ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 255, с. 146–160

УДК 517.953

Интегральные неравенства Либа–Тирринга и точные оценки размерности аттрактора уравнений Навье–Стокса с трением[1]

©2006 г. А. А. Ильин[2]

Поступило в мае 2005 г.

Рассматривается двумерная система Навье–Стокса с трением в большой прямоугольной периодической области площади порядка α^{-1}, $\alpha \to 0$. Получены оценки размерности аттрактора, которые являются точными как при $\alpha \to 0$, так и при $\nu \to 0$, где ν — коэффициент вязкости.

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении более чем двух последних десятилетий двумерная система Навье–Стокса

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \qquad \operatorname{div} u = 0, \qquad u(0) = u_0, \tag{1.1}$$

остается в центре внимания теории бесконечномерных диссипативных динамических систем [1–5]. Здесь u — вектор скорости, p — давление, f — вынуждающая сила. Система рассматривается либо в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с условием прилипания $u_{|\partial\Omega} = 0$, либо в периодической прямоугольной области $\Omega = [0, L/\alpha] \times [0, L]$, где $0 < \alpha \le 1$.

Одним из главных является вопрос о конечномерности динамики, точнее о размерности глобального аттрактора $\mathcal{A}$, соответствующего (1.1). Напомним, что глобальным аттрактором называется строго инвариантный компакт, притягивающий в соответствующем фазовом пространстве все ограниченные множества. Под размерностью понимается фрактальная размерность: для компактного множества X в гильбертовом пространстве H, $X \Subset H$,

$$\dim_{\mathrm{F}} X = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln(N_X(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)},$$

где $N_X(\varepsilon)$ есть минимальное число шаров радиуса ε, необходимых для покрытия X.

Оценки размерности аттрактора принято выражать в терминах безразмерного числа G (числа Грасгофа)

$$G = \frac{\|f\| \cdot |\Omega|}{\nu^2},$$

где через $|\Omega|$ обозначена площадь области Ω.

Известны следующие оценки размерности аттрактора двумерной системы Навье–Стокса. Для системы в ограниченной области с условием прилипания справедлива оценка [2]

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le cG, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00189), фонда CRDF (проект RUM1-2654-MO-05) и программы “Современные проблемы теоретической математики” ОМН РАН (г.к. 090703-1028).

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
E-mail: ilyin@keldysh.ru

где $c = c(\Omega)$ — некоторая безразмерная постоянная, зависящая лишь от формы области Ω: $c(\lambda\Omega) = c(\Omega)$, $\lambda > 0$. Явная оценка значения постоянной c была найдена в [6] (см. также [7]): $c \le 1/(2\pi^{3/2})$.

Для задачи с периодическими краевыми условиями оценка сверху может быть значительно улучшена [8]:

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le c\, G^{2/3}(\ln(1+G))^{1/3}, \tag{1.3}$$

где c зависит лишь от α, $c = c(\alpha)$.

Оценки снизу размерности аттрактора основаны на важном наблюдении [1], что аттрактор содержит стационарные точки вместе с неустойчивыми многообразиями, а также на анализе неустойчивости потоков Колмогорова и их обобщений [9–11].

Весьма вероятно, что оценка (1.2) для условия прилипания неулучшаема, хотя никаких оценок снизу на сегодняшний день неизвестно.

Первой оценкой снизу размерности аттрактора была оценка, полученная в [1], в которой использовались результаты о неустойчивости потоков Колмогорова [9, 10] и где "бифуркационным" параметром является площадь области Ω, т.е. параметр α. А именно: в (1.1) полагается $\nu = 1$, $L = 2\pi$ и для правой части

$$f = f_{\mathrm{Kolm}} = \left\{ f^1 = \lambda \sin x_2,\ f^2 = 0 \right\}$$

соответствующее стационарное решение $u_{\mathrm{Kolm}} = f_{\mathrm{Kolm}}$ является при $\lambda \ge \lambda_0$ неустойчивым и размерность неустойчивого многообразия, а стало быть, и аттрактора растет как $1/\alpha$ при $\alpha \to 0$. Вязкость ν при этом не играет никакой роли.

Также оказалось, что рост как $1/\alpha$ размерности аттрактора является точным [12], причем в [13] получена явная оценка сверху размерности аттрактора в задаче Колмогорова:

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le \frac{1}{\alpha}\left(15 + \frac{6}{\pi}\widetilde{G}\right), \qquad \text{где} \quad \widetilde{G} = \frac{\alpha^{1/2} L^2 \|f\|}{\nu^2}. \tag{1.4}$$

Заметим, что $\widetilde{G}$ не зависит от α. Заметим также, что оценки сверху и снизу, хотя и являются величинами одного порядка по $1/\alpha$, существенно отличаются зависимостью от ν: оценка снизу от ν не зависит, в то время как оценка сверху растет как ν^{-2}.

Для периодической задачи с $\alpha = 1$ (и $L = 2\pi$) в работе [11] доказано, что оценка (1.3) является логарифмически точной, а именно для специального класса правых частей

$$f = f_s = \left\{ f_1 = \lambda s^3 \sin s x_2,\ f_2 = 0 \right\}$$

соответствующее стационарное решение $u = s^{-2} f_s$ (обобщенные потоки Колмогорова) является при $\lambda \ge \lambda_0$ неустойчивым, причем размерность неустойчивого многообразия M^{u} порядка s^2: $\dim M^{\mathrm{u}} \ge c_1 s^2$. Поскольку соответствующее число $G = G_s = \|f_s\| \cdot |\Omega|/\nu^2 = c_2 s^3$, то для глобального аттрактора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$, соответствующего колмогоровской правой части, выполняется

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A}_s \ge c_1 s^2 = c_3 G^{2/3}.$$

Геометрия области при этом фиксирована: $\alpha = 1$. Заметим также, что вязкость ν и в данной оценке размерности снизу не играет никакой роли, а "бифуркационным" параметром является большой целочисленный параметр $s \to \infty$, характеризующий частоту и амплитуду правой части f.

В настоящей работе мы рассматриваем систему

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i u = \nu\Delta u - \mu u - \nabla p + f, \qquad \operatorname{div} u = 0, \qquad u(0) = u_0, \tag{1.5}$$

которая отличается от (1.1) наличием добавочного диссипативного члена $-\mu u$ в правой части. Эта система имеет важные приложения в геофизической гидродинамике [14, 15]. Система рассматривается в периодической прямоугольной области Ω при произвольном, но фиксированном $\mu > 0$ и при $\alpha \to 0$ и $\nu \to 0$.

В работе [16] было показано, что размерность аттрактора системы (1.5) на торе $[0, L]^2$ (с $\alpha = 1$) удовлетворяет оценке

$$\dim_{\mathrm F} \mathcal{A} \le \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{1/2} \frac{L^2 \|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Было также показано, что для правой части

$$f = f_s = \bigl\{f_1 = \mathrm{const}\cdot \nu^2 s^3 \sin s x_2,\ f_2 = 0\bigr\},$$

где $L = 2\pi$, выполняется оценка снизу

$$\dim_{\mathrm F} \mathcal{A} \ge \mathrm{const}\cdot \frac{L^2 \|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\mu\nu},$$

откуда и следует, что оценка (1.6) является точной. При этом $\nu \to 0$, а число s уже более не является независимым параметром и определяется по формуле $s = (\mu/\nu)^{1/2} \to \infty$ при $\nu \to 0$.

В работе [17] для системы (1.5) с периодическими краевыми условиями были получены оценки сверху для числа асимптотически определяющих конечномерных проекций (определяющих мод и определяющих узлов). Они оказались пропорциональными безразмерному числу $|\Omega| \cdot \|\operatorname{rot} f\|_\infty/(\mu\nu)$, $|\Omega| = L^2/\alpha$, и навлекли на мысль о том, что для фрактальной размерности аттрактора системы (1.5) в "большой" области (с $\alpha \to 0$) выполняется оценка, пропорциональная площади области и, как и для $\alpha = 1$, обратно пропорциональная вязкости ν.

Основной результат, доказываемый в разд. 3, состоит в том, что размерность глобального аттрактора системы (1.5) в прямоугольной периодической области $\Omega = [0, L/\alpha] \times [0, L]$ удовлетворяет оценке

$$\dim_{\mathrm F} \mathcal{A} \le 12 \frac{L^2 \|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\alpha\mu\nu},$$

причем на примере обобщенных потоков Колмогорова показывается, что эта оценка точна как при $\nu \to 0$, так и при $\alpha \to 0$.

Оценка сверху основана на формуле Каплана–Йорка для фрактальной размерности, которая приводится в разд. 2. Техника оценки m-следа линеаризованного оператора (1.5) такая же, как в [13]. При этом важную роль играют неравенства Либа–Тирринга [18–20, 2] и их уточнение [12, 13] в анизотропном случае для функций, заданных на двумерном вытянутом торе $[0, L/\alpha] \times [0, L]$, где $\alpha \to 0$.

Пусть система функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ принадлежит пространству Соболева H^1 и $\int \varphi_j\, dx = 0$. Пусть система $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ ортонормирована в L_2: $\int \varphi_i \varphi_j\, dx = \delta_{ij}$. Тогда справедливо неравенство

$$\int \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j(x)^2\right)^2 dx \le c_{\mathrm{LT}} \sum_{j=1}^m \|\nabla \varphi_j\|^2, \tag{1.7}$$

где постоянная c_{LT} не зависит от m и зависит лишь от α. В общем случае $c_{\mathrm{LT}} \geq \mathrm{const}/\alpha$, что видно на примере системы, состоящей из одной функции $\varphi(x_1)$, зависящей только от "длинной" координаты x_1, вида $\varphi(x_1) = f(\alpha x_1)$. Обозначим через M подпространство функций, зависящих только от x_1, а через N ортогональное дополнение. Тогда если $\{\varphi_j\}_{j=1}^m \subset \mathrm{N}$, то постоянная c_{LT} не зависит от α и справедлива оценка $c_{\mathrm{N}} = c_{\mathrm{LT}|\mathrm{N}} \leq 12/\pi$. В общем же случае $c_{\mathrm{LT}} \leq 6/(\alpha\pi)$. Эти результаты из [13] приводятся в дополнении (разд. 4).

2. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть S_t, $t \geq 0$, — полугруппа непрерывных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, $S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau$, $S_0 = \mathrm{Id}$. Пусть X — компактное строго инвариантное множество для S_t: $S_t X = X$, $X \Subset H$. Предположим, что отображение S_t равномерно дифференцируемо на X для всех t:

$$\|S_t(u) - S_t(v) - DS_t(u)(u-v)\| \leq h(r)\|u-v\|, \qquad u, v \in X, \tag{2.1}$$

где $\|u-v\| \leq r$, $h(r) \to 0$, $r \to 0$, и

$$\sup_{t\in[0,1]} \sup_{u\in X} \|DS_t(u)\|_{\mathcal{L}(H,H)} < \infty.$$

Дополнительно предположим, что для любого фиксированного t линейный оператор (дифференциал) $L = L(t,u) = DS_t(u)$ непрерывен в смысле $\mathcal{L}(H,H)$ по отношению к $u \in X$. Пусть также L компактен при $t > 0$.

Собственные значения самосопряженного положительного компактного оператора $(L^*L)^{1/2}$ обозначим через $\alpha_1(t,u) \geq \alpha_2(t,u) \geq \dots$ и положим

$$\omega_0(t,u) = 1, \qquad \omega_k(t,u) = \alpha_1(t,u)\alpha_2(t,u)\dots\alpha_k(t,u), \qquad \overline{\omega}_k(t) = \sup_{u\in X} \omega_k(t,u). \tag{2.2}$$

Тогда существует предел $\lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln \overline{\omega}_k(t) = q(k)$ (см. [2, Sect. V.2.3]). Числа $q(k)$ называются суммами первых k глобальных показателей Ляпунова и определены таким образом для целых k.

Для d вида $d = k + s$, $0 < s \leq 1$, определим $q(d)$ с помощью линейной интерполяции:

$$q(d) = q(k+s) = (1-s)q(k) + sq(k+1).$$

Теорема 2.1. *Пусть $X \Subset H$ — компактное строго инвариантное множество полугруппы S_t. Пусть S_t равномерно дифференцируема на X и дифференциал $DS_t(u)$ непрерывно зависит от $u \in X$.*

Предположим, что для некоторого целого $n > 0$ выполнены неравенства $q(n) \geq 0$, $q(n+1) < 0$ и $q(d_0) = 0$. Тогда для фрактальной размерности множества X справедлива оценка

$$\dim_{\mathrm{F}} X \leq d_0 = n + \frac{q(n)}{q(n) - q(n+1)}. \tag{2.3}$$

Теорема доказана в [6].

Замечание 2.1. Оценка $\dim_{\mathrm{H}} X \leq d_0$ для хаусдорфовой размерности была получена в [2, 21]. Для фрактальной размерности там же было показано, что $\dim_{\mathrm{F}} X \leq c d_0$, $c > 1$.

3. РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА С ТРЕНИЕМ

Рассматривается система Навье–Стокса с трением

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i u = \nu \Delta u - \mu u - \nabla p + f, \qquad \operatorname{div} u = 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{3.1}$$

Здесь u — вектор скорости, p — давление, $\nu > 0$ — вязкость, f — вынуждающая сила. Диссипативный член $-\mu u$ в правой части, где μ — коэффициент рэлеевского (или экмановского) трения, описывает трение о дно в простейших моделях циркуляции океана либо трение в планетарном пограничном слое в моделях циркуляции атмосферы [15, 14].

Система рассматривается в периодической прямоугольной области $\Omega = T^2_\alpha = [0, L/\alpha] \times [0, L]$, где без ограничения общности будем считать, что $0 < \alpha \le 1$. Другими словами, мы предполагаем, что все функции u, p, f периодичны с периодом L/α по x_1 и L по x_2. Кроме того, предполагается, что f и u имеют нулевое среднее. Также положим

$$|\Omega| = \frac{L^2}{\alpha}.$$

Обозначим через P ортогональный проектор из $L_2(T^2_\alpha)^2 \cap \{u\colon \int u\,dx = 0\}$ на гильбертово пространство H, являющееся замыканием в $L_2(T^2_\alpha)^2$ множества гладких бездивергентных периодических векторных полей. Применяя P к первому уравнению в (3.1), получаем

$$\partial_t u + B(u, u) + \nu A u = -\mu u + f, \qquad u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

где $A = -P\Delta$ — оператор Стокса, а $B(u, v) = P\bigl(\sum_{i=1}^{2} u^i \partial_i v\bigr)$ — нелинейный член. Кроме того, положим

$$b(v, u, w) = (B(v, u), w) = \int \sum_{i,k=1}^{2} v^k \partial_k u^i w^i \, dx. \tag{3.3}$$

Хорошо известно, что уравнение (3.2) имеет единственное решение $u(t) \in H$, порождая тем самым полугруппу $S_t\colon H \to H$, $S_t u_0 = u(t)$, обладающую глобальным аттрактором $\mathcal{A} \Subset H$, являющимся по определению компактным строго инвариантным множеством, притягивающим любые ограниченные множества (см., например, [1–5]).

Займемся теперь оценками сверху размерности аттрактора. Под размерностью будем понимать фрактальную размерность.

Полугруппа $S_t u_0 \to u(t)$ равномерно дифференцируема в H, и ее дифференциалом является линейный оператор $L(t, u_0)\colon \xi \to U(t) \in H$, где $U(t)$ есть решение уравнения в вариациях

$$\partial_t U = -\nu A U - \mu U - B(U, u(t)) - B(u(t), U) =: \mathcal{L}(t, u_0) U, \qquad U(0) = \xi. \tag{3.4}$$

Кроме того, дифференциал $L(t, u_0)$ непрерывно зависит от начального значения $u_0 \in \mathcal{A}$ [1].

Следуя [2, 21], оценим числа $q(m)$ — суммы первых m глобальных показателей Ляпунова:

$$q(m) \le \limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{P_m\colon H \to H} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Tr}\bigl[P_m \circ \mathcal{L}(\tau, u_0) \circ P_m\bigr]\, d\tau, \tag{3.5}$$

где

$$\operatorname{Tr}\bigl[P_m \circ \mathcal{L} \circ P_m\bigr] = \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{L} v_j, v_j)$$

— след конечномерного оператора $P_m \circ \mathcal{L} \circ P_m \colon P_m H \to P_m H$. Здесь P_m — произвольный проектор $P_m H \to H$ и $\{v_i\}_{i=1}^m$ — произвольный ортонормированный базис в $P_m H$.

Сначала оценим H^1-норму решений на аттракторе. Умножая (3.2) скалярно на Au, используя тождество $(B(u,u), Au) = 0$ (см. [2]) и интегрируя по частям, получаем

$$\partial_t \|\mathrm{rot}\, u\|^2 + 2\nu \|Au\|^2 + 2\mu \|\mathrm{rot}\, u\|^2 = 2(f, Au) = 2(\mathrm{rot}\, f, \mathrm{rot}\, u) \le \mu \|\mathrm{rot}\, u\|^2 + \mu^{-1} \|\mathrm{rot}\, f\|^2.$$

Используя неравенство Пуанкаре $\lambda_1 \|\mathrm{rot}\, u\|^2 \le \|Au\|^2$, где λ_1 — первое собственное значение оператора A, получаем

$$\partial_t \|\mathrm{rot}\, u\|^2 + (\mu + 2\nu\lambda_1^{-1}) \|\mathrm{rot}\, u\|^2 \le \mu^{-1} \|\mathrm{rot}\, f\|^2,$$

откуда в силу неравенства Гронуолла получаем, что на аттракторе $u(t) \in \mathcal{A}$ справедлива оценка

$$\|\mathrm{rot}\, u(t)\|^2 \le \frac{\|\mathrm{rot}\, f\|^2}{\mu(\mu + 2\nu\lambda_1^{-1})} < \frac{\|\mathrm{rot}\, f\|^2}{\mu^2}. \tag{3.6}$$

Теперь оценим m-след оператора $\mathcal{L}$ в (3.4). Пусть $v_i \in H \cap H^1$, $i = 1, \dots, m$, — ортонормированный (в H) базис в $P_m H$, где P_m — произвольный ортогональный m-мерный проектор $P_m \colon H \to H$.

Интегрируя по частям, используя соотношение $(B(u(t), v_j), v_j) = 0$ и ортонормированность v_j, получаем

$$\mathrm{Tr}\big[P_m \circ \mathcal{L}(t, u_0) \circ P_m\big] = \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}(t, u_0) v_j, v_j) = -\nu \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot}\, v_j\|^2 - \mu m - \sum_{j=1}^m b(v_j, u(t), v_j). \tag{3.7}$$

Представим u и v_j в виде $u = \mathrm{M}u + \mathrm{N}u$, $v_j = \mathrm{M}v_j + \mathrm{N}v_j$. Заметим, что если $\mathrm{div}\, w = 0$, то $\mathrm{div}\, \mathrm{N}w = 0$ и $\mathrm{div}\, \mathrm{M}w = 0$. Поскольку $\mathrm{M}u$ и $\mathrm{M}v_j$ зависят только от x_1, $\mathrm{M}u^1 = \mathrm{M}v_j^1 = 0$ и $\int_0^L \mathrm{N}u(x_1, x_2)\, dx_2 = 0$, то

$$b(\mathrm{M}v_j, u, \mathrm{M}v_j) = 0, \qquad b(\mathrm{M}v_j, \mathrm{M}u, \mathrm{N}v_j) = 0, \qquad b(\mathrm{N}v_j, \mathrm{M}u, \mathrm{M}v_j) = 0.$$

Действительно, для доказательства, например, последнего равенства имеем

$$b(\mathrm{N}v, \mathrm{M}u, \mathrm{M}v) = \int \mathrm{N}v^1 \partial_1 \mathrm{M}u^2 \mathrm{M}v^2\, dx = \int_0^{L/\alpha} \partial_1 \mathrm{M}u^2(x_1) \mathrm{M}v^2(x_1) \int_0^L \mathrm{N}v^1(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = 0.$$

Поэтому для трилинейной формы b (3.3) справедливо равенство

$$b(v_j, u, v_j) = b(\mathrm{N}v_j, u, \mathrm{N}v_j) + b(\mathrm{M}v_j, \mathrm{N}u, \mathrm{N}v_j) + b(\mathrm{N}v_j, \mathrm{N}u, \mathrm{M}v_j).$$

На основании предложения 3.1 получаем

$$\sum_{j=1}^m b(v_j, u, v_j) \le 2^{-1/2} \|\mathrm{rot}\, u\| \cdot \|\rho_{\mathrm{N}v}\| + 2^{1/2} \|\mathrm{rot}\, \mathrm{N}u\| \cdot \|\rho_{\mathrm{M}v}\|^{1/2} \|\rho_{\mathrm{N}v}\|^{1/2}, \tag{3.8}$$

где

$$\rho_{\mathrm{M}v}(x) = \sum_{j=1}^m |\mathrm{M}v_j(x)|^2, \qquad \rho_{\mathrm{N}v}(x) = \sum_{j=1}^m |\mathrm{N}v_j(x)|^2.$$

Для первого слагаемого имеем, используя (4.6) (см. ниже),

$$2^{-1/2}\|\operatorname{rot} u\|\cdot\|\rho_{\mathrm{N}v}\| \le \frac{c_{\mathrm N}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\frac{\nu}{4c_{\mathrm N}}\|\rho_{\mathrm{N}v}\|^2 \le \frac{c_{\mathrm N}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\frac{\nu}{4}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2. \tag{3.9}$$

Аналогично для второго слагаемого

$$\begin{aligned}
&2^{1/2}\|\operatorname{rot}\mathrm{N}u\|\cdot\|\rho_{\mathrm{M}v}\|^{1/2}\|\rho_{\mathrm{N}v}\|^{1/2} \le 2^{1/2}\|\operatorname{rot} u\|\cdot\|\rho_{\mathrm{M}v}\|^{1/2}\|\rho_{\mathrm{N}v}\|^{1/2}\le\\
&\qquad\le 2^{1/2}\|\operatorname{rot} u\|c_{\mathrm N}^{1/4}\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2\Biggr)^{1/4}\frac{c_{\mathrm M}^{1/4}}{L^{1/4}}m^{1/8}\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2\Biggr)^{1/8}\le\\
&\qquad\le \frac{\sqrt{c_{\mathrm M}c_{\mathrm N}}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\nu\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2\Biggr)^{1/2}\frac{m^{1/4}}{L^{1/2}}\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2\Biggr)^{1/4}\le\\
&\qquad\le \frac{\sqrt{c_{\mathrm M}c_{\mathrm N}}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\frac{\nu}{4}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2+\frac{\nu m^{1/2}}{L}\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2\Biggr)^{1/2}\le\\
&\qquad\le \frac{\sqrt{c_{\mathrm M}c_{\mathrm N}}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\frac{\nu}{4}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2+\frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2+\frac{\nu m}{2L^2}.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Из (3.8)–(3.10) выводим

$$\sum_{j=1}^m b(v_j,u,v_j)\le\frac{c_{\mathrm N}+\sqrt{c_{\mathrm M}c_{\mathrm N}}}{2\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot} v_j\|^2+\frac{\nu m}{2L^2}. \tag{3.11}$$

Поэтому, возвращаясь к (3.7) и полагая $c_{\mathrm N}=c_{\mathrm M}=6$ (см. (4.6), (4.7)), получаем

$$\operatorname{Tr}\bigl[P_m\circ\mathcal{L}(t,u_0)\circ P_m\bigr]\le-\frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot} v_j\|^2+\frac{6}{\nu}\|\operatorname{rot} u\|^2+\Bigl(\frac{\nu}{2L^2}-\mu\Bigr)m. \tag{3.12}$$

Оценим теперь первое слагаемое. В силу ортонормированности $\{v_j\}_{j=1}^m$ для $\rho(x)=\sum_{j=1}^m|v_j(x)|^2$ имеем

$$\begin{aligned}
m^2&=\Bigl(\int\rho(x)\,dx\Bigr)^2=\Bigl(\int\rho_{\mathrm M}(x)\,dx+\int\rho_{\mathrm N}(x)\,dx\Bigr)^2\le\\
&\le 2\Bigl(\int\rho_{\mathrm M}(x)\,dx\Bigr)^2+2\Bigl(\int\rho_{\mathrm N}(x)\,dx\Bigr)^2\le\frac{2L^2}{\alpha}\bigl(\|\rho_{\mathrm N}\|^2+\|\rho_{\mathrm M}\|^2\bigr)
\end{aligned}$$

и на основании (4.6) и (4.7) (см. ниже)

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha m^2}{2L^2}&\le c_{\mathrm N}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2+\frac{c_{\mathrm M}}{L}m^{1/2}\Biggl(\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2\Biggr)^{1/2}\le\\
&\le c_{\mathrm N}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{N}v_j\|^2+c_{\mathrm N}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot}\mathrm{M}v_j\|^2+\frac{c_{\mathrm M}^2 m}{4c_{\mathrm N}L^2}=c_{\mathrm N}\sum_{j=1}^m\|\operatorname{rot} v_j\|^2+\frac{c_{\mathrm M}^2 m}{4c_{\mathrm N}L^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, вновь полагая $c_{\mathrm{N}} = c_{\mathrm{M}} = 6$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m}\|\mathrm{rot}\, v_j\|^2 \ge \frac{\alpha m^2}{2c_{\mathrm{N}}L^2} - \frac{c_{\mathrm{M}}^2}{c_{\mathrm{N}}^2}\frac{m}{4L^2} = \frac{\alpha m^2}{12L^2} - \frac{m}{4L^2}. \tag{3.13}$$

Используя в (3.12) оценку решений на аттракторе (3.6) и (3.13), получаем

$$q(m) \le -\frac{\nu}{24}\frac{m^2}{|\Omega|} + \left(\frac{5\nu}{8L^2} - \mu\right)m + \frac{6}{\nu}\frac{\|\mathrm{rot}\, f\|^2}{\mu^2}. \tag{3.14}$$

Пользуясь элементарной оценкой $m_* < a + c$ для положительного корня m_* квадратного уравнения $m^2 - am - c^2 = 0$, получаем на основании теоремы 2.1 $\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le m_*$, т.е.

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le \frac{1}{\alpha}\left(15 - 24L^2\frac{\mu}{\nu}\right)_+ + 12\,\frac{|\Omega|^{1/2}\|\mathrm{rot}\, f\|}{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

где $x_+ = x$, если $x \ge 0$, и $x_+ = 0$, если $x \le 0$.

Итак, доказана следующая

Теорема 3.1. *Фрактальная размерность глобального аттрактора $\mathcal{A}$ системы Навье–Стокса с трением* (3.1) *удовлетворяет оценке*

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le \frac{15}{\alpha} + 12\,\frac{|\Omega|^{1/2}\|\mathrm{rot}\, f\|}{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

Если вязкость достаточно мала ($\nu \le (8/5)L^2\mu$), *то*

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le 12\,\frac{|\Omega|^{1/2}\|\mathrm{rot}\, f\|}{\mu\nu}. \tag{3.17}$$

Замечание 3.1. Поскольку $\|\mathrm{rot}\, f\| \le |\Omega|^{1/2}\|\mathrm{rot}\, f\|_\infty$, то оценку (3.17) можно записать в виде

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{A} \le 12\,\frac{|\Omega|\cdot\|\mathrm{rot}\, f\|_\infty}{\mu\nu} = 12\frac{L^2\|\mathrm{rot}\, f\|_\infty}{\alpha\mu\nu}. \tag{3.18}$$

Эта оценка пропорциональна площади прямоугольной области Ω.

Предложение 3.1 (см. [13]). *Если* $\mathrm{div}\, u(x) = 0$, *то*

$$\begin{gathered}\left|\sum_{k,i=1}^{2} v^k(x)\partial_k u^i(x) v^i(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla u(x)|\cdot|v(x)|^2,\\ \left|\sum_{k,i=1}^{2}\bigl(v^k(x)\partial_k u^i(x) w^i(x) + w^k(x)\partial_k u^i(x) v^i(x)\bigr)\right| \le \sqrt{2}|\nabla u(x)|\cdot|v(x)|\cdot|w(x)|,\end{gathered} \tag{3.19}$$

где v и w — произвольные вектор-функции, а $|\nabla u| = \bigl(\sum_{k,i=1}^{2}(\partial_k u^i)^2\bigr)^{1/2}$.

Оценка снизу. Ниже будет получена оценка снизу размерности глобального аттрактора, которая является точной как при $\nu \to 0$, так и при $\alpha \to 0$, а $\mu > 0$ произвольно, но фиксировано.

Перейдем к скалярному уравнению вихря скорости. Вводим функцию тока ψ, так что $u = \nabla^{\perp}\psi = \{-\partial_2\psi, \partial_1\psi\}$. Подставляя это в первое уравнение (3.1) и применяя оператор rot, получаем для $\varphi = \Delta\psi$ уравнение

$$\partial_t\varphi - \nu\Delta\varphi + \mu\varphi + J(\Delta^{-1}\varphi, \varphi) = F = \operatorname{rot} f, \tag{3.20}$$

где

$$J(a, b) = \nabla^{\perp}a \cdot \nabla b = \partial_1 a\partial_2 b - \partial_2 a\partial_1 b. \tag{3.21}$$

Поскольку глобальный аттрактор является максимальным строго инвариантным компактным множеством, он содержит стационарные точки и их неустойчивые многообразия, т.е. многообразия, вдоль которых решения экспоненциально стремятся к стационарным точкам при $t \to -\infty$ [1].

Мы будем использовать хорошо известное семейство потоков Колмогорова в качестве стационарных решений [1, 9–11, 16].

Положим $L = 2\pi$ и рассмотрим систему (3.1) в периодической области $[0, 2\pi/\alpha] \times [0, 2\pi]$. (Это не приводит к ограничению общности и упрощает обозначения в использующихся ниже рядах Фурье.) Как и в [16], для (большого) целочисленного параметра s рассмотрим семейство правых частей f:

$$f = f_s = \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu^2\lambda s^2 \sin sx_2, \\ f_2 = 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

где $\lambda = \lambda(s)$ — параметр, который будет выбран ниже. Тогда

$$\operatorname{rot} f_s = F_s = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu^2\lambda s^3 \cos sx_2, \tag{3.23}$$

так что

$$\|\operatorname{rot} f_s\| = \frac{\nu^2\lambda s^3}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \|\operatorname{rot} f_s\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu^2\lambda s^3. \tag{3.24}$$

Рассмотрим стационарное уравнение (3.20) с правой частью (3.23)

$$-\nu\Delta\varphi + \mu\varphi + J(\Delta^{-1}\varphi, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu^2\lambda s^3 \cos sx_2 \tag{3.25}$$

и будем искать его решение в виде

$$\varphi = \varphi_s = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu\lambda sK \cos sx_2, \qquad K = K(s, \mu, \nu). \tag{3.26}$$

Поскольку φ_s зависит только от x_2, то $J(\Delta^{-1}\varphi_s, \varphi_s) \equiv 0$ и непосредственная проверка показывает, что при

$$K(s, \mu, \nu) = \frac{s^2}{s^2 + \mu/\nu} \tag{3.27}$$

функция φ_s, определенная в (3.26), есть решение уравнения (3.25).

Рассмотрим спектральную задачу для уравнения, линеаризованного на решении φ_s:

$$\mathcal{L}_{\varphi_s}\varphi = J(\Delta^{-1}\varphi_s, \varphi) + J(\Delta^{-1}\varphi, \varphi_s) - \nu\Delta\varphi + \mu\varphi = -\sigma\varphi. \tag{3.28}$$

Размерность неустойчивого подпространства с $\operatorname{Re}\sigma > 0$ даст оценку снизу размерности аттрактора $\mathcal{A}$.

Подставляя фурье-представление φ:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_+} (a_k \cos k'x + b_k \sin k'x), \qquad k \in \mathbb{Z}^2_+ = \bigl\{k = (k_1, k_2),\ k_1 \ge 0,\ |k| > 0\bigr\},$$

$$k' = \{k_1\alpha, k_2\}, \qquad k'x = k_1\alpha x_1 + k_2 x_2,$$

в (3.28) и учитывая равенство $J(a, b) = -J(b, a)$, получим

$$\frac{\lambda K s}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_+} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k'^2}\right) J\bigl(\cos sx_2, a_k \cos k'x + b_k \sin k'x\bigr) +$$
$$+ \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_+} \left(k'^2 + \widehat{\sigma} + \frac{\mu}{\nu}\right) \bigl(a_k \cos k'x + b_k \sin k'x\bigr) = 0, \tag{3.29}$$

где $\widehat{\sigma} = \sigma/\nu$. Далее действуем, как в [16], где был рассмотрен случай $\alpha = 1$:

$$J\bigl(\cos sx_2, \cos(\alpha k_1 x_1 + k_2 x_2)\bigr) = -\alpha k_1 s\, \sin sx_2 \cdot \sin(\alpha k_1 x_1 + k_2 x_2) =$$
$$= \frac{\alpha k_1 s}{2} \Bigl(\cos(\alpha k_1 x_1 + (k_2 + s)x_2) - \cos(\alpha k_1 x_1 + (k_2 - s)x_2)\Bigr),$$
$$J\bigl(\cos sx_2, \sin(\alpha k_1 x_1 + k_2 x_2)\bigr) = \alpha k_1 s\, \sin sx_2 \cdot \cos(\alpha k_1 x_1 + k_2 x_2) =$$
$$= \frac{\alpha k_1 s}{2} \Bigl(\sin(\alpha k_1 x_1 + (k_2 + s)x_2) - \sin(\alpha k_1 x_1 + (k_2 - s)x_2)\Bigr).$$

Подставляя эти формулы в (3.29) и приравнивая коэффициенты при $\cos k'x$, получаем уравнение для коэффициентов $a_{k_1 k_2}$ (уравнение для $b_{k_1 k_2}$ в точности такое же):

$$-\frac{\lambda K \alpha k_1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\alpha^2 k_1^2 + (k_2 + s)^2 - s^2}{\alpha^2 k_1^2 + (k_2 + s)^2}\right) a_{k_1, k_2 + s} + \frac{\lambda K \alpha k_1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\alpha^2 k_1^2 + (k_2 - s)^2 - s^2}{\alpha^2 k_1^2 + (k_2 - s)^2}\right) a_{k_1, k_2 - s} +$$
$$+ \left(\alpha^2 k_1^2 + k_2^2 + \widehat{\sigma} + \frac{\mu}{\nu}\right) a_{k_1 k_2} = 0. \tag{3.30}$$

Положим

$$a_{k_1 k_2} \left(\frac{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2 - s^2}{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2}\right) =: c_{k_1 k_2}$$

и

$$k_1 = t, \quad k_2 = sn + r \quad \text{и} \quad c_{t, sn+r} = e_n, \qquad t = 1, 2, \ldots, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad r_{\min} < r < r_{\max},$$

где $r_{\min}$, $r_{\max}$ удовлетворяют $r_{\max} - r_{\min} < s$ и будут указаны ниже.

В результате для всех t и r получим следующее рекуррентное соотношение:

$$d_n e_n + e_{n-1} - e_{n+1} = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.31}$$

где

$$d_n = \frac{2\sqrt{2}\pi (t'^2 + (sn + r)^2)(t'^2 + (sn + r)^2 + \widetilde{\sigma})}{(t'^2 + (sn + r)^2 - s^2)\Lambda t'}, \qquad \widetilde{\sigma} = \widehat{\sigma} + \frac{\mu}{\nu} = \frac{\sigma}{\nu} + \frac{\mu}{\nu}, \tag{3.32}$$

$t' = \alpha t$ и введено обозначение

$$\Lambda = \lambda K = \lambda(s)K(s,\mu,\nu) = \lambda(s)\frac{s^2}{s^2+\mu/\nu}. \tag{3.33}$$

Заметим, что с точностью до замены $t' \to t$ рекуррентное соотношение (3.31), (3.32) совпадает с соответствующим рекуррентным соотношением из [16], где рассматривался случай $\alpha = 1$.

Будем искать нетривиальные стремящиеся к нулю при $n \to \pm\infty$ решения $\{e_n\}$ рекуррентных соотношений (3.31), (3.32). Каждое такое решение с

$$\operatorname{Re}\widetilde{\sigma} > \frac{\mu}{\nu} \tag{3.34}$$

дает неустойчивую собственную функцию φ спектральной задачи (3.28) с собственным значением σ, удовлетворяющим

$$\operatorname{Re}\sigma > 0.$$

Лемма 3.1. *Пусть для данного целого $s > 0$ зафиксирована пара целых чисел t, r, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} t'^2 + r^2 < \frac{s^2}{3}, \qquad t'^2 + (-s+r)^2 > s^2, \qquad t'^2 + (s+r)^2 > s^2, \qquad t' \ge \delta s, \\ t' = \alpha t, \qquad r_{\min} < r < r_{\max}, \qquad r_{\min} = -\frac{s}{6}, \qquad r_{\max} = \frac{s}{6}, \qquad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Для любого $\Lambda > 0$ существует единственное действительное $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}(\Lambda)$, для которого рекуррентное соотношение (3.31), (3.32) *имеет нетривиальное решение, причем $\widetilde{\sigma}(\Lambda)$ монотонно возрастает при $\Lambda \to \infty$ и удовлетворяет неравенству*

$$c_1(t', r, s)\Lambda \le \widetilde{\sigma}(\Lambda) \le c_2(t', r, s)\Lambda. \tag{3.36}$$

Единственное $\Lambda_{\mu/\nu} = \Lambda_{\mu/\nu}(s)$, являющееся решением уравнения

$$\widetilde{\sigma}(\Lambda_{\mu/\nu}) = \mu/\nu,$$

удовлетворяет оценке

$$c_1(\delta)s < \Lambda_{\mu/\nu}(s) < c_2(\delta)\frac{s^2+\mu/\nu}{s}. \tag{3.37}$$

Лемма доказана в [16] для $\alpha = 1$ и дословно переносится на случай $\alpha < 1$ формальной заменой $t \to t'$ в доказательстве из [16] (см. также [22]).

Обозначим через $A(\delta)$ область на (t', r)-плоскости, для каждой точки которой выполняются условия (3.35). Ясно, что $|A(\delta)| = a(\delta)s^2$, где через $|A(\delta)|$ обозначена площадь области $A(\delta)$. Обозначим через $d(s)$ число точек (t, r) с целочисленными координатами таких, что соответствующая точка $(t', r) \in A(\delta)$. Очевидно,

$$d(s) := \#\bigl\{(t,r)\colon\ (t',r) \in \mathbb{Z}^2 \cap A(\delta)\bigr\} \backsimeq \frac{|A(\delta)|}{\alpha} = a(\delta)\frac{s^2}{\alpha} \qquad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.38}$$

Далее, учитывая, что анализ рекуррентного соотношения для коэффициентов $b_{k_1k_2}$ совершенно аналогичен, из леммы 3.1 выводим, что для каждой точки (t, r) такой, что $(t', r) \in \mathbb{Z}^2 \cap$ $\cap\, A(\delta)$, и параметра Λ (см. (3.33)), выбранного следующим образом (см. (3.37)):

$$\Lambda = \Lambda_{\mu/\nu} = c_2(\delta)\frac{s^2+\mu/\nu}{s}, \tag{3.39}$$

существует единственное действительное собственное значение $\widetilde{\sigma} > \mu/\nu$ кратности 2. Поэтому существует положительное собственное значение $\sigma > 0$ исходной спектральной задачи (3.28) кратности 2. Следовательно, размерность неустойчивого инвариантного многообразия в окрестности стационарного решения φ_s по крайней мере $2d(s)$. В результате получаем

$$\dim\mathcal{A} \ge 2d(s) \backsimeq 2a(\delta)\frac{s^2}{\alpha}. \tag{3.40}$$

До сих пор целочисленный параметр s был произвольным. Теперь положим

$$s^2 = \frac{\mu}{\nu}.$$

(Строго говоря, для этого необходимо, чтобы число μ/ν было полным квадратом, но у нас и так уже есть соотношение $\backsimeq$ в (3.40).) Тогда

$$\dim\mathcal{A} \gtrsim 2a(\delta)\frac{1}{\alpha}\frac{\mu}{\nu}. \tag{3.41}$$

Вспомним теперь определение Λ (3.33): $\Lambda = \lambda(s)\frac{s^2}{s^2+\mu/\nu}$. Полагая $s^2 = \mu/\nu$ здесь и в (3.39), получим уравнение для λ, из которого

$$\lambda(s) = \lambda\biggl(\Bigl(\frac{\mu}{\nu}\Bigr)^{1/2}\biggr) = 4c_2(\delta)s = 4c_2(\delta)\Bigl(\frac{\mu}{\nu}\Bigr)^{1/2}. \tag{3.42}$$

Вычислим

$$G_1 = \frac{|\Omega|^{1/2}\|\operatorname{rot} f\|}{\nu\mu} \qquad \text{и} \qquad G_2 = \frac{|\Omega|\cdot\|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\nu\mu}$$

для $f = f_s$ и $s = (\mu/\nu)^{1/2}$. С учетом (3.24) и (3.42) получаем

$$\|\operatorname{rot} f_s\| = \frac{\nu^2\lambda(s)s^3}{\sqrt{\alpha}} = 4c_2(\delta)\frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \|\operatorname{rot} f_s\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\nu^2\lambda(s)s^3 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}c_2(\delta)\mu^2. \tag{3.43}$$

Следовательно,

$$G_1 = 8\pi c_2(\delta)\frac{\mu}{\alpha\nu} \qquad \text{и} \qquad G_2 = 8\pi\sqrt{2}c_2(\delta)\frac{\mu}{\alpha\nu}. \tag{3.44}$$

Выражая оценку (3.41) в терминах чисел G_1 и G_2 (3.44) и оптимизируя по $\delta \in (0, 1/\sqrt{3})$, находим

$$\dim\mathcal{A} \gtrsim \mathrm{const}_1\cdot G_1, \qquad \dim\mathcal{A} \gtrsim \mathrm{const}_2\cdot G_2, \tag{3.45}$$

где $\mathrm{const}_1 = (4\pi)^{-1}\max_{0<\delta<1/\sqrt{3}} a(\delta)c_2(\delta)^{-1}$ и $\mathrm{const}_2 = \mathrm{const}_1/\sqrt{2}$ — абсолютные постоянные.

Объединяя полученные результаты с теоремой 3.1, получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Размерность глобального аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения* (3.1) *с колмогоровской правой частью* (3.22) *удовлетворяет следующей двусторонней оценке, являющейся точной как при $\nu \to 0$, так и при $\alpha \to 0$:*

$$\begin{aligned} \mathrm{const}_1\cdot\frac{|\Omega|^{1/2}\|\operatorname{rot} f\|}{\nu\mu} &\lesssim \dim_{\mathrm{F}}\mathcal{A} \le 12\frac{|\Omega|^{1/2}\|\operatorname{rot} f\|}{\nu\mu},\\ \mathrm{const}_2\cdot\frac{|\Omega|\cdot\|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\nu\mu} &\lesssim \dim_{\mathrm{F}}\mathcal{A} \le 12\frac{|\Omega|\cdot\|\operatorname{rot} f\|_\infty}{\nu\mu}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

где $\Omega = L^2/\alpha$.

4. ДОПОЛНЕНИЕ. ДВУМЕРНЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЛИБА–ТИРРИНГА

В этом разделе рассматриваются неравенства Либа–Тирринга на двумерном торе $T^2_\alpha = (0, L/\alpha) \times (0, L)$, $0 < \alpha \le 1$, вытянутом вдоль x_1. Не ограничивая общности, будем считать, что $L = 2\pi$.

Для определения использовавшихся в разд. 3 ортогональных проекторов M и N рассмотрим спектр $\sigma = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ задачи

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j \tag{4.1}$$

в пространстве $H = L_2(T^2_\alpha) \cap \bigl\{\int f\,dx = 0\bigr\}$:

$$\sigma = \bigl\{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2,\ k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_0\bigr\}, \qquad \mathbb{Z}^2_0 = \mathbb{Z}^2 \setminus 0. \tag{4.2}$$

Представим σ в виде

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{N}} \cup \sigma_{\mathrm{M}},$$

где

$$\begin{gathered}\sigma_{\mathrm{N}} = \bigl\{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2,\ k_2 \ne 0,\ k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_0\bigr\},\\ \sigma_{\mathrm{M}} = \bigl\{\alpha^2 k_1^2,\ k_1 \in \mathbb{Z}_0\bigr\}, \qquad \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus 0.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Соответствующие спектральные проекторы обозначим через N и M. Итак, гильбертово пространство H расщепляется на два ортогональных инвариантных (относительно Δ) подпространства

$$H = \mathrm{N}H \oplus \mathrm{M}H.$$

Заметим, что функции из MH зависят лишь от x_1. Кроме того, действие проектора M есть усреднение вдоль “короткой” координаты x_2 [12]:

$$\mathrm{M}\varphi(x_1) = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \varphi(x_1, x_2)\,dx_2, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{Id} - \mathrm{M}.$$

Рассмотрим ортонормированное в L_2 семейство функций $\{f_j\}_{j=1}^m$:

$$(f_i, f_j) = \int f_i f_j\,dx = \delta_{ij}.$$

Тогда соответствующие проекции $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ и $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, где $\varphi = \mathrm{M}f$, $\psi = \mathrm{N}f$, будут субортонормированными в L_2 в смысле следующего определения [20].

Определение 4.1. Семейство $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ называется субортонормированным, если для любого $\xi \in \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\sum_{i,j=1}^m \xi_i\xi_j(\phi_i, \phi_j) \le \sum_{j=1}^m \xi_j^2. \tag{4.4}$$

Действительно, например, для $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ в силу ортонормированности $\{f_j\}_{j=1}^m$ и ортогональности $(\varphi_i, \psi_j) = 0$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^m \xi_i\xi_j(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i,j=1}^m \xi_i\xi_j(f_i, f_j) - \sum_{i,j=1}^m \xi_i\xi_j(\psi_i, \psi_j) = \xi^2 - \left\|\sum_{j=1}^m \xi_j\psi_j\right\|^2,$$

откуда следует, что для $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ выполнено (4.4).

В следующей теореме (см. [13]) приведены использовавшиеся в разд. 3 интегральные неравенства Либа–Тирринга. Важным является тот факт, что для функций из NH соответствующие постоянные в неравенствах не растут при $\alpha \to 0$.

Теорема 4.1. *Пусть семейства скалярных функций* $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ *и вектор-функций* $\{v_j\}_{j=1}^m$ *являются субортонормированными в* $L_2(T_\alpha^2)$, *имеют нулевое среднее и* $\operatorname{div} v_j = 0$. *Положим*

$$\rho_v(x) = \sum_{j=1}^m |v_j(x)|^2, \qquad \rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)^2.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\int \rho_\varphi(x)^2\,dx \le \frac{c_{\mathrm{LT}}}{\alpha} \sum_{j=1}^m \|\nabla\varphi_j\|^2, \qquad \int \rho_v(x)^2\,dx \le \frac{c_{\mathrm{LT}}}{\alpha} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2, \qquad c_{\mathrm{LT}} \le \frac{6}{\pi}. \tag{4.5}$$

Если $v_j = \mathrm{N}v_j$, $\varphi_j = \mathrm{N}\varphi_j$ *и* $\operatorname{div} v_j = 0$, *то для* $\rho_{\mathrm{N}v}(x) = \sum_{j=1}^m |\mathrm{N}v_j(x)|^2$ *и* $\rho_{\mathrm{N}\varphi}(x) = \sum_{j=1}^m \mathrm{N}\varphi_j(x)^2$ *выполнены неравенства*

$$\int \rho_{\mathrm{N}\varphi}(x)^2\,dx \le c_{\mathrm{N}} \sum_{j=1}^m \|\nabla \mathrm{N}\varphi_j\|^2, \qquad \int \rho_{\mathrm{N}v}(x)^2\,dx \le c_{\mathrm{N}} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} \mathrm{N}v_j\|^2, \qquad c_{\mathrm{N}} \le \frac{12}{\pi}. \tag{4.6}$$

Наконец, если $v_j = \mathrm{M}v_j$, $\operatorname{div} v_j = 0$, *то для* $\rho_{\mathrm{M}v}(x) = \sum_{j=1}^m |\mathrm{M}v_j(x)|^2$ *выполнено неравенство*

$$\int \rho_{\mathrm{M}v}(x)^2\,dx \le \frac{c_{\mathrm{M}}}{L} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} \mathrm{M}v_j\|, \qquad c_{\mathrm{M}} \le 6. \tag{4.7}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
2. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. 2nd ed. New York: Springer, 1997.
3. *Ladyzhenskaya O.A.* Attractors for semigroups and evolution equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. (Leizioni Lincei).
4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. (AMS Colloq. Publ.; V. 49).
5. *Babin A.V.* Attractors of Navier–Stokes equations // Handbook of mathematical fluid dynamics. Amsterdam: North-Holland, 2003. V. 2. P. 169–222.
6. *Chepyzhov V.V., Ilyin A.A.* On the fractal dimension of invariant sets; applications to Navier–Stokes equations // Discr. and Contin. Dyn. Syst. 2004. V. 10, N 1–2. P. 117–135.
7. *Ilyin A.A.* Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure // Nonlin. Anal. Theory Meth. and Appl. 1996. V. 27. P. 605–616.
8. *Constantin P., Foias C., Temam R.* On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence // Physica D. 1988. V. 30. P. 284–296.
9. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. С. 1140–1143.
10. *Юдович В.И.* Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. С. 453–467.
11. *Liu V.X.* A sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the global attractors of the 2D Navier–Stokes equations // Commun. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 327–339.
12. *Ziane M.* Optimal bounds on the dimension of attractors for the Navier–Stokes equations // Physica D. 1997. V. 105. P. 1–19.
13. *Ильин А.А.* Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса // Мат. сб. 2005. Т. 196, №1. С. 33–66.
14. *Dymnikov V.P., Filatov A.N.* Mathematics of climate modelling. Boston: Birkhäuser, 1997.

15. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
16. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* Small viscosity sharp estimates for the global attractor of the 2-D damped-driven Navier–Stokes equations // Commun. Math. Sci. 2004. V. 2, N 3. P. 403–426.
17. *Ilyin A.A., Titi E.S.* Sharp estimates for the number of degrees of freedom for the damped-driven 2-D Navier–Stokes equations // J. Nonlin. Sci. 2006. V. 16, N 3. P. 233–253.
18. *Lieb E., Thirring W.* Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities // Studies in mathematical physics: Essays in honor of V. Bargmann. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976. P. 269–303.
19. *Lieb E.* On characteristic exponents in turbulence // Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 473–480.
20. *Ghidaglia J.M., Marion M., Temam R.* Generalization of the Sobolev–Lieb–Thirring inequalities and applications to the dimension of attractors // Diff. and Integr. Equat. 1988. V. 1. P. 1–21.
21. *Constantin P., Foias C.* Global Lyapunov exponents, Kaplan–Yorke formulas and the dimension of the attractors for the 2D Navier–Stokes equations // Commun. Pure and Appl. Math. 1985. V. 38. P. 1–27.
22. *Liu V.X.* Remarks on the Navier–Stokes equations on the two and three dimensional torus // Commun. Part. Diff. Equat. 1994. V. 19. P. 873–900.