

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М. В. КЕЛДЫША

А. Н. Наумов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ
КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Москва, 2006

А. Н. Наумов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Ключевые слова: обратные задачи, сплайн-аппроксимация, уравнение фильтрации, критерий, регуляризация А. Н. Тихонова, сглаживание данных

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена обратная коэффициентная задача для уравнений фильтрации. Предложен метод решения обратной задачи для одномерных и двумерных параболических уравнений типа “domain decomposition”. Создан алгоритм их решения с помощью регуляризированной сплайн-аппроксимации. Использован критерий проверки статистических гипотез для определения оптимального шага сплайн-аппроксимации, который является фактически параметром регуляризации данной задачи. В алгоритме решения задачи при сглаживании “зашумленных” исходных данных использована регуляризация по А. Н. Тихонову.

A. N. Naumov

ON THE DECISION OF INVERSE COEFFICIENT PROBLEM
FOR FILTRATION EQUATION

ABSTRACT

In this article the inverse coefficient problem is considered for filtration equation. The algorithm of solving inverse problem for 1D and 2D parabolic equations of “domain decomposition” type is realized and decisions are received. The new method of solving problem is created according to the regularized spline approximation with Tikhonov’s regularization.

Оглавление

1. Введение	4
2. Теоретическое обоснование задачи	5
3. Исследование одномерной задачи	8
3.1 Постановка задачи.....	8
3.2 Последовательность мат. эксперимента.....	8
3.3 Алгоритмы решения.....	10
4. Исследование двумерной задачи	16
4.1 Постановка задачи.....	16
4.2 Последовательность мат. эксперимента.....	16
4.3 Алгоритмы решения.....	17
5. Заключение	20
6. Приложение	21
7. Литература	30

1. Введение

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Эти задачи принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Понятие корректной постановки задач математической физики было введено Ж. Адамаром, в связи с желанием выяснить, какие типы граничных условий наиболее естественны для различных типов дифференциальных уравнений (для эллиптических, например, - задача Дирихле и ей аналогичные, для гиперболических – задача Коши).

Решение всякой количественной задачи обычно заключается в нахождении “решения” z по заданным “исходным данным” u , т.е. $z = R(u)$, где $R(u)$ - связывающий оператор. Мы будем считать их элементами метрических пространств F и U соответственно, с расстояниями между элементами $\rho_U(u_1, u_2)$ и $\rho_F(z_1, z_2)$, где $u_1, u_2 \in U$. Метрика обычно определяется постановкой задачи. Пусть определено понятие “решения” и каждому элементу $u \in U$ отвечает единственное решение $z = R(u)$ из пространства F . Задача определения решения по исходным данным $u \in U$ называется устойчивой на пространствах (F, U) , если:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_F(z_1, z_2) \leq \varepsilon$, где $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$; $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in F$.

Задача определения решения z по “исходным данным” u из U называется корректно поставленной по Адамару на паре метрических пространств (F, U) , если выполняются условия :

1. $\forall u \in U$ существует решение $z \in F$

2. Решение определяется однозначно

3. Задача устойчива на пространствах (F, U)

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным условиям, называются некорректно поставленными. Следует отметить, что определение некорректно поставленных задач относится именно к данной паре метрических пространств (F, U) , так как в других метриках та же задача может быть корректно поставленной. В качестве пары пространств рассматриваются $L_2[a, b]$ и пространство $V[a, b]$ функций с ограниченной вариацией.

Обработка современного физического эксперимента невозможна без ЭВМ. К необходимости использования вычислительных машин при обработке экспериментальных данных с одной стороны приводит колоссальный объем исходной информации, обрабатываются десятки, сотни, а то и тысячи различных осциллограмм, показаний датчиков, фотопленок и т.д. С другой стороны, без вычислительных машин нельзя обойтись из-за сложности

математических методов обработки. К числу важных задач относятся задачи создания автоматической математической обработки результатов экспериментов (включая интерпретацию). Как правило, задачи, возникающие при обработке экспериментальных данных – это широкий класс некорректно поставленных обратных задач определения интересующих нас количественных характеристик явления по результатам их косвенных проявлений, т.е. требуется определить некоторые количественные характеристики z модели изучаемого объекта, тогда как физический эксперимент позволяет получить с какой-то точностью лишь “выходные результаты” эксперимента u : $u = A(z)$ – связывающее их операторное уравнение.

2. Теоретическое обоснование задачи

Настоящая работа посвящена некоторым аспектам обратной задачи для уравнений параболического типа, точнее обратной задаче пьезопроводности. Последняя возникает при описании однофазной фильтрации. Роль коэффициента теплопроводности играет преобразованная величина проницаемости.

Рассматривается следующая задача: на произвольной сетке в области G на плоскости заданы значения функции и дебита, т.е. интеграла от потока. По этим значениям следует определить пространственные распределения коэффициентов. Обычно рассматриваемая задача решается методом многомерного поиска, что делает задачу технически весьма сложной. Предлагается первоначально построить кусочно-гладкую интерполяцию исходных данных, а затем решать ее в каждой подобласти, содержащих одну из исходных точек.

Рассматриваются краевые задачи с однородными граничными условиями. Рассматриваемый класс коэффициентов $K[G]$ – это компакт в пространстве непрерывных функций, т.е. множество функций равномерно-ограниченных и равномерно непрерывных. Пусть G – прямоугольник на плоскости. Построим равномерную по (x, y) сетку в плоскости с числом интервалов $n \times n$. Каждой функции $k(x, y) \in K[G]$ поставим в соответствие билинейную функцию $k_n(x, y)$. Тогда можно утверждать, что, $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \|k - k_n\| < \varepsilon, n > N(\varepsilon)$ причем в силу компактности $K[G]$ значение $N(\varepsilon)$ одно и тоже для всех $k \in K[G]$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такие представления.

Известно, что если коэффициенты дифференцируемые, то решения принадлежат ограниченному множеству пересечения пространств $C[G] \cap W_2^r[G]$, где $r \leq 2$. Действительно, в силу принципа максимума множество решений ограничено в совокупности, если ограничено множество начальных условий. Достаточным условием ограниченности производных

является ограниченность производных в совокупности для начальных условий. Таким образом, множество решений принадлежит компакту $T[G] \in C[G] \cap S_R$, где S_R - сфера радиуса R в пространстве $W_2^1[G]$. Если $y(x) \in W_2^2$, то модуль непрерывности функции $y'(x)$ есть $O(h^{1/2})$, т.е. $|y'(x) - y'(x')| < L|x - x'|^{1/2}$ т.е. производная $y'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда функции $y(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $3/2$. Таким образом, если $u \in T[G]$, то производные u удовлетворяют условию Гельдера с показателем $1/2$.

Известно, что в классе непрерывных коэффициентов уравнения параболического типа коэффициентно устойчивы, т.е. малые возмущения коэффициентов приводит к малым возмущениям решений [Эйдельман. 1964], Отображение $K(x, y) \rightarrow T[G]$ непрерывно и взаимнооднозначно, следовательно (по А. Н. Тихонову) обратный оператор существует и непрерывен. Таким образом, мы имеем функцию $u(x, y)$ для $\forall t > 0$ принадлежащую $T[G]$, т.е. ограниченную и имеющую производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Для функций класса $T[G]$ существуют оптимальные представления в виде кусочно-гладких функций - сплайнов. Пусть $M \times M$ сетка, на которой строится сплайн, $u_M(x, y)$ - сплайн аппроксимация функции $u(x, y)$. Известно [Бабенко К.И., 1986], что точность сплайн аппроксимации для одномерной функции, производная порядка (p) которой удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , есть величина порядка $\frac{L}{M^{p+\alpha}}$, где L - постоянная в условии Гельдера, M - число интервалов для сплайн аппроксимации. Для двумерной функции существует "проклятие размерности", т.е. эффективная гладкость ρ определяется из условия [Бабенко К.И.] $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\bar{p}_1} + \frac{1}{\bar{p}_2}$, где $\bar{p}_i, i=1,2$ - эффективная гладкость по каждой переменной, равная порядку производной $p + \alpha$, где α - показатель Гельдера. Если $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}$, то $\rho = \frac{\bar{p}}{2}$. Следовательно, точность аппроксимации двумерными сплайнами есть $O(\frac{1}{M^{2\bar{p}/2}}) = O(\frac{1}{M^{2r-1}})$.

Если данные известны со случайной погрешностью, то возникает проблема статистической оценки величины $u(x, y)$. Пусть известна величина $\xi(x_i, y_j) = u(x_i, y_j) + \Delta(x_i, y_j)$ $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N$, где $\Delta(x_i, y_j)$ - реализация гауссовского случайного процесса с нулевым средним и дисперсией δ^2 , причем отдельные отсчеты статистически независимы. Тогда [Пергамент

А.Х.,1984,1986] точность оценки метода максимального правдоподобия в метрике $L_2[G]$:

$$\|u - \hat{u}_M\|^2 \approx \frac{\delta^2 M^2}{N^2} + \frac{L^2}{M^{2r-1}}$$

где \hat{u}_M - оценка с помощью сплайнов,

M – число параметров, определяющих сплайн

Первое слагаемое есть погрешность статистического оценивания, второе – погрешность аппроксимации. Эта оценка справедлива для любых $M \ll N$.

Естественно, поскольку задача статистического оценивания обратная по отношению к задаче теории вероятностей, то она является некорректно поставленной, в частности, норма уклонения в метрике $W_2'[G]$ может стать сколь угодно большой. Ошибка оценивания ведет себя характерным образом: ошибка статистического оценивания тем больше, чем больше число восстанавливаемых параметров M^2 , т.к. с ростом M уменьшается число отсчетов на каждый параметр; ошибка аппроксимации тем меньше, чем больше M , что естественно. Число M играет роль параметра регуляризации. Для выбора M предлагается применения критерия χ^2 .

Критерий χ^2 используется стандартным образом. Выше сплайн обозначен как $u_M(x, y, t)$. Операция сплайн интерполяции есть некоторое линейное преобразование T . Если известные с погрешностью δ значения u есть величина ξ , то оценка \hat{u}_M , определенная методом максимального правдоподобия есть решение линейного операторного уравнения $T^* T \hat{u}_M = T^* \xi$

В конечномерном представлении T оператор, действующий из евклидова пространства размерности M^2 в пространство размерности N^2 . Обозначим $u_M(x_k, y_l) = u_{M,kl}$, $\xi(x_i, y_j) = \xi_{ij}$. Тогда матрица оператора T есть T_{kl}^{ij} , а случайная величина невязки $Res = \sum_{i,j} (\xi_{ij} - \sum_{kl} T_{kl}^{ij} u_{M,kl})^2$ обладает распределением χ^2 с $N^2 - M^2$ степенями свободы. Критерий χ^2 это сравнение невязки Res с критическим значением $D(\beta)$, определенному по распределению χ^2 с $N^2 - M^2$ степенями свободы, для уровня значимости β . Очевидно, если число параметров M^2 мало, то ошибка аппроксимации велика, т.е. выбранная модель недостаточно точна и критерий χ^2 не может быть удовлетворен, т.е. $Res > D(\beta)$. Если M велико, то критерий χ^2 удовлетворяется, но ошибка статистического оценивания велика, и норма оценки \hat{u}_M в пространстве $W_2'[G]$ становится большой, а решение быстро изменяющимся. Поэтому выбирается минимальное значение M , при котором удовлетворяется критерий χ^2 .

3. Исследование одномерной задачи

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим предложенный алгоритм на примере одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$D_T = (0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T) \quad (3.1)$$

Рассматривается первая краевая задача:

$$u(0, t) = u_0$$

$$u(1, t) = u_1$$

$$u(0, x) = \hat{u}(x)$$

$k(x)$ – дифференцируемая функция

Для значений $t = t_1, t_2, \dots, t_N$ в точках $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_N \leq 1$ известны значения $u(x, t)$

и потока $W = -k \frac{\partial u}{\partial x}$. По этому набору необходимо определить значения

функции $k(x)$.

Значения $u(x_i, t_j)$ известны с некоторой погрешностью δ . Случайные величины, моделирующие погрешность, статистически независимы в различных точках и распределены по Гауссу с нулевым средним и дисперсией δ^2 . На Рис.1.1 представлены типичные графики функции $u(x, t)$ и результаты фильтрации с помощью сплайн аппроксимации. Очевидно, что полученные кривые не монотонны. Предлагается уточнить результат с помощью фильтрации по А. Н. Тихонову (Рис.1.1-красная кривая).

3.2 Последовательность математического эксперимента

Математический эксперимент можно разделить на следующие части:

Получение квазиреальных экспериментальных данных

В качестве экспериментальных данных рассматриваются заданные на некоторой нерегулярной сетке значения функции $u(x, t)$ и W_i^t на отрезке $[0, 1]$ в некотором интервале значений времени $[0, T]$, полученные при решении прямой задачи (3.1), а затем, при необходимости, разыгрываем экспериментальную ошибку.

Сглаживание (фильтрация) экспериментальных данных

Перед применением алгоритмов восстановления коэффициентов необходимо отфильтровать экспериментальные данные таким образом, чтобы получить оценку, как самой функции, так и ее производных. Любой алгоритм интерполяции и фильтрации, основанный на сплайнах, позволяет восстановить значения $u(x, t)$ в любой точке.

В приложениях очень часто используются интерполяционные сплайны степени не выше трех. Это связано с тем, что соответствующей гладкости во многих задачах достаточно и, кроме того, параметры такого сплайна легче вычисляются. Их вычисление сводится к решению линейной системы уравнений с ленточной матрицей, у которой главная диагональ является доминирующей. На Рис.1.2 показаны результаты применения метода наименьших квадратов (МНК) при аппроксимации кусочно-линейными функциями. С помощью этого метода удается приблизить функцию достаточно хорошо, за исключением точек близких к границам области, но оценка производной, таким образом не может быть получена, что необходимо для алгоритма определения коэффициента диффузии. Для того, чтобы производная функции, заданной приближенно, определялась устойчиво, нужно обеспечить согласно теории некорректных задач [1], ограниченность нормы в L_2 второй производной. Поэтому для аппроксимации экспериментальных данных используются сплайны порядка не ниже второго и регуляризация по А. Н. Тихонову, обеспечивающая ограниченность нормы вторых производных.

Определения коэффициентов теплопроводности k_n

Восстановление коэффициентов осуществляется двумя последовательными приближениями:

1. В первом приближении после определения числа восстанавливаемых коэффициентов, определяются отношения k_i/k_{i+1} , далее происходит подбор только одного коэффициента (например k_1), а остальные восстанавливаются через него. Следует отметить, что данный алгоритм эффективен, если функция $u(x, t)$ монотонна по пространственной переменной. В противном случае область определения разбивается на блоки, в которых функция $u(x, t)$ монотонна по пространству и применяется данный алгоритм в каждом из них.
2. Во втором приближение уточняется результат в каждой подобласти независимо. При этом используются данные о потоке, и решается краевая задача с граничными условиями, полученными при фильтрации исходных данных.

3.3 Алгоритмы решения поставленной задачи

Алгоритм решения прямой задачи

Известно, что для постановки задачи вида (3.1) лучше всего использовать интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения однородных консервативных разностных схем. В точках разрыва коэффициентов решение $u(x,t)$ будет иметь особенности. Для выделения допустимого решения из множества обобщенных решений надо выяснить, какие величины всюду непрерывны, согласно физическому смыслу задачи (Калиткин Н. Н., 1978).

Известно, что для теплопроводности непрерывны температура $u(x,t)$ и поток

$$\text{тепла } W = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Заметим, что производная u_x имеет разрывы в точках разрыва $k(x,t)$. Чтобы получить разностное уравнение, решение которого сходится к допустимому обобщенному решению, составим методом баланса консервативную разностную схему. Уравнение (3.1) записано в дивергентной форме, соответствующей закону сохранения энергии. Удобно заменить его системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad W = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2)$$

Выберем шаблон и связанную с ним ячейку

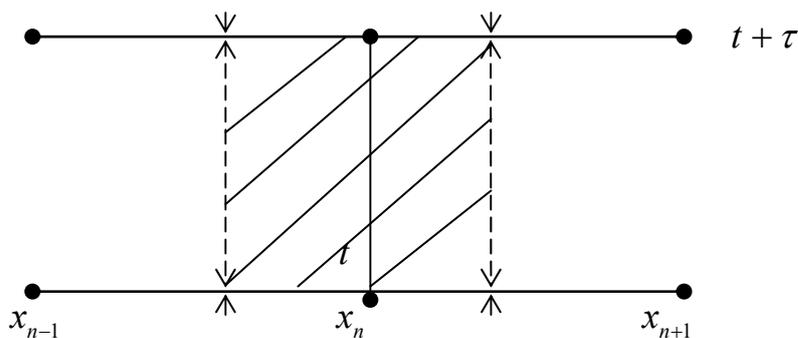


рис.2

запишем первое уравнение (3.2) в виде закона сохранения энергии для этой ячейки:

$$\int_{x_n-1/2}^{x_n+1/2} (\hat{u} - u) dx = \int (W_{n-1/2} - W_{n+1/2}) dt \quad (3.3)$$

Второе уравнение (3.2) проинтегрируем по интервалу сетки:

$$u_{n+1} - u_n = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{W}{k(x,t)} dx \quad (3.4)$$

Справедливость формулы (3.4) очевидна, если $k(x,t)$ непрерывна на интервале сетки; но благодаря аддитивности интегрирования формула остается справедливой при наличии разрывов $k(x,t)$ внутри $[x_n, x_{n+1}]$. Припишем значения температуры узлам сетки, а значения тепловых потоков – серединам интервалов (крестики на рис.1). Аппроксимируем интегралы (3.3) и (3.4) квадратурными формулами. При этом $\int W dt$ вычислим по двухточечной формуле с весом σ на верхнем слое, а в (1.4) вынесем среднее значение потока за знак интеграла: $u_{n+1} - u_n \approx -W_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x,t)}$, что допустимо в силу непрерывности потока. Получим консервативную разностную схему, называемую *наилучшей*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\hat{y}_n - y_n) &= \frac{\sigma}{\tilde{h}_n}(\widehat{W}_{n-1/2} - \widehat{W}_{n+1/2}) + \frac{1-\sigma}{\tilde{h}_n}(W_{n-1/2} - W_{n+1/2}) \\ W_{n+1/2} &= \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{(y_{n+1} - y_n)}{h_n}, \quad \widehat{W}_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{(\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n)}{h_n} \\ h_n &= x_{n+1} - x_n, \quad \tilde{h}_n = \frac{1}{2}(h_n + h_{n-1}) = x_{n+1/2} - x_{n-1/2} \\ \bar{\chi}_{n+1/2} &= \left[\frac{1}{h_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x,t)} \right]^{-1}, \quad \bar{t} = t + \frac{\tau}{2}, \end{aligned}$$

При вычислении последнего интеграла также аппроксимируют несложными квадратурными формулами. Например, если $k(x,t)$ непрерывны всюду, за исключением узлов x_n , то можно воспользоваться одной из следующих

формулой:
$$\bar{\chi}_{n+1/2} \approx \bar{k}_{n+1/2} \approx \frac{1}{2}(\bar{k}_{n+1} + \bar{k}_n) \approx \frac{2\bar{k}_{n+1}\bar{k}_n}{\bar{k}_{n+1} + \bar{k}_n} \approx \sqrt{\bar{k}_{n+1}\bar{k}_n},$$

где черта обозначает, что величина отнесена к моменту времени \bar{t} . Под узловыми значениями разрывных величин здесь надо понимать соответствующие односторонние пределы. Была использована чисто неявная схема ($\sigma=1$), чтобы решение прямой задачи $u(x, t)$ за небольшое количество шагов дошло до стационарного $u(x)$. Эта разностная схема устойчива и монотонна при любых шагах, и имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau)$. Таким образом, прямая задача решается с помощью разностной схемы :

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_n - y_n) = \frac{1}{\tilde{h}_n}(\widehat{W}_{n-1/2} - \widehat{W}_{n+1/2})$$

$$\widehat{W}_{n+1/2} = \overline{\chi}_{n+1/2} \frac{(\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n)}{h_n}$$

$$u_n = \alpha_n W_{n-1/2} + \beta_n$$

α_n, β_n – коэффициенты метода прогонки

Метод розыгрыша экспериментальной ошибки

Пусть $u(x)$ – это точное решение прямой задачи (3.1). Тогда $\hat{u}(x) = u(x) + \delta * rand$ – это решение с разыгранной ошибкой δ , $rand$ – генератор случайных чисел, распределенных по Гауссу с единичной дисперсией и математическим ожиданием равным нулю (встроенная библиотека в используемом языке программирования).

Для дальнейшего решения задачи нужно зашумленную экспериментальную функцию $\hat{u}(x)$ максимально приблизить к реальной кривой данных путем фильтрации (сглаживания) определенным образом.

Алгоритм фильтрации экспериментальной кривой

Сплаинами называются функции, которые составлены из отрезков функций по некоторой схеме. Простейший пример – ломаные. Среди сплайнов важнейшую роль играют полиномиальные сплайны, составленные из кусков многочленов. Ниже рассматриваются сплайны интерполяционного типа, значения которых совпадают со значениями аппроксимируемой функции в узлах интерполяции. Пусть известны значения функции u в точках $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, причем $u_\sigma(x) = u(x) + \Delta(x)$, где $\Delta(x)$ – погрешность, относительно которой известно, что $M\Delta(x) = 0$, $M\Delta(x_i)\Delta(x_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$. σ^2 – дисперсия случайной величины $\Delta(x_i)$, т.е. значения $\Delta(x_i), \Delta(x_j)$ статистически независимы в точках наблюдения.

Представим функцию $u(x)$ в виде сплайна $S(x|u_l)$, где $u_l(x)$ набор значений $u(x)$ в узлах интерполяции $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M\}$, которые не совпадают со значениями $\{x_i\}, i = 0, \dots, N$, причем $N \gg M$. Тогда неизвестные значения $\{u_l\}$ могут быть определены методом наименьших квадратов

$$\min_{u, l} \sum [u_\sigma(x_i) - S(x|u_l)]^2$$

Сплайн – это линейное преобразование функции $u(x)$, т.е

$$S(x|u_l) = \sum_{l=0}^M T_{il} u_l$$

Следовательно, величины $u_l, l = 0, \dots, M$ могут быть найдены из решения линейной системы $T^* T u = T^* u_\sigma$:

$$\sum_{m,l} T_{mi} T_{ml} u_l = \sum_{k=0}^N T_{ki} u_{\sigma,k} \quad (3.5)$$

В работе [Пергамент А. Х., 1984] показано, что точность такой оценки

$$\frac{\sigma^2 M}{N} + \frac{L^2}{M^{2\bar{r}}}$$

функций, удовлетворяющих условию Гельдера: $|u^{(r)}(x) - u^{(r)}(x')| < L|x - x'|^\alpha$,

$u^{(r)}(x)$ - производная порядка r , $\bar{r} = r + \alpha$. Очевидно, что при $M \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$,

так что $\frac{N}{M} \rightarrow \infty$, погрешность стремится к нулю. Если сплайны

аппроксимируют функцию вместе с производными до второго порядка включительно, то производная $S_x(x|u_l)$, где u_l - решение системы (3.5),

аппроксимирует u_x . Однако точность аппроксимации производной заметно

меньше, чем точность аппроксимации функции. Для построения оценок

функции $u_l(x)$ и ее производной предлагается регуляризованный (по А. Н.

Тихонову) алгоритм:

$$\min_{u_l} \sum [u_\sigma(x_i) - S(x_i | u_l)]^2 + \alpha \sum p_i \left(\frac{S_{i+1} - 2S_{i-1} + S_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2$$

$S_i = S(x_i | u_l)$, p_i - весовые функции

В настоящей работе используется интерполяция посредством *B-сплайнов* 3-го порядка.

Проведем более подробные построения:

На отрезке $[a, b]$, $a, b \in R$, $a < b$ зададим сетку

$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, где $n \in N$. Пусть P_m - множество многочленов

степени не выше m , $m \geq 0$, и $C^{(k)} = C^{(k)}[a, b]$ - множество непрерывных на

$[a, b]$ функций, имеющих непрерывную k -ю производную, $k \in Z_+$. Введем

определение: Функцию $S_m(x) = S_{m,k}(x, \Delta_n)$ - называют *полиномиальным*

сплайном степени m дефекта k ($1 \leq k \leq m$) с узлами Δ_n , если

1. $S_m(x) \in P_m$ на $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$);

2. $S_m(x) \in C^{m-k}[a, b]$

Точки $\{x_i\}$ называют узлами сплайна, $(m - k + 1)$ -я производная $S_m(x)$ может

оказаться разрывной на $[a, b]$.

Введем обозначение: $B_{m-1}(t) = B_{m-1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, t) = m \sum_{s=k}^{k+m} \frac{(x_s - t)_+^{m-1}}{\omega'_k(x_s)}$,

Где $(x_k < x_{k+1} < \dots < x_{k+m})$,

$$(x - t)_+^m = [\max(0, x - t)]^m, \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Функцию $B_{m-1}(t)$ называют *B-сплайном* степени $m-1$ относительно узлов $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$.

Выполняются следующие свойства:

1. $B_{m-1}(t) \equiv 0$ при $t \leq x_k$ и при $t \geq x_{k+m}$,
2. $B_{m-1}(t) > 0$ при $x_k < t < x_{k+m}$.

С вычислительной точки зрения *B-сплайны* часто удобно применять в качестве базисных функций для представления сплайнов. Верно утверждение: любой сплайн $S_m(x)$ из $S_{m,1}(\Delta_n)$ можно единственным образом представить в виде

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^n c_i B_{m,i}(x), \quad a \leq x \leq b \quad [10]$$

Дополним сетку Δ_n точками:

$$x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} : \quad x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3}$$

Например, можно положить

$$x_i = a + i(x_1 - a), \quad i = -1, -2, -3; \quad x_i = b + (i - n)(b - x_{n-1}), \quad i = n + 1, n + 2, n + 3.$$

Пусть $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ ($i = -2, -1, 0, 1, \dots, n + 3$)

Запишем представление интерполяционных параболических сплайнов через *B-сплайны*, определяемые при $m = 3$ равенством:

$$B_{2,i}(x) = B_2(x, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \bar{x}_{i+2}) = \sum_{s=i-1}^{i+2} 3 \frac{(\bar{x}_s - x)_+^2}{\omega'_i(\bar{x}_s)}, \quad \omega_i(x) = (x - \bar{x}_{i-1})(x - \bar{x}_i)(x - \bar{x}_{i+1})(x - \bar{x}_{i+2})$$

Сплайн $S_2(x)$ представим в виде:

$$S_2(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i M_i(x), \quad \text{где } M_i(x) = \frac{(\bar{x}_{i+2} - \bar{x}_{i-1})}{2} B_{2,i}(x) \quad (\text{a})$$

Условие интерполяции выглядит так:

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} M_j(x_j) c_j = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (\text{б})$$

Обычно применяемые краевые условия:

$$\sum_{j=k-1}^{k+1} M'_j(x_k) c_j = a'_k \quad (k = 0, n) \quad (c)$$

Уравнения (б) и (с) дают систему $n+3$ уравнений с $n+3$ неизвестными. Определитель этой системы отличен от нуля, т. к. в силу единственности соответствующего интерполяционного сплайна и единственности представления (а) система имеет единственное решение.

Алгоритм первого приближения восстановления коэффициентов

Известно, что для теплопроводности непрерывны температура $u(x,t)$ и поток тепла $W = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, однако производная u_x имеет разрывы в точках разрыва $k(x,t)$ при достижении стационарного решения u_x . Поэтому имеют место следующие отношения: $\beta_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} / \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} = \frac{k_{n+1}}{k_n} \Rightarrow$ задача сводится к нахождению k_1 , а зная его, легко вычислить $k_n, i = 1, 2, \dots, N$ по вышеуказанным отношениям.

Значения потока W_i^t известны в полуцелых точках $i - h/2$. Для вычисления k_1 воспользуемся методом наименьших квадратов, т.е. вычисляется $\min F(k) = \sum_{n,t} \left[\left(W_1^t - W_1^t(k) \right)^2 + \left(W_N^t - W_N^t(k) \right)^2 \right]$. Далее используем метод деления отрезка на n частей (в зависимости от требуемой точности поиска) и находим то k : $0 < k \leq 1$, с которым решение прямой задачи наименьшим образом отличаются от экспериментальных данных по рассматриваемому критерию отбора. Результат данного метода изображен на Рис.1.3.

Алгоритм второго приближения восстановления коэффициентов

В этом приближение уточняется каждый восстанавливаемый коэффициент независимо, т.к. на интервале, где необходимо восстановить значение коэффициента, можно смоделировать эволюцию функции $u(x,t)$ и W_i^t . Если после первого приближения $k_i = a$, то область уточнения \tilde{k}_i : $\tilde{k}_i \in [0.5 * a, 1.5 * a]$ т.е. с отклонением, например, на 50%. Далее вычисляется $\min F(\tilde{k}_i) = \sum_{n,t} \left[\left(W_*^t - W_*^t(\tilde{k}_i) \right) \right]$, где W_*^t расположен в середине коэффициентного интервала (либо усредненный по нему). $\tilde{k}_i, i = 1, 2, \dots, N$ на которых $\min F(\tilde{k}_i)$ и есть искомое приближение.

Результат двух последовательных приближений восстановления коэффициентов изображен на Рис.1.3 – 1.5.

4. Исследование двумерной задачи

4.1 Постановка задачи

В двумерном случае схема вычислений примерна та же самая. Пришлось лишь отказаться от алгоритма определения первого приближения по отношению производных. На произвольной сетке в прямоугольной области G заданы значения функции $u(x_i, y_j, t_l)$ и дебита $-\oint k \frac{\partial u}{\partial n} dS = W(x_i, y_j, t_l)$, необходимо определить значения $k(x, y)$. Предполагается, что $k(x, y)$ дифференцируема, и, следовательно, $u \in T[G] \subset C[G] \cap W_2^r[G]$, $r \leq 2$. Рассматриваются кусочно-постоянные $k(x, y)$. Первоначально осуществляется фильтрация исходных данных и определение $u(x, y, t)$ во всех точках области для различных значений.

Рассмотрим вышепоставленную задачу на примере двумерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами $k(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (4.1)$$

$$u(0, y, t) = u_1(y, t) \quad u(1, y, t) = u_2(y, t)$$

$$u(x, 0, t) = u_3(x, t) \quad u(x, 1, t) = u_4(x, t)$$

$$D_T = (0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T)$$

$$u(x, y, 0) = \hat{u}(x, y)$$

В качестве исходных данных рассматриваются значения функции на отрезке $[0, 1] \times [0, 1]$ в некотором интервале значений времени. Рассматриваем класс кусочно-постоянных функций $k(x, y)$. Восстановление значений функции $k(x, y)$ производится также в классе кусочно-постоянных функций.

4. 2 Последовательность математического эксперимента

Математический эксперимент состоит из следующих частей:

Получение квазиреальных экспериментальных данных

В качестве экспериментальных значений используем u_n^t и поток W_i^t , полученные при решении прямой задачи, а затем, при необходимости, разыгрывается экспериментальная ошибка.

На Рис.2.1 изображена зашумленная ($\delta = 0.05$) функция $u(x, y, T) = \sin \pi x * \sin \pi y$, при четырех разыгранных коэффициентах теплопроводности k_n : $k_1 = 1$ при $0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5$; $k_2 = 0.5$ при $0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5$; $k_3 = 0.5$ при $0 \leq x \leq 0.5, 0.5 \leq y \leq 1$; $k_4 = 0.25$ при $0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1$.

Сглаживание экспериментальных данных

Перед применением алгоритмов восстановления коэффициентов необходимо построить оценку на основе экспериментальных данных таким образом, чтобы было возможно оценить как саму функцию, так и ее производную. В работе применяются, так же как и в одномерной задаче, В-сплайны 3-го порядка с регуляризатором (по А. Н. Тихонову). В общем случае пространственная сетка начальных данных может быть нерегулярной т.к. после применения сплайн-аппроксимации получаем непрерывную функцию пространственных переменных. Следовательно, далее может быть использована любая пространственная сетка (в смысле формы и подробности).

Определения коэффициентов теплопроводности k_n

В двумерном случае использование аналога алгоритма одномерного первого приближения не дало удовлетворительных результатов.

В процессе приближения, после введения коэффициентной сетки, происходит подбор коэффициентов в каждой подобласти восстанавливаемого коэффициента независимо.

4.3 Алгоритмы решения поставленной задачи

Алгоритм решения прямой задачи

Для решения уравнения с условиями (4.1) используется продольно-поперечная схема, являющаяся одной из лучших двумерных экономических схем (Калиткин. Н. Н., 1978). Схема имеет вид:

$$\frac{\bar{u}_{ij} - u_{ij}}{0.5\tau} = -\frac{(\bar{W}_{i+1/2,j} - \bar{W}_{i-1/2,j})}{h_1} - \frac{(W_{i,j+1/2} - W_{i,j-1/2})}{h_2} \quad (a)$$

$$\frac{\hat{u}_{ij} - \bar{u}_{ij}}{0.5\tau} = -\frac{(\hat{W}_{i,j+1/2} - \hat{W}_{i,j-1/2})}{h_2} - \frac{(\bar{W}_{i+1/2,j} - \bar{W}_{i-1/2,j})}{h_1} \quad (b)$$

где:

$$W_{i+1/2,j} = -k_{i+1/2,j} \frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})}{h_1} - \text{поток по направлению оси } x \quad (4.2)$$

$$W_{i,j+1/2} = -k_{i,j+1/2} \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{h_2} - \text{поток по направлению оси } y$$

h_1 и h_2 - шаг прямоугольной схемы по оси x и y соответственно

τ - шаг схемы по оси времени t

Значения $u_{i,j}$, $\bar{u}_{i,j}$, $\hat{u}_{i,j}$ - это значение функции $u(x, y)$ при значении по оси времени: t , $t + \tau/2$, $t + \tau$ соответственно (см. рис 4.1–4.2). Обозначения для функции потока $W(x, y)$ используются те же.

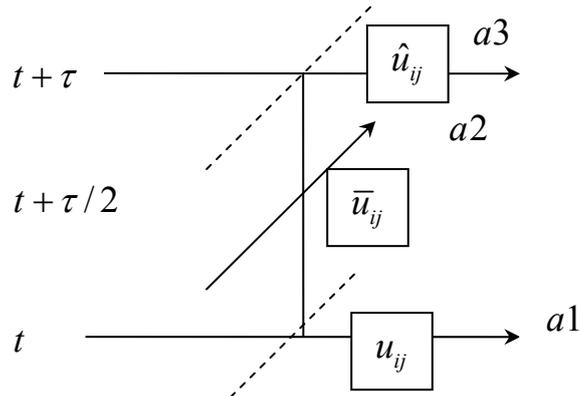


рис.4.1

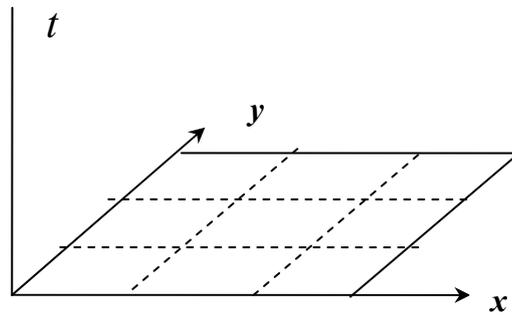


рис.4.2

Процесс вычисления заключается в последовательном решении уравнений (4.2a) и (4.2b), а каждое из этих уравнений решается с помощью одномерной прогонки (по направлению осей y и x соответственно) следующего вида:

$$\bar{u}_{i,j} = \bar{\alpha}_i \bar{W}_{i-1/2,j} + \bar{\beta}_i$$

$$\hat{u}_{i,j} = \hat{\alpha}_j \hat{W}_{i,j-1/2} + \hat{\beta}_j$$

где α_i, β_i – коэффициенты прогонки :

$$\bar{\alpha}_{i+1} = \frac{0.5\tau\bar{\alpha}_i}{0.5\tau - h_1\bar{\alpha}_i} - \frac{h_1}{k_{i+1/2,j}}$$

$$\bar{\beta}_{i+1} = \frac{0.5\tau\bar{\beta}_i}{0.5\tau - h_1\bar{\alpha}_i} - \frac{h_1\bar{\alpha}_i(\bar{u}_{i,j} + \tau F_i)}{0.5\tau - h_1\bar{\alpha}_i}$$

$$\hat{\alpha}_{j+1} = \frac{0.5\tau\hat{\alpha}_j}{0.5\tau - h_2\hat{\alpha}_j} - \frac{h_2}{k_{i,j+1/2}}$$

$$\hat{\beta}_{j+1} = \frac{0.5\tau\hat{\beta}_j}{0.5\tau - h_2\hat{\alpha}_j} - \frac{h_2\hat{\alpha}_j(\hat{u}_{i,j} + \tau F_j)}{0.5\tau - h_2\hat{\alpha}_j}$$

$$F_i = -\frac{(W_{i,j+1/2} - W_{i,j-1/2})}{h_2}, F_j = -\frac{(\bar{W}_{i+1/2,j} - \bar{W}_{i-1/2,j})}{h_1}$$

Данная разностная схема на каждом слое по оси времени t является явной по одному- и неявной- по второму направлениям. Погрешность локальной аппроксимации $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$. Эволюция функции $u(x,y,t)$ при 3-х различных значениях времени t представлена на Рис.2.4.

Метод розыгрыша экспериментальной ошибки

Пусть $u(x,t)$ - это точное решение прямой задачи (3.1). Тогда $\hat{u}(x,y) = u(x,y) + \delta rand$ - это решение с разыгранной ошибкой δ , $rand$ – генератор случайных чисел, распределенных по Гауссу с единичной дисперсией и математическим ожиданием равным нулю (встроенная библиотека в используемом языке программирования).

Для дальнейшего решения задачи нужно зашумленную экспериментальную функцию $\hat{u}(x,y)$ максимально приблизить к реальной кривой данных путем фильтрации (сглаживания) определенным образом.

Алгоритм фильтрации экспериментальной кривой

Фильтрация производится аналогично одномерному случаю. Если данные известны со случайной погрешностью, то возникает проблема статистической оценки величины $u(x,y)$. Пусть известна величина $\xi(x_i, y_j) = u(x_i, y_j) + \Delta(x_i, y_j)$ $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N$, где $\Delta(x_i, y_j)$ - реализация гауссовского случайного процесса с нулевым средним и дисперсией δ^2 , причем отдельные отсчеты статистически независимы. Тогда [Пергамент А.Х., 1984,1986] точность оценки метода максимального правдоподобия в метрике $L_2[G]$:

$$\|u - \hat{u}_M\|^2 \approx \frac{\delta^2 M^2}{N^2} + \frac{L^2}{M^{2r-1}}$$

где \hat{u}_M - оценка с помощью сплайнов,

M – число параметров, определяющих сплайн

Первое слагаемое есть погрешность статистического оценивания, второе – погрешность аппроксимации. Эта оценка справедлива для любых $M \ll N$.

Выше сплайн обозначен как $u_M(x,y,t)$. Операция сплайн интерполяции есть некоторое линейное преобразование T . Если известные с погрешностью δ значения u есть величина ξ , то оценка \hat{u}_M , определенная методом максимального правдоподобия есть решение линейного операторного уравнения $T^* T \hat{u}_M = T^* \xi$

Алгоритм восстановления коэффициентов

После введения коэффициентной сетки, происходит подбор коэффициентов в каждой подобласти, определенной коэффициентной сеткой т.к. в каждой из подобластей моделируется эволюция функции $u(x,y,t)$ и W_i^t . Далее с помощью метода деления отрезка на n частей вычисляется

$\min F(k) = \sum_t \left[\left(W_*^t - W_*^t(k) \right)^2 \right]$, где интервал подбора коэффициента k : $0 < k \leq 1$ и W_*^t - поток, усредненный по рассматриваемой подобласти. Результат восстановления коэффициентов изображен на Рис. 2.5–2.6.

5. Заключение

В этой работе получены следующие результаты:

1. Предложен метод решения обратной задачи для одномерных и двумерных параболических уравнений типа “domain decomposition”. Он заключается в том, что:
 - а) на основе данных наблюдения с помощью сплайн-аппроксимации определяется пространственное распределение наблюдаемой величины (паровое давление, температуры и т.д.).
 - б) в каждой подобласти значение коэффициента (диффузии, и теплопроводности и т.д.) находится посредством решения обратной задачи для подобласти с граничными условиями, определяемыми по результатам сплайн-аппроксимации.
2. Сплайн-аппроксимация представляет собой новый алгоритм фильтрации, позволяющий избежать двойного преобразования Фурье.
3. Использован критерий проверки статистических гипотез для определения оптимального шага сплайн-аппроксимации, который является фактически параметром регуляризации данной задачи.
4. Поскольку при решении обратной задачи в подобласти необходимо устойчивое определение градиента (и тем самым потока), то был использован алгоритм регуляризации по А. Н. Тихонову.

6. Приложение

1D результаты

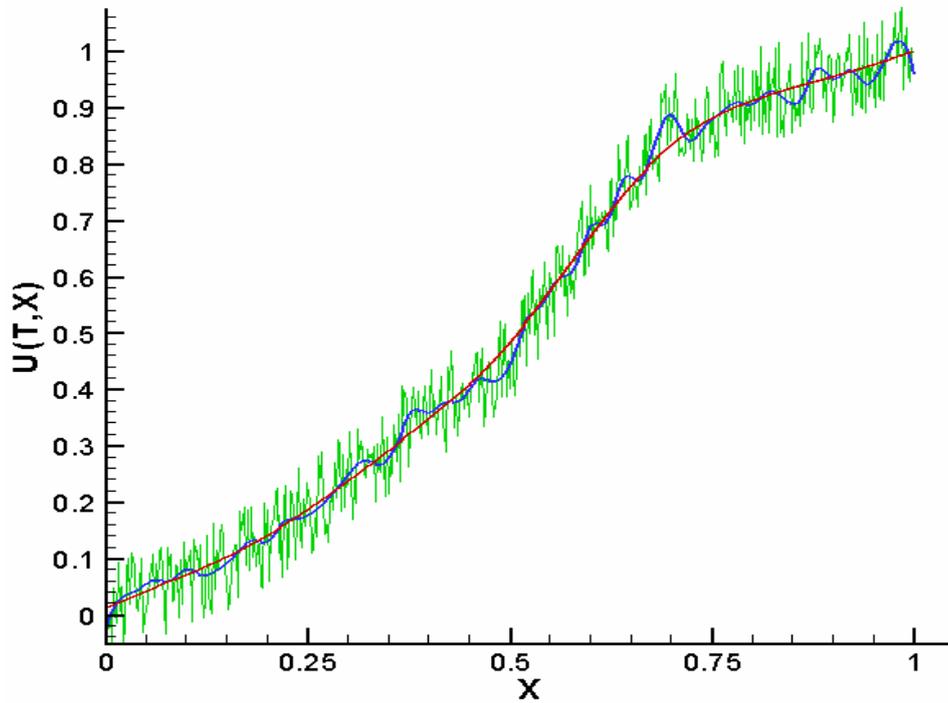


Рис. 1.1

- - экспериментальные данные ($\delta=0.05$)
- - сплайн-аппроксимация данных
- - сплайн-аппроксимация данных с регуляризацией ($\alpha = 10^{-5}$)

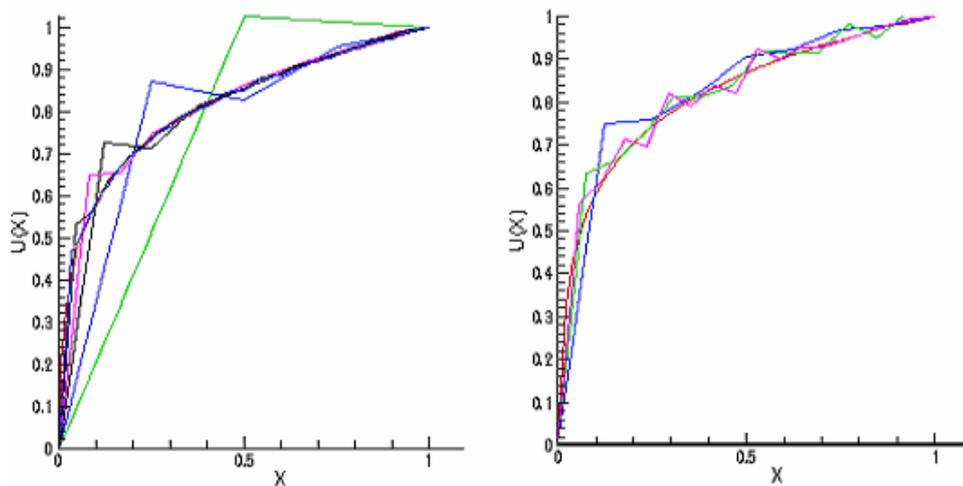


Рис. 1.2

Интерполяция методом наименьших квадратов

$N=500$ $T=10$ $t=0.02$ $M=4$
 $\Delta_W = 0.05$, $\Delta_U = 0.05$

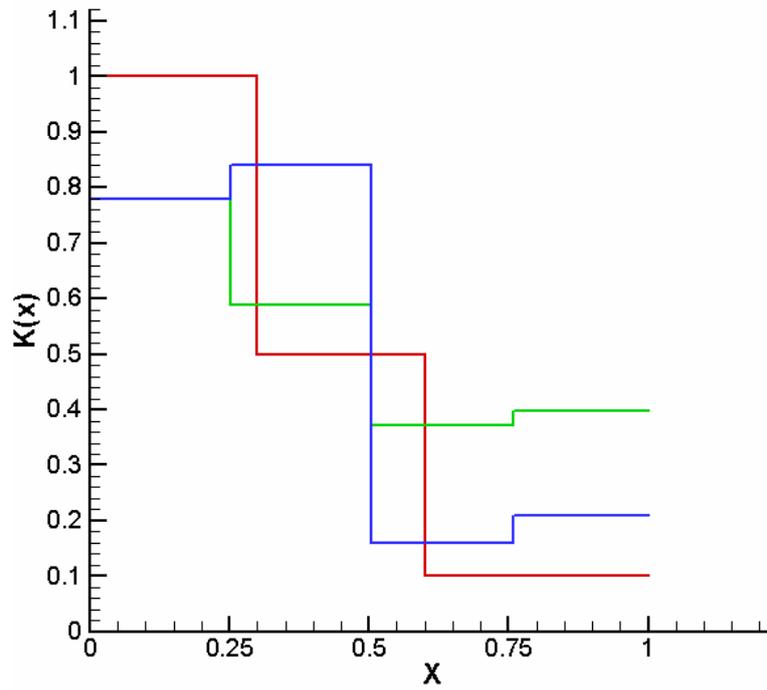


Рис. 1.3

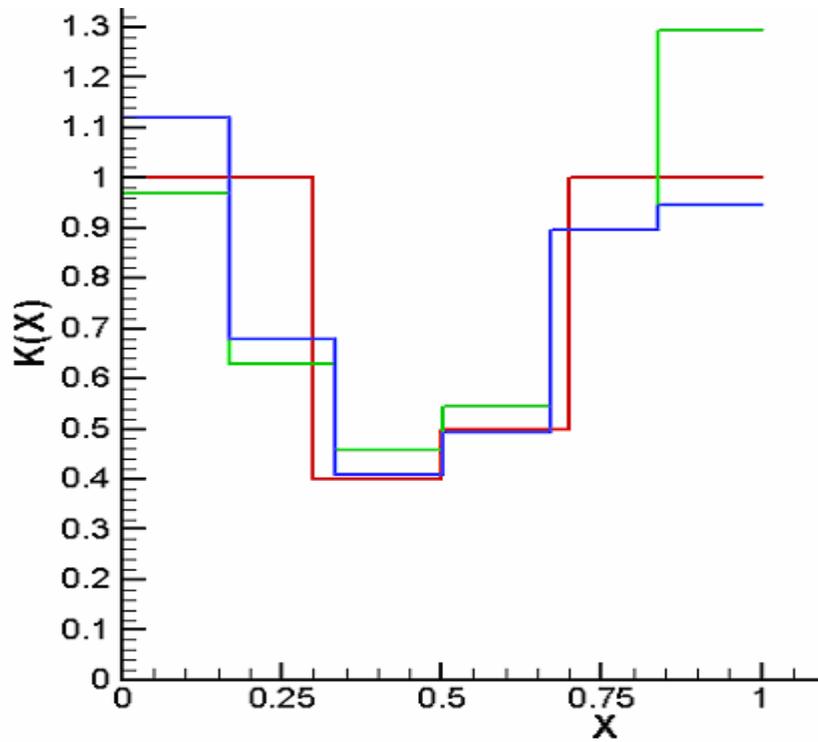


Рис. 1.4

$N=500$ $T=10$ $t=0.02$ $M=3$
 $\Delta_W = 0$, $\Delta_U = 0.02$

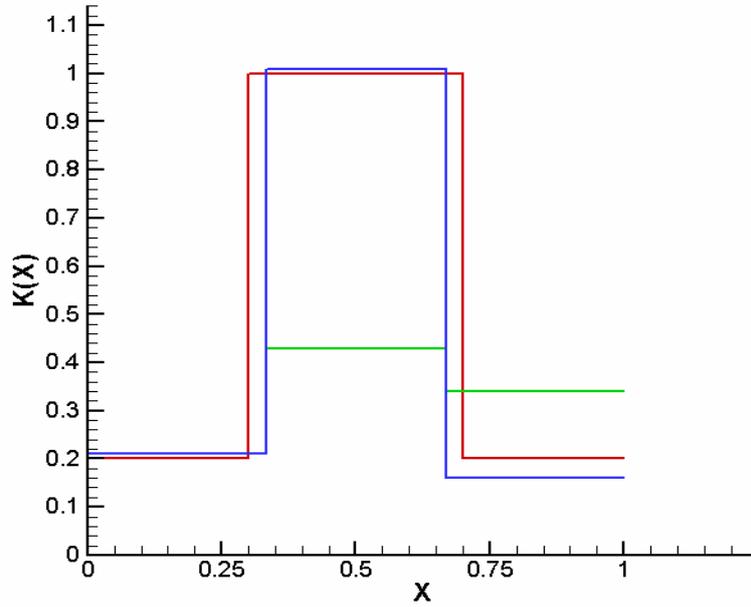


Рис. 1.5

- - точные значения коэффициентов
- - восстановленные коэффициенты (первое приближение)
- - восстановленные коэффициенты (второе приближение)

$N=1000$ $T=10$ $t=0.02$ $M=4$
 $\Delta_W = 0.03$, $\Delta_U = 0.03$

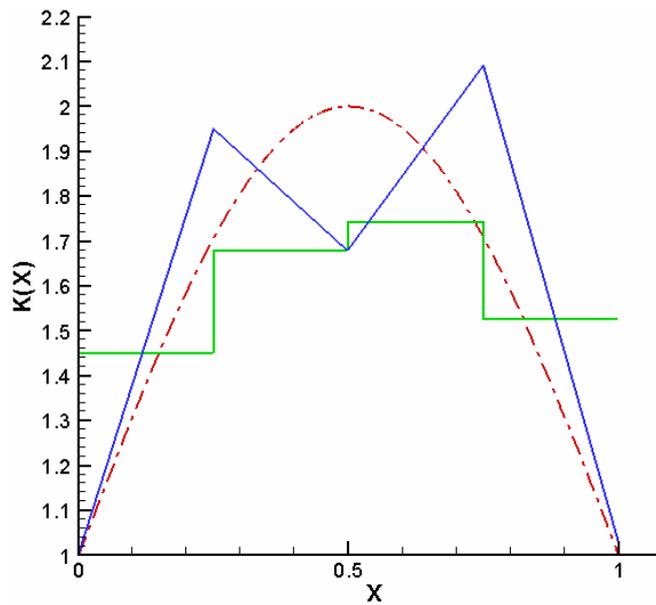


Рис. 1.6

$N=1000$ $T=10$ $t=0.02$ $M=20$
 $\Delta_W = 0.0$, $\Delta_U = 0.0$

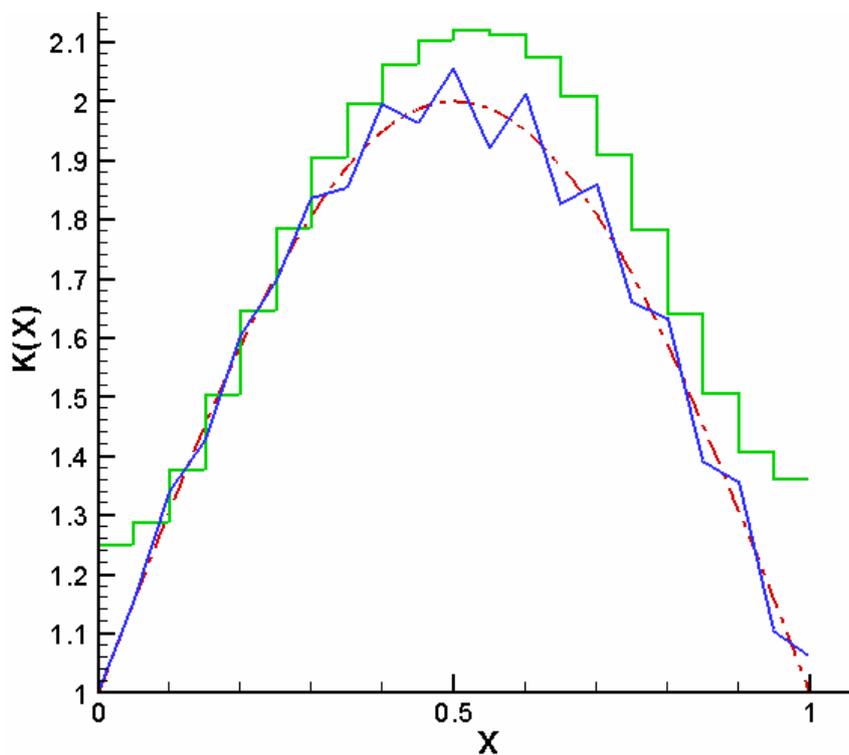


Рис. 1.7

$N=1000$ $T=10$ $t=0.02$ $M=2$
 $\Delta_W = 0.05$, $\Delta_U = 0.05$

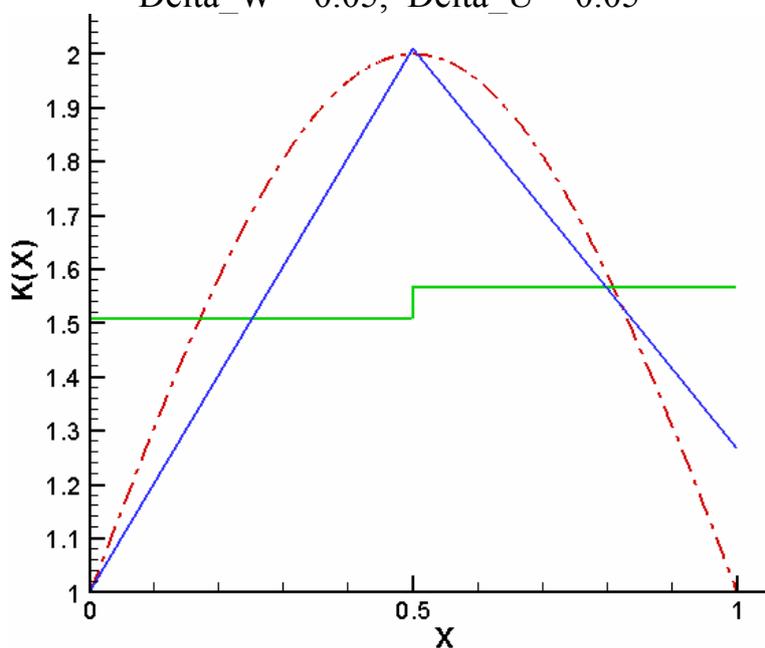


Рис. 1.8

- - - - точные значения коэффициентов
- - восстановление кусочно-постоянными коэффициентами
- - восстановление кусочно-линейными коэффициентами

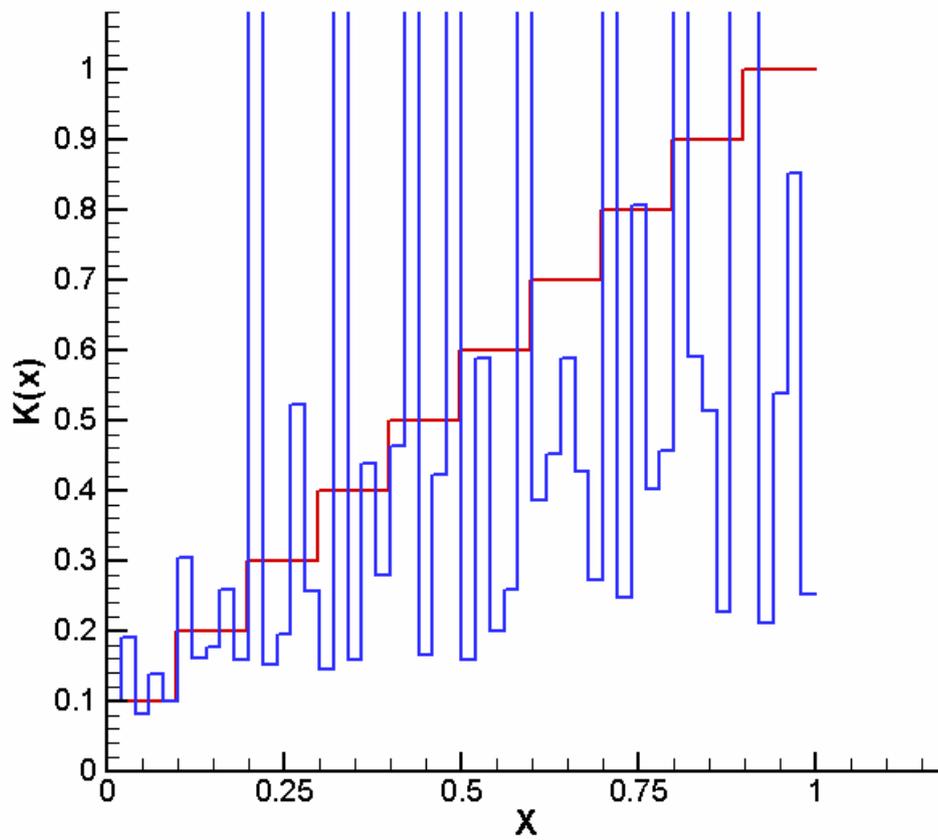


Рис. 1.9

Результат слишком подробного восстановления коэффициентов

- - точные значения коэффициентов
- - восстановленные коэффициенты

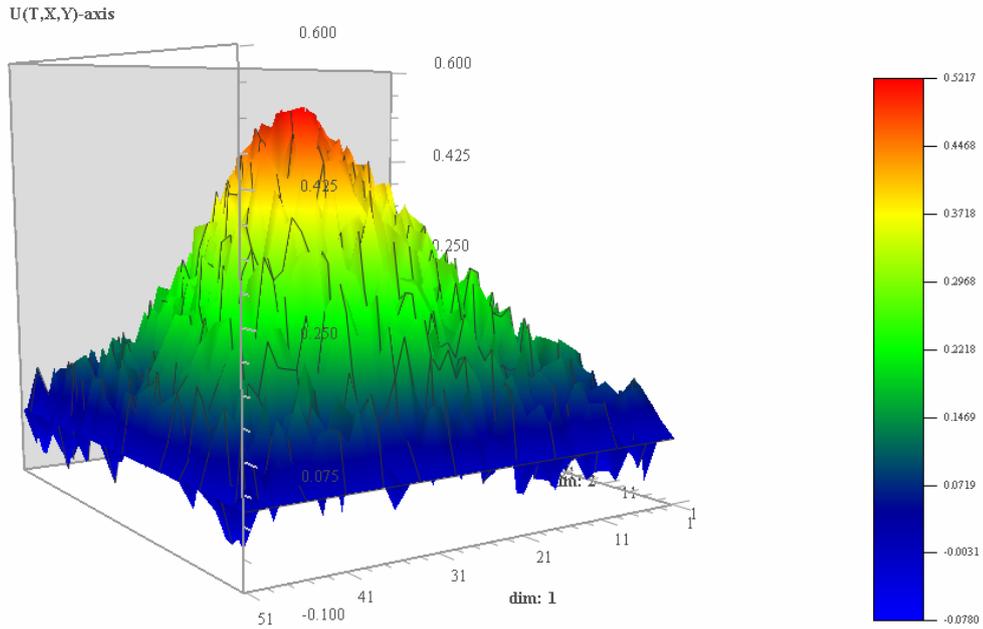
2D результаты

Рис. 2.1
Зашумленная поверхность ($\delta_U=0.05$)

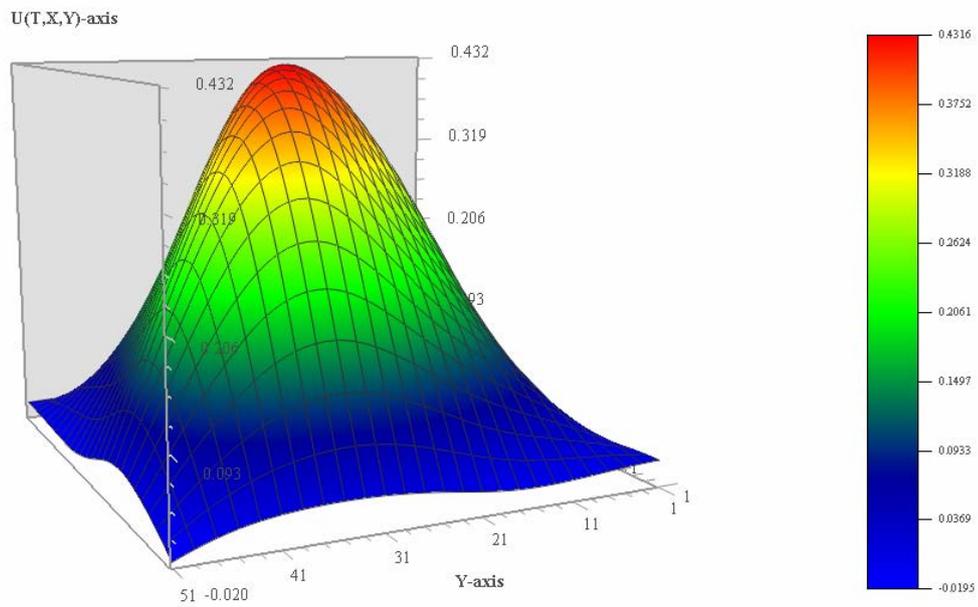


Рис. 2.2
Поверхность сплайна (параметр регуляризации $\alpha = 0.07$)

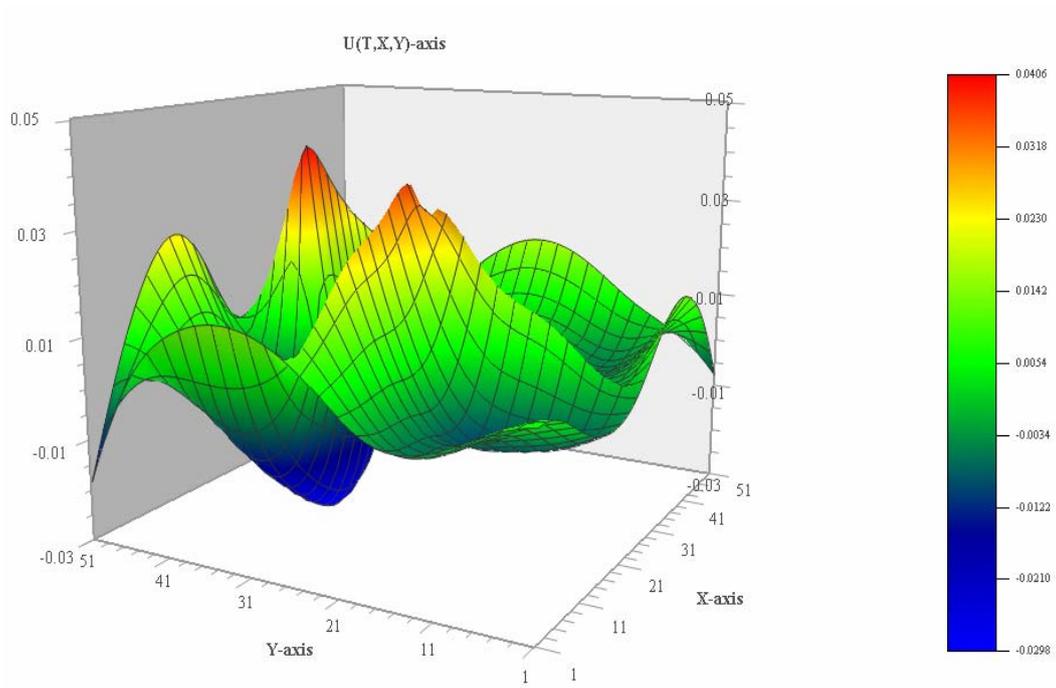


Рис. 2.3
Ошибка сплайн-аппроксимации

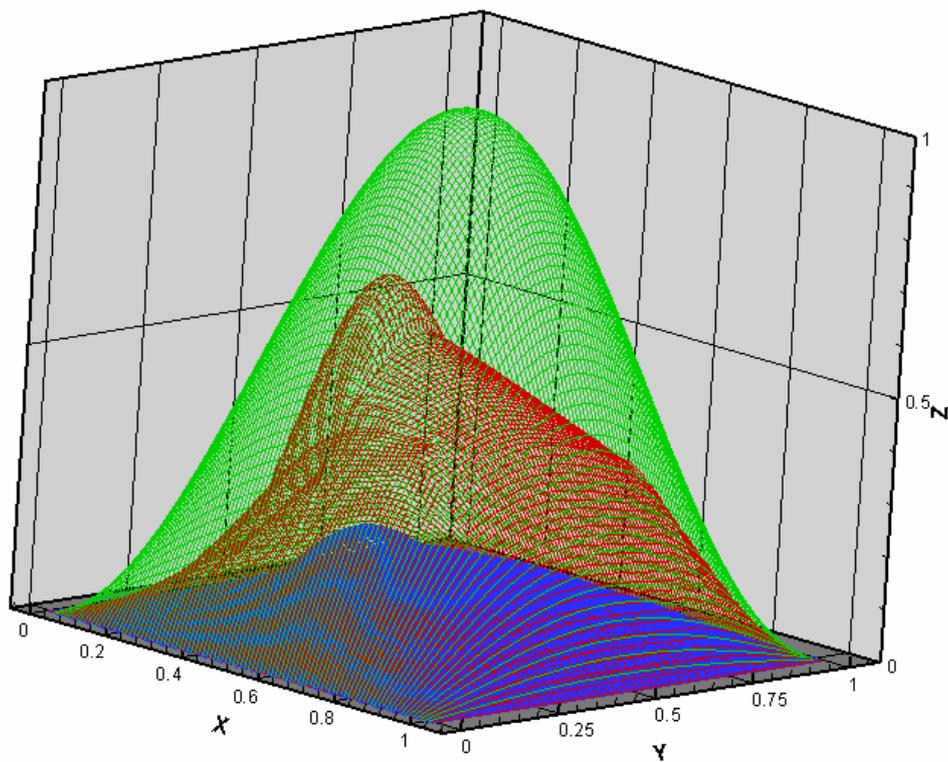


Рис. 2.4
Эволюция функции $U(t,x,y)$
(16 кусочно-постоянных коэффициентов)

$N1=50$ $N2=50$ $T=10$ $t=0.02$ $M=2$
 $\Delta W=0.05$, $\Delta t=0.05$

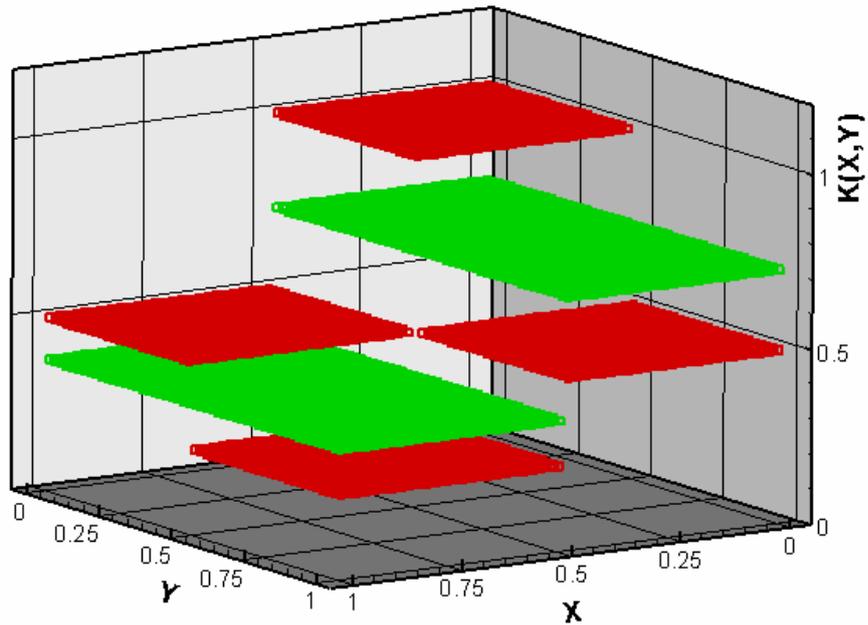


Рис. 2.5

— - точные значения коэффициентов
 — - восстановленные коэффициенты

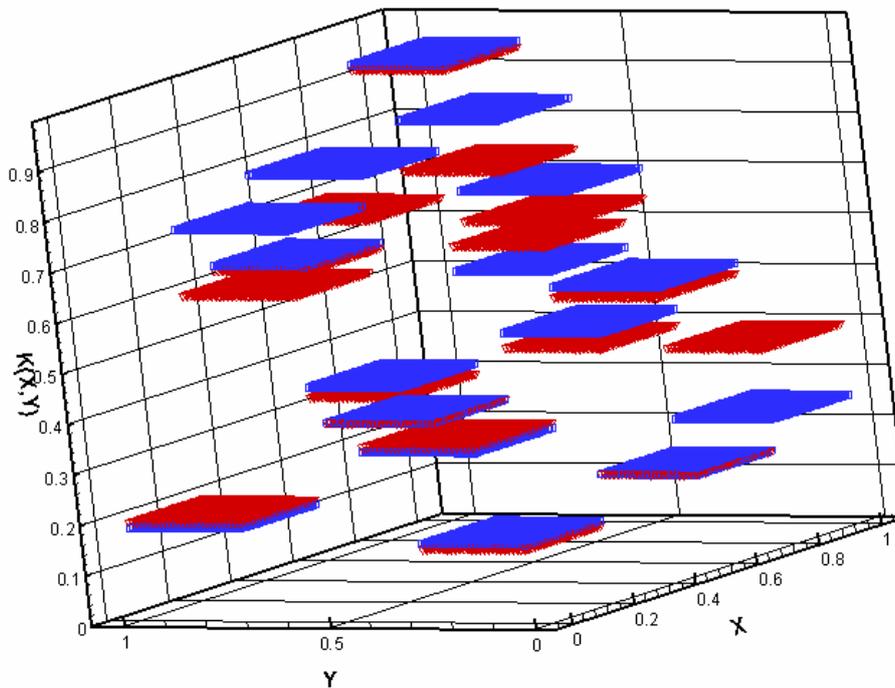


Рис. 2.6

— - точные значения коэффициентов
 — - восстановленные коэффициенты

7. Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980
3. Cannon J. R. Determination of an unknown coefficient in parabolic differential equation // *Duke math. J.* 1963. V. 30, N 2. P. 313-323
4. Cannon J. R., Duchateau P. Determination unknown coefficients in a nonlinear conduction problem // *SIAM J. appl. math.* 1973. V. 24, N 3. P. 298-314
5. Безнощенко Н. Я. Об определении коэффициента в параболическом уравнении // *Дифференц. уравнения*. 1974. Т10, №7. С. 24-35
6. Suzuki T., Murayama R. A uniqueness theorem in a identification problem for coefficients of parabolic equations. // *Proc. Jap. Acad.* 1980. V.56, Ser A, N 6. p. 259-263
7. Прилепко А. И., Костин А. Б. О разрешимости обратной задачи для уравнения теплопроводности // *Обратные задачи для математических моделей физических явлений: Сб. науч. тр. М.: МИФИ, 1991. С. 52-58*
8. Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения с финальным и интегральным наблюдением // *Мат. Сб.* 1992. Т. 183, №4 С. 49-68
9. Тихонов А.Н., Об устойчивости обратных задач, *ДАН СССР* 39, 5 (1943)
10. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н., *Сплайны в вычислительной математики*, М: Наука 1976