

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА В ВОЗДУХЕ

*А.Д. Балашов, А.Х. Пергамент*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Работа посвящена исследованию численными методами особенностей распространения фемтосекундных лазерных импульсов в атмосфере. Характер явления определяется соотношением между процессами многофотонной ионизации и множественной мелкомасштабной самофокусировки (филаментации). Установлен ступенчатый характер развития процесса, при котором до достижения пороговых значений интенсивности происходит развитие филаментации без потери энергии импульса. При достижении пороговых значений интенсивности начинается потеря энергии на ионизацию, сопровождаемая дефокусирующим воздействием электронной плазмы, что приводит к потере интенсивности. При падении интенсивности ниже порогового значения могут создаться условия для повторного зарождения самофокусировки. Характерные особенности завершающей стадии процесса филаментации могут быть объяснены с помощью теории В.И. Беспалова и В.И. Таланова.

### FEATURES OF FEMTOSECOND PULSE PROPAGATION IN THE AIR

A.D. Balashov, A.Kh. Pergament

Keldysh Institute for Applied Mathematics Russia Academy of Science

This paper is devoted to the investigation of the femtosecond pulse propagation in the air by means of numerical methods. The phenomenon behavior is determined by the relation between the multiphoton ionization and small-scale self-focusing (filamentation). The step-by-step behavior of this process was established, where the evolution of filamentation takes place without energy losses till the intensity reaches the threshold value. Then the dissipation for ionization comes into play and the intensity starts to decrease under defocusing influence of electron plasma. The conditions for repeated self-focusing can be formed after the intensity is below the ionization threshold. Typical features of the filamentation final stage can be explained by means of the Bespalov-Talanov theory.

### Введение

Среди всевозможных режимов распространения лазерного излучения в нелинейной среде распространение мощного фемтосекундного импульса представляет в настоящий момент особый научный интерес. Области применения таких знаний: дистанционное зондирование, микрофотоника, дистанционное управление электрическим разрядом [1]. Впервые эксперименты по дальнему распространению фемтосекундных лазерных импульсов были выполнены в середине 1990-ых [2-4]. В этих экспериментах использовался инфракрасный лазер с продолжительностью импульса около  $100\text{фс}$  и мощностью, превышающей критическое значение  $P_{cr}$ , т.е. мощностью, достаточной для самофокусировки импульса [5]. В экспериментах наблюдался распад начального пучка на узкие нити длиной несколько метров. Количество возникающих нитей зависело от мощности импульса. В каждой из них была сконцентрирована доля мощности импульса.

В работе подробно описывается процесс филаментации: причины его возникновения, развитие и влияние на характеристики профиля лазерного импульса. Рассматриваемая модель учитывает влияние ионизации, что позволяет ограничить характерный пространственный масштаб. В процессе самофокусировки растет интенсивность импульса и уменьшается его ширина, но «схлопывания» не происходит из-за дефокусирующего воздействия электронной плазмы, возникшей в результате многофотонной ионизации молекул воздуха, что определяет шаг разностной сетки ( $h \sim 10\text{мкм}$ ). В результате, максимальная интенсивность в филаменте не превышает  $10^{14}\text{Ватт/см}^2$  для инфракрасных импульсов. В зоне максимальной интенсивности

регистрируется движущийся вдоль оси распространения импульса фокус, след которого принято называть филаментом (от англ. filament – нить), а процесс образования таких структур – филаментация.

Особенность полученных в работе [8] результатов – это монотонное убывание мощности уединенного импульса вплоть до критического значения. Потеря энергии (и падение мощности импульса) происходит за счет многофотонной ионизации, при этом первоначальная форма импульса такова, что пиковая интенсивность выше пороговой сохраняется вплоть до достижения критической мощности.

Характерные особенности явления формируют два процесса: неустойчивость Беспалова-Таланова, которая порождает мелкомасштабную самофокусировку, и дефокусирующее влияние электронной плазмы, созданной за счет многофотонной ионизации. Явление самофокусировки начинается, если мощность в пучке выше критической [5], в то время как многофотонная ионизация начинается, если интенсивность выше пороговой. Данное исследование показало, что до тех пор, пока максимальная интенсивность импульса не достигнет пороговых значений, не наблюдается потери энергии – мощность импульса не меняется. Только после достижения порогового значения интенсивности начинается процесс многофотонной ионизации, и падают как мощность, так и интенсивность импульса, после чего многофотонная ионизация прекращается. В итоге процесс филаментации прекращается, хотя общая мощность импульса остается выше критической. Это обстоятельство указывает на влияние спектрального распределения импульса, рассмотренного в теории Беспалова-Таланова, на характер развития филаментации. Таким образом, характер процесса существенным образом зависит от особенностей пространственного распределения интенсивности в импульсе. Особенностью настоящей работы является учет спектрального состава излучения и влияние спектра на характер эволюции филамент. В частности, подробно исследованы особенности эволюции уединенного импульса на начальной стадии процесса.

В настоящее время четырьмя институтами Франции и Германии выполняется проект «Teramobile» по экспериментальному и численному исследованию распространения мощных фемтосекундных импульсов. В результате этих экспериментов по распространению тераваттных импульсов наблюдалось несколько десятков филаментов, которые упорядочивались в группы (кластеры) протяженностью более десяти метров. Численное моделирование реальной экспериментальной задачи возможно только с помощью привлечения параллельных методов вычислений.

Существует значительное количество работ различных авторов, посвященных математическому моделированию процесса филаментации [7;8;14;16]. Рассматриваемая система уравнений для медленно меняющейся амплитуды светового поля является нестационарной 3-х мерной задачей. Для того чтобы иметь возможность сравнить экспериментальные данные с расчетами при условии учета мелкомасштабных возмущений, требуется порядка  $\sim 10^{16}$  счетных ячеек. Такое большое количество делает счет уравнений при больших расстояниях слишком долгим. Для качественного исследования образования филамент и их упорядочивания в кластеры применяется упрощенная физическая модель, которая в совокупности с использованием технологий параллельных вычислений позволяет провести расчеты в обозримое время.

### **Физическая модель и ее усреднение**

Для описания процесса распространения коротких импульсов в среде с кубической нелинейностью обычно используется следующая система уравнений [8]: нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для огибающей электрического поля  $E(x, y, z, t)$ , движущейся с групповой скоростью  $v_g$  (здесь  $t - z/v_g \rightarrow t$ ,  $z$  – переменная, вдоль которой распространяется импульс,  $(x, y)$  – поперечная направлению распространения импульса плоскость):

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 E - i \frac{k''}{2} \partial_t^2 E + ik_0 n_2 R(t) E - \left( \frac{\sigma}{2} + i \frac{k_0}{2\rho_c} \right) \rho E - \frac{\beta^{(K)}}{2} |E|^{2K-2} E, \quad (1.a)$$

$$\text{где} \quad R(t) = (1 - \theta) |E|^2 + \frac{\theta}{\tau_K} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_K}} |E(t')|^2 dt', \quad (1.б)$$

и модель Друда [19] для локальной плотности плазмы  $\rho(x, y, z, t)$ :

$$\partial_t \rho = \sigma_K \rho_{nt} |E|^{2K} + \frac{\sigma}{U_i} \rho |E|^2, \quad (1.в)$$

где  $\lambda_0 = 800 \text{ нм}$  - длина волны;  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  - центральное волновое число;  $n_2 = 3.1 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2/\text{Ватт}$  - индекс преломления эффекта Керра;  $k'' = 0.2 \text{ фс}^2/\text{см}$  - коэффициент дисперсии групповой скорости;  $\tau_K = 70 \text{ фс}$  - время релаксации;  $\rho_c = 1.8 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$  - критическая плазменная плотность;  $\beta^{(K)} = 4.25 \cdot 10^{-98} \text{ см}^{13}/\text{Ватт}^7$  - коэффициент многофотонного поглощения;  $K = 8$  - число фотонов, которое требуется для ионизации;  $\sigma = 5.44 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$  - коэффициент каскадной ионизации и плазменного поглощения в поперечном сечении для обратного тормозного излучения;  $\sigma_K = 2.88 \cdot 10^{-99} \text{ см}^{16}/\text{с} \cdot \text{Ватт}^8$  - коэффициент многофотонной ионизации;  $U_i = 12.1 \text{ Вольт}$  - промежуточный потенциал ионизации молекул кислорода;  $\rho_{nt} = 5.4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  - эффективная плотность нейтральных молекул, равная 20% от стандартной  $\rho_{at} = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

В целях сокращения времени счета для качественного исследования задачи можно применить следующий алгоритм упрощения данной модели. Во-первых, пренебрежимо мало действие обратного тормозного излучения при продолжительностях импульса менее пикосекунды, поэтому положим  $\sigma = 0$ . Также не будем учитывать изменение второй производной по времени  $\partial_t^2 E$ , т.к. комплексная амплитуда световой волны медленно меняется со временем. Во-вторых, в предположении, что в области высокой интенсивности излучения световые поля имеют Гауссов профиль по временной координате и могут быть представлены в виде произведения, будем искать решение системы в виде:

$$E(X, Y, Z, t) = \psi(X, Y, Z) \cdot \exp \left[ -\frac{(t-t_c)^2}{T^2} \right],$$

где  $t_c(z)$  - временной слой, где формируется максимальный по интенсивности пик с полушириной  $T$ , сохраняющейся все время распространения [8].

Применяя сделанные выше предположения, сначала найдем  $\rho$  из уравнения (1.в):

$$\rho \cong \sqrt{\frac{\pi}{8K}} T \sigma_K \rho_{nt} |\psi|^{2K} \left\{ 1 + \text{Erf} \left[ \frac{\sqrt{2K} (t-t_c(Z))}{T} \right] \right\},$$

где  $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ . Далее в уравнение 1(а) подставим найденное  $\rho$  и уравнение (1.б), затем

умножим получившееся уравнение на  $\exp \left[ -(t-t_c)^2/T^2 \right]$  и проинтегрируем по всему временному домену, т.е.  $(-\infty; +\infty)$ . Распишем все подробно:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi}{\partial z} \int e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt = \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \psi \int e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt + \\
& + ik_0 n_2 |\psi|^2 \psi \left\{ \int (1-\theta) e^{-\frac{4[t-t_c]^2}{T^2}} dt + \frac{\theta}{\tau_K} \int_{-\infty}^t \int e^{-\frac{t-t'}{\tau_K}} e^{-\frac{2[t'-t_c]^2}{T^2}} dt' e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt \right\} - \\
& - i \frac{k_0}{2\rho_c} \sqrt{\frac{\pi}{8K}} T \sigma_K \rho_{nt} |\psi|^{2K} \psi \int \left\{ 1 + \text{Erf} \left[ \frac{\sqrt{2K}(t-t_c(z))}{T} \right] \right\} e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt - \\
& - \frac{\beta^{(K)}}{2} |\psi|^{2K-2} \psi \int e^{-\frac{2K[t-t_c]^2}{T^2}} dt
\end{aligned}$$

Далее, учитывая значение интеграла  $\int e^{-\alpha^2[t-t_c]^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$ , упростим получившееся выражение:

$$\begin{aligned}
& T \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial z} = T \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \psi + \\
& + ik_0 n_2 |\psi|^2 \psi \left\{ T \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-\theta) + \frac{\theta}{\tau_K} \int_{-\infty}^t \int e^{-\frac{t-t'}{\tau_K}} e^{-\frac{2[t'-t_c]^2}{T^2}} dt' e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt \right\} - \\
& - i \frac{k_0}{2\rho_c} \sqrt{\frac{\pi}{8K}} T \sigma_K \rho_{nt} |\psi|^{2K} \psi \left\{ T \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int \text{Erf} \left[ \frac{u\sqrt{2K}}{T} \right] e^{-\frac{2u^2}{T^2}} du \right\} - \\
& - T \sqrt{\frac{\pi}{2K}} \frac{\beta^{(K)}}{2} |\psi|^{2K-2} \psi
\end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим первый из двух оставшихся интегралов уравнения (2):

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_K}} e^{-\frac{2[t'-t_c]^2}{T^2}} dt' e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} dt = \int e^{-\frac{t-t_c}{\tau_K}} e^{-\frac{2[t-t_c]^2}{T^2}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_c}{\tau_K}} e^{-\frac{2[t'-t_c]^2}{T^2}} dt' dt = \\
& = \left\langle \frac{u=t-t_c}{u'=t'-t_c} \right\rangle = \int e^{-\frac{T^2}{8\tau_K} \frac{u}{\tau_K} - \frac{2u^2}{T^2}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{2}{T^2} \left( u' - \frac{T^2}{4\tau_K} \right)^2} du' du = \\
& = T \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int e^{-\frac{T^2}{8\tau_K} \frac{u}{\tau_K} - \frac{2u^2}{T^2}} \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{u\sqrt{2}}{T} - \frac{T}{\sqrt{8\tau_K}} \right) \right] du = T \sqrt{\frac{\pi}{8}} D,
\end{aligned}$$

$$\text{где } D = \int e^{-\frac{T^2}{8\tau_K} - \frac{u}{\tau_K} - \frac{2u^2}{T^2}} \left[ 1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{u\sqrt{2}}{T} - \frac{T}{\sqrt{8\tau_K}}\right) \right] du.$$

Второй интеграл  $\int \operatorname{Erf}\left(\frac{u\sqrt{2K}}{T}\right) \exp\left(-\frac{2u^2}{T^2}\right) du = 0$ , т.к. подынтегральное выражение – нечетная функция. Введя в уравнении (2) обозначения

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \theta + \frac{\theta D}{\sqrt{2\tau_K}} \right) \text{ и } \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8K}} \frac{k_0 T \sigma_K \rho_{nl}}{2\rho_c},$$

окончательно получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \psi + ik_0 n_2 \alpha |\psi|^2 \psi - i\gamma |\psi|^{2K} \psi - \frac{\beta^{(K)}}{2\sqrt{K}} |\psi|^{2K-2} \psi. \quad (3)$$

В работе [18] было показано влияние комбинационного рассеяния на нелинейный отклик в воздухе при  $\theta = 1/2$ . Также положим значение  $T = 0.1t_p$  ( $t_p$  – длительность импульса) для изучения процесса филаментации при наличии многофотонной ионизации, которая укорачивает длительность импульса. Чтобы обезразмерить уравнение (3), вводим

$$\text{переменные: } z = Z \left[ \frac{(\alpha k_0 n_2)^K}{\gamma} \right]^{\frac{1}{K-1}}, x = X \sqrt{2k_0} \left[ \frac{(\alpha k_0 n_2)^K}{\gamma} \right]^{\frac{1}{2K-2}}, y = Y \sqrt{2k_0} \left[ \frac{(\alpha k_0 n_2)^K}{\gamma} \right]^{\frac{1}{2K-2}},$$

поле:  $A = \psi \left[ \frac{\gamma}{\alpha k_0 n_2} \right]^{\frac{1}{2K-2}}$  и параметр:  $\nu = \left( \frac{\beta^{(K)}}{2\sqrt{K}} \right) \left[ \alpha k_0 n_2 \gamma^{K-2} \right]^{\frac{1}{K-1}}$ . После подстановки и упрощения получим:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i \nabla_{\perp}^2 A + i |A|^2 A - i |A|^{2K} A - \nu |A|^{2K-2} A, \quad (4)$$

где параметр  $\nu$  примет значение  $\nu = 0.154$  при выбранных выше параметрах  $t_p$  и  $T$ .

Для численного моделирования уравнений данного типа (НУШ) применяются разные методы, призванные уменьшить требуемое для счета процессорное время и сохранить требуемую точность счета.

Спектральный метод позволяет эффективно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье, но реализуется только на равномерных сетках. Преимущество спектрального подхода бесспорно только для простых решений типа движущегося солитона.

Расщепление по процессам – решение уравнения (4) на шаге  $\Delta z$  заменяется последовательным решением двумерных задач дифракции в линейной среде сначала в плоскостях, параллельных XZ, затем в плоскостях, параллельных YZ, после чего вычисляется нелинейный набег фазы светового поля на том же интервале  $\Delta z$  в отсутствие дифракции. Для схем расщепления по процессам существенна проблема консервативности, которая требует отдельного обсуждения.

В данной работе использован прямой метод решения уравнения (4), т.е. построена неявная консервативная разностная схема и после применен метод Ньютона.

При математическом моделировании распространения лазерного импульса в качестве начальных условий обычно выбирается профиль:

$$A(z=0) = \sqrt{I_0} \exp \left[ -\frac{(x^2 + y^2)^N}{\omega_0^{2N}} \right], \quad (5)$$

где  $\omega_0$  – начальная ширина импульса и  $\sqrt{I_0}$  – начальная амплитуда (безразмерные величины).

### Исследование неустойчивости Беспалова – Таланова

Впервые теория образования нитевидной структуры светового пучка в результате самофокусировки была дана Беспаловым и Талановым в 1966 г. Было показано, что в нелинейном диэлектрике амплитудно-фазовые возмущения плоской электромагнитной волны приводят к ее распаду на отдельные пучки, имеющие разные длины самофокусировки в зависимости от масштаба первоначального возмущения [6]. Для нахождения данной зависимости исследуем решение НУШ типа плоской волны, т.е.

$$A = (A_0 + a)e^{i|A_0|^2 z},$$

где  $A_0 = const$  – амплитуда невозмущенной волны и  $|a| \ll A_0$ . После подстановки в (4) без учета эффектов ионизации линеаризуем полученные уравнения, разделим действительную и мнимую части ( $a = a_1 + ia_2$ ):

$$\Delta_{\perp} a_1 - \frac{\partial a_2}{\partial z} + 2A_0^2 a_1 = 0; \quad \Delta_{\perp} a_2 + \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0.$$

Для определения устойчивости решения подставим возмущения типа

$$a_{1,2} = \text{Re} \left[ a_{1,2}^0 \exp(-i\vec{k}_{\perp} \vec{r}_{\perp} - ihz) \right]$$

(произвольное возмущение представимо в виде суперпозиции таких полей). Подставив, найдем следующую зависимость

$$h^2 = \vec{k}_{\perp}^2 (\vec{k}_{\perp}^2 - 2A_0^2). \quad (6)$$

Далее в зависимости от значений  $k_{\perp}$  можно определить характер развития возмущений (рис.1).

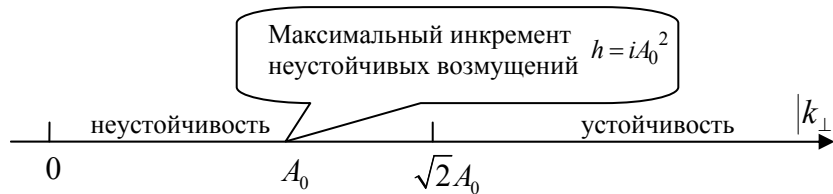


Рис.1. Зависимость характера возмущений от значений  $k_{\perp}$

**Результаты вычислений для периодических возмущений**

Рассмотрим одномерный случай уравнения (4) без учета эффектов ионизации. Начальное возмущение зададим в виде:

$$A(x, 0) = 20 + 2 \cos(k_{\perp} x), \text{ т.е. } A_0 = 20$$

Расчеты проводились для разных значений  $k_{\perp}$  и полностью подтвердили изложенную выше теорию. На рис. 2 представлено поведение максимального значения модуля решения  $\max_x (|A(x, z)|)$  для разных режимов. Если величина волнового вектора  $|\vec{k}_{\perp}| \equiv k_{\perp}$  достаточно велика (т.е.  $k_{\perp} > 2A_0$ ), то решение устойчиво и периодически изменяется (1-я кривая на рис. 2). Значение  $k_{\perp} = 2A_0$  - это граница устойчивости, и решение для таких  $k_{\perp}$  не меняется по  $z$  (2-я кривая на рис. 2). Если  $k_{\perp} < 2A_0$ , то решение экспоненциально растет с величиной  $z$ . В начальной стадии оно при этом остается гармоническим по  $x$ . Далее, с ростом  $z$  решение перестает быть гармоническим по  $x$  (рис. 3-а и 3-б). Таким образом, как и следовало ожидать, только начальные этапы развития неустойчивости соответствуют экспоненциальному росту (кривые 3, 4, 5 на рис.2). Случай наискорейшего развития неустойчивости, при котором инкременту неустойчивых возмущений максимален ( $h = iA_0^2$ ), соответствует кривой 4 на рис. 2.

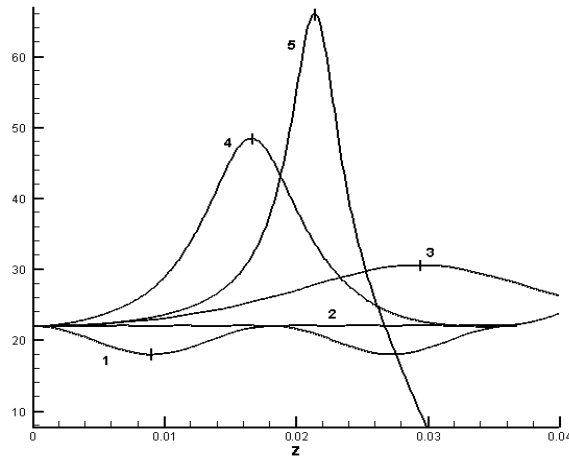


Рис. 2. Поведение максимального значения модуля решения  $\max_x (|A(x, z)|)$  в зависимости от  $z$ .

Цифрами обозначены соответствующие графики:

- 1 -  $k_{\perp} = \sqrt{3}A_0 > \sqrt{2}A_0$ ; 2 -  $k_{\perp} = \sqrt{2}A_0$ ; 3 -  $k_{\perp} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}/2 A_0 < \sqrt{2}A_0$ ;
- 4 -  $k_{\perp} = A_0$  (Рис. 3-а); 5 -  $k_{\perp} = \sqrt{1 - \sqrt{3}}/2 A_0 < A_0$  (Рис. 3-б);

На рисунках 3.а-б показано распределение возмущений в начальном состоянии при  $z = 0$  (сплошная линия) и при других расстояниях  $z > 0$  (пунктирная линия), которые отмечены на рис. 2 цифрами 4 и 5 соответственно.

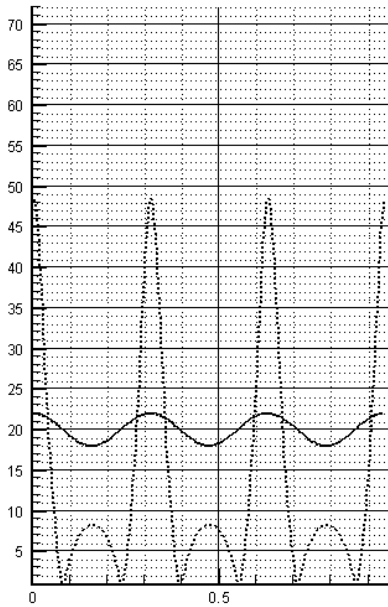


Рис. 3-а.  $k_{\perp} = A_0$ , соответствует максимальному инкременту развития возмущений. Минимальное расстояние развития неустойчивости  $z = 0.016$ .

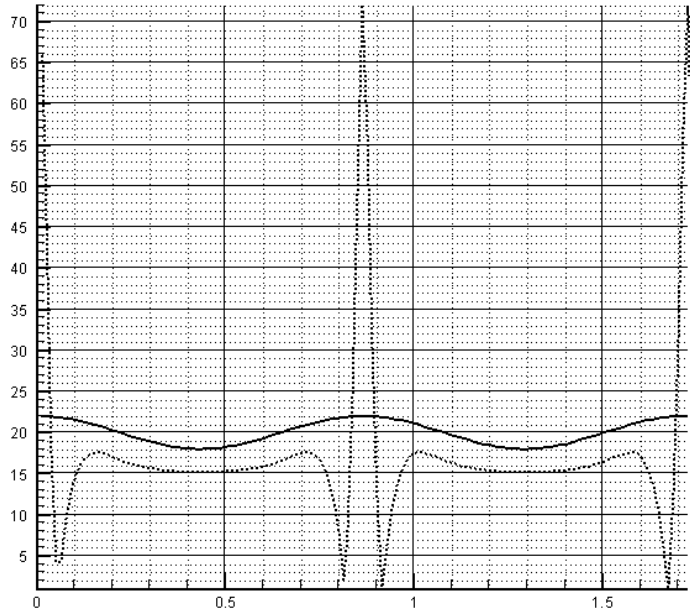


Рис. 3-б.  $k_{\perp} = \sqrt{1-\sqrt{3}}/2 A_0 < A_0$ , т.е. возмущения развиваются не так быстро  $z = 0.021 > z = 0.016$  (Рис. 3-а).

Описанная выше картина развития периодических возмущений в целом сохраняется и при рассмотрении в двумерном случае [9]. Стоит заметить, что описанная Беспаловым и Талановым теория относится только к начальной стадии развития возмущений. При продолжительном моделировании рассматриваемых устойчивых периодических возмущений на более дальние расстояния также происходит значительное увеличение амплитуды. На рис. 3-е приведен пример, соответствующий устойчивым возмущениям по теории Беспалова-Таланова ( $k_{\perp} = \sqrt{3}A_0 > \sqrt{2}A_0$ ), но моделирование в отличие от рис. 3-а проводилось на более дальнее расстояние. Характер решения существенно меняется и образуются многочисленные быстрорастущие максимумы. То есть устойчивые моды на нелинейной стадии могут порождать неустойчивые структуры (филаменты).

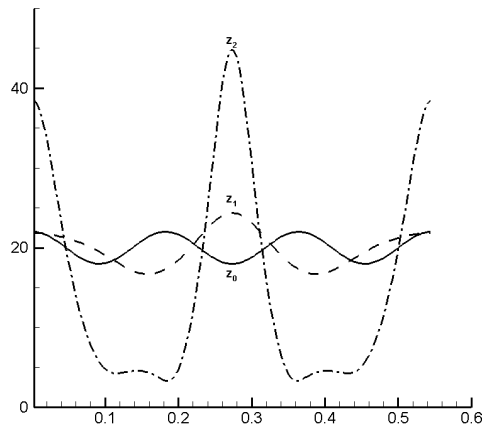


Рис. 3-в.  $k_{\perp} = \sqrt{3}A_0 > \sqrt{2}A_0$  развитие неустойчивости в нелинейной фазе ( $z_2 > z_1 \gg z_0$ ).



Помимо гармонического возмущения была также рассмотрена эволюция одиночного возмущения. Известно [5], что при определенной мощности пучка развивается процесс филаментации. Однако в большинстве работ динамика этого процесса не рассматривалась. В настоящей работе показано, что характер процесса существенным образом зависит не только от мощности импульса, но и от его спектрального состава. Возмущение было представлено гауссовским пучком, т.е. начальное условие в задаче имело следующий вид:

$$A(r, 0) = A_0 + a_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right).$$

При этом до определенного расстояния  $z$  решение представляет собой уединенный максимум: процессы последующего распада максимума не рассматриваются. Первоначальная полуширина пучка есть  $b$ . Если  $b$  мало, то это означает, что пучок обладает широким спектром и если доля низкочастотных составляющих (которые согласно теории Беспалова – Таланова экспоненциально возрастают), мала, то такой пучок на линейной стадии неустойчивости не будет возрастать. Для таких начальных условий сначала произойдет уширение пучка, сопровождающееся падением амплитуды. Действительно, полуширина пучков с  $b = 0.05, 0.08, 0.11$  первоначально растет (рис. 4-б). Одновременно для тех же  $b$  падает амплитуда поля (рис. 4-а).

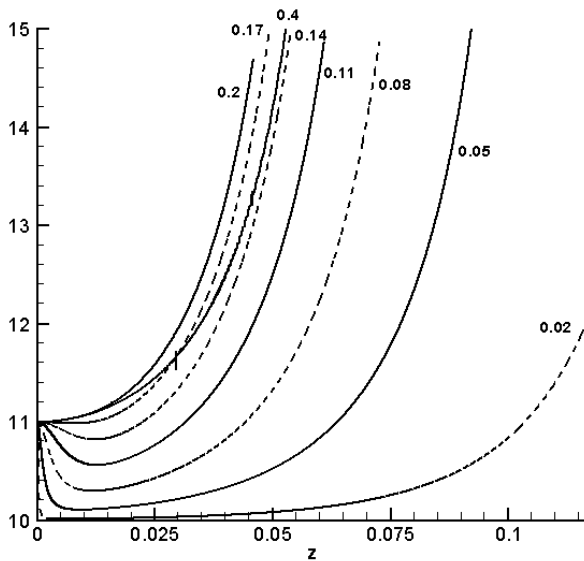


Рис. 4-а. Изменение амплитуды поля  $|A|$  на оси профиля  $A(r, 0) = A_0 + a_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)$  при  $A_0 = 10$ ,  $a_0 = 1$  и различных значениях  $b$ .

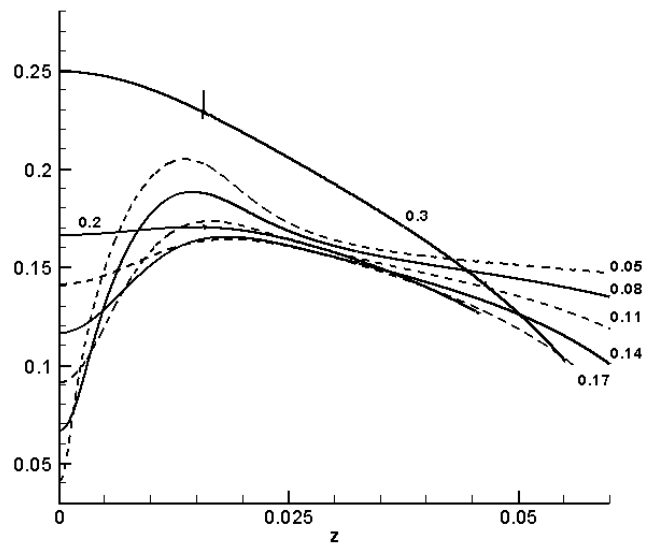


Рис. 4-б. Изменение полуширины профиля  $A(r, 0) = A_0 + a_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)$  при  $A_0 = 10$ ,  $a_0 = 1$  и различных значениях  $b$ .

Для исследования уединенного максимума напомним преобразование Фурье для функции

$$A(r, 0) = A_0 e^{-\frac{r^2}{b^2}}.$$

$$e^{-\frac{r^2}{b^2}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y, \text{ где } \varphi(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{b^2}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} dx dy = \pi b^2 e^{-\frac{b^2}{4}(k_x^2 + k_y^2)}.$$

Т.е.

$$A(r,0) = A_0 e^{-\frac{r^2}{b^2}} = \frac{A_0 b^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b^2}{4}(k_x^2 + k_y^2)} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

есть разложение первоначального возмущения в суперпозицию рассмотренных волн. Чем меньше значение  $b$ , тем шире спектр сигнала и тем меньшая доля его приходится на область малых  $k$  (здесь  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ), т.е. для малых  $b$  сигнал будет расти медленнее, чем для больших. Но в целом такое начальное возмущение неустойчиво, т.к. всегда существуют  $k$ , удовлетворяющие условию Беспалова – Таланова.

Если начальная ширина пучка достаточно велика, то в силу того, что доля низкочастотных растущих компонент велика, то амплитуда такого пучка возрастает, а его полуширина падает. Для гауссовых пучков спектральное распределение также гауссово, при этом большая часть спектра сосредоточена в области  $k \leq \frac{2}{b}$ . Для того, чтобы эта часть спектра удовлетворяла условиям

Беспалова – Таланова  $\frac{2}{b} \leq \sqrt{2} A_0$ , т.е.  $b \geq \frac{\sqrt{2}}{A_0}$ . В данном случае  $b > 0.14$ , т.к.  $A_0 = 10$ . Вычисления

показывают, что вплоть до  $b \approx 0.17$  амплитуда сначала падает. Одновременно с падением амплитуды растет полуширина профиля. В дальнейшем на нелинейной стадии такие пучки будут себя вести так же, как более широкие, но с большим запозданием по  $z$ .

По мере развития неустойчивости подавляются те части спектра, где  $k > \sqrt{2} A_0$  и происходит уширение пучка, т.е. сужение спектра к малым  $k$  (рис. 4-а,б для  $b < 0.2$ ). Т.е. высокочастотные составляющие при уширении пучка, удовлетворяющие условию устойчивости, затухают, тем самым увеличивая преобладание низкочастотных (неустойчивых) составляющих (это происходит из-за сохранения первого интеграла – суммарной мощности пучка).

Однако значение имеет соотношение спектра не только с границей неустойчивости, но и с областью максимального инкремента. При дальнейшем увеличении  $b$  спектр продолжит сужаться, тем самым все большая часть  $k$  будет меньше  $A_0$ , что соответствует более медленному развитию неустойчивости (рис. 4-а,б для  $b = 0.2$  и  $b = 0.4$ ). В этом случае устойчивые составляющие отсутствуют, вследствие чего уширения пучка не происходит. Данный анализ справедлив лишь на начальной «линейной» стадии развития неустойчивости.

## Результаты для одиночного Гауссова импульса

Далее перейдем к решению уравнения (4) с учетом всех описанных эффектов. Интерпретация результатов зачастую будет приводиться также в безразмерных величинах.

На рис. 4 показан характер изменения мощности при использовании начального Гауссова профиля с высокой, близкой к пороговой (или максимальной) интенсивностью и мощностью, не на много превышающей критическую ( $P_{Cr}$ ).

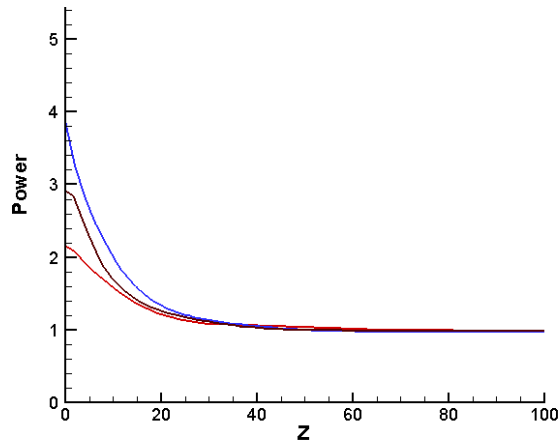


Рис.5 Изменение мощности

Стоит отметить, что при численном моделировании распространения лазерных импульсов во многих работах зачастую ориентируются лишь на мощность импульса, как определяющий параметр характера их распространения. Иногда этого бывает недостаточно для определения тех или иных тенденций с необходимой полнотой. Во внимание следует принимать значение таких начальных параметров, как полуширина и максимальная интенсивность профиля. Сочетание этих параметров при одном и том же значении критической мощности может существенно повлиять на характер распространения лазерного импульса.

На графиках приведены зависимости по координате распространения  $z$  значений мощности и максимальной амплитуды  $|A|$  для Гауссовых профилей с одинаковой начальной амплитудой  $\sqrt{I_0} = 0.25$  и разными полуширинами  $\omega_0$ . Хорошо видно (рис.6-б), что на скорость возрастания пиковой интенсивности влияет не только мощность импульса (при мощности меньше пороговой  $P_{cr}$  имеет место дефокусировка), но и его ширина.

Рост интенсивности в рассматриваемой задаче ограничен плазменными эффектами и, как видно из рисунка, максимальное значение интенсивности не превышает 1. В физических величинах максимальная величина интенсивности составляет  $\tilde{I}_{max} \cong 7 \cdot 10^{13} \text{ Watt/cm}^2$ , что согласуется с экспериментальными данными. При возрастании интенсивности все большую роль начинает играть последний член в уравнении (4), ответственный за многофотонное поглощение, таким образом, как видно на рис.6-а, наблюдается резкое уменьшение мощности импульса. В то же время усиливается влияние другого члена уравнения, ответственного за многофотонную ионизацию, благодаря которому уменьшается действие эффекта Керра. В результате поглощения излучения в процессе многофотонной ионизации и дефокусировки падает пиковая интенсивность импульса, что приводит к прекращению многофотонной ионизации и постоянству интеграла мощности вплоть до следующего момента возрастания интенсивности.

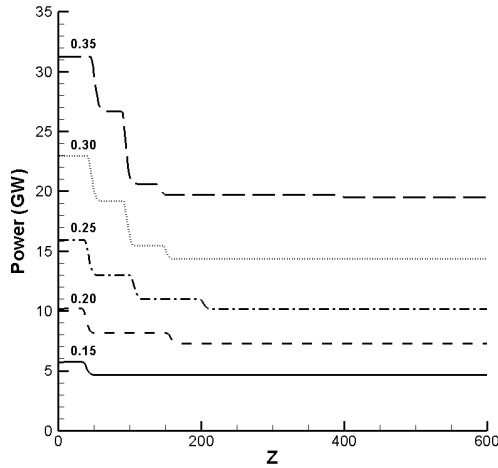


Рис.6-а. Динамика мощности

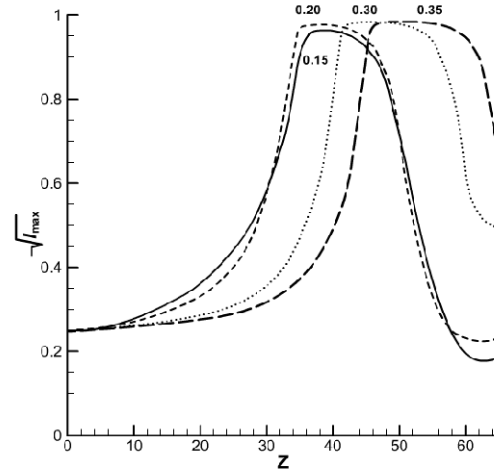
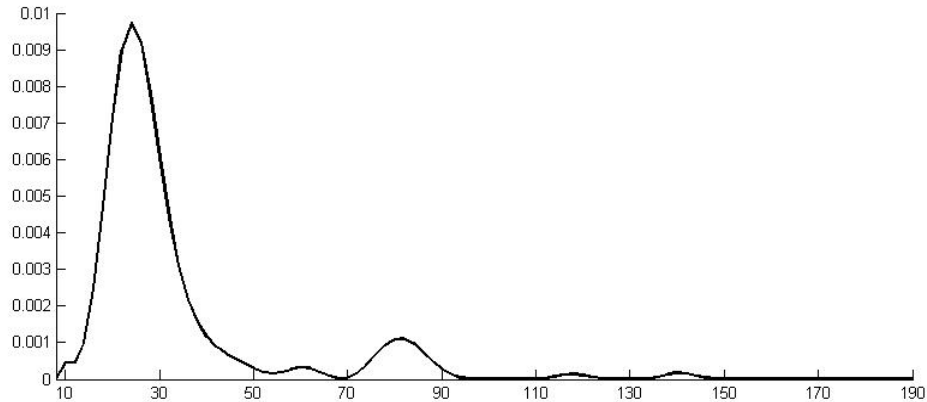


Рис.6-б. Динамика пиковой интенсивности

Значение гамильтониана  $H = \iint (|\nabla_{\perp} A|^2 - |A|^4/2) dX dY$  к моменту установления постоянного уровня мощности (рис.6-а) меняет знак на положительный, что, как известно [13], является необходимым условием расходимости пучка в среднем. Однако факт расходимости пучка в среднем не противоречит тому, что некоторая его внутренняя часть может сфокусироваться. Проанализировать дальнейшее развитие профиля можно с помощью теории Беспалова-Таланова. Для этого рассмотрим спектральный состав распределения  $A$  на достаточно большом расстоянии  $z$  (рис. 7).

Рис 7. Спектральный состав распределения  $A$ 

Напомним [6], что инкремент неустойчивости играет роль, только если в спектре импульса присутствуют гармоники, меньшие по величине среднего значения распределения  $\text{Re}(i\nu)$ , которое для рассматриваемого  $z$  почти равно нулю. Поэтому с точки зрения неустойчивости Беспалова-Таланова дальнейшее развитие неустойчивых возмущений не возможно.

Чтобы объяснить ступенчатый характер падения мощности, рассмотрим подробнее этапы самофокусировки Гауссова импульса, описанные в [9]. Как было сказано ранее, для самофокусировки Гауссова импульса необходима концентрация малых частот спектра. Если ширина пучка велика, то также велика доля низкочастотных компонент и происходит самофокусировка без начального уширения импульса в отличие от того, как это бывает с менее

широкими импульсами. В итоге образуется довольно крутой «столб» интенсивности с наличием вокруг фона из дефокусирующей части начального импульса (рис.8-а). Но при достижении пиковым значением интенсивности порогового значения начинается падение интенсивности как за счет потери энергии на ионизацию, так и дефокусирующего воздействия электронной плазмы, возникшей в результате многофотонной ионизации. Первые участки, на которые оказывается воздействие, являются зонами больших градиентов. В рассматриваемом случае интенсивность падает быстрее на краю «столба» (рис.8-б).

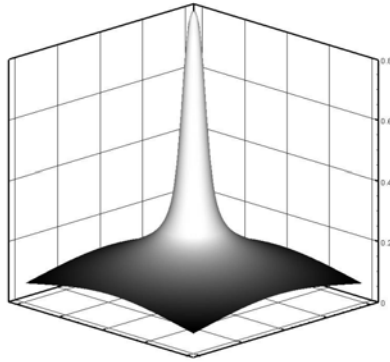


Рис. 8-а. Распределение амплитуды  $\sqrt{I_0}$  при  $z = 37.6$

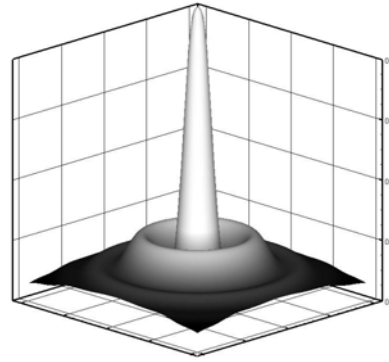


Рис. 8-б. Распределение амплитуды  $\sqrt{I_0}$  при  $z = 45.4$

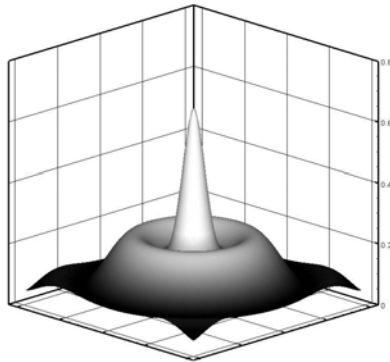


Рис. 8-в. Распределение амплитуды  $\sqrt{I_0}$  при  $z = 54.7$

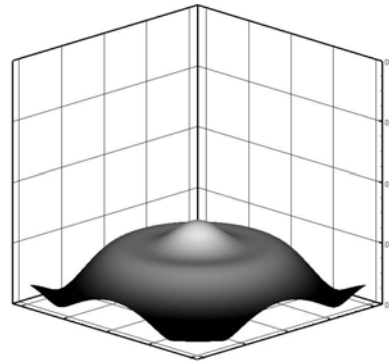


Рис. 8-г. Распределение амплитуды  $\sqrt{I_0}$  при  $z = 85.9$

При дальнейшем падении интенсивности отток мощности от центра встречается с областями подпитки и образуется квазистационарная кольцевая структура (рис.8-в). На рис.8 (который соответствует рис.8-б) показаны потоки мощности, определяемые градиентом фазы  $\varphi(x, y) = \arctg(\text{Re}(A)/\text{Im}(A))$ . На рисунке можно выделить 3 структуры: центральный приосевой профиль и 2 кольцевых структуры. Внутри этих колец поток мощности направлен к центру. Эти структуры можно отделить друг от друга областями с минимальной интенсивностью, где поток мощности направлен «от центра» (заштрихованы на рисунке).

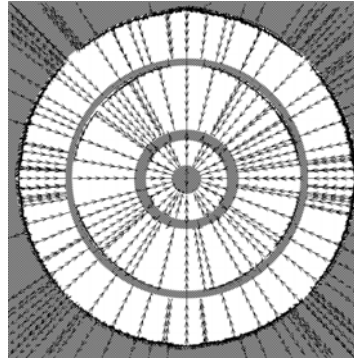


Рис. 9 Градиент фазы распределения комплекснозначной величины  $A(x, y)$ .

При концентрации определенной мощности в кольцевой структуре после падения всего «столба» создаются условия для повторного роста интенсивности (рис.8-г). Такими условиями в рассмотренном случае являются форма распределения (рис.8-г) - Гауссов профиль с мощностью, большей критической, и достаточной для развития самофокусировки полушириной. Таким образом, происходит первоначальный рост интенсивности, образование кольцевой структуры и после падения интенсивности формирование такого профиля, который вновь самофокусируется. В итоге получается ступенчатое падение мощности импульса (рис.6-а).

Характер изменения мощности на рис.4 можно объяснить отсутствием вокруг импульса «фона» низкочастотных компонент спектра. Поэтому моделирование распространения импульсов необходимо начинать с момента входа лазерного импульса в нелинейную среду, а не со стадии развитой самофокусировки. Также стоит отметить, что под установлением постоянного уровня мощности (рис.6-а) понимается лишь сохранение ее до какого то  $z$ , потому что, как обсуждалось ранее, и в случае устойчивых возмущений возможен процесс филаментации на дальних расстояниях (рис. 3-в).

На рис.10 одновременно представлены зависимости падения мощности импульса (*Power*) и возрастания его пиковой интенсивности (*Intensity*) на протяжении распространения импульса ( $z$ ). Можно заметить, что уровень, при котором начинается поглощение, равен  $I_0 \approx 0.7$ . Известна оценка [17], что ионизация воздуха становится существенной при интенсивности  $4.5 \cdot 10^{13} \text{ Ватт/см}^2$ , что и соответствует найденному безразмерному пороговому значению. По мере уменьшения мощности импульса уменьшается величина теряемой мощности и длина, на которой наблюдается поглощение.

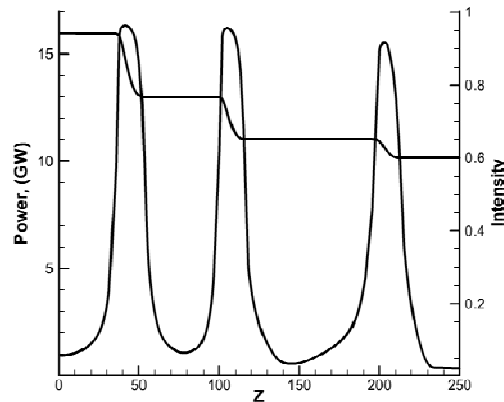


Рис.10 Сопоставление интенсивности и мощности

Напишем уравнение для изменения мощности по  $z$ . Для этого умножим уравнение (4) на  $A^*$  и сложим с комплексно-сопряженным уравнением для (4), умноженным на  $A$ . Проинтегрировав по всей поперечной плоскости  $(x, y)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int |A|^2 dx dy &= -2\nu \int |A|^{2K} dx dy; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &\approx -2\nu K^{-1/N} P; \\ P_{cr} &\approx P_0 \exp\left[-2\nu K^{-1/N} \Delta z_{MPA}\right] \approx P_0 \left(1 - 2\nu K^{-1/N} \Delta z_{MPA}\right). \end{aligned}$$

Для получения равенства по порядку величины было использовано выражение для формы начального профиля импульса. Таким образом, можно оценить длину диссипативного участка

$$\Delta z_{MPA} = \frac{K^{1/N}}{2\nu} \left(1 - \frac{P_{cr}}{P_0}\right),$$

которая при  $N \rightarrow 1$  и при  $P_0 \gg P_{cr}$  стремится к максимальной величине  $\Delta z_{MPA} \approx 0.25$ , что и подтверждается приведенными выше результатами вычислений. В физических величинах  $\Delta Z_{MPA} \approx 0.35 \text{ м}$ .

Характер ступенчатого развития мощности импульса также зависит от его первоначальной ширины. На рис. 11 приведены графики изменения мощности для импульсов одинаковой мощности.

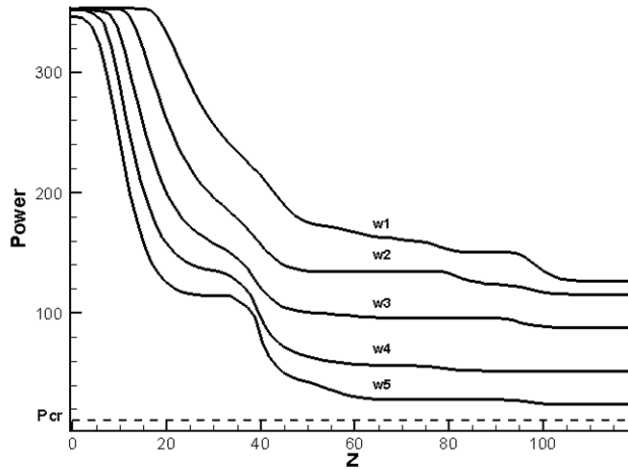


Рис.11. Изменение мощности при различных начальных ширинах импульсов  
( $w_1 > w_2 > w_3 > w_4 > w_5$ )

### Результаты для двух Гауссовых импульсов

В работе [9] нами уже было рассмотрено взаимное влияние друг на друга двух Гауссовых импульсов. При наличии многофотонной ионизации влияние становится более заметным. Работы по моделированию влияния двух импульсов проводились группой исследователей под руководством В.П. Кандидова и описаны в [10].

Приведем два показательных примера расчета двух Гауссовых профилей, демонстрирующих, как наличие диссипации влияет на характер развития областей высокой интенсивности. Были рассмотрены два равных Гауссовых возмущений с полушириной  $\omega_0 = 5$  и амплитудой интенсивности  $\sqrt{I_0} = 0.9$  на расстоянии  $d = 15$ . Распространение импульса моделировалось на расстояние  $z = 230$ .

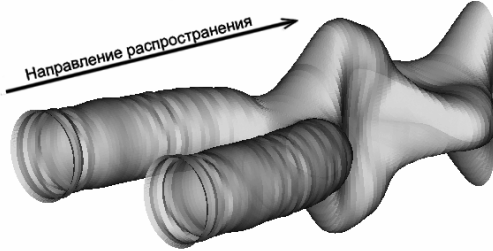


Рис.11-а. Области высокой интенсивности для двух равных Гауссовых возмущений с  $\omega_0 = 5$  и  $A = 0.9$  на расстоянии  $d = 15$  без наличия диссипации.

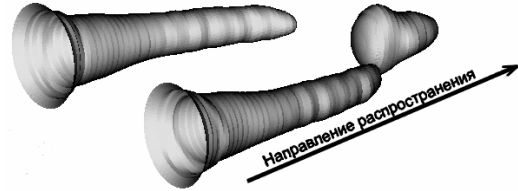


Рис.11-б. Области высокой интенсивности для двух равных Гауссовых возмущений с  $\omega_0 = 5$  и  $A = 0.9$  на расстоянии  $d = 15$  при наличии диссипации  $\nu = 0.154$ .

Как видно из рисунков, в консервативном случае (рис.11-а), т.е. при  $\nu = 0$  в формуле (3), мощность импульса концентрируется в середине между двух возмущений и сохраняется в области, подвергаясь колебаниям. При наличии диссипации ( $\nu = 0.154$ , рис.11-б), каждый из двух импульсов начинает терять мощность, сужаясь при этом, а момент слияния находится намного дальше по  $z$ , чем в консервативном случае.

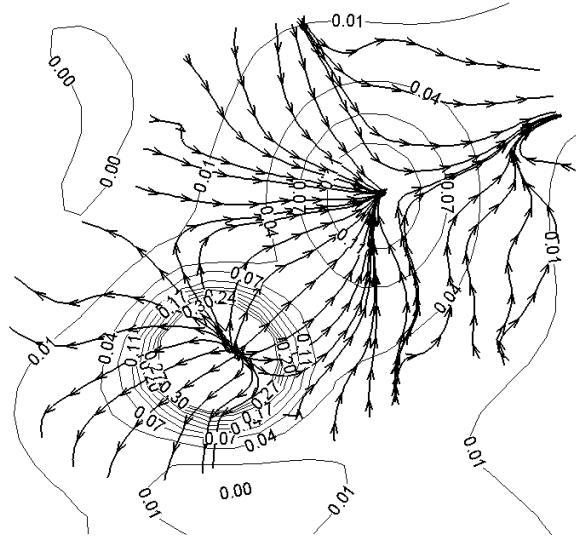


Рис.12 Переток мощности в широком пучке.

Взаимодействие между филаментами в широком импульсе с мощностью, на много превышающей критическую более сложно. Пример перетока мощности из развитой филаменты с максимальной интенсивностью в область, где зарождается новая филамента, представлен на рис.12.



**Результаты расчета мощного лазерного импульса**

Развитие параллельных вычислительных методов, как правило, ведет к возможности расчета реальных физических систем. В случае рассмотрения распространения на дальние дистанции лазерного импульса применение параллельных технологий также обосновано. Целью данной работы является доказать возможность такого расчета.

Мощность реального лазерного импульса достигает нескольких тераватт, ширина импульса может достигать нескольких сантиметров. Профиль импульса реальных лазерных систем обычно задают в форме функции супер-гаусса, т.е. показатель степени  $N = 2$  в формуле (5). Особенностью реального лазерного пучка также является наличие шума во входном профиле. Для воспроизведения случайного поля флуктуаций амплитуды использовался спектральный метод [15]. Этот метод основывается на суммировании Фурье-гармоник пространственного спектра. Алгоритм задания спектральным методом случайной реализации комплексного поля флуктуаций входного сигнала состоит в следующем. Сначала получаем комплексную случайную величину для каждой точки спектрального пространства  $\alpha(\kappa_x, \kappa_y) = \xi + i\eta$ , где  $\xi$  и  $\eta$  - независимые равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 1]$  случайные величины. Затем строится функция

$$F(\kappa_x, \kappa_y) = \sigma_0^2 \exp\left[-\left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2\right)/2\kappa_0^2\right], \text{ где}$$

$\sigma_0$  - амплитуда шума (например, 0.1),  $1/\kappa_0$  - радиус корреляции (например, 1/0.1мм). Для получения амплитудного шума выполняется преобразование Фурье:

$$\tilde{\psi}(x, y) = \text{Re}\left\{\iint \alpha(\kappa_x, \kappa_y) \sqrt{F(\kappa_x, \kappa_y)} \exp\left[2\pi i(x\kappa_x + y\kappa_y)\right] d\kappa_x d\kappa_y\right\}$$

Окончательно, накладываем функцию шума на входной профиль по следующему закону

$$\psi(x, y, z = 0) = \psi_{Gauss}(x, y) \cdot (1 + \tilde{\psi}(x, y)).$$

Развитие мелкомасштабной самофокусировки [6], приводящей к распаду симметрии профиля, классически объясняется наличием амплитудных флуктуаций начального распределения. Вследствие процесса мелкомасштабной самофокусировки и достижения амплитудами отдельных флуктуаций порога многофотонной ионизации в мощном лазерном импульсе начинает развиваться множественная филаментация. При наблюдении этого процесса вырисовывается картина множественных связей отдельных филамент между собой, вследствие чего происходят поглощение и зарождение новых филамент. В процессе такого хаотического развития в лазерных импульсах можно выделить области, где процесс филаментации продолжается непрерывно за счет поглощения энергии соседних участков. Такие области называют кластерами [1] и именно их наличие объясняет характер экспериментальных данных (рис.13).

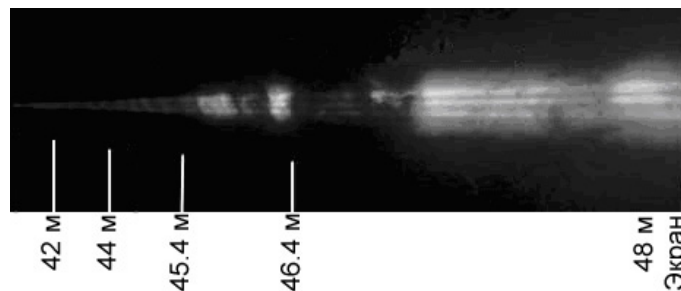


Рис.13 Эксперимент по распространению лазерного луча

Чтобы оценить необходимые размеры расчетной сетки, воспользуемся следующими условиями и результатами экспериментов (проект Teramobile [8]):

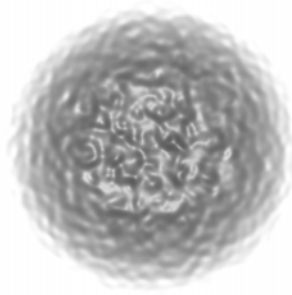
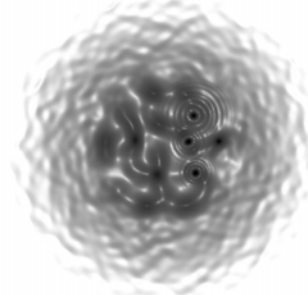
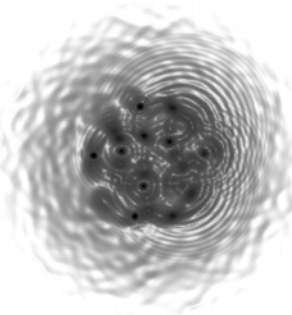
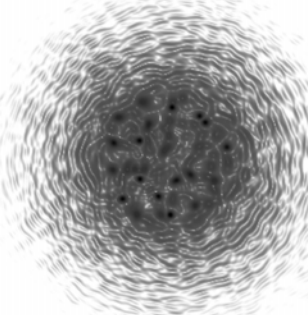
- для изучения процесса филаментации используется мощный (от 100GW до 3TW) лазерный импульс, начальная ширина которого может достигать 2 см;

- ширина образующейся филаменты, как мелкомасштабного эффекта, постоянна и достигает 100-150 мкм, а интенсивность в фокусе филаменты может превышать интенсивность фона в десятки раз;
- наблюдаемая длина распространения импульса составляет от десятков до сотен метров.

Таким образом, длина ребра квадрата расчетной сетки может достигать 10 см, чтобы избежать существенного влияния границ. Длина же ребра одной ячейки должна быть не более 10-15 мкм для удовлетворительной передачи характера мелкомасштабных эффектов. Таким образом, количество ячеек в расчетной области  $(x, y)$  может достигать  $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ . Шаг по  $z$  выбирается  $\sim h^2/2$ , и уменьшается обратно пропорционально максимальной интенсивности  $I_{\max} = \max_{i=0..M-1} (|A_i|^2)$ .

Тем самым обеспечена не только устойчивость, но и точность. Ввиду большой размерности решаемой системы линейных уравнений и необходимости численного моделирования процесса распространения фемтосекундного импульса на длинные дистанции использовался параллельный вычислительный комплекс.

В качестве примера расчета приводим расчет для среднего по мощности ( $62P_{cr}$ ) импульса с полушириной  $\tilde{\omega}_0 = 3\text{мм}$ . Расчетная область представляет собой квадрат с длиной стороны 2см. На начальном профиле задан Гауссов шум по описанному выше алгоритму. Расчет проводился на сетке  $2048 \times 2048$  ячеек.

Рис.14-а. Распределение интенсивности при  $z = 1\text{м}$ Рис.14-б. Распределение интенсивности при  $z = 3\text{м}$ Рис.14-в. Распределение интенсивности при  $z = 4\text{м}$ Рис.14-г. Распределение интенсивности при  $z = 6\text{м}$

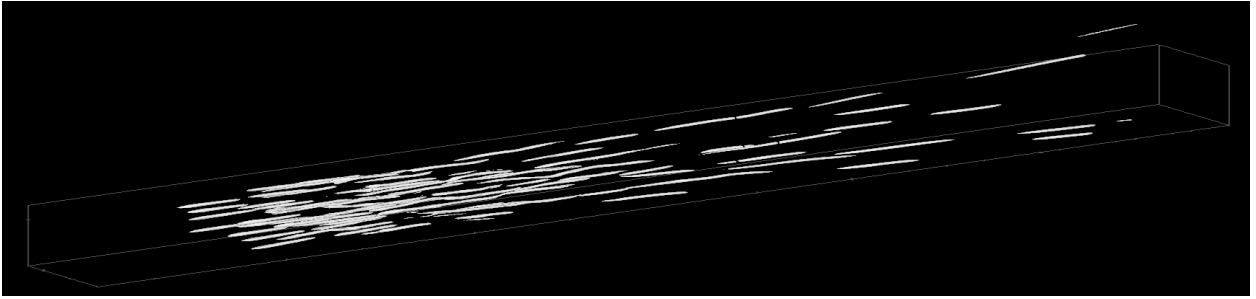


Рис.15 Линии уровня  $I_{iso} = 0.16$  распространения импульса с мощностью  $P = 62P_{cr}$  на расстояние около 9 м .

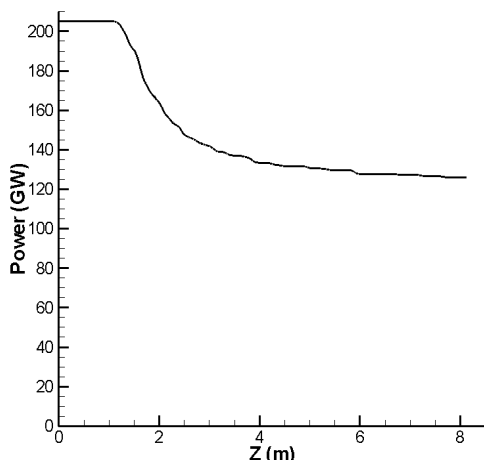


Рис.16-а Мощность

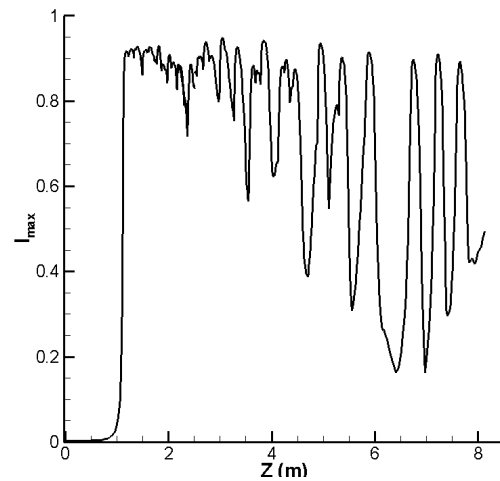


Рис.16-б Максимальная интенсивность

Результаты развития мощности и интенсивности импульса совпадают с полученными результатами проекта Teramobile [8]. Как правило, для большей кучности филамент, на практике применяется эллиптическое распределение начального профиля.

### Заключение

Целью настоящей работы было описание свойств процесса филаментации и разработка эффективных алгоритмов для расчета этого явления в реальных экспериментальных лазерных системах. Были использованы симметричные разностные схемы, обладающие свойством консервативности, созданы распараллеленные программы для расчета таких задач.

Показан ступенчатый характер развития нелинейности, который определяется пороговым значением интенсивности  $5 \cdot 10^{13} \text{ Watt/cm}^2$ , при котором ионизация воздуха становится существенной. Характер процесса определяется соотношением между процессом многофотонной ионизации и мелкомасштабной самофокусировки. До тех пор, пока интенсивность не достигает пороговых значений, световой пучок не теряет энергию и происходит самофокусировка. При достижении пороговых значений интенсивности начинается потеря энергии на ионизацию и дефокусирующее воздействие электронной плазмы, что приводит к потере интенсивности. Когда интенсивность падает ниже порогового значения, вновь может начаться самофокусировка. Таким образом, процесс носит ступенчатый характер (рис. 2-а). Процесс прекращается, когда

спектральный состав становится таким, что дальнейшее развитие неустойчивости в линейном приближении невозможно, т.к. выполняется условие устойчивости согласно критерию Беспалова-Таланова. Однако, не доказана возможность его возобновления на протяжении большого расстояния.

При использовании начального Гауссова профиля с высокой, близкой к пороговой (или максимальной) интенсивностью и мощностью не намного превышающей  $P_{cr}$ , не наблюдается ступенчатый характер изменения интенсивности при распространении импульса.

## Литература.

1. Kasparian J., Rodrigues M., Mejean G., Yu J., Salmon E., Wille H., Bourayou R., Frey S., Andre Y.-B., Mysyrowicz A., Souerbrey R., Wolf J.-P., Woste L. *Science*, **61**, 301 (2003).
2. Braun A. et al. *Opt. Lett.* **20**, 73 (1995); Nibbering E.T.J. et al. *Opt. Lett.* **21**, 62 (1996).
3. Brodeur A. et al. *Opt. Lett.* **22**, 304 (1997).
4. LaFontaine B. et al. *Phys. Plasmas*, **6**, 1615 (1999).
5. Chiao R.Y. *Phys.Rev.Lett.* **13**, 5 (1964).
6. Беспалов В.И., Таланов В.И., *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 471 (1966)
7. Fibich G., Pan V. *Physica D*, **157**, 113 (2001).
8. Skupin S., Berge L. et al., *Phys. Rev. E*, **70**, 046602 (2004).
9. Балашов А.Д., Пергамент А.Х. *Математическое моделирование процессов филаментации в средах с кубической нелинейностью* (М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2004, препринт №40).
10. Кандидов В.П., Косарева О.Г., Шленов С.А. и др. *Квантовая электроника*, **35**, 1 (2005).
11. Aztec. *A Massively Parallel Iterative Solver Library for Solving Sparse Linear Systems* (Интернет-ресурс: <http://www.cs.sandia.gov/CRF/aztec1.html>)
12. Дацюк В.Н., Букатов А.А., Жегуло А.И.. *Многопроцессорные системы и параллельное программирование* (Ростов: Ростовский государственный университет, <http://rsusu1.rnd.runnet.ru/kois/index.html>)
13. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1959).
14. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Трофимов В.А. *Математическое моделирование в нелинейной оптике* (М.: Издательство Московского университета, 1989).
15. Миркин Л.И., Рабинович М.А., Ярославский Л.П. *ЖВМ и МФ*, **5**, 1353 (1972).
16. Волков В.М. *Дифференциальные уравнения*, **29**, 7 (1993)
17. Kasparian J., Sauerbrey R., Chin S.L. *Appl. Phys. B*, **71**, 877 (2000).
18. Nibbering E.T.J., Grillon G., Franco M.A. et al. *J.Opt.Soc.Am.B*, **14**, 650 (1997).
19. Feit M.D., Fleck J.A. *Appl. Phys. Lett.*, **24**, 169 (1974)