РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК $x = 0$ и $x = \infty$

Москва, 2006 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматриваеьтся шестое уравнение Пенлеве в случае $a, b \neq 0$. Методами степенной геометрии вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$ найдены степенные, степенно-логарифмические и сложные разложения его решений. А именно, вблизи $x = 0$ получены 15 семейств разложений, из них 6 сложных. Вблизи $x = \infty$ с помощью симметрии уравнения получено еще 15 семейств разложений, в том числе 6 сложных.

A.D. Bruno, I.V. Goruchkina. Expansions of solutions to the sixth Painlevé equation near singular points $x = 0$ and $x = \infty$. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2006.

We consider the sixth Painlevé equation in the case $a, b \neq 0$. By the methods of Power Geometry, near the singular points $x = 0$ and $x = \infty$, we have found all power, power-logarithmic and complicated expansions of its solutions. Near $x = 0$ we have obtained 15 families of expansions, sixth of them are complicated. Using a symmetry of the equation, near $x = \infty$ we have obtained again 15 families of expansions, including 6 complicated.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050).

e-mail: bruno@keldysh.ru,
chukhareva@yandex.ru

§ 1. Общие свойства уравнения

1.1. Постановка задачи. Шестое уравнение Пенлеве [5] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right) + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \qquad (1)$$

где $a,\ b,\ c,\ d$ – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Это уравнение имеет три особых точки $x = 0,\ x = \infty$ и $x = 1$.

Здесь в случае $a, b \neq 0$ ищем разложения его решений при $x \to 0$ и $x \to \infty$ вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \qquad (2)$$

где показатели степени r и s – комплексные числа. Будем различать три типа разложений (2):

1. c_r и c_s – постоянные комплексные коэффициенты, первый член $c_r x^r$ – степенная функция;
2. c_s – многочлены от $\ln x$, первый член $c_r x^r$ также степенная функция;
3. c_r и c_s – степенные ряды от $\ln x$.

Если $x \to 0$, то $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$ в (2), и $\operatorname{Re} s$ возрастают. Если $x \to \infty$, то $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r$, и $\operatorname{Re} s$ убывают. Кроме того, предполагается, что аргумент комплексной переменной x остается в некотором интервале. Если допускать неограниченное изменение $\arg x$, то в случае комплексных r и s может случиться, что при $|x| \to 0$, функция x^r с $\operatorname{Re} r > 0$ стремится к бесконечности и упорядочивание $|x^s|$ не соответствует упорядочиванию $\operatorname{Re} s$. Разложения (2) типа 3 будем называть сложными. В случае вещественных показателей степени разложения типов 1 и 2 при $a,\ b,\ c,\ d \neq 0$ найдены в [4, 6, 7]. Для нахождения разложений (2) типов 1 - 3 будем использовать методы, изложенные в [1] - [3].

Представим уравнение (1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $2x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x)$ и перенесем в левую сторону правую часть уравнения. Получаем уравнение

$$f(x,\ y) \stackrel{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\ x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] + \\ 2y'[\ x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] - [\ 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\ ] = 0. \qquad (3)$$

1.2. Носитель и многоугольник. Носитель левой части уравнения (3), то есть множество показателей степени ее мономов, есть

$$\mathbf{S}(f) = \{Q = (q_1,\ q_2):\ \ q_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ q_2 = 3 - q_1 + k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Носитель $\mathbf{S}(f)$ и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 1.

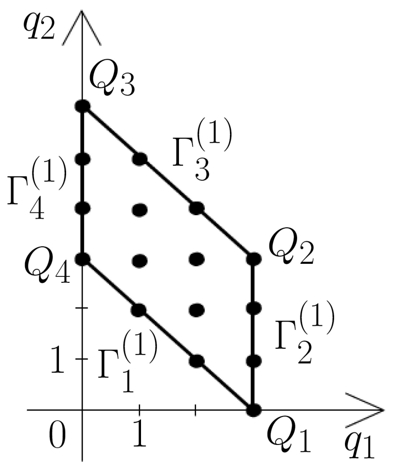

Рис. 1.

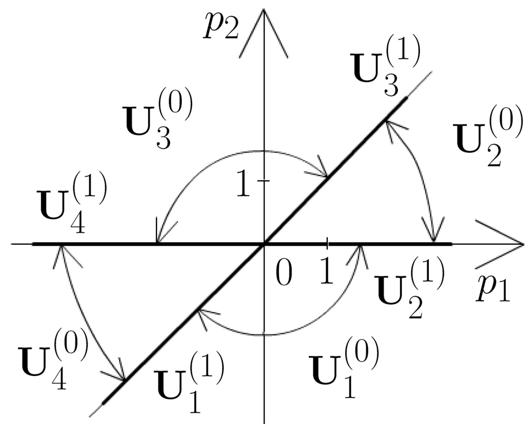

Рис. 2.

Так как параметры $a,\ b \neq 0$, то многоугольник $\Gamma(f)$ имеет вид параллелограмма с вершинами $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$, где $Q_1 = (3,\ 0)$, $Q_2 = (3,\ 3)$, $Q_3 = (0,\ 6)$, $Q_4 = (0,\ 3)$ и ребрами $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_4^{(1)}$, показанными на рис. 1.

Носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (3) лежит в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$.

1.3. Нормальные конусы. Нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(0)}$ и $\mathbf{U}_j^{(1)}$ вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$ суть (см. рис. 2).

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_2 < 0,\ p_2 < p_1\}\,, & \mathbf{U}_1^{(1)} = \{p_1 = p_2 < 0\}\,, \\
\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_1 > p_2 > 0\}\,, & \mathbf{U}_2^{(1)} = \{p_1 > 0,\ p_2 = 0\}\,, \\
\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > p_1,\ p_2 > 0\}\,, & \mathbf{U}_3^{(1)} = \{p_1 = p_2 > 0\}\,, \\
\mathbf{U}_4^{(0)} = \{p_1 < p_2 < 0\}\,, & \mathbf{U}_4^{(1)} = \{p_1 < 0,\ p_2 = 0\}\,.
\end{array} \tag{4}$$

1.4. Симметрии. Шестое уравнение Пенлеве имеет три симметрии, возникающие при заменах переменных

$$1)\ \ x = 1/x^*,\ y = 1/y^*;\ \ 2)\ \ x = \check{x},\ y = \check{x}/\check{y};\ \ 3)\ \ x = 1 - x^\circ,\ y = 1 - y^\circ.$$

Теорема 1. *Уравнение* (1) *переходит в себя при подстановке*

$$(x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ d) = (1/x^*,\ 1/y^*,\ -b^*,\ -a^*, c^*, d^*)\,. \tag{5}$$

При этом параллелограмм $\Gamma(f)$ *отражается относительно своего центра* $Q = (3/2,\ 3)$ *(см. рис. 3).*

Теорема 2. *Уравнение* (1) *переходит в себя при подстановке*

$$(x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ d) = \left(\check{x},\ \check{x}/\check{y},\ -\check{b},\ -\check{a}, -\check{d} + 1/2, -\check{c} + 1/2\right). \tag{6}$$

При этом параллелограмм $\Gamma(f)$ *отражается относительно горизонтальной оси* $q_2 = 3$ *и деформируется параллельно этой оси (см. рис. 4).*

Теорема 3. *Уравнение* (1) *переходит в себя при подстановке*

$$(x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ d) = (1 - x^\circ,\ 1 - y^\circ, a^\circ, -c^\circ, -b^\circ, d^\circ). \tag{7}$$

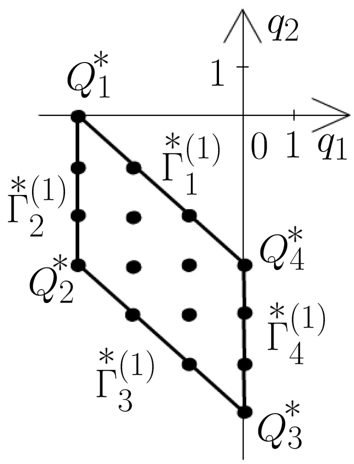

Рис. 3.

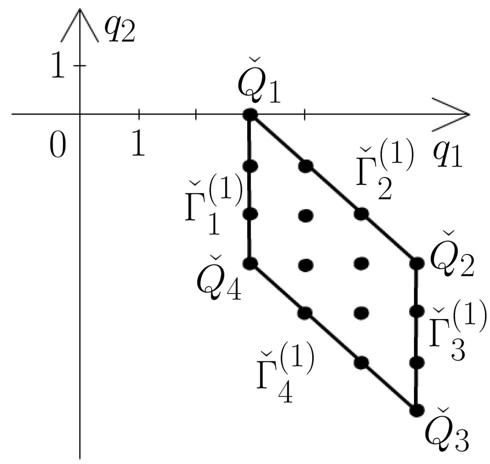

Рис. 4.

Первые две симметрии переводят разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности бесконечности (и обратно). Тем самым, позволяют сократить вычисления и проверить полученные результаты. С их помощью одно ребро переводится в любое из остальных трех, вершины $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$ и $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$ – в вершины $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ и $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$ соответственно (и обратно). Поэтому, вычислив разложения решений, соответствующие одному ребру и двум вершинам, с помощью симметрий можно получить решения, соответствующие остальным трем ребрам и двум вершинам. Третья симметрия переводит разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности единицы. В этой работе она не используется. Доказательства теорем 1 – 3 см. в [6].

1.5. Исключительные решения.

Теорема 4. *Уравнение* (1) *имеет три исключительных решения:* $y(x) = 0$ *при* $b = 0$*,* $y(x) = 1$ *при* $c = 0$ *и* $y(x) = x$ *при* $d = 1/2$*.*

Доказательство. Мы считаем, что при $y = \text{const}$, квадрат y'^2 является двукратным нулем. Поэтому отношения y'^2/y при $y = 0$ и $y'^2/(y-1)$ при $y = 1$ являются однократными нулями. Наконец, при $y = x$ в уравнении (1) с $d = 1/2$ дроби со знаменателем $y - x$ взаимно уничтожаются.

§ 2. Разложения решений при x → 0, соответствующие вершинам

2.1. Выбор вершин. Так как $x \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 < 0\}$. Согласно (4) с конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_4^{(0)}$, вершин $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$, $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$, $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$ соответственно. Рассмотрим их последовательно.

Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{f}_1^{(0)}(x,\ y) \stackrel{def}{=} -2bx^3 = 0$, которое не имеет решений.

Вершине $\Gamma_3^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{f}_3^{(0)}(x,\ y) \stackrel{def}{=} -2ay^6 = 0$, которое имеет только тривиальные решения.

2.2. Вершине $\boldsymbol{\Gamma_4^{(0)}}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_4^{(0)}(x,\ y) \stackrel{def}{=} 2x^2y(y')^2 - 2xy^2y' - 2x^2y^2y'' = 0. \tag{8}$$

Ищем его решения в виде $y = c_r x^r$, где c_r – ненулевая произвольная постоянная. Характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} 2(r^2 - r - r^2 + r) \equiv 0$ имеет произвольное решение. Показатель степени r такой, что вектор $P = \omega(1, \operatorname{Re} r)$, $\omega = -1$, лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_4^{(0)} = \{p_1 < p_2 < 0\}$, поэтому $0 < \operatorname{Re} r < 1$. Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta \hat{f}_2^{(0)}(x,\ y)}{\delta y} = 2x^2(y')^2 + 4x^2yy'\frac{d}{dx} - 4xyy' - 2xy^2\frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{def}{=} 2c_r^2x^{2r}\left(r^2 + 2rx\frac{d}{dx} - 2r - x\frac{d}{dx} - 2r(r-1) - x^2\frac{d^2}{dx^2}\right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^2(k^2 - 2rk + r^2) = 0 \tag{9}$$

имеет двукратный корень $k_{1,2} = r$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < \operatorname{Re} r\}$. Так как $\operatorname{Re} k_{1,2} \notin \mathcal{K}$, то критических чисел нет, т. е. æ $= 0$. Согласно [1] носитель разложения решений имеет вид

$$\mathbf{K} = \{s = r + lr + m(1-r);\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}. \tag{10}$$

Разложения решений образуют семейство

$$\mathcal{H}_1:\ y = c_rx^r + \sum c_sx^s \ \text{ по } s \in \mathbf{K}, \tag{11}$$

где $c_r \neq 0$, c_r – произвольная комплексная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены, показатель степени r – произвольный и удовлетворяет неравенствам $0 < \operatorname{Re} r < 1$, s пробегает множество (10).

Теорема 5. *При $x \to 0$ вершине $\Gamma_4^{(0)}$ соответствует двупараметрическое (по c_r и r, $\operatorname{Re} r \in (0,\, 1)$) семейство $\mathcal{H}_1$ разложений, определенное формулами* (11) *и* (10).

При $\operatorname{Im} r = 0$ носитель (10) разложения (11) вещественный. В этом случае вторые приближения разложения (11) были найдены ранее в [6, 4].

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Im} r \neq 0$. Изобразим на плоскости $\operatorname{Re} q_1$, $\operatorname{Im} q_1$ множество $\mathbf{K} \cup \{r\}$. Пусть, например, $\operatorname{Im} r = 1$. При разных значениях $\operatorname{Re} r = 1/4$, $\operatorname{Re} r = 1/2$, $\operatorname{Re} r = 3/4$, получаем изображения рис. 5, 6, 7 соответственно. Из рис. 6 видно, что при $\operatorname{Re} r = 1/2$ значению $\operatorname{Re} s = 1$ соответствуют два значения $\operatorname{Im} s = 0$ и $\operatorname{Im} s = 2$, что отлично от случая $\operatorname{Im} r = 0$ (см. [4],[6]).

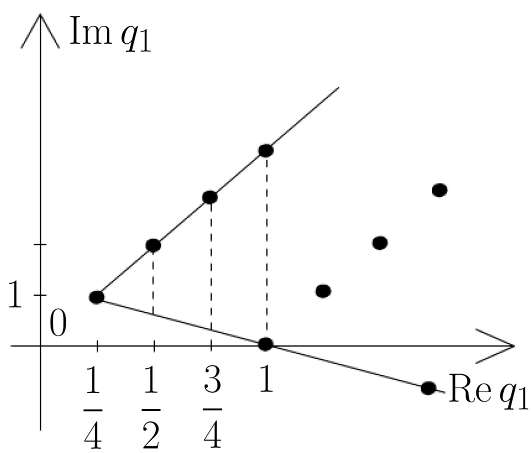

Рис. 5.

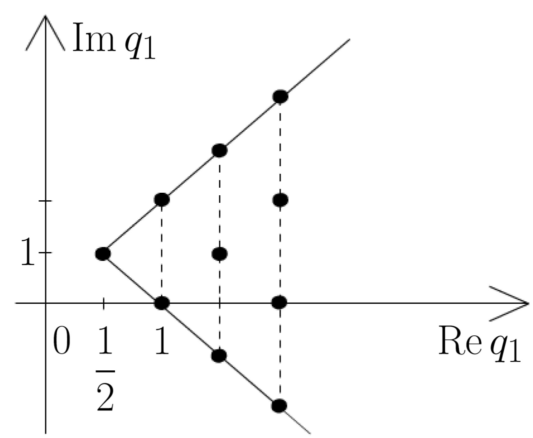

Рис. 6.

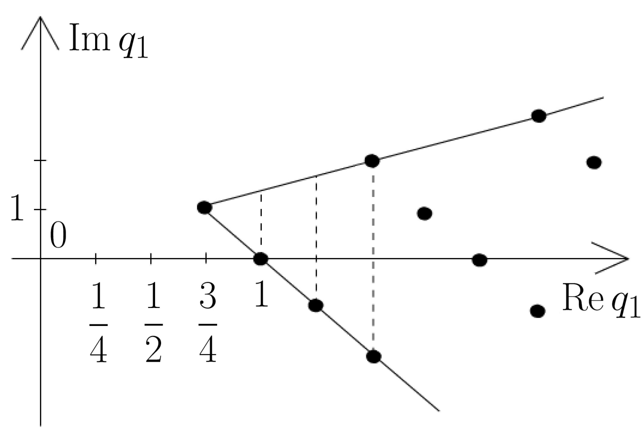

Рис. 7.

Вычислим второе приближение разложения (11) в случае комплексного носителя (10).

В с л у ч а е $1 > \operatorname{Re} r > 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 7)

$$y = c_r x^r + c_1 x. \tag{12}$$

Второе приближение уравнения (3) есть $\hat{\hat{f}}{}_4^{(0)}(x,\, y) = -x^3(y')^2 + 2x^3yy'' - 2(b-d)xy^2$. Коэффициент $c_1 = -b_1/\nu(1)$, где $b_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^{-2r-1}\hat{\hat{f}}{}_4^{(0)}(x, c_rx^r) = c_r^2(-2(b-d) - 2r + r^2)$, $\nu(1) = 2c_r^2(r-1)^2$. Получаем

$$c_1 = \frac{2(b-d) - (r-1)^2 + 1}{2(r-1)^2}. \tag{13}$$

В случае $0 < \mathrm{Re}\, r < 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 5)

$$y = c_rx^r + c_{2r}x^{2r}, \tag{14}$$

Второе приближение уравнения (3) есть $\hat{\hat{f}}{}_4^{(0)}(x,\, y) = -3x^2y^2(y')^2 + 2xy^3y' + 2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4$. Коэффициент $c_{2r} = -b_{2r}/\nu(2r)$, где $b_{2r} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^{-4r}\hat{\hat{f}}{}_4^{(0)}(x, c_rx^r) = -c_r^4(2(a-c) + r^2)$, $\nu(2r) = 2c_r^2r^2$. Получаем

$$c_{2r} = c_r^2\frac{2(a-c) + r^2}{2r^2}. \tag{15}$$

В случае $\mathrm{Re}\, r = 1/2$, $\mathrm{Im}\, r \neq 0$ второе приближение решения есть (см. рис. 6) $y = c_rx^r + c_1x + c_{2r}x^{2r}$, где коэффициенты c_1 и c_{2r} определены ранее формулами (13) и (15) соответственно.
В случае $r = 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 6) $y = c_{1/2}\sqrt{x} + c_1x$, где $c_{1/2}$ – произвольная постоянная, коэффициент

$$c_1 = (3 + 8(b-d) + c_{1/2}^2 + 8c_{1/2}^2(a-c))/2 \tag{16}$$

есть сумма (13) и (15).

Вычислим нестепенные решения уравнения (8). Преобразуем его

$$g(x,\, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} y^{-3}\hat{f}_4^{(0)}(x,\, y) = 2x^2\frac{(y')^2}{y^2} - 2x\frac{y'}{y} - 2x^2\frac{y''}{y} = 0, \tag{17}$$

так что $\mathbf{S}(g) = \{0\}$. Положим $g^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2x^2\dfrac{(y')^2}{y^2} - 2x^2\dfrac{y''}{y}$, тогда $\mathrm{coef}(g^*) = 2 - 2 = 0$. По теоремам 5.6 и 5.7 из [1] возможно существуют нестепенные решения уравнения (8) стремящиеся к бесконечности.

Сделаем логарифмические преобразования $\xi = \ln x$, $\eta = d\ln y/d\xi$ в уравнении (17). Производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда при замене $\xi = \ln x$, имеем

$$y' = \dot{y}/x,\ y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2. \tag{18}$$

При этом уравнение (17) примет вид

$$2\frac{(\dot{y}^2) - \ddot{y}y}{y^2} = 0. \tag{19}$$

Сделаем в выражении (19) преобразование $\eta = d\ln y/d\xi$, $\dot{y} = \eta y$, $\ddot{y} = (\dot{\eta}+\eta^2)y$. При этом получаем уравнение $-2\dot{\eta} = 0$. Оно имеет решение $\eta = \mathrm{const}$, которому соответствует степенное решение $y = \tilde{c}x^{\eta}$, $\tilde{c} = \mathrm{const}$. Оно нам не подходит. Следовательно, данной вершине не соответствует никакое сложное разложение решений уравнения (3) .

§ 3. Разложения, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma}_4^{(1)}$

3.1. Предварительный анализ. Ребро $\Gamma_4^{(1)}$ вертикально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned}\hat{f}_4^{(1)}(x,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} & 2x^2y(y')^2 - 3x^2y^2(y')^2 - 2xy^2y' + 2xy^3y' - 2x^2y^2y'' \\ & +2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_4^{(1)} = \{-\lambda\,(1,\,0),\ \lambda > 0\}$, $\omega = -1$, т. е. $x \to 0$. Поэтому ищем решение уравнения (20) в виде $y = c_0 \neq 0$, $c_0 = \mathrm{const}$. Вычислим c_0. Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}(c_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_0^{-3}\hat{f}_4^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2ac_0(c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a) = 0. \tag{21}$$

Высота ребра равна трем. Уравнение (21) третей степени. Оно всегда имеет корень $c_0 = 0$. Согласно п. 5.2 из [1] важно выделить случаи, когда уравнение $c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a = 0$ имеет нулевой, бесконечный и кратные корни. Оно не имеет бесконечного корня, но имеет нулевой корень $c_0 = 0$ при $a = c$ и двукратный корень $c_0 = 1$ при $c = 0$. Поэтому, рассмотрим три случая: $a \neq c \neq 0$, $a = c \neq 0$ и $a \neq 0$, $c = 0$.

Замечание. Будем брать в качестве основного значения квадратного корня из комплексного числа его первое значение, тогда для комплексного числа z его квадратный корень можно записать в виде $\pm\sqrt{z}$.

3.2. Случай $\mathbf{a \neq c \neq 0}$. Сначала вычислим в этом случае степенные и степенно-логарифмические разложения решений уравнения (3), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$. Уравнение (21) имеет два ненулевых корня

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i\sqrt{c/a}, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Первая вариация

$$\begin{aligned}\frac{\delta\hat{f}_4^{(1)}(x,\ y)}{\delta y} = & 2x^2(y')^2 + 4x^2yy'\frac{d}{dx} - 6x^2y(y')^2 - 6x^2y^2y'\frac{d}{dx} - 4xyy' \\ & -2xy^2\frac{d}{dx} + 6xy^2y' + 2xy^3\frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2\frac{d^2}{dx^2} + 6x^2y^2y'' \\ & +2x^2y^3\frac{d^2}{dx^2} - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5.\end{aligned} \tag{23}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) = -2xc_{0i}^2\frac{d}{dx} + 2xc_{0i}^3\frac{d}{dx} - 2x^2c_{0i}^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2c_{0i}^3\frac{d^2}{dx^2} - 8ac_{0i}^3 + \\ +8cc_{0i}^3 + 20ac_{0i}^4 - 12ac_{0i}^5. \tag{24}$$

Характеристическое уравнение есть

$$\nu(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2c_{0i}^2\left(k^2(c_{0i}-1) - 4c_{0i}(c-a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3\right) = 0. \tag{25}$$

С учетом c_{0i} из (22), оно имеет два корня

$$k_i^{1,2} = \pm(\sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{2a}),\ i = 1, 2. \tag{26}$$

Конус задачи есть

$$\mathcal{K}_i = \{\operatorname{Re} k_i > 0\}. \tag{27}$$

Положим $\theta_i = \sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{2a}$. Для фиксированного $i = 1, 2$ будем различать три случая.

Случай 1. $\operatorname{Re}\theta_i = 0$. Поскольку $\operatorname{Re} k_i^{1,2} \notin \mathcal{K}_i$, то критических чисел нет и $æ_i = 0$. Носитель разложений решений

$$\mathbf{K} = \{s = l,\ l \in \mathbb{N}\}. \tag{28}$$

Разложение решения уравнения (3) является разложением первого типа (см. п. 1.1), которое обозначим как семейство

$$\mathcal{H}_{i+1}:\ y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}x^s,\ i = 1, 2, \tag{29}$$

где коэффициент c_{0i} определен формулой (22), остальные комплексные коэффициенты c_{si} постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложений решений (29) есть $y = c_{0i} + c_{1i}x$. Вычислим коэффициент c_{1i}, который определяется из уравнения $c_{1i} = -b_{1i}/\nu(1)$. Второе приближение уравнения (3), соответствующее данному ребру, есть

$$\hat{\hat{f}}{}_4^{(1)}(x,\ y) = -2(b-d)xy^2 + 2x^3y''y + 4(a+b-c-d)xy^3 + 6x^2y'y^2 + 2x^3y''y^2 - \\ -x^3(y')^2 - 2x^3(y')^2y - 2(4a+b+c-d)xy^4 - 6x^2y'y^3 - 4x^3y''y^3 + 6x^3(y')^2y^2 + 4axy^5.$$

Коэффициент

$b_{1i} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^{-1}\hat{\hat{f}}{}_4^{(1)}(x,\ c_{0i}) =$

$$2c_{0i}^2(-b + d + 2(a+b-c-d)c_{0i} + (-4a-b-c+d)c_{0i}^2 + 2ac_{0i}^3). \tag{30}$$

Согласно (25) $\nu(1) = 2c_{0i}^2\left(c_{0i} - 1 - 4c_{0i}(c-a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3\right)$. Наконец, с учетом (21) и (22), получаем

$$c_{1i} = (-1)^i\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{\left(\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2 + b - d}{1 - 2\left(\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2}. \tag{31}$$

Положим $k_i = \theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i > 0$ и $k_i = -\theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i < 0$.

Случай 2. $\operatorname{Re}\theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. Имеем единственное критическое число $k_i \in \mathcal{K}_i$ и $æ_i = 1$. Носитель разложений решений уравнения (3) с учетом k_i есть

$$\mathbf{K}(k_i) = \{s = l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}. \tag{32}$$

Так как число k_i не лежит в множестве $\mathbf{K}$, определенном формулой (28), то согласно [1] получаем семейство разложений решений уравнения (3) первого типа, которые определяются формулой

$$\mathcal{H}_{i+1}:\ y = c_{0i} + \sum c_{si}x^s \text{ по } s \in \mathbf{K}(k_i),\ i = 1, 2, \tag{33}$$

где $\mathbf{K}(k_i)$ из (32), комплексные коэффициенты: c_{0i} определен формулой (22), $c_{k_i i}$ – произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложений решений (33) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i > 1$, тогда второе приближение есть $y = c_{0i} + c_{1i}x$, что аналогично случаю $\operatorname{Re}\theta_i = 0$. Коэффициент c_{1i} определен формулой (31). Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решений есть $y = c_{0i} + c_{k_i i}x^{k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 1$, то второе приближение решений имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}x + c_{k_i i}x^{k_i}$, где коэффициенты: $c_{k_i i}$ – произвольный, c_{1i} определен формулой (31).

Случай 3. $\theta_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. В этом случае имеем единственное критическое число $k_i \in \mathcal{K}_i$ и $æ_i = 1$. Поскольку число k_i лежит в множестве $\mathbf{K}$, определенном формулой (28), то согласно [1] семейство разложений решений суть

$$\mathcal{H}_{i+1}:\quad y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln x)x^s,\ i = 1, 2, \tag{34}$$

где коэффициенты: c_{0i} определен формулой (22), $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i}\ln x$, $\alpha_{k_i i}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}$ постоянный и однозначно определенный, остальные c_{si} – многочлены от $\ln x$, которые однозначно определяются.

Второе приближение разложений решений (29) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 1$, тогда второе приближение решений имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}x$. Коэффициент $c_{1i} = \alpha_{1i} + \beta_{1i}\ln x$, где α_{1i} – произвольная постоянная, β_{1i} вычисляется по формуле $\beta_{1i} = -b_{1i}/\nu'(1)$. Коэффициент b_{1i}

вычислен ранее и определен формулой (30), $\nu'(1)=4c_{0i}^2(c_{0i}-1)$. Учитывая (22), получаем

$$c_{1i}=\alpha_{1i}+(-1)^i\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{\left(\sqrt{a}+(-1)^i\sqrt{c}\right)^2+b-d}{2}\ln x. \tag{35}$$

Если $\left(\sqrt{a}+(-1)^i\sqrt{c}\right)^2+b-d=0$, то выполняется условие совместности и в разложении (34) коэффициенты: c_{1i} – произвольная постоянная, c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Вычислим нестепенные решения уравнения (20), соответствующие нулевому решению определяющего уравнения (21). Сделаем в нем логарифмическое преобразование $\xi=\ln x$, при этом $y',\ y''$ преобразуются по формулам (18). Получаем уравнение

$$\varphi(\xi,\,y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\hat f_4^{(1)}(\xi,\,y)=2\ddot y y^2(y-1)+\dot y^2 y(2-3y)+2(c-a)y^4+4ay^5-2ay^6=0. \tag{36}$$

Носитель $\mathbf{S}(\varphi)$, его выпуклая оболочка, грани $\Phi_j^{(d)}$, $d=0,1$, $j=1,\,2,\,3,\,4$ изображены на рис. 8, соответствующие граням нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$, $d=0,1$, $j=1,\,2,\,3,\,4$ – на рис. 9.

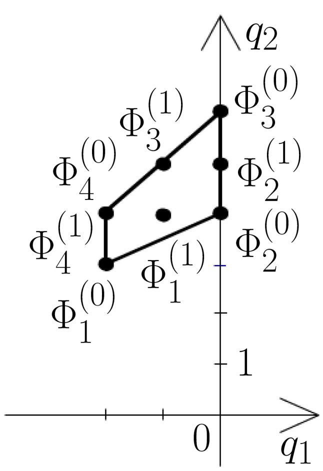

Рис. 8.

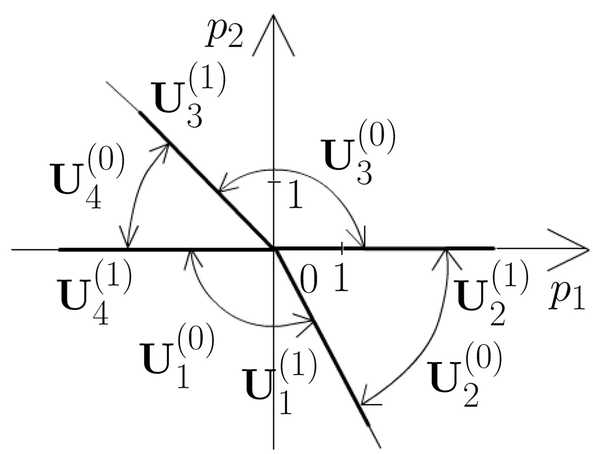

Рис. 9.

Конус задачи $\mathcal{K}=\{p_1\geq 0\}$. Кроме того, $y\neq\mathrm{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$. Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat\varphi_1^{(0)}(\xi,\,y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}-2\ddot y y^2+2\dot y^2 y=0. \tag{37}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)}=\{p_1<0,\,p_2<-2p_1\}$, $\omega=-1$. Ищем решения уравнения (37) в виде $y=c_r\xi^r$, $c_r\neq 0$, c_r – произвольная постоянная. Характеристическое уравнение $\chi(r)\stackrel{\mathrm{def}}{=}r=0$ имеет решение $r=0$. Вектор $P=\omega(1,\,r)=(-1,\,0)\notin\mathbf{U}_1^{(0)}\bigcap\mathcal{K}$, т.е. подходящих решений нет.

Вершинам $\Phi_2^{(0)}$ *и* $\Phi_3^{(0)}$ соответствуют укороченные уравнения $\hat{\varphi}_2^{(0)}(\xi,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2(c-a)y^4 = 0$ и $\hat{\varphi}_3^{(0)}(\xi,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$. Так как они алгебраические, то не дают подходящих решений.

Ребру $\Phi_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y + 2(c-a)y^4 = 0. \tag{38}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{\lambda(1,\, -2),\ \lambda > 0\}$, $\omega = -1$. Ищем решения уравнения (38) в виде $y = c_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} \neq 0$. Определяющее уравнение $\tilde{\varphi}(c_{-2}) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_{-2}^3(c_{-2}(c-a)-2) = 0$ имеет ненулевое решение

$$c_{-2} = 2/(c-a). \tag{39}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta\hat{\varphi}(\xi,\, y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 8(c-a)y^3.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6}\left(\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 8 + 4\xi\frac{d}{d\xi} - 4(c-a)c_{-2}\right). \tag{40}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = -2c_{-2}^2(k^2+3k)$ имеет два корня $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -2\}$. Только число $k_2 \in \mathcal{K}$, т. е. k_2 — единственное критическое число, æ $= 1$. Носитель разложения решений $\mathbf{K} = \{s = -2-2l;\ l > 0\}$. Носитель разложения решения с учетом k_2 есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2-l;\ l > 0\}. \tag{41}$$

Разложение решений есть

$$y = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\xi^2} + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{c_{-s}}{\xi^s}. \tag{42}$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, условие совместности автоматически выполнено, т. е. комплексный коэффициент c_{-3} — произвольная постоянная. Сделаем обратную замену $\xi = \ln x$ в (42) и получим асимптотику решения уравнения (3)

$$y = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty}\frac{c_{-s}}{\ln^s x}, \tag{43}$$

где комплексные коэффициенты: c_{-3} — произвольная постоянная, остальные c_{-s} — постоянны и однозначно определены.

Согласно [2] и [3] вычислим критические числа укороченных решений (43). Первая вариация определена формулой (23). Обозначим ее $\mathcal{M}(x,\, y)$.

Сделаем в $\mathcal{M}(x,\,y)$ логарифмическую замену $\xi=\ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Согласно (18) оператор

$$\mathcal{M}(x,\,y)\stackrel{\text{def}}{=}2\dot y^2+4y\dot y\frac{d}{d\xi}-6y\dot y^2-6y^2\dot y\frac{d}{d\xi}-4y\dot y-2y^2\frac{d}{d\xi}+6y^2\dot y+2y^3\frac{d}{d\xi}$$
$$-4y(\ddot y-\dot y)-2y^2\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{d}{d\xi}\right)+6y^2(\ddot y-\dot y)+2y^3\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{d}{d\xi}\right)$$
$$-8ay^3+8cy^3+20ay^4-12ay^5\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{N}(\xi,\,y). \tag{44}$$

Для решений (42) имеем $y=2\xi^{-2}/(c-a)+\ldots$. Поэтому в операторе $\mathcal{N}$ члены старшей по ξ степени n имеют $n=-4$ и образуют оператор $\mathcal{N}_{-4}=-2y^2\,d^2/d\xi^2$, где $y=2\xi^{-2}/(c-a)$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k)=-8k^2/\left(c-a\right)^2$, который имеет двукратный корень $k=0$. Конус задачи $\mathcal{K}=\{\operatorname{Re}k<0\}$. Так как число $k=0$ не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет, æ $=0$. Носитель разложения решений имеет вид $\mathbf{K}=\{s=l,\ l\in\mathbb{N}\}$. По теореме 1 из [2] для решений исходного уравнения (3) существует единственное разложение, образующее семейство

$$\mathcal{H}_4:\ y=\varphi_0+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi_\sigma x^\sigma, \tag{45}$$

где φ_0 из (43), φ_σ ряды по убывающим степеням логарифмов. По теореме 2 из [2, 3] степени логарифмов в φ_σ не превосходят -8σ.

Ребру $\Phi_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat\varphi_2^{(1)}(\xi,\,y)\stackrel{\text{def}}{=}-2ay^6+4ay^5+2(c-a)y^4=0,$$

которое имеет постоянное решение $y=1+(-1)^i\sqrt{c/a},\ i=1,2$. Оно нам не подходит, ибо является решением полного уравнения (36) и совпадает с решением (22), которое уже изучено.

3.3. Случай a = c $\neq$ 0. Вычислим сначала степенные и степенно-логарифмические разложения решений уравнения (1), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$. В этом случае определяющее уравнение (21) имеет два нулевых решения и одно ненулевое решение $c_{02}=2$ из (22). Ему соответствует два собственных значения $k_2^{1,2}=\pm2\sqrt{2a}$ из (26). В качестве θ_2 берем $2\sqrt{2a}$.

Значению c_{02} соответствует семейство разложений $\mathcal{H}_3$, для которого сохраняются формулы степенных и степенно-логарифмических разложений из случая $a\neq c\neq0$. Также в зависимости от значения θ_2 возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2=0$, разложение решений определено формулой (29)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2\neq0,\ \theta_2\notin\mathbb{Z}$, разложение решений определено формулой (33)), случай 3 ($\theta_2\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, разложение решений определено формулой (34)).

Вычислим теперь нестепенные решения уравнения (20), соответствующие двукратному нулевому решению определяющего уравнения (21). В этом случае уравнение (36) принимает вид

$$\phi(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_4^{(1)}(\xi,\,y) = 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2 y(2-3y) - 2ay^6 + 4ay^5 = 0. \qquad (46)$$

Носитель $\mathbf{S}(\phi)$, его выпуклая оболочка, грани $\Phi_j^{(d)}$, $d = 0, 1$, $j = 1,\,2,\,3,\,4$ изображены на рис. 10, соответствующие граням нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$, $d = 0, 1$, $j = 1,\,2,\,3,\,4$ – на рис. 11.

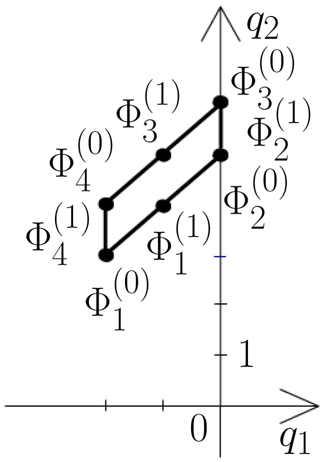

Рис. 10.

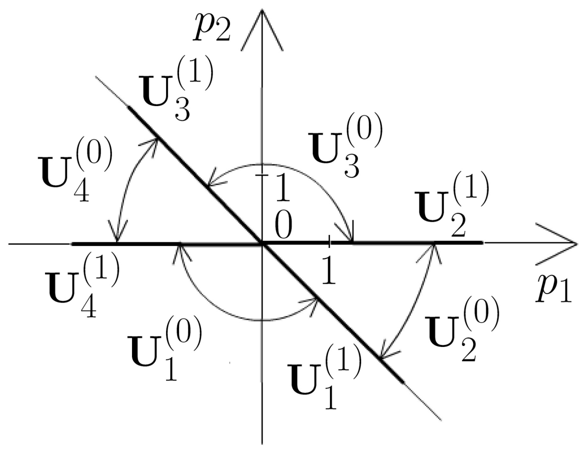

Рис. 11.

Конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$. Кроме того, $y \neq \text{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$. Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (37). Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_1 < 0,\, p_2 < -p_1\}$, $\omega = -1$. Вектор $P = (-1,\,0)$, полученный ранее в случае $a \neq c$, не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_1^{(0)}$, следовательно, подходящих решений нет.

Вершинам $\Phi_2^{(0)}$ *и* $\Phi_3^{(0)}$ соответствуют укороченные уравнения $\hat{\phi}_2^{(0)}(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} 4ay^5 = 0$ и $\hat{\phi}_3^{(0)}(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$. Они алгебраические и не дают подходящих решений.

Ребру $\Phi_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\phi}_1^{(1)}(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y + 4ay^5 = 0. \qquad (47)$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{\lambda(1,\,-1),\ \lambda > 0\}$, $\omega = -1$. Ищем решения уравнения (47) в виде $y = c_{-1}\xi^{-1}$, $c_{-1} \neq 0$. Определяющее уравнение $\tilde{\phi}(c_{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} -2c_{-1}^3(2ac_{-1}^2 - 1) = 0$ имеет два ненулевых решения

$$c_{-1} = (-1)^j/\sqrt{2a},\ j = 1, 2. \qquad (48)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta\hat{\phi}(\xi,\,y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 20y^4.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-1}^2\xi^{-4}\left(\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d}{d\xi} + 3 - 10ac_{-1}^2\right). \tag{49}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = -2c_{-1}^2(k^2+k-2)$ имеет два корня $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -1\}$. Число $k_2 \in \mathcal{K}$, т. е. k_2 — единственное критическое число, æ $= 1$. Исходный носитель разложения решений $\mathbf{K} = \{s = -1-2l;\ l > 0\}$. Носитель разложения решения с учетом k_2 есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -1 - l;\ l > 0\}. \tag{50}$$

Разложения решений суть

$$y = (-1)^j\xi^{-1}/\sqrt{2a} + \sum_{s=2}^{\infty} c_{-s}\xi^{-s},\ j = 1, 2. \tag{51}$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, условие совместности автоматически выполнено, т. е. комплексный коэффициент c_{-2} — произвольная постоянная.

Сделаем обратную замену $\xi = \ln x$ в (51) и получим два семейства асимптотик решений уравнения (3)

$$\mathcal{F}_{4+j}:\ y = (-1)^j\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{c_{-sj}}{\ln^s x},\ j = 1, 2, \tag{52}$$

где комплексные коэффициенты: c_{-2j} — произвольная постоянная, остальные c_{-sj} — постоянны и однозначно определены.

По [2, 3] вычислим критические числа укороченных решений (52). Оператор $\mathcal{N}(\xi,\,y)$ определен формулой (3.2). Для решений (51) имеем $y = (-1)^j\xi^{-1}/\sqrt{2a} + \ldots$. Поэтому в операторе $\mathcal{N}$ члены старшей по ξ степени n имеют $n = -2$ и образуют оператор $\mathcal{N}_{-2} = -2y^2\,d^2/d\xi^2$, где $y = (-1)^j\xi^{-1}/\sqrt{2a}$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -k^2/2a$, который имеет двукратный корень $k = 0$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < 0\}$. Так как число $k = 0$ не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет, æ $= 0$. Носитель разложения решений имеет вид $\mathbf{K} = \{s = l,\ l \in \mathbb{N}\}$. По теореме 1 из [2, 3] для решений исходного уравнения (3) существуют единственные разложения, образующие семейства

$$\mathcal{H}_{4+j}:\ y = \phi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\phi_{\sigma j}x^{\sigma},\ j = 1, 2 \tag{53}$$

где ϕ_{0j} из (52), $\phi_{\sigma j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов. По теореме 2 из [2, 3] степени логарифмов в $\phi_{\sigma j}$ не превосходят -4σ.

Ребру $\Phi_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{\phi}_2^{(1)}(\xi,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 + 4ay^5 = 0$, которое имеет постоянное решение $y = 2$. Оно нам не подходит, так как является решением полного уравнения (46) и совпадает с решением c_{02}, изученному в начале этого пункта.

3.4. Случай $\mathbf{a \neq 0}$, $\mathbf{c = 0}$. Вычислим в этом случае сначала степенные и степенно-логарифмические разложения решений уравнения (1), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$. Уравнение (21) имеет двукратный корень $c_0 = 1$. Согласно (24) при $a \neq 0$, $c = 0$ для него линейный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$.

Для того чтобы исследовать уравнение (3) в этом случае, сделаем замену $y = u + 1$. Получаем уравнение

$$\begin{gathered}
g(x,\, u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u+1) \stackrel{\text{def}}{=} ((2u+1)u'^2 - 2(u+u^2)u'')x^5 \\
+((-3-8u-3u^2)u'^2 - 2(u+u^2)u' + 2(4u^2+u^3+3u)u'')x^4 \\
+((10u+6u^2+3)u'^2 + 2(5u^2+2u^3+3u)u' - 2(5u^2+3u+2u^3)u'' - 2bu^2)x^3 \\
+\big((-3u^2-4u-1)u'^2 - 6(2u^2+u+u^3)u' + 2(u^3+2u^2+u)u'' \\
-2(d+a)u^4 - 4(a+d-b)u^3 - 2(d+a-2b)u^2\big)\, x^2 \\
+\big(2(u^3+2u^2+u)u' + 4au^5 + 2(6a-b+d)u^4 \\
-4(b-3a-d)u^3 - 2(b-d-2a)u^2\big)\, x \\
-8au^3 - 12au^4 - 2au^2 - 8au^5 - 2au^6 = 0.
\end{gathered} \tag{54}$$

Носитель $\mathbf{S}(g)$, его выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(g)$, грани $G_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 12. Нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ – на рис. 13.

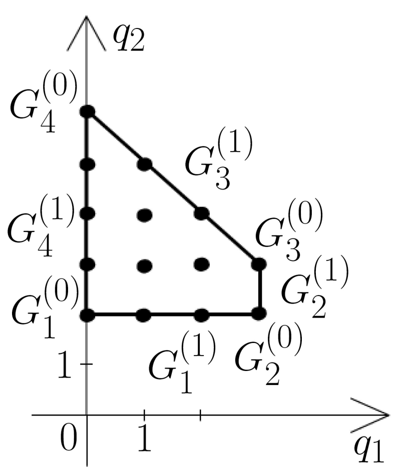

Рис. 12.

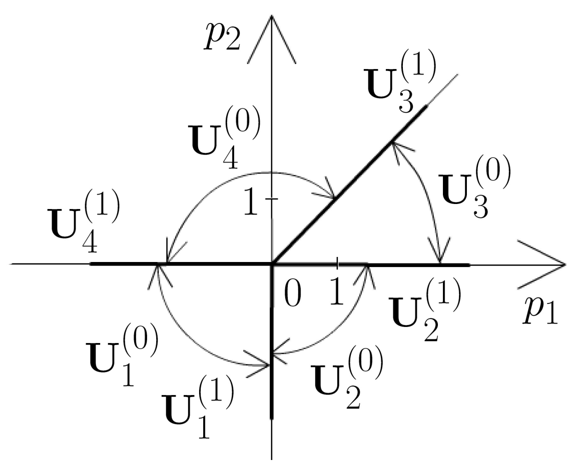

Рис. 13.

Уравнение (54) имеет двукратное тривиальное решение $u = 0$. В уравнении (3) ему соответствует двукратное решение

$$\mathcal{H}_7 :\, y = 1.$$

По теореме 4 для исходного уравнения (1) оно является исключительным однократным. А двукратность решения $y = 1$ возникла после умножения уравнения (1) на множитель $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$, содержащий как сомножитель $(y-1)$.

Конус задачи $\mathcal{K}=\{p_1\le 0,\ p_2<0\}$. Кроме того, $u(x)\ne\mathrm{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)},\ \mathbf{U}_1^{(1)}$.
Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat g_1^{(0)}(x,\,u)\stackrel{\mathrm{def}}{=}2u''ux^2-u'^2x^2+2u'ux-2au^2=0. \tag{55}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)}=\{p_1<0,\,p_2<0\}$. Первое приближение решения имеет вид $u=c_\rho x^\rho$, где c_ρ — ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени ρ определим из характеристического уравнения

$$\chi(\rho)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\rho^2-2a=0, \tag{56}$$

т. е. $\rho_{1,\,2}=\pm\sqrt{2a}$. Если $\mathrm{Re}\sqrt{2a}=0$, то вектор $P=\omega(1,\,\mathrm{Re}\,\rho_{1,\,2})=(-1,0)\notin\mathbf{U}_1^{(0)}$ и подходящих решений уравнения (55) нет. Если $\mathrm{Re}\sqrt{2a}\ne 0$, то в качестве значения корня $\sqrt{2a}$ возьмем то, для которого $\mathrm{Re}\sqrt{2a}>0$. Пусть $\rho_1=\sqrt{2a},\ \rho_2=-\sqrt{2a}$. Тогда вектор $P_1=\omega(1,\,\mathrm{Re}\,\rho_1)=(-1,-\mathrm{Re}\sqrt{2a})\in\mathbf{U}_1^{(0)}$, а вектор $P_2=\omega(1,\,\mathrm{Re}\,\rho_2)=(-1,\mathrm{Re}\sqrt{2a})\notin\mathbf{U}_1^{(0)}$. Положим $\rho=\rho_1=\sqrt{2a}$. Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial\hat g_1^{(0)}(x,\,u)}{\partial u}=2u''x^2+2\frac{d^2}{dx^2}ux^2-2u'\frac{d}{dx}x^2+2u'x+2\frac{d}{dx}ux-4au.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x)=2c_\rho x^\rho(\rho(\rho-1)+\frac{d^2}{dx^2}x^2-\rho\frac{d}{dx}x+\rho+\frac{d}{dx}x-2a).$$

Характеристическое уравнение $\nu(k)\stackrel{\mathrm{def}}{=}2c_\rho k(k-\rho)=0$ имеет два корня $k_1=0,\ k_2=\rho$. Конус задачи $\mathcal{K}=\{\mathrm{Re}\,k>\mathrm{Re}\,\rho\}$. Числа $\mathrm{Re}\,k_{1,\,2}\notin K$, т.е. критических чисел нет, æ $=0$. Носитель разложения решений есть

$$\mathbf{K}=\{s=\rho+l\rho+m;\ l,\,m\ge 0;\ l+m>0;\ l,m\in\mathbb{Z}\}. \tag{57}$$

Разложение решений имеет вид

$$u=c_\rho x^\rho+\sum c_sx^s \text{ по } s\in\mathbf{K}. \tag{58}$$

После обратной замены $y=u+1$ разложения (58) образуют семейство

$$\mathcal{H}_8:\ y=1+c_\rho x^\rho+\sum_s c_sx^s, \tag{59}$$

где $c_\rho\ne 0$, c_ρ – произвольная постоянная, $\rho=\sqrt{2a},\ \mathrm{Re}\sqrt{2a}>0$, s пробегает множество (57), комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

Вычислим второе приближение разложения решения (58).
В случае $\operatorname{Re}\rho > 1$ второе приближение решения есть $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1} x^{\rho+1}$. Второе приближение уравнения (54) есть

$$\hat{\hat{g}}\,{}_1^{(0)}(x,\,u) = 3u'^2x^3 - 6uu''x^3 - 6uu'x^2 + 2xu^2(2a - b + d).$$

Коэффициент $c_{\rho+1} = -b_{\rho+1}/\nu(\rho+1)$, где $b_{\rho+1} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-2\rho-1}\hat{\hat{g}}\,{}_1^{(0)}(x,\,c_\rho x^\rho) = 2c_\rho^2(d - b - a)$, $\nu(\rho+1) = 2c_\rho(\rho+1)$. Таким образом, получаем

$$c_{\rho+1} = c_\rho \frac{a + b - d}{\rho + 1}. \tag{60}$$

В случае $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$ второе приближение решения есть $u = c_\rho x^\rho + c_{2\rho} x^{2\rho}$. Второе приближение уравнения (54) есть

$$\hat{\hat{g}}\,{}_1^{(0)}(x,\,u) = -4uu'^2x^2 + 4u^2u''x^2 + 4u^2u'x - 8au^3.$$

Коэффициент $c_{2\rho} = -b_{2\rho}/\nu(2\rho)$, где $b_{2\rho} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-3\rho}\hat{\hat{g}}\,{}_1^{(0)}(x,\,c_\rho x^\rho) = -8ac_\rho^3$, $\nu(2\rho) = 8ac_\rho$. Таким образом, получаем

$$c_{2\rho} = c_\rho^2. \tag{61}$$

В случае $\operatorname{Re}\rho = 1$, $\operatorname{Im}\rho \neq 0$ второе приближение решения есть $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1}x^{\rho+1} + c_{2\rho}x^{2\rho}$, коэффициенты $c_{\rho+1}$ и $c_{2\rho}$ определены формулами (60) и (61) соответственно.
В случае $\rho = 1$, т. е. $a = 1/2$, второе приближение решения есть $u = c_1 x + c_2 x^2$. Коэффициенты: c_1 – произвольная постоянная,

$$c_2 = c_1 \frac{a + b - d + 2c_1}{2} \tag{62}$$

есть сумма (60) и (61).

Вычислим нестепенные решения уравнения (55), если они существуют. Преобразуем его

$$h(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} u^{-2}\hat{g}_1^{(0)}(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} 2\frac{u''}{u}x^2 - \frac{u'^2}{u^2}x^2 + 2\frac{u'}{u}x - 2a = 0, \tag{63}$$

так что $\mathbf{S}(h) = \{0\}$. Уравнение $h(x,\,u) = 0$ содержит ненулевую постоянную $-2a$,

$$h^* = 2\frac{u''}{u}x^2 - \frac{u'^2}{u^2}x^2,\ \operatorname{coef}(h^*) = 2 - 1 = 1 \neq 0. \tag{64}$$

Так как $a \neq 0$, то уравнение (56) не имеет кратных корней, т.е. по теоремам 5.6 и 5.7 из [1] нестепенных решений уравнения (55) не существует. Следовательно, вершине $G_1^{(0)}$ не соответствует никакое разложение решения уравнения (3) типа 3.

Ребру $G_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(1)}(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 \\ -2(b-d-2a)u^2x6u''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - 2(d+a-2b)u^2x^2 \\ -2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \tag{65}$$

Это ребро горизонтально. Уравнение (65) не имеет степенных решений, т. е. ему не соответствуют разложения решений типа 1 и 2. Возможно уравнение (65) имеет нестепенные решения. Левой вершине $G_1^{(0)} = (0,\,2)$ этого ребра соответствует укороченное уравнение (55). Так как для обоих этих уравнений (55) и (65) суммарный порядок дифференцирования $\Delta(\hat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\hat{g}_1^{(0)}) = 2$, то согласно теореме 5.5 из [1] уравнение (65) не имеет нестепенных решений при $x \to 0$.

Решению $c_0 = 0$ определяющего уравнения (21), как и в случае $a \neq c \neq 0$, соответствует семейство сложных разложений $\mathcal{H}_4$ из (45).

3.5. Сводка результатов и их обсуждение.

Теорема 6. *Ребру* $\Gamma_4^{(1)}$ *соответствуют 7 семейств разложений решений:* $\mathcal{H}_2$*, которое существует при* $a \neq c \neq 0$ *, определяется формулами* (29), (33), (34) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_3$*, которое существует при* $c \neq 0$*, определяется формулами* (29), (33), (34) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_4$*, которое существует при* $a \neq c$*, определяется формулами* (45), (43) *и имеет* 1 *параметр*;

$\mathcal{H}_5$ *и* $\mathcal{H}_6$ *существуют при* $a = c \neq 0$*, определяются формулами* (53), (52) *имеют* 1 *параметр;*

$\mathcal{H}_7$: $y = 1$*, существует при* $c = 0$*;*

$\mathcal{H}_8$ *существует при* $c = 0$*, определяется формулами* (58), (57) *и имеет* 1 *параметр.*

Семейства $\mathcal{H}_4$ – $\mathcal{H}_6$ сложные, остальные – типов 1 и 2.

Замечание. Высота ребра $\Gamma_4^{(1)}$ равна трем. Определяющее уравнение (21) третьей степени. Оказалось, что во всех случаях каждому его корню соответствует свое семейство разложений решений.

§ 4. Разложения решений при x → 0, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$

Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, получим из разложений, соответствующих ребру $\Gamma_4^{(1)}$, используя симметрию (6). Для этого в разложения, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, делается подстановка (6), вычисляются разложения с птичками, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, и птички опускаются. При этом три случая: $a \neq c \neq 0$; $a = c \neq 0$ и $a \neq 0,\ c = 0$, рассмотренные для ребра $\Gamma_4^{(1)}$, перейдут соответственно в три случая: $b \neq d - 1/2 \neq 0$; $b = d - 1/2 \neq 0$ и $b \neq 0,\ d = 1/2$ для ребра $\Gamma_1^{(1)}$.

4.1. Случай $\mathbf{b \neq d - 1/2 \neq 0}$. Рассмотрим разложения $\mathcal{F}_4^{(1)}i,\ i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, и с помощью симметрии (6) переведем их в разложения $\mathcal{F}_1^{(1)}i,\ i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$.

Разложения решений, определяющие семейства $\mathcal{F}_1^{(1)}i,\ i = 1, 2$, зависят от чисел $\check{\theta}_i = \sqrt{1 - 2d} + (-1)^i\sqrt{-2b},\ i = 1, 2$. Возможны три случая.

С л у ч а й 1. $\operatorname{Re}\check{\theta}_i = 0$. В этом случае разложения $\mathcal{F}_4^{(1)}i,\ i = 1, 2$ определяет формула (29). Подставим в нее $x = \check{x},\ y = \check{x}/\check{y}$ и выражая $\check{y}$, получаем дробь

$$\check{y} = \check{x}/(c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}\check{x}^s). \tag{66}$$

Так как $\left|\sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{c_{si}}{c_{0i}}\check{x}^s\right| < 1$ при $\check{x} \to 0$, то (66) можно разложить в ряд

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{si}}{c_{0i}}\,\check{x}^s\right)^n. \tag{67}$$

Выписывая первые два члена ряда (67), получаем разложение

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{si}}{c_{0i}^2}\,\check{x}^{s+1} + \ldots. \tag{68}$$

Положим

$$\check{c}_{1i} = 1/c_{0i}, \quad \check{c}_{\check{s}i} = -c_{si}/c_{0i}^2, \quad \check{s} = s + 1. \tag{69}$$

Таким образом, получаем семейство разложений

$$\mathcal{H}_{8+i}:\ \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}=2}^{\infty} \check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}} + \ldots,\ i = 1, 2, \tag{70}$$

где из (6), (22) и (69) получаем коэффициент

$$\check{c}_{1i} = \frac{2b + (-1)^i\sqrt{4bd - 2b}}{2b - 2d + 1}, \tag{71}$$

остальные комплексные коэффициенты $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (70) есть $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (6) и (31) коэффициент

$$\check{c}_{2i} = (-1)^i\sqrt{\frac{1 - 2d}{-2b}}\,\frac{\left(\sqrt{-2b} + (-1)^i\sqrt{1 - 2d}\right)^2 - 2a + 2c - 1}{2 - 2\left(\sqrt{-2b} + (-1)^i\sqrt{1 - 2d}\right)^2}. \tag{72}$$

Положим $k_i = 1 + \check{\theta}_i$, если $\mathrm{Re}\,\check{\theta}_i > 0$ и $k_i = 1 - \check{\theta}_i$, если $\mathrm{Re}\,\check{\theta}_i < 0$.

Случай 2. $\mathrm{Re}\,\check{\theta}_i \neq 0$, $\check{\theta}_i \notin \mathbb{Z}$. Аналогично из (33) с помощью (6) и (69) получаем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{H}_{8+i}:\ \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}} + \ldots,\ i = 1, 2, \tag{73}$$

где $\check{s} \in \{1 + l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты: $\check{c}_{1i}$ определен формулой (71), $\check{c}_{k_i i}$ – произвольный, остальные $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (73) зависит от расположения числа $\mathrm{Re}\,k_i$. Если $\mathrm{Re}\,k_i > 2$, тогда второе приближение решений имеет вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$, что аналогично случаю $\mathrm{Re}\,\check{\theta}_i = 0$. Если $1 < \mathrm{Re}\,k_i < 2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{k_i i}\check{x}^{k_i}$, где коэффициент $\check{c}_{k_i i}$ – произвольный. Если $\mathrm{Re}\,k_i = 2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2 + \check{c}_{k_i i}\check{x}^{k_i}$, где коэффициенты: $\check{c}_{k_i i}$ – произвольный, $\check{c}_{2i}$ определен формулой (72).

Случай 3. $\check{\theta}_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{H}_{8+i}:\ \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}=2}^{\infty} \check{c}_{\check{s}i}(\ln\check{x})\check{x}^{\check{s}} + \ldots,\ i = 1, 2, \tag{74}$$

где коэффициент $\check{c}_{1i}$ определен формулой (71), коэффициент $\check{c}_{k_i i} = \check{\alpha}_{k_i i} + \check{\beta}_{k_i i}\ln\check{x}$, $\check{\alpha}_{k_i i}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\check{\beta}_{k_i i}$ постоянный и однозначно определенный, остальные $\check{c}_{\check{s}i}$ – многочлены от $\ln\check{x}$, которые однозначно определяются.

Второе приближение разложения решения (74) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (6) и (35) коэффициент

$$\check{c}_{2i} = \check{\alpha}_{2i} + (-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{-2b}}\,\frac{\left(\sqrt{-2b} + \epsilon\sqrt{1-2d}\right)^2 - 2a + 2c - 1}{4}\,\ln\check{x}, \tag{75}$$

где $\check{\alpha_{2i}}$ – произвольная постоянная.

Аналогично с помощью симметрии (6) из (45) получаем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{H}_{11}:\ \check{y} = \check{\varphi}_1\check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty} \check{\varphi}_{\check{\sigma}}\check{x}^{\check{\sigma}}, \tag{76}$$

где

$$\check{\varphi}_1 = \frac{1+2b-2d}{4}\ln^2\check{x} + \check{c}_1\ln\check{x} + \sum_{\check{s}=0}^{\infty} \check{c}_{-\check{s}}\ln^{-\check{s}}\check{x}, \tag{77}$$

комплексные коэффициенты: $\check{c}_1$ — произвольный, остальные $\check{c}_{-\check{s}}$ — постоянны и однозначно определены; $\check{\varphi}_{\check{\sigma}}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

4.2. Случай $\mathbf{b = d - 1/2 \neq 0}$. Из разложений (53) получаем два однопараметрических семейства разложений

$$\mathcal{H}_{11+j}: \ \check{y} = \check{\phi}_{1j}\check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty} \check{\phi}_{\check{\sigma}j}\check{x}^{\check{\sigma}}, \ j = 1, 2, \tag{78}$$

где

$$\check{\phi}_{1j} = (-1)^j\sqrt{-2b}\ln\check{x} + \check{c}_{0j} + \sum_{\check{s}=1}^{\infty} \check{c}_{-\check{s}j}\ln^{-\check{s}}\check{x}, \ j = 1, 2, \tag{79}$$

где комплексные коэффициенты: $\check{c}_{0j}$ — произвольная постоянная, остальные $\check{c}_{-\check{s}j}$ — постоянны и однозначно определены; $\check{\phi}_{\check{\sigma}j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейство разложений $\mathcal{H}_{10}$ сохраняется из случая $b \neq d - 1/2 \neq 0$. В качестве значения $\check{\theta}_2$ берем $2\sqrt{-2b}$. В зависимости от которого возможны три случая. А именно: случай 1 ($\mathrm{Re}\,\check{\theta}_2 = 0$, семейство $\mathcal{H}_{10}$ определяется формулой (70)), случай 2 ($\mathrm{Re}\,\check{\theta}_2 \neq 0$, $\check{\theta}_2 \notin \mathbb{Z}$, семейство $\mathcal{H}_{10}$ однопараметрическое и определяется формулой (73)), случай 3 ($\check{\theta}_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, семейство $\mathcal{H}_{10}$ однопараметрическое и определяется формулой (74)).

4.3. Случай $\mathbf{d = 1/2, \ b \neq 0}$. В этом случае имеем исключительное решение согласно теореме 4.

$$\mathcal{H}_{14}: \ \check{y} = \check{x}.$$

Однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{15}: \ \check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}}\check{x}^{\check{s}}, \tag{80}$$

где $\check{c}_{\check{\rho}} \neq 0$, $\check{c}_{\check{\rho}}$ – произвольная постоянная, $\check{\rho} = 1 + \sqrt{-2b}$, $\mathrm{Re}\,\sqrt{-2b} > 0$, $\check{s}$ пробегает множество $\{\check{\rho} + l(\check{\rho} - 1) + m;\, l, m \geq 0;\, l + m > 0;\, l, m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты $\check{c}_{\check{s}}$ постоянны и однозначно определены.

В случае $\mathrm{Re}\,\check{\rho} > 2$ третье приближение разложения (80) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{\check{\rho}+1}\check{x}^{\check{\rho}+1}$. Коэффициент

$$\check{c}_{\check{\rho}+1} = -\check{c}_{\check{\rho}}\frac{2b + 2a - 2c + 1}{2\check{\rho}}. \tag{81}$$

В случае $1 < \mathrm{Re}\,\check\rho < 2$ третье приближение разложения (80) имеет вид $\check y = \check x + \check c_{\check\rho}\check x^{\check\rho} + \check c_{2\check\rho-1}\check x^{2\check\rho-1}$. Коэффициент

$$\check c_{2\check\rho-1} = -\check c_{\check\rho}^2. \tag{82}$$

В случае $\mathrm{Re}\,\check r = 2$, $\mathrm{Im}\,\rho \neq 0$ третье приближение разложения (80) имеет вид $\check y = \check x + \check c_{\check\rho}\check x^{\check\rho} + \check c_{\check\rho+1}\check x^{\check\rho+1} + \check c_{2\check\rho-1}\check x^{2\check\rho-1}$, где коэффициенты $\check c_{\check\rho+1}$, и $\check c_{2\check\rho-1}$ определены формулами (81) и (82) соответственно. В случае $\check\rho = 2$ третье приближение разложения (80) имеет вид $\check y = \check x + \check c_2\check x^2 + \check c_3\check x^3$. Коэффициенты $\check c_2$ – ненулевая произвольная постоянная, $\check c_3 = -\check c_2\,(2b + 2a - 2\check c + 1 + 4\check c_2)/4$ есть сумма выражений (81) и (82).

Здесь имеется также однопараметрическое семейство $\mathcal{H}_{11}$, которое определяется формулами (76), (77).

4.4. Сводка результатов и их обсуждение.

Теорема 7. *Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют 7 семейств разложений решений:* $\mathcal{H}_9 = \check{\mathcal{H}}_2$, *которое существует при* $b \neq d - 1/2 \neq 0$, *определяется формулами* (70), (73), (74) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{10} = \check{\mathcal{H}}_3$, *которое существует при* $d \neq 1/2$, *определяется формулами* (70), (73), (74) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{11} = \check{\mathcal{H}}_4$, *которое существует при* $b \neq d - 1/2$, *определяется формулами* (76), (77) *и имеет* 1 *параметр*;

$\mathcal{H}_{12} = \check{\mathcal{H}}_5$ *и* $\mathcal{H}_{13} = \check{\mathcal{H}}_6$ *существуют при* $b = d - 1/2$, *определяются формулами* (78), (79) *и имеют* 1 *параметр;*

$\mathcal{H}_{14} = \check{\mathcal{H}}_7$: $y = x$, *существует при* $d = 1/2$*;*

$\mathcal{H}_{15} = \check{\mathcal{H}}_8$ *существует при* $d = 1/2$, *определяется формулой* (80) *и имеет* 1 *параметр.*

$\check{\mathcal{H}}_i$ означает семейство, полученное из $\mathcal{H}_i$ симметрией (6).

Семейства $\mathcal{H}_{11}$ – $\mathcal{H}_{13}$ сложные, остальные – типов 1 и 2.

§ 5. Разложения решений при x → ∞

С помощью симметрии (5) из разложений решений уравнения (1) при $x \to 0$ получим разложения его решений при $x \to \infty$. Для этого в разложения, найденные при $x \to 0$, делается подстановка (5), вычисляются новые разложения с звездочками при $x \to \infty$, и звездочки опускаются.

Подробно рассмотрим преобразование разложения, соответствующего вершине $\Gamma_4^{(0)}$, в разложение, соответствующее вершине $\Gamma_2^{(0)}$. Остальные разложения вблизи бесконечности, соответствующие ребрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_3^{(1)}$, перечислим.

5.1. Разложения решений, соответствующие вершине $\mathbf{\Gamma_2^{(0)}}$, получим из разложения (2), где r – произвольный, $0 < \operatorname{Re} r < 1$, s пробегает множество (10), коэффициент $c_r \neq 0$ – произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены. Подставляя в (2) выражения $x = 1/x^*$, $y = 1/y^*$ и выражая y^*, получаем дробь

$$y^* = 1/(c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s}), \tag{83}$$

где $c_r \neq 0$ – произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены, показатель степени r – произвольный, $0 < \operatorname{Re} r < 1$, s пробегает множество (10). Так как $\left|\sum\limits_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r}\right| < 1$ при $x^* \to \infty$, то (83) можно разложить в ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sum_s \frac{c_s}{c_r}\, x^{*-s+r} \right)^n. \tag{84}$$

Выписывая первые два члена ряда (84), получаем разложение

$$y^* = \frac{1}{c_r} x^{*r} - \sum_s^{\infty} \frac{c_s}{c_r^2}\, x^{*-s+2r} + \ldots. \tag{85}$$

Положим

$$c_r^* = 1/c_r, \quad c_{s^*}^* = -c_s/c_r^2, \quad s^* = -s + 2r. \tag{86}$$

Наконец, учитывая (10) и (86) получаем семейство разложений

$$\mathcal{H}_{16}: \; y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^*\, x^{*s^*}, \tag{87}$$

где $c_r^* \neq 0$ – произвольная постоянная, остальные коэффициенты $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены, показатель степени r – произвольный, $0 < \operatorname{Re} r < 1$, $s^* \in \{r - lr + m(r-1);\; l, m \geq 0;\; l + m > 0;\; l, m \in \mathbb{Z}\}$.

Таким образом, при $x^* \to \infty$ имеем двупараметрическое (по c_r^* и r, $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$) семейство $\mathcal{H}_{16}$ разложений, определенное формулой (87).

В случае $1/2 < \operatorname{Re} r < 1$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r-1}^* x^{*2r-1}$. Коэффициент

$$c_{2r-1}^* = c_r^{*2}\, \frac{2(a+d) + (r-1)^2 - 1}{2(r-1)^2}. \tag{88}$$

В случае $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_0^*$. Коэффициент

$$c_0^* = \frac{2(b+c) - r^2}{2r^2}. \tag{89}$$

В с л у ч а е $r = 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c^*_{1/2}\sqrt{x^*} + c^*_0$, где $c^*_{1/2}$ – произвольная постоянная, коэффициент $c^*_0 = (-1 + 8(b+c) - 3c^{*2}_{1/2} + 8c^{*2}_{1/2}(a+d))/2$.
В с л у ч а е $\operatorname{Re} r = 1/2$, $\operatorname{Im} r \neq 0$ второе приближение решения есть $y^* = c^*_r x^{*r} + c^*_0 + c^*_{2r-1} x^{*2r-1}$, где коэффициенты c^*_{2r-1} и c^*_0 определены ранее формулами (88) и (89) соответственно.

5.2. Разложения решений, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma_2^{(1)}}$. Здесь рассмотрим три случая: $-b \neq c \neq 0$, $-b = c \neq 0$ и $c = 0$, $b \neq 0$.

Случай $-\mathbf{b} \neq \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Положим $\theta^*_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, $i = 1, 2$. В зависимости от значений θ^*_i возможны три случая.
С л у ч а й 1. $\operatorname{Re}\theta^*_i = 0$. Имеем семейство

$$\mathcal{H}_{16+i}: \ y^* = c^*_{0i} + \sum_{s^*=1}^{+\infty} c^*_{-s^*i} x^{*-s^*}, \ i = 1, 2, \tag{90}$$

где из (5), (22) и (86) следует, что коэффициент

$$c^*_{0i} = \frac{b + (-1)^i\sqrt{-bc}}{b+c}, \ i = 1, 2, \tag{91}$$

остальные комплексные коэффициенты $c^*_{-s^*i}$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (90) есть $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i}x^{*-1}$. Из (5), (31) и (86) следует, что коэффициент

$$c^*_{-1i} = (-1)^i\sqrt{-\frac{c}{b}}\,\frac{\left(\sqrt{-b} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2 - a - d}{1 - 2\left(\sqrt{-b} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2}. \tag{92}$$

Положим $k_i = \theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i < 0$ и $k_i = -\theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i > 0$.
С л у ч а й 2. $\operatorname{Re}\theta^*_i \neq 0$, $\theta^*_i \notin \mathbb{Z}$. Имеем однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{16+i}: \ y^* = c^*_{0i} + \sum_{s^*} c^*_{-s^*i} x^{*-s^*}, \ i = 1, 2, \tag{93}$$

где $s^* \in \{-l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты: c^*_{0i} определен формулой (91), $c^*_{k_i i}$ – произвольный, остальные $c^*_{-s^*i}$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (93) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i < -1$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i}x^{*-1}$, коэффициент c^*_{-1i} определен формулой (92). Если $-1 < \operatorname{Re} k_i < 0$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{k_i i}x^{*k_i}$, где коэффициент $c^*_{k_i i}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = -1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i}x^{*-1} + c^*_{k_i i}x^{*k_i}$, где коэффициенты: $c^*_{k_i i}$ – произвольный, c^*_{-1i} определен формулой (92).

Случай 3. $\theta_i^* \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{16+i}: \ y^* = c_{0i}^* + \sum_{s^*=1}^{+\infty} c_{-s^*i}^*(\ln x^*)x^{*-s^*}, \ i = 1, 2, \tag{94}$$

где коэффициенты: c_{0i}^* определен формулой (22); $c_{k_ii}^* = \alpha_{k_ii}^* + \beta_{k_ii}^* \ln x^*$, где $\alpha_{k_ii}^*$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_ii}^*$ постоянный и однозначно определенный; комплексные коэффициенты $c_{-s^*i}^*$ многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (94) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = -1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c_{0i}^* + c_{-1i}^* x^{*-1}$. Коэффициент

$$c_{-1i}^* = \alpha_{-1i}^* + (-1)^i \sqrt{-\frac{c}{b}} \, \frac{\left(\sqrt{-b} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2 - a - d}{2} \ln x^*, \tag{95}$$

где α_{-1i}^* – произвольная постоянная.

Также имеется однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{19}: \ y^* = \varphi_0^* + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \varphi_{-\sigma^*}^* x^{-*\sigma^*}, \tag{96}$$

где

$$\varphi_0^* = \frac{b+c}{2} \ln^2 x^* + c_1^* \ln x^* + \sum_{s^*=0}^{\infty} c_{-s^*}^* \ln^{-s^*} x^*, \tag{97}$$

комплексные коэффициенты: c_1^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*}^*$ — постоянны и однозначно определены; $\varphi_{-\sigma^*}^*$ ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Случай $-\mathbf{b} = \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Два однопараметрических семейства

$$\mathcal{H}_{19+j}: \ y^* = \phi_{0j}^* + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \phi_{-\sigma^*j}^* x^{*-\sigma^*}, \ j = 1, 2, \tag{98}$$

где

$$\phi_{0j}^* = (-1)^j \sqrt{-2b} \ln x^* + c_{0j}^* + \sum_{s^*=1}^{\infty} c_{-s^*j}^* \ln^{-s^*} x^*, \ j = 1, 2, \tag{99}$$

комплексные коэффициенты: c_{0j}^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*j}^*$ — постоянны и однозначно определены; $\phi_{-\sigma^*j}^*$ ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Семейство разложений $\mathcal{H}_{18}$ сохраняется из случая $-b \neq c \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{-2b}$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\mathrm{Re}\,\theta_2^* = 0$, семейство $\mathcal{H}_{18}$ определяется формулой (90)), случай 2 ($\mathrm{Re}\,\theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, семейство $\mathcal{H}_{18}$ однопараметрическое и определяется формулой (93)), случай 3 ($\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, семейство $\mathcal{H}_{18}$ однопараметрическое и определяется формулой (94)).

Случай $\mathbf{c = 0}$, $\mathbf{b \neq 0}$.

Согласно теореме 4 имеем исключительное решение уравнения (1)

$$\mathcal{H}_{22}:\ y^* = 1.$$

Также имеется однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{23}:\ y^* = 1 + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c^*_{s^*} x^{*s^*}, \tag{100}$$

где $c^*_{\rho^*} \neq 0$, $c^*_{\rho^*}$ – произвольная постоянная, $\rho^* = -\sqrt{-2b}$, $\mathrm{Re}\sqrt{-2b} > 0$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l\rho^* - m;\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты $c^*_{s^*}$ постоянны и однозначно определены.

Если $\mathrm{Re}\,\rho^* < -1$, то третье приближение разложения (100) имеет вид $y = 1 + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1} x^{*\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{\rho^*-1} = c^*_\rho \frac{a + b + d}{\rho^* - 1}. \tag{101}$$

Если $-1 < \mathrm{Re}\,\rho^* < 0$, то третье приближение разложения (100) имеет вид $y^* = 1 + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{2\rho^*} x^{*2\rho^*}$. Коэффициент

$$c^*_{2\rho^*} = -c^{*2}_\rho. \tag{102}$$

Если $\mathrm{Re}\,\rho^* = -1$, $\mathrm{Im}\,\rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (100) имеет вид $y^* = 1 + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1} x^{*\rho^*-1} + c^*_{2\rho^*} x^{*2\rho^*}$, где коэффициенты $c^*_{\rho^*-1}$, и $c^*_{2\rho^*}$ определены формулами (101) и (102) соответственно. Если $\rho^* = -1$, то третье приближение разложения (100) имеет вид $y^* = 1 + c^*_{-1} x^{*-1} + c^*_{-2} x^{*-2}$. Коэффициенты c^*_{-1} – ненулевая произвольная постоянная, $c^*_{-2} = -c^*_{-1}\,(a + b + d + 2c^*_{-1})/2$ есть сумма выражений (101) и (102).

Однопараметрическое семейство $\mathcal{H}_{19}$ определяется формулами (96), (97).

5.3. Разложения решений, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma_3^{(1)}}$. Здесь рассмотрим три случая: $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, $a = -d + 1/2 \neq 0$ и $d = 1/2$, $a \neq 0$.

Случай $\mathbf{a \neq -d + 1/2 \neq 0}$. Положим $\theta_i^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{1 - 2d} + (-1)^i \sqrt{2a}$, $i = 1, 2$. В зависимости от значений θ_i^* возможны три случая.

Случай 1. $\mathrm{Re}\,\theta_i^* = 0$. Имеем семейство

$$\mathcal{H}_{23+i}:\ y^* = c^*_{1i} x^* + \sum_{s^*=0}^{+\infty} c^*_{-s^* i} x^{*-s^*},\ i = 1, 2, \tag{103}$$

где согласно (5), (71) и (86) коэффициент

$$c^*_{1i} = 1 + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2a}}, \tag{104}$$

остальные комплексные коэффициенты $c^*_{s^*i}$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (103) есть $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{0i}$. Из (5), (72) и (86) следует, что коэффициент

$$c^*_{0i} = (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2a}}\, \frac{\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 + 2b + 2c - 1}{2 - 2\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2}. \tag{105}$$

Положим $k_i = 1 + \theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i < 0$ и $k_i = 1 - \theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i > 0$.
Случай 2. $\operatorname{Re}\theta^*_i \neq 0,\ \theta^*_i \notin \mathbb{Z}$. Здесь имеем однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{23+i}:\ y^* = c^*_{1i}x^* + \sum_{s^*} c^*_{s^*i}x^{*s^*},\ i = 1, 2, \tag{106}$$

где комплексные коэффициенты: c^*_{1i} определен формулой (104), $c^*_{k_ii}$ – произвольный, остальные $c^*_{s^*i}$ постоянны и однозначно определены, s^* пробегает множество $\{1 - l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}$. Второе приближение разложений решений (106) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i < 0$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{0i}$, коэффициент c^*_{0i} определен формулой (105). Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решений будет иметь вид $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{k_ii}x^{*k_i}$, где коэффициент $c^*_{k_ii}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 0$, то второе приближение решений есть $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{0i} + c^*_{k_ii}x^{*k_i}$, где коэффициенты: $c^*_{k_ii}$ – произвольный, c^*_{0i} определен формулой (105).
Случай 3. $\theta^*_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ Имеем однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{23+i}:\ y^* = c^*_{1i}x^* + \sum_{s^*=0}^{+\infty} c^*_{-s^*i}(\ln x^*)x^{*-s^*},\ i = 1, 2, \tag{107}$$

где коэффициенты: c^*_{1i} определен формулой (104), коэффициент $c^*_{k_ii} = \alpha^*_{k_ii} + \beta^*_{k_ii}\ln x^*$, $\alpha^*_{k_ii}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta^*_{k_ii}$ постоянный и однозначно определенный, остальные $c^*_{s^*i}$ – многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (103) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 0$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{0i}$. Коэффициент

$$c^*_{0i} = \alpha^*_{0i} + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2a}}\, \frac{\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 + 2b + 2c^* - 1}{4} \ln x^*, \tag{108}$$

где α^*_{0i} – произвольная постоянная.

Имеется также однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{26}:\ y^* = \varphi_1^* x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \varphi^*_{-\sigma^*} x^{*-\sigma^*}, \tag{109}$$

где

$$\varphi_1^* = \frac{4}{1-2a-2d}\,\frac{1}{\ln^2 x^*} + \frac{c^*_{-3}}{\ln^3 x^*} + \sum_{s^*=4}^{\infty} \frac{c^*_{-s^*}}{\ln^{s^*} x^*}, \tag{110}$$

комплексные коэффициенты: c^*_{-3} — произвольная постоянная, $c^*_{-s^*}$ — постоянны и однозначно определены; $\varphi^*_{\sigma^*}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Случай $\mathbf{a = -d + 1/2 \neq 0}$. Имеем два однопараметрических семейства разложений

$$\mathcal{H}_{26+j}:\ y^* = \phi^*_{1j} x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \phi^*_{-\sigma^* j} x^{*-\sigma^*},\ j = 1, 2, \tag{111}$$

где

$$\phi^*_{1j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x^*} + \frac{c^*_{-2j}}{\ln^2 x^*} + \sum_{s^*=3}^{\infty} \frac{c^*_{-s^* j}}{\ln^{s^*} x^*}, \tag{112}$$

комплексные коэффициенты: c^*_{-2j} — произвольная постоянная, $c^*_{-s^*j}$ — постоянны и однозначно определены; $\phi^*_{\sigma^* j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейство разложений $\mathcal{H}_{25}$; сохраняется из случая $a \neq -d + 1/2 \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{2a}$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2^* = 0$, семейство $\mathcal{H}_{25}$ определяется формулой (103)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, семейство $\mathcal{H}_{25}$ однопараметрическое и определяется формулой (106)), случай 3 ($\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, семейство $\mathcal{H}_{25}$ однопараметрическое и определяется формулой (107)).

Случай $\mathbf{d = 1/2,\ a \neq 0}$. Имеем исключительное решение

$$\mathcal{H}_{29}:\ y^* = x^*$$

и однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_{30}:\ y^* = x^* + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c^*_{s^*} x^{*s^*}, \tag{113}$$

где $c^*_{\rho^*} \neq 0$, $c^*_{\rho^*}$ – произвольная постоянная, $\rho^* = 1 - \sqrt{2a}$, $\operatorname{Re}\sqrt{2a} > 0$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l(\rho^* - 1) - m;\, l, m \geq 0;\, l + m > 0;\, l, m \in$

$\mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты $c^*_{s^*}$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re}\rho^* < 0$, то третье приближение разложения (113) имеет вид $y = x^* + c^*_{\rho^*}x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1}x^{*\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{\rho^*-1} = c^*_{\rho^*}\,\frac{1-2(a+b+c)}{2(\rho^*-2)}. \tag{114}$$

Если $0 < \operatorname{Re}\rho^* < 1$, то третье приближение разложения (113) имеет вид $y^* = x^* + c^*_{\rho^*}x^{*\rho^*} + c^*_{2\rho^*-1}x^{*2\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{2\rho^*-1} = c^{*2}_{\rho^*}. \tag{115}$$

Если $\operatorname{Re}\rho^* = 0,\ \operatorname{Im}\rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (113) имеет вид $y^* = x^* + c^*_{\rho^*}x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1}x^{*\rho^*-1} + c^*_{2\rho^*-1}x^{*2\rho^*-1}$, где коэффициенты $c^*_{\rho^*-1}$, и $c^*_{2\rho^*-1}$ определены формулами (114) и (115) соответственно. Если $\rho^* = 0$, то третье приближение разложения (113) имеет вид $y^* = x^* + c^*_0 + c^*_{-1}x^{*-1}$. Коэффициенты c^*_0 – ненулевая произвольная постоянная, $c^*_{-1} = c^*_0\,(-1 + 2(a+b+c) + 4c^*_0)/4$ есть сумма выражений (114) и (115).

Семейство $\mathcal{H}_{26}$ однопараметрическое. Оно сохраняется из случая $a \neq 1/2 - d \neq 0$ и определяется формулой (109).

5.4. Сводка результатов.

Теорема 8. *При $x \to \infty$ уравнение* (1) *имеет 15 семейств разложений решений:*

$\mathcal{H}_{16} = \mathcal{H}^*_1$ *определяется формулой* (87) *и имеет* 2 *параметра;*

$\mathcal{H}_{17} = \mathcal{H}^*_2$*, которое существует при* $-b \neq c \neq 0$ *, определяется формулами* (90), (93), (94) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{18} = \mathcal{H}^*_3$*, которое существует при* $c \neq 0$*, определяется формулами* (90), (93), (94) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{19} = \mathcal{H}^*_4$*, которое существует при* $-b \neq c$*, определяется формулами* (96), (97) *и имеет* 1 *параметр*;

$\mathcal{H}_{20} = \mathcal{H}^*_5$ *и* $\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}^*_6$ *существуют при* $-b = c \neq 0$*, определяются формулами* (98), (99) *и имеют* 1 *параметр;*

$\mathcal{H}_{22} = \mathcal{H}_7$: $y = 1$*, существует при* $c = 0$*;*

$\mathcal{H}_{23} = \mathcal{H}^*_8$ *существует при* $c = 0$*, определяется формулой* (100) *и имеет* 1 *параметр.*

$\mathcal{H}_{24} = \mathcal{H}^*_9$*, которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$*, определяется формулами* (103), (106), (107) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{25} = \mathcal{H}^*_{10}$*, которое существует при* $d \neq 1/2$*, определяется формулами* (103), (106), (107) *и имеет* 1 *или* 0 *параметров;*

$\mathcal{H}_{26} = \mathcal{H}_{11}^*$, *которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, *определяется формулами* (109), (110) *и имеет* 1 *параметр*;

$\mathcal{H}_{27} = \mathcal{H}_{12}^*$ *и* $\mathcal{H}_{28} = \mathcal{H}_{13}^*$ *существуют при* $a = -d + 1/2 \neq 0$, *определяются формулами* (111), (112) *и имеют* 1 *параметр;*

$\mathcal{H}_{29} = \mathcal{H}_{14}$: $y = x$, *существует при* $d = 1/2$*;*

$\mathcal{H}_{30} = \mathcal{H}_{15}^*$ *существует при* $d = 1/2$, *определяется формулой* (113) *и имеет* 1 *параметр.*

$\mathcal{H}_i^*$ означает семейство, полученное из $\mathcal{H}_i$ симметрией (5).

Семейства $\mathcal{H}_{19}$ – $\mathcal{H}_{21}$ и $\mathcal{H}_{26}$ – $\mathcal{H}_{28}$ сложные, остальные – типов 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // УМН. 2004. Т. 59. N 3. С. 31-80.

2. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. N 36. М., 16 с.

3. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // ДАН. 2006. Т. 406. N 6. С.

4. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве. // ДАН. 2004. Т. 395. N 6. С. 733-737.

5. Розов Н.Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М., Советская энциклопедия, 1984, т. 4, с. 233-234.

6. Брюно А.Д., Чухарева И.В.. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Препринт ИПМ им.М.В. Келдыша. N 49. М., 2003, 32 с.

7. Горючкина И.В. О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек. // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Издательство МГУ, 2004. С. 63-68.

8. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. N 2. М., 30 с.

9. Gromak I.V., Laine I., Shimomura S.. Painleve Differential Equations in the Complex Plain, Berlin, New York, Walter de Gruyter. 2002. 303 p.