ri < 0$ при $-\nabla_z\langle T\rangle > g_z/\langle c_p\rangle$ (т.е. при неустойчивой термической стратификации вещества диска) и $Ri > 0$ при $-\nabla_z\langle T\rangle < g_z/\langle c_p\rangle$ (при устойчивой стратификации); при безразличной же стратификации $Ri = 0$. Однако наличие в потоке взвешенных мелкодисперсных частиц всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку градиентное число Колмогорова всегда положительно, $K > 0$ (см. Barenblatt, Golitsyn, 1974). Таким образом, безразмерное число Колмогорова K учитывает обратное влияние стратификации (по толщине диска) объемной концентрации мелких пылевых частиц на развитие турбулентности в диске.

Принимая далее, согласно гипотезам Колмогорова (1942), что кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb} и скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ε зависят только от двух параметров течения – энергии турбулентности b и локального масштаба турбулентности $l(\mathbf{x})$, получим (см. формулу (97)):

$$\nu^{turb} = l\sqrt{b}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha^2}\frac{b^{3/2}}{l}. \qquad (170)$$

Здесь в силу неопределенности масштаба $l(\mathbf{x})$ константа в выражении для ν^{turb} принята равной единице, а числовой множитель $1/\alpha^2$ в первом при-

[56] Фактически во всех существующих полуэмпирических теориях турбулентности предполагается (явно или неявно) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности, когда производство энергии турбулентности равно ее диссипации в каждой точке.

[57] На самом деле, числом Колмогорова является только первое слагаемое в выражении (169) (при $\rho_g = \text{const}$ число K выражает собой относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц несущим потоком); второе слагаемое, характеризующее влияние неоднородности газовой среды на турбулентность, является так называемым критерием Прандтля.

ближении считается постоянным. Член (см. формулу (151))

$$\bar{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}} \equiv -\overline{\mathbf{\Pi}'_{\mathrm{rel}} : \nabla \mathbf{u}'} =$$
$$= \overline{s\rho_{\mathrm{d}} C_{\mathrm{g}} (\mathbf{w}\mathbf{w})' : \nabla \mathbf{u}'} \cong$$
$$\cong \rho_{\mathrm{d}} \overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}} : (\bar{s}\overline{C'_{\mathrm{g}}\nabla \mathbf{u}'} + \langle C_{\mathrm{g}}\rangle \overline{s'\nabla \mathbf{u}'}),$$

отвечающий за дополнительное порождение энергии турбулентности при больших числах Рейнольдса (в следах за движущимися крупными частицами), представим в виде[58]

$$\sigma_{\mathrm{rel}} = \beta \bar{s} \frac{|\overline{\mathbf{w}}|^2 \sqrt{b}}{l}, \tag{171}$$

где β – эмпирическая константа. Следует отметить, что формула (171) достаточно близка по форме к выражению[59], полученному в работе (Вараксин, 2003) с использованием автомодельного решения для дальнего осесимметричного турбулентного следа (Yarin, Hetsroni, 1994) и полученному в работе (Деревич, 1994) на основе полуэмпирического подхода, и справедливому только при очень малой объемной концентрации $\bar{s}$ дисперсной фазы, когда отсутствует интерференция следов за отдельными частицами.

Подставляя (170) и (171) в (167), будем иметь:

$$2l\sqrt{b}(1 - R_f - K_f)\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}} + \beta\bar{s}\frac{|\overline{\mathbf{w}}|^2\sqrt{b}}{l} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{b^{3/2}}{l} = 0. \tag{172}$$

Уравнение (172) распадается на два уравнения: b = 0, соответствующее ламинарному режиму течения в дисковой системе, и

$$b = \alpha^2 l^2 \left(1 - \alpha^2 \beta \bar{s} \frac{|\overline{\mathbf{w}}|^2}{b}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\mathrm{Ri} + \mathrm{K}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\right) (2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}), \tag{173}$$

описывающее установившийся турбулентный режим движения газовзвеси. Уравнение (173) имеет вещественные решения только при $\mathrm{Ri} + \mathrm{K} < (\mathrm{Ri} + \mathrm{K})_{\mathrm{cr}} = \mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}$ (при $\mathrm{Ri} + \mathrm{K} \geq \mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}$ существует единственное вещественное решение $b = 0$, относящееся к ламинарному режиму течения). Пусть имеет место турбулентный режим; тогда

$$\sqrt{b} = \alpha l \frac{\sqrt{1 - (\mathrm{Ri} + \mathrm{K})/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \beta^* (d_{\mathrm{d}}^2/l^2)\bar{s}}} \sqrt{2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}}. \tag{174}$$

Из формулы (173) видно, что наличие в потоке крупных твердых частиц всегда приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку осредненная кинетическая энергия относительного движения фаз ($\propto |\overline{\mathbf{w}}|^2$) для них сопоставима с энергией турбулентности b.

Таким образом, для локального коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом диске получим

$$\nu^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x}) = \alpha l^2(\mathbf{x}) \varphi \varphi_1 \sqrt{2\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}}, \tag{175}$$

где

$$\varphi = \varphi(\mathrm{Ri}, \mathrm{K}) \equiv \sqrt{1 - (\mathrm{Ri} + \mathrm{K})/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}, \tag{176}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(\bar{s}, C_{\mathrm{D}}, \delta/\xi_{\mathrm{d}}, d_{\mathrm{d}}/l) \equiv \sqrt{1 - \alpha^2 a (C_{\mathrm{D}}\delta/\xi_{\mathrm{d}})^{4/3} (d_{\mathrm{d}}/l)^2 \bar{s}} \tag{177}$$

– поправочные безразмерные функции, учитывающие соответственно обратный эффект переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в допланетном диске (φ), а также эффект влияния на процессы турбулентного тепло- и массопереноса в потоке средне- и крупнодисперсных частиц и их вклад в коэффициент турбулентной вязкости газовзвеси (φ_1).

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ТУРБУЛИЗОВАННОМ СУБДИСКЕ

В качестве иллюстрации развитого здесь подхода, применим теперь полученные выше общие соотношения к моделированию допланетного газопылевого облака (вращающегося вокруг прото-Солнца, находящегося на ранней стадии эволюции, до потери им газовой составляющей) на основе достаточно схематизированного описания стационарного осесимметричного турбулизованного течения дискового вещества, приводящего, однако, к обозримым и численно решаемым уравнениям. Поскольку нас в конечном счете будет интересовать пространственное распределение термогидродинамических параметров внутри пылевого слоя (в субдиске), образованного при оседании твердых частиц к экваториальной плоскости прото-Солнца при существовании в диске развитой турбулентности, то для полноты картины важно будет рассмотреть и некоторые простые механические свойства вращающегося газопыле-

[58] Формула (171) для члена, моделирующего дополнительную генерацию энергии турбулентности крупными частицами, предложена впервые.

[59] Формула (171) совпадает с выражением $\sigma_{\mathrm{rel}} = \beta^* \bar{s} |\overline{\mathbf{w}}|^3 / d_p$ (Вараксин, 2003) при $|\overline{\mathbf{w}}| / \sqrt{b} \equiv d_{\mathrm{d}}/l$. Здесь $\beta^* = a(C_{\mathrm{D}}\delta/\xi_{\mathrm{d}})^{4/3}$; ξ_{d} – длина смешения концентрации пылевых частиц; δ – полуширина следа; $C_{\mathrm{D}}(\mathrm{Re}_{\mathrm{d}})$ – коэффициент сопротивления частицы ($a = 0.0027$, $\delta/\xi_{\mathrm{d}} = 5$).

вого облака в целом. Анализ дисковой системы проведем при следующих предположениях:

1) исследуется медленно эволюционирующее газопылевое облако, которое вращается вокруг фиксированной в пространстве оси z с некоторой угловой скоростью $\Omega(r, z)$;

2) вращение предполагается настолько медленным, что меридиональной циркуляцией вещества допланетного облака можно пренебречь (по существу для кеплеровских аккреционных дисков у скорости имеется только φ-компонента, т.е. $u_z \ll u_r \ll u_\varphi$);

3) магнитные поля не играют существенной роли (как известно, в отсутствии макроскопического магнитного поля фигура облака становится сплюснутой);

4) предполагается, что дисковая конфигурация стационарна в инерциальной системе отсчета с началом в центре массы прото-Солнца;

5) для бароклинного диска (для вещества которого справедливо уравнение состояния (136)) постулируется существование центральной плоскости симметрии, которая совпадает с экваториальной плоскостью прото-Солнца, определяемой условием $z = 0$;

6) отношение полутолщины диска $h_{\text{disk}}(r)$ к его радиусу r предполагается гораздо меньшим единицы, $h_{\text{disk}}(r)/r \ll 1$ (условие тонкости диска);

7) пренебрегается процессом самогравитации вещества диска по сравнению с влиянием гравитационного поля прото-Солнца;

8) радиационное давление в диске считается много меньше газового давления, $p_{\text{R}} \ll p_{\text{g}}$;

9) газопылевой диск обладает очень большой оптической толщиной для излучения всех частот;

10) химические реакции и фазовые переходы не учитываются, состав газовой фазы диска предполагается однородным;

11) механизмом турбулизации допланетного кеплеровского диска считается крупномасштабный сдвиг скорости вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца.

Аксиально-симметричное движение в газопылевом диске

При вращении вокруг прото-Солнца практически точно по закону Кеплера каждый элемент газовзвеси в диске совершает медленное движение по радиусу внутрь, поскольку торможение, связанное с силами вязкого трения между соседними цилиндрическими слоями, вращающимися с разными угловыми скоростями, приводит к перераспределению удельного момента количества движения и появлению радиального потока массы. Таким образом, основная масса вещества диска медленно (по сравнению с орбитальным движением) дрейфует к центру масс по очень пологой спиральной траектории, по мере того, как момент количества движения вместе с меньшей массой вещества передается наружу (в силу закона сохранения) – из внутренних областей диска во внешние. Одновременно турбулентные напряжения, возникающие вследствие относительного сдвига отдельных слоев дискового вещества при их орбитальном движении, приводят к вязкой диссипации тепла. Как известно, условие тонкости диска означает, что температура в нем относительно низка и градиент давления значительно меньше двух основных механических сил гравитационной и центробежной (см., например, Шапиро, Тьюколски, 1985). Низкие температуры поддерживаются, однако, лишь в том случае, если диссипируемое в турбулизованной системе вязкое тепло эффективно излучается наружу и не накапливается в диске. В стационарном состоянии большая часть этого тепла должна излучаться верхней и нижней поверхностями диска (поскольку диск тонкий, излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении). Таким образом, тонкий аккреционный диск должен быть в высокой степени неадиабатическим.

Далее будем использовать инерциальную цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат, совпадающим с центром тяжести; плоскость $z = 0$ будем считать совпадающей с центральной плоскостью симметрии диска. Предположим также, что осредненное движение космической жидкости реализуется лишь в азимутальном направлении

$$\langle u_r \rangle = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = \Omega(r, z)r, \quad \langle u_z \rangle = 0, \qquad (175)$$

а истинная скорость течения газопылевой смеси беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях. Можно показать, что если вещество диска находится в состоянии квазистационарного вращения в инерциальной системе отсчета, то оно с необходимостью обладает осевой симметрией $(\partial/\partial\varphi = 0)$: $\bar{s} = \bar{s}(r, z)$, $\bar{\rho}_{\text{g}} = \bar{\rho}_{\text{g}}(r, z)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(r, z)$, $\bar{p} = \bar{p}(r, z)$, $\langle T \rangle = \langle T(r, z) \rangle$, $\Omega = \Omega(r, z)$ и т.п. (см. Тассуль, 1982). Отметим, что закон сохранения массы (85) в рассматриваемом стационарном случае всегда выполняется, так как движения осесимметричны, а меридиональных течений нет, $\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$.

Уравнения сохранения импульса. Если учесть взаимодействие между веществом и излучением внутри диска до членов самого низкого порядка по $|\langle \mathbf{u} \rangle|/c$ (см. сноску[24])), то три компоненты осредненного уравнения движения (107) можно записать в виде[60]

$$\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial}{\partial r}(\bar p + p^{\text{turb}}) = r\Omega^2(r,z) - \frac{G\mathcal{M}_\odot r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \equiv g_r \cong 0, \quad (176)$$

$$\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\bar p + p^{\text{turb}}) = -\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \equiv -g_z,$$
$$\text{где } g_z = \frac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^3}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \Omega^2_{\text{K, mid}}(r)z, \quad (177)$$

$$\bar\rho\frac{\partial}{\partial t}[r\Omega(r,z,t)] \cong$$
$$\cong \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{r\varphi} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{q}_{\text{rad}})_r r\Omega(r,z)\right]\right\} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{z\varphi} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{q}_{\text{rad}})_z r\Omega(r,z)\right] + \quad (178)$$
$$+\frac{1}{r}\left[(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{\varphi r} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{q}_{\text{rad}})_r r\Omega(r,z)\right] \cong 0,$$

где $\mathbf{g} = \{g_r, 0, -g_z\}$ – эффективная сила тяжести (на единицу массы) с поправкой на центробежное ускорение; $\Omega_{\text{K}}(r, z) \equiv \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/(r^2+z^2)^{3/2}}$ – кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{\text{K, mid}}(\text{r}) \equiv \Omega_{\text{K}}(r, 0) = \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/r^3}$ – кеплеровская угловая скорость в центральной плоскости диска; $\bar p(r, z)$ – тепловое давление дисковой среды, связанное с плотностью $\bar\rho(r, z)$ и температурой $\langle T(r, z)\rangle$ осредненным уравнением состояния (55), $\bar p = \bar\rho\langle\mathcal{R}\rangle\langle T\rangle$; $p^{\text{turb}}(r, z) = 2/3\bar\rho\, b = 1/3\overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}$ – давление турбулизации (см. уравнение (110)); c – скорость света в вакууме;

$$\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}} \equiv -p^{\text{turb}}\mathbf{I} + 2(\bar\rho\nu^{\text{turb}}+\mu_{\text{rad}})\overset{\circ}{\mathbf{D}} =$$
$$= -\mathbf{i}_r\mathbf{i}_r p^{\text{turb}} - \mathbf{i}_r\mathbf{i}_r p^{\text{turb}} - \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_\varphi p^{\text{turb}} - \mathbf{i}_z\mathbf{i}_z p^{\text{turb}} +$$
$$+(\bar\rho\nu^{\text{turb}}+\mu_{\text{rad}})\left\{\mathbf{i}_r\mathbf{i}_\varphi r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_r r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r} + \quad (179)\right.$$
$$\left.+\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_z r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_\varphi r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right\}$$

(см. формулы (110) и (В.8)). При написании уравнения (176) нами было принято во внимание то обстоятельство, что в радиальном направлении (перпендикулярном оси вращения) сила тяготения уравновешивается центробежной силой, т.е. полный градиент давления газовзвеси $\partial(\bar p + p^{\text{turb}})/\partial r$ очень мал, и вращение является практически кеплеровским (однако именно этот градиент в конечном счете служит движущей силой радиального дрейфа пылевых частиц к центру диска). С другой стороны, поскольку нет результирующего движения газовзвеси в вертикальном направлении (перпендикулярном центральной плоскости диска), то сохранение импульса вдоль оси $\mathbf{i}_z$ сводится к условию гидростатического равновесия, при котором равновесие в направлении z поддерживается благодаря градиенту давления[61]. Именно градиент $\partial(\bar p + p^{\text{turb}})/\partial z$ определяет основное направление выталкивающей силы плавучести в поле тяготения центральной массы (см. уравнение (164)), способствующей, в частности, дополнительной генерации турбулентной энергии за счет конвективной неустойчивости в вертикальном направлении (между экваториальной плоскостью и поверхностями диска). Таким образом, из (176) и (177) следует, что вязкая диссипация не влияет на r- и z-компоненты уравнения движения для всего диска, которые распадаются на отдельные уравнения для осредненных радиального и вертикального движений.

Напротив, φ-компонента уравнения движения (178) (по существу уравнение для определения угловой скорости $\Omega(r, z)$ при заданных граничных условиях), которую с помощью преобразований (см. Приложение В)

$$[\nabla\cdot(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})]_\varphi \equiv$$
$$\equiv\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{r\varphi}] + \right. \quad (180)$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}[(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{z\varphi}] + \frac{(\mathbf{R}+\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rad}})_{\varphi r}}{r}\right\} =$$

[60] Заметим, что, хотя звезды Т Тельца имеют, по-видимому, высокую концентрацию пыли по всей толщине диска (см., например, Beckwith и др., 2000), дополнительные напряжения $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{rel}}$, связанные с относительным движением газа и крупнодисперсной пыли, эффективно действуют только в области непосредственно прилегающей к экваториальной плоскости диска (малой по сравнению со всем диском), и потому в уравнении (178) опущены (см. следующий раздел).

[61] Отметим, что замена в уравнении (177) дифференциалов конечными разностями (т.е. замена $\Delta(\bar p + p^{\text{turb}})$ на $\approx \bar p + p^{\text{turb}}$, где $(\bar p + p^{\text{turb}})$ – полное давление, вычисленное при $z = 0$, и замена $\Delta z \approx h_{\text{disk}}$) позволяет найти следующее выражение для полутолщины турбулизованного диска $h_{\text{disk}} = \sqrt{((\bar p + p^{\text{turb}})/\bar\rho)_{z=0}}/\Omega_{\text{K, mid}} \cong c_{\text{s}}\sqrt{1+2/3bc_{\text{s}}^{-2}}/\Omega_{\text{K, mid}}$ (сравни с формулой (160)). В этом соотношении $\Omega_{\text{K, mid}} = \sqrt{G\mathcal{M}_\odot/r^3}$ – кеплеровская угловая скорость; c_{s} – скорость звука газовзвеси (см. формулу (57)) в центральной плоскости диска.

$$= \frac{1}{r}\nabla\cdot[\mu(r,z)r^2\nabla\Omega(r,z,t)],$$

$$-\frac{1}{c^2}\{\nabla\cdot[r\Omega(r,z,t)\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}]\}_{\varphi} = = -\frac{1}{c^2 r}\nabla\cdot[r^2\Omega(r,z,t)\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}] \qquad (181)$$

(здесь и далее для краткости через $\mu(r, z) \equiv \equiv \bar{\rho}\,\nu^{\mathrm{turb}}(r,z) + \mu_{\mathrm{rad}}(r,z)$ обозначен полный коэффициент сдвиговой вязкости), можно привести к виду

$$\bar{\rho}\frac{\partial J(r,z,t)}{\partial t} = \nabla\cdot[\mu(r,z)r^2\nabla\Omega(r,z,t)] - -c^{-2}\nabla\cdot[r^2\Omega(r,z,t)\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}] \cong 0 \qquad (182)$$

(где $\nabla\cdot\mathbf{A} \equiv r^{-1}\partial(rA_r)/\partial r + \partial A_z/\partial z$ – дивергенция в цилиндрической системе координат), описывает необратимое изменение удельного момента количества движения $J(r, z, t) \equiv [r^2\Omega(r, z, t)]$ за счет вязкого трения и, кроме того, учитывает перенос момента количества движения полным лучистым потоком $\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}$ (второй член в правой части уравнения (179) учитывает потерю момента количества движения вследствие излучения, испускаемого вращающимися областями диска). Как известно (см., например, Тассуль, 1982), механизм торможения излучением оказывается сильнее, чем диффузия угловой скорости за счет вязкости, если величина $\langle T\rangle/|\nabla\langle T\rangle|$ мала по сравнению с $\langle\Omega\rangle/|\nabla\langle\Omega\rangle|$, что имеет место, по-видимому, лишь в областях диска, прилегающих к его излучающей поверхности Σ.

Далее мы ограничимся, однако, анализом стационарных или квазистационарных движений внутри диска, когда с точностью до членов порядка $|\langle\mathbf{u}\rangle/c$ уравнение (182) сводится к следующему:

$$\nabla\cdot[\mu(r,z)r^2\nabla\Omega(r,z)] = 0. \qquad (183)$$

Поскольку на внешней границе Σ диска вектор касательных напряжений должен обращаться в нуль, то должно выполняться условие

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\Omega(r,z) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma, \qquad (184)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к дисковой поверхности.

В связи с уравнениями (183) и (184), сформулируем один любопытный результат, относящийся к проблеме медленно эволюционирующего вязкого диска. Запишем для этого полную диссипативную функцию диска в стационарном состоянии

$$D(\Omega) \equiv \int_{\wp}\Phi_{\langle\mathbf{u}\rangle}d\mathbf{x} \equiv \int_{\wp}2\mu\mathring{\mathbf{D}} : \mathring{\mathbf{D}}d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\wp}4\mu(r,z)(D_{r\varphi}^2 + D_{z\varphi}^2)d\mathbf{x} = \qquad (185)$$

$$= \int_{\wp}\mu(r,z)r^2\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2\right\}d\mathbf{x},$$

где $\wp$ – объем диска (см. формулы (B.8) и (B.11)). Если рассмотреть теперь произвольный закон вращения диска $\Omega(r, z) + \delta\Omega(r, z, t)$, на который наложено лишь то ограничение, что сохраняются поверхность Σ и объем $\wp$ конфигурации, то классический результат (полученный, по существу, еще Гельмгольцем) состоит в том, что каждое решение уравнений (183) и (184) характеризуется тем свойством, что полная мощность (185), рассеиваемая трением, является абсолютным минимумом по сравнению с мощностью при любом другом движении, которое согласуется с границей Σ и объемом $\wp$.

Сохранение энергии. Для моделирования внутренней термической структуры допланетного диска вокруг молодого Солнца, находящегося на стадии Т Тельца, необходимо привлекать уравнение энергии (154), в котором основным внутренним источником нагрева является диссипация турбулентной энергии. Если не принимать во внимание химические реакции, а также процессы испарения и конденсации дискового вещества, то для квазистационарного осесимметричного движения это уравнение принимает вид[62]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(q_r^{\mathrm{turb}} + q_{\mathrm{rad},r})] + \frac{\partial}{\partial z}(q_z^{\mathrm{turb}} + q_{\mathrm{rad},z}) =$$

$$= \mu(r,z)r^2\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2\right\} + Q_{\odot}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}(q_z^{\mathrm{turb}} + q_{\mathrm{rad},z}) = \mu(r,z)r^2\times \times\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2\right\} + Q_{\odot}, \qquad (186)$$

поскольку для тонкого диска, излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении (см. также формулу (198)).

В уравнениях (185) и (186) через $Q_{\odot}$ обозначены возможные локальные источники нагрева газопылевого облака, связанные, в частности, с поглощением солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации составляющими газопылевого диска и ее последующей трансформацией вследствие всевозможных радиативных процессов, переизлу-

[62] Заметим, что возможный дополнительный источник нагрева диска, связанный с членом $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rol}} : \mathbf{D}$, эффективно действует только в пылевом субдиске (т.е. в объеме, малом по сравнению со всем диском), и потому в уравнении (186) опущен.

чения, рассеяния, фотохимических и химических реакций и т.п. Сложность и многочисленность химических и фотохимических реакций, протекающих в допланетной дисковой среде в самом общем случае, обусловлена присутствием основных химических элементов Солнечной системы, входящих в состав исходных компонентов газовой смеси, а также наличием агентов ионизации (диссоциации) в виде энергичных фотонов излучения и фотоэлектронов (продуктов фотолиза) (см., например, Willac и др., 1998). Их поглощение приводит к диссоциации, ионизации, и/или возбуждению вращательных и колебательных уровней газовых компонентов смеси, причем каждая из этих реакций может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. При практических расчетах далеко не все элементарные процессы, ответственные за тепловой баланс дисковой среды, можно адекватно учесть в соответствующих моделях. Именно поэтому при постановке физически самосогласованных задач моделирования эволюции химического состава и гидродинамики диска возникает как одна из важнейших проблема точного учета вкладов от взаимодействия вещества и излучения в структуре энергетического уравнения с целью определения так называемой функции нагрева вещества, учитывающую ту долю поглощенной солнечной радиации, которая переходит в тепло (см., например, Маров, Колесниченко, 1987). Оценки подобной функции сопряжены с известными трудностями и требуют конкретизации химической стадии дисковой эволюции.

Турбулентный поток тепла $q_z^{\rm turb}$ и радиационный поток энергии $q_{{\rm rad},\,z}$, излучаемой диском, определяются уравнениями (127) и (128)

$$\begin{cases} q_z^{\rm turb}(r,z) = -\bar\rho\langle c_p\rangle \dfrac{\nu^{\rm turb}(r,z)}{\mathrm{Sc}^{\rm turb}}\times \\ \times\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle + \dfrac{\Omega^2_{\rm K,\,mid}(r)}{\langle c_p\rangle}z\right), \\ q_{{\rm rad},\,z}(r,z) = -\chi_{\rm rad}(r,z)\dfrac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle, \end{cases} \tag{187}$$

где $\chi_{\rm rad}(r, z) = 4ca\langle T\rangle^3/3\tilde\kappa\bar\rho$ – коэффициент лучистой теплопроводности дисковой среды; $\tilde\kappa$ – полная осредненная по Росселанду непрозрачность газовзвеси (см. формулу (72)), существенно зависящая от наличия и высотного распределения пылевых частиц в допланетном облаке (см., например, Pollack и др., 1985); $\mu_{\rm rad}(r, z) = 4a\langle T\rangle^4/15c\tilde\kappa\bar\rho$ – коэффициент лучистой вязкости. Уравнение (187) должно быть дополнено следующими граничными условиями на экваториальной плоскости (ввиду симметрии диска) и верхней поверхности диска

$$\begin{gathered} q_z^{\rm turb}\big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle = 0, \quad (*) \\ \mathbf{n}\cdot(\mathbf{q}^{\rm turb}+\mathbf{q}_{\rm rad}) = \sigma\langle T\rangle^4 - f_0\frac{L_\odot}{4\pi r^2}, \text{ на } \Sigma \quad (**) \end{gathered} \tag{188}$$

(где σ – постоянная Стефана–Больцмана; $L_\odot$ – светимость Солнца), учитывающими баланс тепла на границах. Первый член в правой части формулы $^{(**)}$ учитывает чернотельное излучение поверхности диска, а второй член описывает падающий на поверхность диска ослабленный поток излучения от протозвезды, причем ослабляющий фактор (Kusaka и др., 1970)

$$f_0 = \left[\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_{\rm disk}(r,z)}{r} + \frac{2R_\odot^{\rm proto}}{3\pi r}\right)\right]\frac{L_\odot^{\rm proto}}{L_\odot} \tag{189}$$

зависит от геометрии диска, радиуса $R_\odot^{\rm proto}$ и светимости $L_\odot^{\rm proto}$ прото-Солнца (в частности, для $L_\odot^{\rm proto} = 7L_\odot$ и $R_\odot^{\rm proto} = 5R_\odot$ (см. Watanabe и др., 1990)) $f_0 = 0.1$ на $r = 1$ а. е.).

Уравнение переноса пылевой составляющей. При моделировании эволюции турбулизованного газопылевого облака, особенно на стадии образования в окрестности его экваториальной плоскости пылевого субдиска (толщиной $2h_{\rm subdisk}$, где $2h_{\rm subdisk}$, где $h_{\rm subdisk}$ – верхняя граница пылевого субдиска, $h_{\rm disk} > h_{\rm subdisk}$) следует привлекать к рассмотрению осредненное уравнение переноса (92*) для концентрации $\langle C_{\rm d}\rangle = \rho_{\rm d}\bar s/\bar\rho$ пылевой составляющей дискового вещества. Если не принимать во внимание процессы испарения и конденсации ($\bar\sigma_{\rm dg} = 0$) твердых частиц, то в стационарном состоянии имеет место баланс между осаждением пылевых частиц $\bar{\mathbf{J}}_{\rm d} = \overline{\tilde\rho_{\rm d}\mathbf{w}_{\rm d}} \cong \bar\rho_{\rm g}\langle C_{\rm d}\rangle\bar{\mathbf{w}}$ и турбулентным перемешиванием $\mathbf{J}_{\rm d}^{\rm turb} = -\bar\rho D_{\rm d}^{\rm turb}\nabla\langle C_{\rm d}\rangle$ (см. формулу (96)); тогда уравнение (92*) принимает вид

$$\nabla\cdot\left(\bar\rho_{\rm g}\langle C_{\rm d}\rangle\bar{\mathbf{w}} - \frac{\bar\rho\nu^{\rm turb}}{\mathrm{Sc}^{\rm turb}}\nabla\langle C_{\rm d}\rangle\right) = 0 \tag{190}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\bar s\langle C_{\rm g}\rangle\bar w_r - \frac{\bar\rho\nu^{\rm turb}}{\mathrm{Sc}^{\rm turb}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar s}{\bar\rho}\right)\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar s\langle C_{\rm g}\rangle\bar w_z - \frac{\bar\rho\nu^{\rm turb}}{\mathrm{Sc}^{\rm turb}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar s}{\bar\rho}\right)\right) = 0, \end{gathered} \tag{191}$$

где $\bar{\mathbf{w}} \equiv (\bar{\mathbf{u}}_{\rm d} - \bar{\mathbf{u}}_{\rm g})$ – осредненная относительная скорость пыли и газа, определяемая соотношением (101), которое в цилиндрических координатах принимает вид

$$\bar{\rho}\theta_{gd}\bar{w}_r(r,z) \cong \bar{w}_\varphi(r,z)\Omega(r,z) + \frac{1}{\bar{\rho}_g}\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \cong \cong \bar{w}_\varphi(r,z)\Omega_{K,\,mid}(r) - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g} r\eta\Omega^2_{K,\,mid}(r), \quad (192)$$

$$\bar{\rho}\theta_{gd}\bar{w}_\varphi(r,z) = -\frac{1}{2}\bar{w}_r(r,z)\Omega(r,z) \cong \cong -\frac{1}{2}\bar{w}_r(r,z)\Omega_{K,\,mid}(r), \quad (193)$$

$$\bar{\rho}\theta_{gd}\bar{w}_z(r,z) = \frac{1}{\bar{\rho}_g}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cong -\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g}\Omega^2_{K,\,mid}(r)z. \quad (194)$$

Тогда компоненты r, φ, z осредненной относительной скорости $\bar{\mathbf{w}}$, полученные с учетом уравнений движения (176) и (177), выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{w}_r(r,z) \cong -\dfrac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_g}\eta\dfrac{\zeta}{1+\zeta^2}r\Omega_{K,\,mid}(r), \\ \bar{w}_\varphi(r,z) \cong \dfrac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_g}\eta\dfrac{\zeta^2}{1+\zeta^2}r\Omega_{K,\,mid}, \\ \bar{w}_z(r,z) \cong -\zeta z\Omega_{K,\,mid}(r), \end{cases} \quad (195)$$

где параметр $\zeta = \Omega_{K,\,mid}/\bar{\rho}\,\theta_{gd} \ll 1$, поскольку время установления квазиравновесного движения пыли и газа $(1/\bar{\rho}\,\theta_{gd})$ в диске много меньше кеплеровского периода $(2\pi/\Omega_{K,\,mid})$, определяющего медленные времена изменения макроскопических параметров течения. Здесь нами использовано, вытекающие из уравнения (176) приближенное равенство

$$\Omega(r,z) = \Omega_{K,\,mid}(r)[1-\eta]^{1/2} \cong \Omega_{K,\,mid}(r), \quad (196)$$

в котором малый параметр определяется следующим образом[63]:

$$\eta \equiv -(r\Omega^2_{K,\,mid}\bar{\rho})^{-1}\partial\bar{p}/\partial r = = -\bar{\gamma}\left(\frac{\mathcal{H}}{r}\right)^2\left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathcal{H}^2}\right) = 3.62\times 10^{-3} r_{a.\,e}, \quad (197)$$

где второе оценочное представление получено с помощью формулы (210) (ср. Nakagawa и др., 1986; Takeuchi, Lin, 2002).

Диффузионное уравнение (190) может быть упрощено в зависимости от преобладания газовой или пылевой составляющих в рассматриваемой области диска.

[63] Можно показать, что в случае развитой турбулентности учет давления турбулентного хаоса $p^{turb} = 2/3\,\bar{\rho}\,b$ не изменит формулы (194).

Формула для коэффициента турбулентной вязкости в диске. Коэффициент турбулентной вязкости в формулах (179), (182), (187) и (190) определяется соотношением (175), которое в рассматриваемом аксиально-симметричном случае принимает вид

$$\nu^{turb}(r,z) = = \alpha l^{*2} r\sqrt{\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2\right\}}, \quad (198)$$

где

$$l^*(z) \equiv l(z)[1-(\mathrm{Ri}+\mathrm{K})/\mathrm{Sc}^{turb}]^{0.25}, \quad (199)$$

$$\mathrm{Ri} \equiv \frac{\Omega^2_{K,\,mid}z}{r^2}\frac{1}{\langle T\rangle}\frac{\dfrac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} + G_a}{\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2}, \quad (201)$$

$$\mathrm{K} \equiv -\langle\sigma\rangle\frac{\Omega^2_{K,\,mid}z}{r^2}\frac{\dfrac{\partial\bar{s}}{\partial z} - \bar{s}\dfrac{\partial}{\partial z}\ln\bar{\rho}_g}{\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z)\right]^2}, \quad (202)$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{\langle c_p\rangle} = -\frac{1}{\langle c_p\rangle}\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^3}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \cong \frac{1-\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}\frac{1}{\langle\mathcal{R}\rangle}\Omega^2_{K,\,mid}z \quad (203)$$

– адиабатический градиент температуры в допланетном газопылевом диске; $\bar{\gamma} = \langle c_p\rangle/(\langle c_p\rangle - \langle\mathcal{R}\rangle)$, $\langle\mathcal{R}\rangle = \mathcal{R}_g\bar{\rho}_g/\bar{\rho}$ – соответственно показатель адиабаты и “газовая постоянная” для осредненного двухфазного континуума. Из формул (198)–(201) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой

$$-\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} = \left(-\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z}\right)_{ad} = \frac{\Omega^2_{K,\,mid}(r)}{\langle c_p\rangle}z, \quad (204)$$

число Ричардсона $\mathrm{Ri} = 0$ и температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. В случае температурно-неустойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} < 0$) газопылевого диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры

$$\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} + \frac{\Omega^2_{K,\,mid}(r)}{\langle c_p\rangle}z = f\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} \quad (205)$$

(множитель f, характеризующий превышение вертикального градиента температуры в диске над адиабатическим, может достигать величины $f = 0.2$ при $r \simeq 10$ а. е. (см. Макалкин, Дорофеева, 1995; 1996)), энергия турбулентности возрастает за счет энергии неустойчивости в направлении, перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности), и одновременно с этим увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время неоднородность газовзвеси всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку число Колмогорова больше нуля, $\mathrm{K} > 0$. Обратное турбулентное число Шмидта $1/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}$ в формуле (199) можно принять равным единице в случае, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном кеплеровском вращении диска; однако оно может быть в 2–3 раза больше, когда причиной турбулентности, является тепловая конвекция в вертикальном направлении (см., например, Shakura и др., 1978).

Покажем теперь, что иногда в диссипативной функции $\Phi_{\langle\mathbf{u}\rangle} = 2\bar{\rho}\,\nu^{\mathrm{turb}}\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}}$ осесимметричного диска можно пренебречь вертикальным градиентом угловой скорости $\partial\Omega(r, z)/\partial z$ по сравнению с ее радиальным градиентом $\partial\Omega(r, z)/\partial r$ по следующим соображениям. Если предположить (для выполнения оценок) изотермичность диска в вертикальном направлении и пренебречь членами порядка $(z/r)^2$ и выше, то из уравнения (177) можно получить (известную для ламинарного течения) формулу для вертикального распределения плотности газовзвеси в турбулизованном диске[64]

$$\bar{\rho}(r, z) = \bar{\rho}(r, 0)\exp\left\{-\frac{\Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}(r)}{2\langle\mathcal{R}\rangle(\langle T\rangle + T^{\mathrm{turb}})}z^2\right\} = \bar{\rho}(r, 0)\exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathcal{H}^2}\right\}, \tag{206}$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{\sqrt{\langle\mathcal{R}\rangle(\langle T\rangle + T^{\mathrm{turb}})}}{\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}(r)} = \frac{\tilde{c}_{\mathrm{s}}}{\bar{\gamma}^{1/2}\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}(r)} \tag{207}$$

– локальная шкала высот для диска,

$$\tilde{c}_{\mathrm{s}} \equiv \sqrt{(\partial(\bar{p} + p^{\mathrm{turb}})/\partial\bar{\rho})_{\langle S\rangle}} = \sqrt{\bar{\gamma}\langle\mathcal{R}\rangle(\langle T\rangle + T^{\mathrm{turb}})} \tag{208}$$

– изотермическая скорость звука в турбулизованной среде. Пространственные распределения плотности, давления, температуры, непрозрачности и т.п. в любом аккреционном диске имеют различные значения в зависимости от его природы и расстояния от протозвезды и/или от экваториальной плоскости диска. Будем считать, что радиальные распределения подобных структурных параметров следуют степенному закону (это обычное предположение в астрофизической литературе (см., например, Takeuchi, Lin, 2002)); тогда

$$\begin{cases} \tilde{c}^2_{\mathrm{s}}(r) = \tilde{c}^2_{\mathrm{s.\,a.\,e}}r^q_{\mathrm{a.\,e}}, \quad q = -0.5 \\ \bar{\rho}(r, z) = \bar{\rho}_{\mathrm{a.\,e}}r^f_{\mathrm{a.\,e}}\exp\{-z^2/2\mathcal{H}^2\}, \\ \bar{\rho}_{\mathrm{a.\,e}} = 2.83\times10^{-10}\ \text{г см}^{-3}, \quad f = -2.25 \\ \mathcal{H}(r) = \mathcal{H}_{\mathrm{a.\,e}}r^{(q+3)/2}_{\mathrm{a.\,e}}, \quad \mathcal{H}_{\mathrm{a.\,e}} = 3.33\times10^{-2}\ \text{а. е.} \end{cases} \tag{209}$$

где $r_{\mathrm{a.\,e}}$ – радиус, измеренный в а. е. С учетом (206) уравнение (176) можно переписать в виде

$$\Omega^2(r, z) = \Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}\left[1 + \frac{1}{\bar{\rho}r\Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}}\frac{\partial}{\partial r}(\bar{p} + p^{\mathrm{turb}})\right] = \Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}\left[1 + \frac{\tilde{c}^2_{\mathrm{s}}}{\bar{\rho}r\Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right] \cong \Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}\left[1 + \frac{\bar{\gamma}\mathcal{H}^2}{r^2}\left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathcal{H}^2}\right)\right],$$

откуда

$$\Omega(r, z) = \Omega_{\mathrm{K,\,mid}}\left[1 + \frac{\bar{\gamma}}{2}\left(\frac{\mathcal{H}}{r}\right)^2\left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathcal{H}^2}\right)\right]. \tag{210}$$

Из соотношения (210) следует

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z) \sim \frac{\mathcal{H}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z), \quad (\mathcal{H}/r \ll 1), \tag{211}$$

что и позволяет пренебречь в диссипативной функции $\Phi_{\langle\mathbf{u}\rangle}$ вертикальным градиентом угловой скорости.

Таким образом, для большей части диска (за исключением областей, близких к прото-Солнцу) справедливо следующее приближенное выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$\nu^{\mathrm{turb}}(r, z) = \alpha l^{*2}r\left|\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right|, \qquad l^*(z) \equiv l(z)[1 - (\mathrm{Ri} + \mathrm{K})/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}]^{0.25}. \tag{212}$$

Для того чтобы получить формальное совпадение выражения (212) с формулой Шакуры–Сюняева (160), справедливой для газофазных аккреционных дисков, нужно положить в формуле (212) параметры $\mathrm{K} = 0$ и $\mathrm{Ri} = 0$. Если подставить теперь в (212) угловую скорость кеплеровского вращения $\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}(r) = (G\mathcal{M}_\odot)^{1/2}r^{-3/2}$ (заметим, что $r|\partial\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}(r)/\partial r| = -3/2\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}$) и использовать в качестве масштаба турбулентности величину $l = h_{\mathrm{disk}} =$

[64] Термодинамическая температура T^{turb} (параметр, характеризующий интенсивность шума подсистемы турбулентного хаоса, порожденного его “тепловой структурой”) связана с энергией турбулентности b соотношением $2/3\bar{\rho}\,b = p^{\mathrm{turb}} = \bar{\rho}\,\langle\mathcal{R}\rangle T^{\mathrm{turb}}$ (см. Колесниченко, Маров, 1999).

$= \sqrt{(\bar{p}/\bar{\rho})|_{z=0}}/\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}$ (см. сноску[61]), то в результате получим $\nu^{\mathrm{turb}} = 3/2\alpha(\bar{p}/\bar{\rho})|_{z=0}/\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}$; тогда

$$R_{r\varphi} = \bar{\rho}\nu^T r(\partial\Omega_{\mathrm{K,\,mid}}(r)/\partial r) = -9/4\alpha\bar{p}|_{z=0}, \quad (213)$$

что совпадает с формулой (160) (поскольку безразмерный параметр α не поддается сколько-нибудь точному вычислению и остается свободным параметром в уравнениях строения диска, то множитель 9/4 в формуле (213) не имеет принципиального значения).

Итак, уравнения (55), (176), (177), (183), (186) и (190) образуют систему шести соотношений с шестью неизвестными функциями $\bar{p}(r, z)$, $\bar{\rho}(r, z)$, $\langle T\rangle(r, z)$, $\bar{s}$, $\bar{\rho}_{\mathrm{g}}$, $\Omega(r, z)$. Таким образом, в принципе, строение газопылевого диска с пылевой составляющей полностью определяется этими уравнениями вместе с граничными условиями и соотношениями (198) и (21*) для коэффициентов турбулентного переноса ν^{turb} и для коэффициента сопротивления θ_{dg} гладкой шарообразной частицы. Полное решение поставленной задачи требует привлечения численных методов и будет представлено в отдельной публикации.

Режим предельного насыщения вращающегося газопылевого диска мелкими пылевыми частицами

В качестве простого примера, иллюстрирующего возможности развитого здесь подхода, качественно рассмотрим модельную задачу о высотном распределении взвешенных мелкодисперсных пылевых частиц в стационарном газопылевом потоке (при температурно-нейтральной стратификации диска, Ri = 0) в тонком слое "космической жидкости", расположенном вблизи пылегазового субдиска (слоя повышенной концентрации пыли, но ниже критического значения, при котором возникает гравитационная неустойчивость). Будем предполагать, что концентрация твердых частиц в атмосфере субдиска и в самом субдиске достаточно велика, так что для описания движения газовзвеси надо учитывать обратное влияние дисперсной фазы на динамику турбулентного потока. Далее мы для простоты будем считать, что дисковое вещество в атмосфере субдиска является изотермическим, а газовая фаза несжимаема. Кроме этого будем иметь в виду, что седиментация твердых частиц происходит без большой радиальной миграции, поэтому диффузионный поток пыли в вертикальном направлении $\partial\overline{\tilde{\rho}_{\mathrm{d}} w_{\mathrm{d}z}}/\partial z \gg \partial\overline{\tilde{\rho}_{\mathrm{d}} w_{\mathrm{d}r}}/\partial r$. Тогда при стационарном режиме движения пылевой компоненты в атмосфере регулярное гравитационное оседание частиц в субдиск (скорость гравитационного оседания $a = -w_z$ будем считать не зависящей от $\bar{s}$, т.е. постоянной) должно быть сбалансировано их турбулентным переносом вверх, т.е. $\bar{J}_{\mathrm{d}z} + J_{\mathrm{d}z}^{\mathrm{turb}} = \mathrm{const} = 0$, откуда, с учетом формул (96) и (190), для относительной скорости в вертикальном направлении будем иметь

$$-a = \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\frac{\partial\ln(\bar{s}/\bar{\rho}_{\mathrm{g}})}{\partial z} \cong \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\frac{\partial\ln\bar{s}}{\partial z}. \quad (214)$$

В субдиске эффективно действуют дополнительные напряжения $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}}$, связанные с относительным движением газа и крупнодисперсной пыли, поэтому меридиональная φ-компонента уравнения Рейнольдса (178) для внутренних областей субдиска сводится к следующему уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r[(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{r\varphi}]\} + \frac{\partial}{\partial z}[(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{z\varphi}] + \\ + \frac{1}{r}[(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{\varphi r}] \cong 0, \quad (215)$$

где в силу соотношений (195) соответствующие компоненты тензора относительных напряжений $\overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}} \cong -\bar{s}\rho_{\mathrm{d}}\langle C_{\mathrm{g}}\rangle\overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{w}}$ принимают вид:

$$(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{rel}})_{z\varphi} = \bar{s}\rho_{\mathrm{d}}\langle C_{\mathrm{g}}\rangle a\overline{w}_{\varphi} = \\ = \bar{s}\rho_{\mathrm{d}}\frac{\zeta^3\eta}{2(1+\zeta^2)}zr\Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}(r), \quad (216)$$

$$(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{rel}})_{\varphi r} = -\bar{s}\rho_{\mathrm{d}}\langle C_{\mathrm{g}}\rangle\overline{w}_r\overline{w}_{\varphi} = \\ = \frac{\bar{s}\rho_{\mathrm{d}}\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_{\mathrm{g}}}\frac{\zeta^3\eta^2}{(1+\zeta^2)^2}r^2\Omega^2_{\mathrm{K,\,mid}}(r). \quad (217)$$

Поскольку радиальное направление во всем диске является основным (см. Сафронов, Гусейнов, 1990), то для субдиска можно положить

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{z\varphi}] \cong 0. \quad (218)$$

Это уравнение показывает, что плотность потока φ-компоненты импульса вдоль вертикальной оси будет одной и той же на всех расстояниях от плоскости $z = 0$ до "поверхности" $z = h_{\mathrm{subdisk}}$ субдиска: $(\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{z\varphi} = (\mathbf{R} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{rel}})_{z\varphi}|_{z=0} = \mathrm{const}$. Так как в окрестности экваториальной плоскости и не слишком больших z в силу соотношений (162), (212),

$$R_{z\varphi}|_{z\approx 0} \equiv \bar{\rho}(r, 0)\nu^{\mathrm{turb}}(r, 0)r\left\{\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z}\right\}\Bigg|_{z\approx 0} = 0, \quad (219)$$

то уравнение Рейнольдса (215) для атмосферы субдиска можно принять имеющим вид

$$\nu^{\mathrm{turb}}\frac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r, z)/\partial z] \equiv V_*^2, \quad (220)$$

где

$$V_*^2 = (\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel})_{z\varphi}\big|_{z = h_{\rm subdisk}} \cong \frac{\rho_d \zeta^3 \eta}{2\bar{\rho}(r, 0)(1+\zeta^2)} \times \\ \times r\Omega^2_{\rm K,\, mid}(r)[z\bar{s}(r, z)]_{z = h_{\rm subdisk}}, \quad (221)$$

V_* – так называемая динамическая скорость (естественный масштаб скоростей для течения около “поверхности” субдиска). В уравнении (220) мы пренебрегли вкладом относительных напряжений сравнительно с турбулентными напряжениями Рейнольдса.

Исключая из выражения $b = \alpha^2 l^2(1 - K_f)[r\partial\Omega(r, z)/\partial z]^2$ (см. (173)) градиент меридиональной скорости $\partial[r\Omega(r, z)]/\partial z$ с помощью уравнения (220) и соотношения $\nu^{\rm turb} = l/\sqrt{b}$, получим

$$b = \alpha V_*^2 \sqrt{1 - {\rm K}_f}, \quad (222)$$

где

$${\rm K}_f \equiv -\frac{\langle\sigma\rangle}{{\rm Sc}^{\rm turb}} \frac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^3} \frac{\partial\bar{s}}{[r\partial\Omega(r, z)/\partial z]^2} = \\ = \frac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^4} \frac{\langle\sigma\rangle \bar{s} a}{V_*^2 \partial\Omega(r, z)/\partial z} \quad (223)$$

– динамическое число Колмогорова. Таким образом, распределения по z структурных параметров диска могут быть найдены с помощью уравнений (214), (220), (222) и (223), которым придадим следующий вид:

$$\begin{cases} l\sqrt{b}\dfrac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r, z)/\partial z] = V_*^2, \\ \dfrac{1}{{\rm Sc}^{\rm turb}} l\sqrt{b}\dfrac{\partial\bar{s}}{\partial z} + a\bar{s} = 0, \quad l(z) = \dfrac{\gamma^*\kappa}{\alpha^{1/2}} z\Phi({\rm K}_f), \\ b = \alpha V_*^2\sqrt{1 - {\rm K}_f}, \\ {\rm K}_f = \langle\sigma\rangle \dfrac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^4} \dfrac{\bar{s} a}{V_*^2 \partial\Omega(r, z)/\partial z}. \end{cases} \quad (224)$$

Здесь локальный масштаб турбулентности $l(z)$ выражается (в предположении полной автомодельности по локальному ${\rm Re} = u_0 z/\nu$ и глобальному ${\rm Re}_{\rm glob} = u_0 L/\nu$ числам Рейнольдса) через некоторую универсальную функцию $\Phi({\rm K}_f)$ от числа Колмогорова ${\rm K}_f$, причем $\Phi(0)$, очевидно, равно единице. Поскольку масштаб турбулентности под влиянием пылевой составляющей газовзвеси убывает (см. формулу (199)), то функция $\Phi({\rm K}_f)$ также должна убывать с ростом своего аргумента.

Определим теперь для стационарного режима течения в атмосфере субдиска распределение по z объемной концентрации пылевых частиц и угловой скорости турбулизованного потока, несущего мелкие взвешенные частицы. Для интегрирования системы уравнений (224) необходимо, в общем случае, знание граничных условий на поверхности субдиска. Например, если исключить из (214) и (220) величину $\nu^{\rm turb}$, то в результате получим

$$\frac{\partial \ln\bar{s}}{\partial z} = -\omega\frac{\gamma^*\kappa}{V_*}\frac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r, z)], \quad (225)$$

где

$$\omega \equiv {\rm Sc}^{\rm turb} a/\gamma^*\kappa V_* \quad (226)$$

– безразмерный параметр. Интегрируя уравнение (225), найдем

$$\bar{s}(r, z) = \bar{s}(r, z)\big|_{z = h_{\rm subdisk}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\omega\gamma^*\kappa}{V_*} r[\Omega(r, z) - \Omega_{\rm K,\, mid}(r, z)\big|_{z = h_{\rm subdisk}}]\right\}. \quad (227)$$

Вместе с тем система (224) обладает некоторыми специфическими для подобного типа режимов течения газовзвеси свойствами, которые позволяют найти некоторое автомодельное решение, не зависящее от граничных условий[65]. Это связано с тем, что она содержит только градиент угловой скорости, а не саму скорость. А это означает, что при неограниченном запасе частиц в окрестности пылевого субдиска ввиду обратного влияния частиц на динамику потока можно ожидать существования такого режима течения газовзвеси в нем, при котором турбулентный поток вбирает в себя максимально возможное при заданной динамической скорости и прочих параметрах течения количество пыли (см. Barenblatt, Golitsyn, 1974). Этот режим, получивший в литературе название “режим предельного насыщения”, должен описываться особым решением системы (224), которое определяется параметрами, входящими только в сами дифференциальные уравнения (224).

Групповой анализ системы (224) показывает, что у нее имеется решение

$$\partial\Omega(r, z)/\partial z = C_1(r)/rz, \quad \bar{s} = C_2(r)/z^2, \quad (228)$$

где C_1 и C_2 – не зависящие от z функции от r, подлежащие определению. Подставляя эти выражения в (224), получим

$$C_1 = \frac{V_*}{\gamma^*\kappa\Phi({\rm K}_f)(1 - {\rm K}_f)^{1/4}} = \frac{2V_*}{\gamma^*\kappa\omega}, \quad (229)$$

[65] Заметим, что характер турбулентных потоков, содержащих твердую примесь, впервые был изучен применительно к расчету движения наносов в работе Колмогорова (1954), а применительно к атмосферным задачам – в работе (Баренблатт, Голицин, 1973).

откуда вытекает функциональное уравнение

$$\Phi(K_f)(1-K_f)^{1/4} = \omega/2, \qquad (230)$$

предназначенное для определения конкретного для изучаемого режима движения числа Колмогорова K_f (вычисленного на заданном расстоянии r от протозвезды).

Так как Φ – не возрастающая функция своего аргумента, $\Phi(0) = 1$, а число K_f по своему физическому смыслу заключено между нулем и единицей, то функциональное уравнение при $\omega > 2$ (что соответствует малой скорости потока, либо крупным частицам) не имеет корня; однако при $\omega < 2$ (условие существования режима предельного насыщения) корень существует и при том один, $K_f = K_f^*$. Из первого соотношения (228), с учетом (229), следует (при $\omega < 2$)

$$\Omega(r, z) = \Omega_{K,\,\mathrm{mid}}(r) + \frac{V_*(r)}{\gamma^*\kappa\omega r}\ln z. \qquad (231)$$

С учетом этого соотношения и формулы (226) легко получить следующее предельное стационарное распределение мелких частиц пыли по высоте в тонком околоэкваториальном слое субдиска:

$$\bar{s} = \frac{C_2(r)}{z^2} = \frac{V_*^4 K^*}{\langle\sigma\rangle a^2\Omega^2_{K,\,\mathrm{mid}}}\frac{1}{z^2}, \qquad (232)$$

к которому стремится поток при неограниченном запасе пыли на подстилающей поверхности.

Формула (231) показывает, что в предельно нагруженном частицами турбулентном потоке распределение скоростей по z в "приповерхностной" атмосфере субдиска является логарифмическим (как и должно быть в турбулизованной жидкости вблизи "стенки"), однако присутствие пыли приводит как бы к уменьшению коэффициента Кармана κ. Это может интерпретироваться так, что при тех же внешних условиях (той же динамической скорости V_*) поток газовзвеси под действием пылевых частиц ускоряется по сравнению с потоком "чистого" газа. Другими словами, градиенты скорости у поверхности субдиска возрастают, что способствует эффекту сальтации – отрыву и подъему больших количеств мелких пылевых частиц в его атмосферу. Наличие подобного пыльного облака с повышенной концентрацией взвешенных мелких частиц способствует, в свою очередь, более интенсивному протеканию всевозможных процессов турбулентной коагуляции, приводящих к росту инерционности твердых частиц и эффективному их опусканию в субдиск. Таким образом, возможный режим предельного насыщения мелкими пылевыми частицами вращающегося газопылевого облака в окрестности субдиска является дополнительным механизмом, ускоряющим процесс формирования самого субдиска относительно крупными твердыми частицами, на которые турбулентные пульсации действует уже в меньшей степени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Решение этой проблемы связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции допланетного газопылевого диска вокруг молодых звезд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося допланетного диска при учете магнитогидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временно́го распределения термогидродинамических параметров дисковой среды зависит агрегатное состояние основных компонентов допланетного вещества, расположение их фронтов конденсации–сублимации, и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении степени приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остается нерешенным. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах ее уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звезд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей такой динамической системы, в которой эволюция изначального допланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца и уплотненного пылегазового субдиска. Таким образом, в связи с проблемой реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце, на первый план выступает:

– построение численной модели формирования пылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплощения в спокойном газе и при наличии турбулентности;

– моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске (когда плотность его вещества за счет вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения), образования и эволюции допланетных пылевых сгущений для зоны внутренних планет и для периферии диска;

– моделирование процессов аккумуляции Земли и планет;

– оценка следствий для химического состава Земли, планет, астероидов и комет.

В качестве первого этапа изучения комплексной проблемы планетной космогонии в данной статье рассматривается ранняя стадия образования планетной системы – стадия допланетного газопылевого облака. Очевидно, что численное моделирование подобного облака связано, прежде всего, с построением базовой модели сплошной среды с усложненными физико-химическими свойствами, учитывающей, в частности, совместное протекание магнитогидродинамических процессов и процессов тепло- и массопереноса в турбулизованном аккреционном диске, с учетом инерционных эффектов твердых частиц космического вещества, процессов излучения, испарения, конденсации и коагуляции, а также разнообразных химических превращений. Некоторые аспекты разработки именно такой континуальной среды нашли отражение в представленной работе, в которой получили дальнейшее обобщение на гетерогенные среды развитые ранее авторами эффективные методы инвариантного моделирования турбулентных течений в многокомпонентных реагирующих газовых смесях (Колесниченко, Маров, 1998; Marov, Kolesnichenko, 2002). Настоящее исследование, по нашему мнению, открывает перспективы существенно более полного и более приближенного к реальности моделирования разнообразных процессов эволюции дифференциально вращающегося допланетного газопылевого турбулизованного диска. При этом для получения достоверных результатов и их понимания здесь особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям. К основным результатам, полученным в работе, можно отнести:

1) формулирование полной системы уравнений двухфазной многокомпонентной механики с учетом относительного движения фаз, процессов коагуляции, фазовых переходов и излучения, предназначенной для постановки и численного решения конкретных модельных задач по взаимосогласованному моделированию структуры, динамики и теплового режима допланетного аккреционного диска;

2) теоретико-вероятностное осреднение по Фавру стохастических уравнений гетерогенной механики, выполненное с целью феноменологического описания турбулентного режима течения дискового вещества, и вывод определяющих соотношений для различных турбулентных потоков, необходимых для замыкания уравнений масштаба среднего движения;

3) разработку полуэмпирического способа моделирования коэффициента турбулентной вязкости в двухфазной дисковой среде с учетом обратного влияния диспергированной фазы;

4) описание в рамках рассмотренной модели среды влияния инерционных эффектов пылевых частиц на характеристики турбулентности в диске, в частности, на дополнительную генерацию турбулентной энергии крупными частицами;

5) развитие параметрического метода моментов решения интегро-дифференциального уравнения коагуляции Смолуховского для функции распределения частиц по размерам, базирующегося на принадлежности искомой функции распределения к определенному параметрическому классу распределений;

6) рассмотрение “режима предельного насыщения” атмосферы субдиска мелкодисперсными частицами пыли, который способствует эффективному оседанию твердых частиц к центральной плоскости.

Результаты численного решения конкретных задач, воссоздающих отдельные этапы эволюции допланетного газопылевого облака на основе развитой здесь модели дисковой континуальной среды с усложненными физико-химическими свойствами будут представлены в последующих публикациях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты РФФИ: № 06-01-00114, № 05-02-16288), а также в рамках Программы президиума РАН № 25.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Решение уравнения кинетики коагуляции методом моментов

Рассмотрим метод моментов решения кинетического уравнения коагуляции (33) для случая, когда распределение частиц по размерам зависит от одной пространственной координаты z, что для рассматриваемой в статье проблемы соответствует установившемуся режиму движения в пылевом слое при осаждении частиц к центральной плоскости диска под действием силы тяжести.

Смысл метода моментов состоит в сведении кинетического уравнения коагуляции (33) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно моментов:

$$M_p = \int_0^\infty U^p f(U, z)\mathrm{d}U, \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (\text{A}.1)$$

функции распределения $f(U, z)$. Для получения подобной системы умножим обе части упрощенного уравнения (33)

$$w_z \frac{\partial f(U,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\int_0^U f(W,z) f(U-W,z)\times$$
$$\times K(W, U-W)\mathrm{d}W - f(U,z)\int_0^\infty f(W,z)K(W,U)\mathrm{d}W,$$

(где w_z – постоянная скорость оседания пылевых частиц с высоты h_{disk} к центральной плоскости диска) на U^p и проинтегрируем результат по U в пределах от 0 до ∞; в итоге будем иметь

$$w_z\frac{\partial M_0}{\partial z} = w_z\frac{\partial N_\text{d}}{\partial z} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(U,W) f(U,z) f(W,z)\mathrm{d}W\mathrm{d}U, \qquad (\text{A}.2)$$

$$w_z\frac{\partial M_1}{\partial z} = w_z\frac{\partial s}{\partial z} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (W-U)K(U,W) f(U,z) f(W,z)\mathrm{d}W\mathrm{d}U = 0, \qquad (\text{A}.3)$$

....

$$w_z\frac{\partial M_p}{\partial z} = \int_0^\infty\int_0^\infty K(U,W)[1/2(U+W)^p - U^p]\times$$
$$\times f(U,z) f(W,z)\mathrm{d}W\mathrm{d}U \quad (p = 2, 3, \ldots) \qquad (\text{A}.4)$$

Для того, чтобы выразить правые части уравнений этой системы также через моменты, нужно конкретизировать ядро коагуляции и принять допущение относительно исходного вида функции распределения. Рассмотрим далее ядра типа

$$K(U,W) = \Lambda\sum_{j=0}^K \beta_j(U^{\alpha-\alpha_j}W^{\alpha_j} + U^{\alpha_j}W^{\alpha-\alpha_j}), \qquad (\text{A}.5)$$

где Λ – множитель, определяемый внешними условиями, при которых идет коагуляция. К этому классу ядер относятся ядра, при которых кинетическое уравнение допускает точные решения. Кроме этого, формулами вида (A.5) могут быть аппроксимированы ядра, соответствующие многим механизмам коагуляции в газопылевом диске, в частности, проанализированные в работе (Колесниченко, 2001). Действительно все рассмотренные там ядра являются однородными функциями, для которых возможна запись $K(U, W) = U^\alpha K(1, x)$, где α – степень однородности, $x \equiv W/U$. Как известно, любую подобную функции возможно аппроксимировать многочленом:

$$K(U,W) = \Lambda U^\alpha\sum_{j=0}^K \beta_j(x^{\alpha_j} + x^{\alpha-\alpha_j}), \qquad (\text{A}.6)$$

причем для определения неизвестных коэффициентов β_j следует выбрать s точек x_i (узлов интерполяции) в количестве, совпадающем с числом неизвестных коэффициентов β_j, и принять

$$K(1,x_i) = \Lambda\sum_{j=0}^K \beta_j(x_i^{\alpha_j} + x_i^{\alpha-\alpha_j}),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (\text{A}.7)$$

Чтобы при последующем интегрировании разложения (A.6) не появлялись моменты с порядком выше степени однородности ядра, величину α_j следует определить равенством $\alpha_j = \alpha j/(K + 1)$. При рассмотрении разных значений K можно получить различные интерполяционные многочлены.

Если подставить (A.5) в (A.2)–(A.4), то получим следующую бесконечную систему уравнений для моментов

$$w_z\frac{\partial M_0}{\partial z} = w_z\frac{\partial N_\text{d}}{\partial z} = -\Lambda\sum_{j=0}^K \beta_j M_{\alpha-\alpha_j}M_{\alpha_j}, \qquad (\text{A}.8)$$

$$w_z\frac{\partial M_1}{\partial z} = w_z\frac{\partial s}{\partial z} = 0, \qquad (\text{A}.9)$$

....

$$w_z\frac{\partial M_p}{\partial z} = \frac{\Lambda}{2}\sum_{j=0}^K \beta_j\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k(M_{\alpha-\alpha_j+p-k}M_{\alpha_j+k} + M_{\alpha-\alpha_j+k}M_{\alpha_j+p-k}),$$
$$(p = 2, 3, \ldots). \qquad (\text{A}.10)$$

Для решения этой системы, в правые части которых входят в общем случае дробные моменты, необходимо дополнить ее уравнениями связей между дробными и целыми моментами. Здесь также возможны разные подходы: подход, связанный с аппроксимацией (полиномами Лагранжа) дробных моментов через целые (см., например, Логинов, 1979), и параметрический метод.

Ограничимся далее параметрическим методом, который базируется на принадлежности искомой функции распределения $f(U, z)$ к определенному параметрическому классу распределений. Примем для простоты, что в результате процессов коагуляции распределение $f(U, z)$ остается в классе распределений, к которым принадлежит исходное распределение, а по мере опускания частиц к центральной плоскости диска изменяются (с высотой) только его статистические параметры: среднее значение, дисперсия и т.п. В качестве исходного распределения пылевых частиц по размеру (диаметру) d в газопылевом аккреционном диске, по аналогии с атмосферным аэрозолем, выберем двухпараметрическое логнормальное распределение.

Плотность вероятности логарифмически нормального закона зависит от среднего значения $\langle \ln d\rangle$ и показателя рассеяния (дисперсии) логарифма диаметра $\sigma_L^2 \equiv \langle(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2\rangle$:

$$p(d;\mu^*,\sigma_L) = \frac{N_d}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2}{2\sigma_L^2}\right\} = \frac{N_d}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\ln^2(d/\mu^*)}{2\sigma_L^2}\right\}. \quad (A.11)$$

Медиана распределения определяется, как известно, соотношением $\mu^* = \exp(\langle \ln d\rangle)$, а средние значения самого диаметра и его дисперсии соответственно равны

$$\langle d\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_L^2 + \ln\mu^*\right), \quad (A.12)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle(d - \langle d\rangle)^2\rangle = \langle d\rangle^2[\exp\sigma_L^2 - 1]. \quad (A.13)$$

Применяя приведенные соотношения, можно получить формулы для статистических параметров (σ_L^2 и μ^*) логнормального распределения (A.11) только через средний диаметр частиц $\langle d\rangle$ и относительную дисперсию $\beta^2 \equiv \langle(d - \langle d\rangle)^2\rangle/\langle d\rangle^2$ их размера:

$$\sigma_L^2 = \ln(1+\beta^2), \quad \mu^* = \langle d\rangle/\sqrt{1+\beta^2}. \quad (A.14)$$

Для определения плотности исходного распределения объема $U = (\pi/6)d^3$ пылевых частиц используем формулу перехода

$$f(U) = p[d(U)]|\mathrm{d}d/\mathrm{d}U| \quad (A.15)$$

(справедливую для строго возрастающей функции $U = U(d)$ случайной величины d (Хан, Шапиро, 1969)) и распределение (A.11); в результате будем иметь

$$f(U;\sigma_L,\mu) = \frac{N_d}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L U}\exp\left[-\frac{\ln^2(U/\mu)}{18\sigma_L^2}\right], \quad (A.16)$$

где $\mu = (\pi/6)\mu^{*3}$.

Пусть процесс коагуляции в диске не изменяет этого распределения, а с высотой изменяются только параметры $\mu(z)$ и $\sigma_L^2(z)$. Введем моменты логнормального распределения

$$M_p(z) = \frac{N_d}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L(z)}\times \int_0^\infty U^{p-1}\exp\left[-\frac{\ln^2[U/\mu(z)]}{18\sigma_L^2(z)}\right]\mathrm{d}U. \quad (A.17)$$

Согласно (Lee,1983), для любого момента p-го порядка справедливо представление

$$M_p = M_1\mu^{p-1}\exp[3/2(p^2-1)\sigma_L^2], \quad (A.18)$$

$$M_1 = s = \mathrm{const}, \quad (A.19)$$

позволяющее выразить дробные моменты, входящие в (A.8)–(A.10) через величины M_1, μ, σ_L^2. В итоге получим следующую параметрическую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (число уравнений должно совпадать с числом неизвестных коэффициентов) для определения параметров $\mu(z)$, $\sigma_L^2(z)$ по заданным граничным значениям $\mu(h_{disk})$, $\sigma_L^2(h_{disk})$:

$$w_z\frac{\partial M_0}{\partial z} = -\Lambda\sum_{j=0}^K\beta_j M_{\alpha-\alpha_j}M_{\alpha_j} = -\Lambda M_1^2\mu^{\alpha-2}\sum_{j=0}^K\beta_j\exp[3/2[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2 - 2]\sigma_L^2] = -\Lambda\mu^\alpha M_0^2\sum_{j=0}^K\beta_j\exp[3/2[\alpha_j^2+(\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2], \quad (A.20)$$

$$w_z\frac{\partial M_2(z)}{\partial z} = 2\Lambda\sum_{j=0}^K\beta_j M_{\alpha-\alpha_j+1}M_{\alpha_j+1} = 2\Lambda M_1^2\mu^\alpha\sum_{j=0}^K\beta_j\exp[3/2[(\alpha_j+1)^2 +$$

$$+(\alpha-\alpha_j+1)^2-2]\sigma_L^2] =$$
$$= 2\Lambda M_1^2\mu^\alpha \sum_{j=0}^{K}\beta_j \exp[3/2[(\alpha_j+1)^2+ \tag{A.21}$$
$$+(\alpha-\alpha_j+1)^2-2]\sigma_L^2] =$$
$$= 2\Lambda\mu^{\alpha+2}\sum_{j=0}^{K}\exp[3/2[\alpha_j^2+(\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2].$$

$$N_d \equiv M_0 = s\mu^{-1}\exp(-3/2\sigma_L^2);$$
$$M_2 = s\mu\exp(9/2\sigma_L^2); \tag{A.22}$$

Эта параметрическая система нелинейных уравнений может быть решена только численно. Результаты численного моделирования в связи с задачей осаждения пылевых частиц к центральной плоскости диска будут представлены в отдельной статье. Здесь же отметим, что изменение с высотой среднего числа частиц $N_d(z)$ можно оценить, предположив, что дисперсия σ_L^2 остается постоянной. В этом случае, ограничившись двумя первыми моментами, из (A.21) будем иметь

$$w_z\frac{\partial N_d}{\partial z} =$$
$$= -\Lambda\mu^\alpha N_d^2\sum_{j=0}^{K}\beta_j\exp[3/2[\alpha_j^2+(\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2]. \tag{A.23}$$

Решение этого уравнения, полученное при использовании граничного условия $N_d(h_{disk}) = N_{d,\,h_{disk}} = s/\tilde{U}(h_{disk})$, имеет вид

$$N_d(z) = \frac{s}{\tilde{U}(h_{disk})}\frac{1}{1+q[(h_{disk}-z)/w_z]}, \tag{A.24}$$

где

$$q = \Lambda\mu^\alpha\frac{s}{\tilde{U}(h_{disk})}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{K}\beta_j\exp[3/2[\alpha_j^2+(\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2]. \tag{A.25}$$

Здесь $\tilde{U}(h_{disk}) = (\pi/6)\langle d\rangle^3 = \mu(h_{disk})\exp(3/2\sigma_L^2)$ – верхнее граничное значение среднего объема (эта формула следует из (A.14)). Отсюда, используя соотношение $\tilde{U}(z) = s/N_d$, можно найти изменение с высотой среднего объема частиц. Для относительно малых значений z (т.е. когда частицы уже находятся в окрестности центральной плоскости диска) $q[(h_{disk}-z/w_z] \gg 1$ из (A.25) следует

$$N_d(z) = \Big\{\Lambda\mu^\alpha[(h_{disk}-z)/w_z]\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{K}\beta_j\exp[3/2[\alpha_j^2+(\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2]\Big\}^{-1}. \tag{A.26}$$

Из этого выражения видно, что при достаточно большом времени коагуляции среднее число частиц в системе перестает зависеть от их исходного распределения, т.е. как бы “забывает свое прошлое”, и может быть описано некоторой универсальной функцией, вид которой определяется только ядром коагуляции. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и с другими возможными распределениями пылевых частиц по объемам в коагулирующем турбулентном потоке, например, с гамма-распределением.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Цилиндрические координаты

Здесь для удобства читателя представлены в цилиндрической координатной системе r, φ, z (для осесимметричного случая, $\partial/\partial\varphi = 0$) выражения для различных операторов, фигурирующих в приведенных выше уравнениях гетерогенной механики и действующих на

1) скаляры:

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathcal{B} = \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + u_r\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial r} + u_z\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z},$$
$$\nabla\mathcal{B} = \mathbf{i}_r\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial r} + \mathbf{i}_z\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}, \tag{B.1}$$

$$\nabla^2\mathcal{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial z^2}; \tag{B.2}$$

2) векторы:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathcal{A}_r)}{\partial r} + \frac{\partial\mathcal{A}_z}{\partial z}, \tag{B.3}$$

$$\nabla\mathbf{A} = \mathbf{i}_r\mathbf{i}_r\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial r} + \mathbf{i}_r\mathbf{i}_\varphi\frac{\partial\mathbf{A}_\varphi}{\partial r} + \mathbf{i}_r\mathbf{i}_z\frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_r\frac{\mathbf{A}_\varphi}{r} +$$
$$+ \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_\varphi\frac{\mathbf{A}_r}{r} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_r\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial z} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_\varphi\frac{\partial\mathbf{A}_\varphi}{\partial z} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_z\frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial z}; \tag{B.4}$$

3) диадики:

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}_r\mathbf{i}_rP_{rr} + \mathbf{i}_r\mathbf{i}_\varphi P_{r\varphi} + \mathbf{i}_r\mathbf{i}_zP_{rz} + \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_rP_{\varphi r} + \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_\varphi P_{\varphi\varphi} +$$
$$+ \mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_zP_{\varphi z} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_rP_{zr} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_\varphi P_{z\varphi} + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_zP_{zz}, \tag{B.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \mathbf{i}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{rr})}{\partial r}-\frac{\partial P_{zr}}{\partial z}-\frac{P_{\varphi\varphi}}{r}\right]+ \\ +\mathbf{i}_\varphi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{r\varphi})}{\partial r}+\frac{\partial P_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{P_{\varphi r}}{r}\right]+\mathbf{i}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right]. \tag{B.6}$$

Тогда для тензоров деформаций и тензора скоростей деформаций будем иметь:

$$\mathbf{D}\equiv\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{transp}}) =$$

$$= \mathbf{i}_r\mathbf{i}_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\mathbf{i}_r\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+\mathbf{i}_r\mathbf{i}_z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+ \\ +\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_\varphi\frac{u_r}{r}+\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_z\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+ \\ +\mathbf{i}_z\mathbf{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\mathbf{i}_z\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\mathbf{i}_z\mathbf{i}_z\frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{B.7}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}}\equiv\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{transp}})-\frac{1}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{u} =$$

$$= \mathbf{i}_r\mathbf{i}_r\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\mathbf{i}_r\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+ \\ +\mathbf{i}_r\mathbf{i}_z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+ \\ +\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_\varphi\left(\frac{u_r}{r}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\mathbf{i}_\varphi\mathbf{i}_z\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+ \\ +\mathbf{i}_z\mathbf{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\mathbf{i}_z\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\mathbf{i}_z\mathbf{i}_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right). \tag{B.8}$$

Оператором, который широко используется в гидродинамике, является двухточечное умножение Гиббса. Согласно обозначениям Гиббса, если **a**, **b**, **c**, **d** – произвольные векторы, то $\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$. В частности, для единичных векторов можно написать

$$\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k : \mathbf{i}_l\mathbf{i}_m = (\mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_l)(\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_m) = \delta_{jl}\delta_{km}, \tag{B.9}$$

тогда для двух диадиков имеем

$$\mathbf{D}^{(1)} : \mathbf{D}^{(2)} = \left(\sum_j\sum_k\mathbf{i}_j\mathbf{i}_kD_{jk}^{(1)}\right) : \left(\sum_l\sum_m\mathbf{i}_l\mathbf{i}_mD_{lm}^{(2)}\right) = \\ = \sum_j\sum_k\sum_l\sum_m\delta_{jl}\delta_{km}D_{jk}^{(1)}D_{lm}^{(2)} = \sum_j\sum_kD_{jk}^{(1)}D_{jk}^{(2)} \tag{B.10}$$

или

$$2\overset{\circ}{\mathbf{D}} : \overset{\circ}{\mathbf{D}} = 2D_{rr}^2+2D_{\varphi\varphi}^2+D_{zz}^2+4D_{r\varphi}^2+4D_{rz}^2+ \\ +4D_{z\varphi}^2-2/3(\nabla\cdot\mathbf{u})^2. \tag{B.11}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А. О диффузии тяжелых частиц в турбулентных газовых потоках // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 3. С. 573–576.

Альвен Х., Аррениус Г. Эволюция солнечной системы. М.: Мир, 1979. 511 с.

Баренблатт Г.И., Голицин Г.С. Локальная структура развитых пылевых бурь. М.: Изд-во МГУ, 1973. 44 с.

Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975. 378 с.

Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 327 с.

Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2003. 186 с.

Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзобекян Г.З., Пашин М.М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия, 1974. 480 с.

Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 320 с.

Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат, 1984. 283 с.

Гавин Л.Б., Наумов В.А., Шор В.В. Численное исследование газовой струи с тяжелыми частицами на основе двухпараметрической модели турбулентности // Прикл. матем. и технич. физ. 1984. № 1. С. 62–67.

Галимов Э.М. Феномен жизни. Между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. М.: УРСС, 2001. 254 с.

Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961. 930 с.

Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970. 424 с.

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука, 1994. 348 с.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

Деревич И.В. Влияние примеси крупных частиц на турбуленитные характеристики газовзвеси в каналах // Прикл. матем. и технич. физ. 1994. № 2. С. 70–78.

Дорофеева В.А., Макалкин А.Б. Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. М.: Едиториал УРСС, 2004. 264 с.

Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю. Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // ТВТ.1999. Т. 37. № 4. С. 1004–1007.

Зуев Ю.В., Лепешинский И.Ф. Математическая модель двухфазной турбулентной струи // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидкости и газа. 1981. № 6. С. 69–77.

Иевлев В.М. Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1970. № 1. С. 91–103.

Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.

Картушинский А.И. Перенос инерционной примеси в двухфазной турбулентной струе // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидкости и газа. 1984. № 1. С. 36–41.

Колесниченко А.В. К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 133–155.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 52–76.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: МАИК-Наука, 1999. 336 с.

Колесниченко А.В. Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // Астрон. вестн. 2000. Т. 34. № 6. С. 516–528.

Колесниченко А.В. Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске // Астрон. вестн. 2001. Т. 35. № 2. С. 139–155.

Колесниченко А.В. Максимов В.М. Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана–Максвелла для гетерогенной среды // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 1. С. 3–25.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова. М.: Физматлит, 2003. С. 123–162.

Колесниченко А.В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405–427.

Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физич. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56–58.

Колмогоров А.Н. О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов // Вестник МГУ. 1954. № 3. С. 41–45.

Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.

Лайхтман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1970. 342 с.

Логинов В.И. Обезвоживание и обессоливание нефтей. М.: Химия, 1979. 216 с.

Мазин И.П. Теоретическая оценка коэффициента коагуляции капель в облаках // Тр. Централ. аэролог. обсерват. 1971. Вып. 95. С. 12–25.

Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. I. Исходные данные, уравнения и методы построения моделей // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 99–122.

Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. II. Результаты расчета моделей // Астрон. вестн. 1996. Т. 30. №. 6. С. 496–513.

Макалкин А.Б. проблемы эволюции протопланетных дисков // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова. М.: Физматлит, 2003. С. 402–446.

Макалкин А.Б. Особенности эволюции вязкого протопланетного околосолнечного диска // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 6. С. 559–576.

Маров М.Я., Колесниченко А.В. Введение в планетную аэрономию. М.: Наука, 1987. 456 с.

Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеоиздат. Т. 1. 1992. 640 с.

Нигматулин Р.И. О сновы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 509 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа “Прогресс”, 1994. 240 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969. 244 с.

Сафронов В.С. Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5–24.

Сафронов В.С. Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска // Астрон. вестн. 1987. Т. 21. № 3. С. 216–220.

Сафронов В.С., Гусейнов К.М. О возможности образования комет in citu // Астрон. вестн. 1990. Т. 24. № 3. С. 248–256.

Смолуховский М. Три доклада о диффузии, броуновском молекулярном движении и коагуляции коллоидных частиц. Броуновское движение. М.–Л.: Изд. ОНТИ, 1936. 332 с.; Коагуляция коллоидов. М.: Изд. ОНТИ. 1936.

Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 171 с.

Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 319 с.

Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.

Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Наука, 1959. 548 с.

Фридман Ф.М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122–1130.

Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 351 с.

Чепмен С., Каулинг Т.К. Математическая теория неоднородных газов.М.: ИЛ, 1960. 510 с.

Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. II. М.: Мир, 1985. 655 с.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

Шмидт О.Ю. Четыре лекции о происхождении Земли. Изд. 3, доп. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 140 с.

Шрайбер А.А., Милютин В.Н., Яценко В.П. Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.

Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. Думка, 1980. 250 с.

Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М.: Мир, 1969. 396 с.

Armitage P.J., Livio M., Pringle J. E. Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 2001. V. 324. P. 705–711.

Balbus S.A., Hawley J.F. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1–53.

Barge P., Sommeria J. Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? // Astron and Astrophys. 1995. V. 295. P. L1–L4.

Barenblatt G.I., Golitsyn G.S. Local structure of Mature dust storms // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. № 7. P. 1917–1933.

Beckwith S.V.W., Henning T., Nakagawa Y. Dust properties and assembly of large particjes in protoplanetary disks // Protostars and Planets IV / Eds Mannings V., Boss A.P., Rassell S.S. Tucson: Univ. Arizon. Press. 2000. P. 533–558.

Bisnovatyi-Kogan G.S., Lovelace R.V.E. Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // New Astron. Rev. 2001. V. 45. P. 663–742.

Cabot W., Canuto V.M., Hubickyj O., Pollack J.B. The role of turbulent convection in the primitive solar nebula // Icarus. 1987. V. 69. P. 387–423.

Chavanis P.-H. Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V. 16. P. 1–54.

Cuzzi J.N., Dobrovolskis A.R., Champney J.M. Particle-gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 102–134.

Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G. Numerical calculation of two-phase turbulent round jet // Int. J. Multiphase Flow. 1977. V. 3. № 3. P. 223–234.

Dubrulle B. A turbulent closure model for thin accretion disks // Astron. and Astrophys. 1992. V. 266. P. 592–604.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59–76.

Dubrulle B., Morfill G., Sterzic M. The dust subdisk in the protoplanetary nebula // Icarus. 1995. V. 114. P. 237–246.

Eardley D.M., Lightman A.P. Magnetic viscosity in relativistic accretion discs // Astrophys. J. 1975. V. 200. P. 187–198.

Eardley D.M., Lightman A.P., Payne D.G., Shapiro S.L. Accretion discs around massive black holes; persistent emission spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.

Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W. A second-order turbulence model for two-phase flows // Heat Transfer. 1982. V. 5. P. 219–224.

Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W. A two-equation turbulence model for two-phase flows // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 931–938.

Epstein P.S. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases // Phys. Rev. 1924. V. 23. P. 710–733.

Favre A. Equations statistiques des gaz turbulents // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969. С. 483–511.

Fridman A.M., Boyarchuck F.F., Bisikalo D.V., et al. The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // Phys. Lett. A. 2003. V. 317. P. 181–198.

Garaud P., Barriere-Fouchet L., Lin D.N.C. Individual and collective behavior of dust particles in a protoplanetary nebula // J. Astrophys. 2005. V. 603. P. 292–306.

Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. № 3. P. 1051–1061.

Goodmann J., Pindor B. Secular instability and planetesimal formation in the dust laye // Icarus. 2000. V. 148. P. 537–549.

Gore R.A., Crowe C.T. Effect of particle size on modulating turbulent intensity // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 2. P. 279–285.

Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Commun. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 331.

Hazlehurst J., Sargent W.L.W. // Astrophys. J. 1959. V. 130. P. 276–285.

Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y. Formation of the Solar System // Protostars and Planets II / Eds Black D.C., Matthews M.S. Tucson: Univ. Arizona Press, 1985. P. 1100–1153.

Hersant F, Dudrulle B, Hure J.-M. Turbulence in circumstellar disks // Astron. And Astrophys. Manuscript № aa3549. 2004. P. 1–12.

Hunter S.C., Cherry S.S., Kliegel J.R., Waldman C. H. Gas-particle nozzle flow with reaction and particle size change // AIAA Paper. 1981. № 37. 14 p.

Kusaka T., Nakano N., Hayashi C. Growth of solid particles in the primordial solar nebula // Progr. Theor. Phys. 1970. V. 44. P. 1580–1595.

Lee K.W. Change of particle size distribution during Brownian coagulation // J. Colloid and Interface Sci. 1983. V. 92. № 2. P. 38–57.

Leonard A. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows // Adv. Geophys. 1974. V. 18. P. 237–248.

Lin D.N.C., Papaloizou J. On the structure and evolution of the primordial solar nebula // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1980. V. 191. № 31. P. 37–48.

Lissauer J.J., Stewart G.R. Growth of planets from planetesimals // Protostars and Planets III / Eds Levy E.H., Lunine I.J. Tucson: Univ. Arizona Press, 1993. P. 1061–1088.

Makalkin A.B. Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability // Lunar and Planet. Sci. 1994. V. 25. P. 827–828.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 375 p.

Melville W.K., Bray K.N.C. A model of the two-phase turbulent jet // Int. J. Heat and Mass Transfer.1979. V. 22. P. 647–656.

Morkovin M.V. Effects of compressibility on turbulent flow // Mechanics of Turbulence. N.Y.: Gordon and Breach, 1961. 367 p.

Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517–528.

Nakagawa Y., Sekiya M., Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // Icarus. 1986. V. 67. P. 375–390.

Nomura H. Structure and instabilities of an irradiated viscous protoplanetary disks // Astrophys. J. 2002. V. 567. P. 587–595.

Pollack J.B., McKay C.P., Cristofferson B.M. A calculation of a Rosseland mean opacity of dust grains in primordial Solar system nebulae // Icarus. 1985. V. 64. P. 473–492.

Richard D., Zahn J.-P. Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment // Astron. and Astrophys. 1999. V. 347. P. 734–738.

Ruden S.P., Pollack J.B. The dynamical evolution of the protosolar nebula // Asrophys. J. 1991. V. 375. P. 740–760.

Schmitt W., Henning T., Mucha R. Dust evolution in protoplanetary accretion disks // Astron. and Astrophys. 1997. V. 325. P. 569–584.

Sekiya M., Nakagawa Y. Settling of dust particles and formation of planetesimals // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 96. P. 141–150.

Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. and Astrophys. 1973. V. 24. P. 337–355.

Shakura N.I., Sunyaev R.A., Zilitinkevich S.S. On the turbulent energy transport in accretion disk // Astron. and Astrophys. 1978. V. 62. P. 179–187.

Soo S.L., Ihrig H.K., Kouh A.F. Experimental determination of statistical properties of two-phase turbulent motion // Trans. ASME J. Basic Enging. 1960. V. 82. № 3. P. 609–621.

Stepinski T.F., Valageas P. Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. I. Aerodynamics of solid particles // Astron. and Astrophys. 1996. V. 309. P. 301–312.

Stepinski T.F., Valageas P. Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. II. Development of icy planetesimals // Astron. and Astrophys. 1997. V. 319. P. 1007–1019.

Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Camb. Phil. Soc. 1851. V. 9. Pt. II. P. 8–106.

Takeuchi T., Lin D.N.C. Radial flow of dust particles in accretion disks // Astrophys. J. 2002. V. 581. № 2. P. 1344–1355.

Takeuchi T., Lin D.N.C. Surface out in optically thick dust disks by the radiation pressure // Astrophys. J. 2003. V. 593. P. 524–538.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Forming planetesimals in vortices // Icarus. 1996. V. 121. P. 158–170.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217–1238.

Wasson J.T. Meteorites: Their record of early solar-system history. N.-Y.: W.H. Freeman and Co., 1985. 274 p.

Watanabe S., Nakagawa Y., Nakazawa K. Cooling and quasistatic contraction of the primitive solar nebula after gas accretion // Astrophys. J. 1990 V. 358. P. 282–292.

Weidenschilling S. J. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1977. V. 180. P. 57–70.

Weidenschilling S.J. Dust tp Planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula // Icarus.1980. V. 44. P. 172–189.

Weidenschilling S. J. Evolution of grains in a turbulent solar nebula // Icarus. 1984. V. 60. P. 553–567.

Whipple F.L. From plasma to planet. London, 1972. 211 p.

Willacy K., Klahr H.H., Millar T.J., Henning Th. Gas and grain chemistry in a protoplanetary disk // Astron. and Astrophys. 1998. V. 338. P. 995–1005.

Woods J.D., Drake J.C., Goldsmith P. Coalescence in a turbulent cloud // Quart. J. Roy. Mat. Soc. 1972. V. 98. P. 135–149.

Yarin L.P., Hetsroni G. Turbulence intensity in dilute two-phase flow. 3. The particles-turbulence interaction in dilute two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow. 1994. V. 20. № 1. P. 27–44.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494–505.

Youdin A.N., Goodman J. Streaming instabilitie in protoplanetary disks // arXiv: Astro-ph/0409263. 2004. V. 1. P. 1–26.

Zel'dovich Ya.B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299–312.