

– 1 –

ордена Ленина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской Академии Наук

Р.Б.Немучинский, М.Ю.Овчинников

**Определение параметров углового движения
пассивного наноспутника REFLECTOR по
результатам лазерных внешнетраекторных
измерений**

Москва – 2006 г.

УДК 629.78

Определение параметров углового движения пассивного наноспутника REFLECTOR по результатам лазерных внешнетраекторных измерений. Р.Б.Немучинский, М.Ю.Овчинников. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2006, 24 с., библиография: 13 наименований

Предлагается способ определения параметров углового движения наноспутника *REFLECTOR*, снабженного пассивной гравитационной системой ориентации. Система ориентации состоит из специально подобранных грузов, штанги и набора гистерезисных стержней, изготовленных из магнитомягкого материала. В качестве исходной информации используются внешнетраекторные измерения лазерным локатором расстояния до ретрорефлекторов, установленным на спутнике. Измерения предварительно обработаны и приведены к расстоянию до картинной плоскости. Определены параметры углового движения спутника на этапе успокоения с помощью фильтра Калмана и оригинального метода, основанного на обработке спектральных гармоник функции изменения расстояния. Результаты обработки измерений сравниваются с результатами моделирования.

Ключевые слова: определение ориентации, лазерный ретрорефлектор, лазерные внешнетраекторные измерения, пассивная гравитационная система ориентации, наноспутник *REFLECTOR*

Attitude Parameters Determination of the Passive Nanosatellite REFLECTOR Using Laser Tracking Control Measurements. R. Nemuchinsky, M. Ovchinnikov. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 2006, 24 p., 13 items of bibliography

The method of attitude parameters determination of the passive gravity-gradient stabilized nanosatellite *REFLECTOR* is proposed. The attitude control system consists of specially chosen loads, boom and a set of hysteresis rods fabricated from the soft magnetic material. As a given initial information the distances between a laser locator and satellite-based retroreflectors obtained at the laser tracking control sessions are used. The measurements are preprocessed and reduced to the target plane. Certain parameters of the satellite angular motion are determined during the transient motion using both the Kalman filtering and original method based on the processing of harmonics of the varying distances. Results of measurement processing are compared with simulation ones.

Key words: Attitude Determination, Laser Retroreflector, Laser Tracking Control Measurements, Passive Gravity-Gradient Attitude Control System, Nanosatellite *REFLECTOR*

Введение

Наблюдения объектов космического мусора (ОКМ) по отраженному солнечному свету с использованием обычных следящих телевизионных телескопов, имеют ряд ограничений: по времени наблюдения (ночное время) и по освещенности (ОКМ должны быть освещены Солнцем). Последнее требование тем сложнее реализовать, чем ниже орбита ОКМ. Для расширения возможностей наблюдения ОКМ и снятия различных ограничений используются телескопы с лазерной подсветкой. Однако, в отличие от оптических телескопов, юстировку и калибровку которых можно осуществлять, используя звездные скопления и двойные звезды, для калибровки телескопов с лазерной подсветкой нужны специальные спутники-мишени, поскольку высокая когерентность лазерной подсветки создает интерференционную картину, осложняющую получение детальных изображений ОКМ. С этой целью разработан и выведен на орбиту наноспутник *REFLECTOR* (Retroreflector Ensemble for Laser Experiments, Calibration, Testing & Optical Research - ретрорефлекторная система для лазерных экспериментов, калибровки, испытаний и оптических исследований) для использования его в качестве калибровочной цели применительно к наземным системам получения изображений, дальнометрии и зондирования. Этот низкоорбитальный спутник Земли несет на себе набор из сорока ретрорефлекторов, рассчитанных на работу в видимом и ближнем инфракрасном диапазоне волн, образующий пространственно-протяженную цель для наблюдения с наземных станций. Несколько из этих ретрорефлекторов используются также для создания поляризационной сигнатуры в отраженном лазерном свете.

1 Конструкция и устройство наноспутника REFLECTOR

Спутник *REFLECTOR* выведен в качестве попутной нагрузки совместно с основным спутником *METEOR-3M* на круговую орбиту высотой 1018 км с наклоном $i = 99.8^\circ$ 10 декабря 2001 года. В основу его конструкции положены критерии, связанные с его функционированием в качестве оптической калибровочной и изобразительной цели. Прежде всего, спутник должен быть виден с наземных станций как цель, состоящая из отдельных точек, образуемых ретрорефлекторами. Другим критерием является его ориентация, которая должна обеспечивать знание положений ретрорефлекторов при наблюдении с Земли в определенных точках орбиты. Это

позволит производить сравнение результатов получения изображений с известной целью. Наконец, по условиям ограниченной стоимости спутник должен быть пассивным и иметь малую массу.

Схема спутника *REFLECTOR* показана на рис. 1. После отделения от носителя центральная телескопическая штанга выдвигается, обеспечивая гравитационный восстанавливающий момент. Высота аппарата с выдвинутой штангой составляет 1430 мм. Ретрорефлекторы сгруппированы на вершине штанги, на штанге неподалеку от центра аппарата и в четырех углах его основания. Размер основания по диагонали между группами ретрорефлекторов составляет 460 мм. Общий вес аппарата составляет 7.72 кг [1].

После отделения от носителя спутник может стабилизироваться в одном из двух положений — штангой в сторону Земли или от нее, поэтому ретрорефлекторы расположены так, что они обращены как “вниз”, так и “вверх”. Таким образом, независимо от финальной ориентации, четыре отражателя на вершине штанги, четыре отражателя в центре аппарата и по два отражателя в каждом из углов основания аппарата будут направлены в сторону Земли.

Ориентация спутника *REFLECTOR* на орбите должна поддерживаться известным образом по двум причинам. Во-первых, целевые диафрагмы на ретрорефлекторах должны быть ориентированы ортогонально вектору скорости ретрорефлектора (что практически совпадает с вектором скорости центра масс) и, во-вторых, для экспериментов по получению изображений должен быть известен вид цели. Штанга обеспечивает гравитационную ориентацию спутника с минимальными по амплитуде колебаниями по тангажу и крену. Труднее осуществить управление по рысканию. Эта задача решается установкой двух дополнительных грузов (по 1.2 кг каждый) на противоположных концах бруса крестовины в основании аппарата. Эти грузы и сам брус крестовины будут стремиться занять положение в плоскости орбиты благодаря центробежным силам, действующим на них за счет вращения спутника в плоскости орбиты, так как ориентация осуществляется относительно вращающейся в инерциальном пространстве орбитальной системы координат. Значения главных центральных моментов инерции принимались следующими:

$$A = 1.633, \quad B = 1.795, \quad C = 0.256 \text{ [кг} \cdot \text{м}^2\text{]}.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости положений равновесия спутника на круговой орбите относительно орбитальной системы координат (существует четыре устойчивых положения равновесия, соответствующих расположению дополнительных грузов и штанги в плоскости орбиты) на трех взаимно перпендикулярных пластинах вблизи основании аппарата установ-

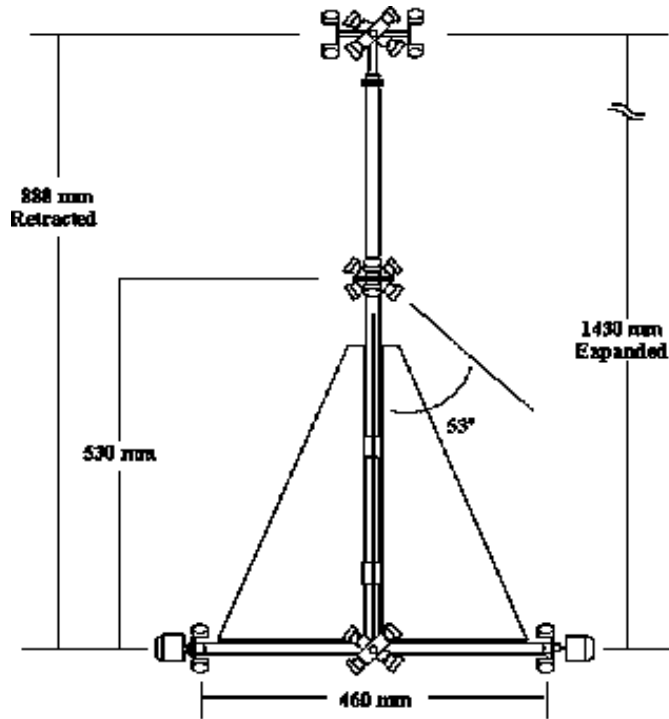


Рис. 1: Схема наноспутника *REFLECTOR* (предоставлено НИИ прецизионного приборостроения)

лены 18 стержней, изготовленные из магнитомягкого материала, обеспечивающие рассеяние энергии вращательного движения спутника за счет гистерезисных потерь при их перемагничивании в геомагнитном поле. Начальная магнитная проницаемость этих стержней $\mu_{in} \approx 25000$. Диаметр каждого стержня 0.3 мм и длина 110 мм. Таким образом, объем одного стержня равен 8 мм^3 [1]. На орбите спутника в рамках дипольной модели магнитного поля $H_0 = \frac{\mu_m}{r^3} = 15.9 \text{ А/м}$, а его напряженность меняется от 15.9 до 31.8 А/м. Финальным движением спутника будут близкие периодическим колебания в окрестности одного из указанных выше четырех положений равновесий. Причиной возникновения колебаний является взаимодействие гистерезисных стержней с геомагнитным полем. Вектор магнитной индукции, вращающийся относительно орбитальной системы координат, увлекает за счет взаимодействия с остаточной намагниченностью стержней за собой спутник, чему противодействуют восстанавливающие гравитационный момент и момент центробежных сил инерции. Их соотношение и определяет амплитуды колебаний всех трех осей спутника. Расчетные углы между осями связанной системы координат и соответствующими осями орбитальной системы координат в установившемся режиме движения показаны на рис. 2.

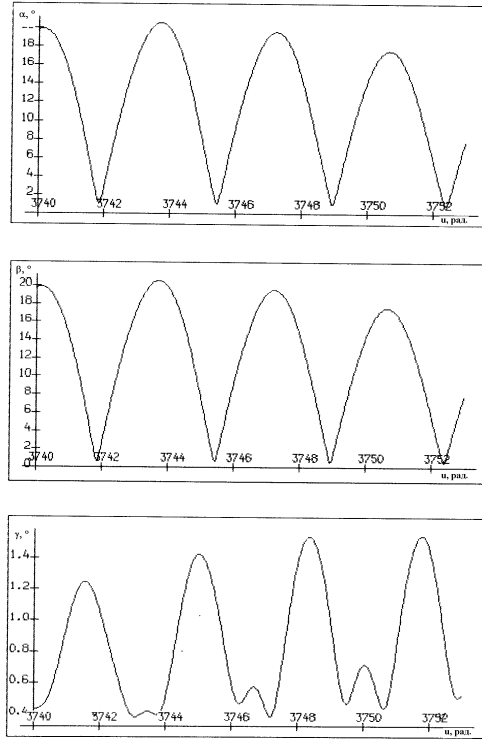


Рис. 2: Углы отклонения между осями связанной системы координат и соответствующими осями орбитальной системы координат в установившемся режиме движения

2 Постановка задачи

На наноспутнике *REFLECTOR* установлены 40 ретрорефлекторов, объединенные в шесть сборок. При движении в зоне действия наземных станций слежения международной сети ILRS спутник подсвечивается лазерным лучом, и по времени прохождения луча в обе стороны определяется расстояние до ретрорефлектора. Эти данные обрабатываются в Центре управления полетами (г.Королев, Московская область) и передаются в НИИ ПП, где и формируется *кадр сессии* — график, на котором изображены результаты измерительной сессии с одной станции слежения. Результаты сессии представляют собой набор точек, каждая точка говорит о том, что в некоторый момент времени один из ретрорефлекторов был на определенном расстоянии от так называемой *картинной плоскости*, проходящей через центр масс спутника перпендикулярно направлению лазерного луча. На графике по оси абсцисс отложено время, по оси ординат — *глубина* (расстояние от ретрорефлектора до картинной плоскости). Задача определения параметров углового движения спутника состоит из двух частей. Первая — разделить множество точек на кадре сессии, полученных от единичных отражений от рефлекторов, на классы точек, полученных от отражений от одного и то-

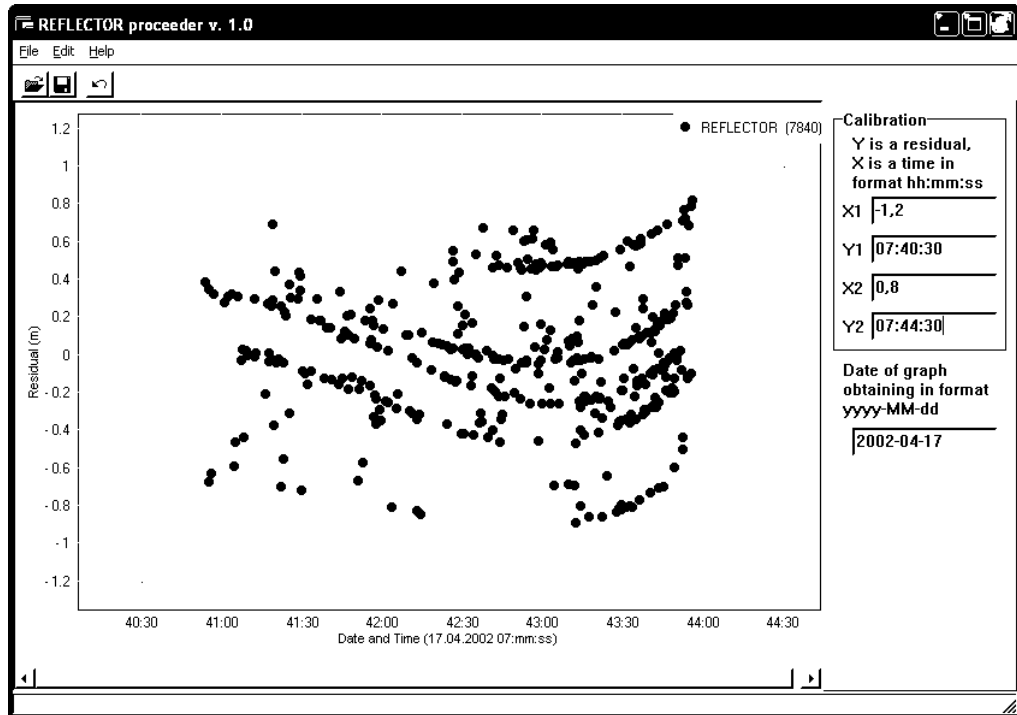


Рис. 3: Интерфейс программы для предварительной обработки данных

го же рефлектора, и определить функцию изменения глубины рефлектора для каждого класса. Вторая — по известным функциям глубины определить движение спутника. Вторая задача является чисто технической, тогда как первая относится к области распознавания образов. Эта задача гораздо труднее и ее общего решения пока не найдено.

3 Предварительная обработка данных

Данные со станций слежения поступают в виде bmp-файлов с изображениями кадров сессии. Помимо собственно кадра на изображении содержится информация о дате сессии и о том, с какой станции слежения были получены эти данные.

Для перевода данных в цифровую форму используется специальная программа REFLECTOR Proceeder (интерфейс см. на рис. 3). Файл загружается в программу командой Open. Пользователь может щелчком мышки отмечать на изображении пиксели, координаты которых нужно учесть при дальнейшей обработке, при этом на экране изменяется их цвет. Отменить выбор последней точки можно с помощью команды Undo. В полях ввода указываются координаты двух предварительно отмеченных калибровочных точек (в целях повышения точности, желательно, чтобы они были в противоположных углах кадра и как можно ближе к узлам изображенной коорди-

натной сетки) и дата сессии. После указания калибровочных точек пользователь выбирает на изображении одну из линий, на которые укладываются экспериментальные точки, и последовательно отмечает точки на ней. Для сохранения результатов требуется выполнить команду Save. Результаты сохраняются в текстовом виде в файле с тем же именем, что и у файла с изображением, но с расширением dat. В первой строке файла расположена дата сессии во внутреннем формате, принятом в MS Office (номер дня, считая от 1 января 1 года н. э.). Затем в каждой строке идут пары чисел, соответствующие каждой точке (кроме калибровочных) — глубина и время. Время также записывается во внутреннем формате MS Office (число от 0 до 1 — доля дня, прошедшая с полуночи). При необходимости обработать несколько линий с одной картинке первые полученные с нее dat-файлы необходимо копировать в другое место или переименовывать во избежание порчи их последующими файлами.

Поскольку на кадре сессии отражения от разных ретрорефлекторов невозможно отличить друг от друга, задача по определению последовательности точек, соответствующих одному и тому же ретрорефлектору, ложится на оператора, работающего с данной программой. Его задача также осложняется большими погрешностями в результатах сессии, вызванными недостаточной точностью определения положения центра масс и неоднородностями атмосферы. Для того чтобы выделить нужные кривые, оператор должен понимать какие картины возможны в принципе. Для этого он должен хорошо представлять возможные движения спутника относительно центра масс и то, какие кадры сессии они вызывают. В частности, помочь в этом могут результаты моделирования кадров сессии.

4 Определение параметров движения спутника *REFLECTOR* на этапе переходного движения

В [1] указана приближенная формула для вычисления декремента затухания

$$B \frac{d\omega}{dt} = -\frac{V_{rod}}{2\pi} (\oint HdB)_{aver}, \quad (1)$$

где V_{rod} — общий объем гистерезисного демпфера, $(\oint HdB)_{aver}$ — средняя площадь петли гистерезиса. Из данных, указанных в разделе 1, получаем $(\oint HdB)_{aver} \approx 7 \text{ Т} \cdot \text{А/м}$. Поскольку гистерезисные стержни расположены на спутнике в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, не все они перемагничиваются при вращении, так что и учитывать следует не весь объем. В среднем, во вращении будет участвовать $2/3$ от общего числа стержней, то есть 12, таким образом $V_{rod} \approx 100 \text{ мм}^3 = 10^{-7} \text{ м}^3$. Подставив эти данные в (1),

получаем $\frac{d\omega}{dt} \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}/\text{день}$, $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \approx 10^{-3} \text{Гц}/\text{день}$. Теперь получим декремент затухания из экспериментальных данных.

4.1 Используемая модель движения спутника

На начальном этапе движения наноспутника *REFLECTOR* его угловая скорость велика, тогда работу внешних моментов за время сессии наблюдения (10–15 минут) можно считать малой по сравнению с энергией вращательного движения спутника и вводятся следующие предположения: спутник — это свободно вращающееся осесимметричное твердое тело. В этом случае его движение представляет собой регулярную прецессию. Также пренебрежем поворотом картинной плоскости из-за несовпадения местной вертикали и направления луча лазера. На самом деле, этот поворот может быть весьма значительным - порядка 50° , а пренебречь им мы можем только из-за того, что на переходных этапах нас интересует только прецессия и связанные с ней скорости. Введем системы координат *OXYZ* так, чтобы одна из ее осей (для определенности ось *OZ*) совпадала с осью прецессии, а точка *O* находилась в центре масс спутника, и *Oxyz* - связанную со спутником систему координат так, чтобы ось *Oz* была направлена вдоль штанги спутника (его оси симметрии), а оси *Ox* и *Oy* были параллельны диагоналям его основания.

К сожалению, при обработке кадров сессии не представилось возможным идентифицировать отражения от ретрорефлекторов, расположенных на основании. Поэтому в работе определяется только скорость прецессии, а не обе угловые скорости.

4.2 Используемые способы обработки данных

Опишем используемые в работе способы обработки данных измерений. Начнем с дискретного преобразования Фурье.

4.2.1 Дискретное преобразование Фурье

В изложении будем следовать работе [3]. Многие физические процессы можно описать и некоторой величиной *h* как функцией времени *h(t)*, и спектром, который описывает процесс, задавая значение амплитуды *H* (в общем случае, комплексное число, определяющее также и фазу) как функцию циклической частоты *H(f)*, где $-\infty < f < \infty$. Переход от одного представления к другому и обратно осуществляется формулами Фурье

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f t} dt \quad (2)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi i f t} dt \quad (3)$$

В общем случае функция $h(t)$ дискретная и определена в равномерно распределенных по оси времени точках. Обозначим временной интервал между соседними точками Δ , тогда последовательность дискретных значений будет

$$h_n = h(n\Delta), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для любого интервала дискретности Δ существует особая частота

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \quad (5)$$

называемая *критической частотой Найквиста*. Она важна по двум различным причинам. Первую причину дает *теорема о дискретизации*: если непрерывная функция $h(t)$ дискретизирована с интервалом дискретизации Δ и ее спектр ограничен по ширине частотой, меньшей чем критическая, то есть $H(f) = 0$ для всех $|f| > f_c$, тогда функция $h(t)$ однозначно определяется дискретными значениями и равна (формула Найквиста-Котельникова)

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin(2\pi f_c(t - n\Delta))}{\pi(t - n\Delta)}. \quad (6)$$

Вторая причина заключается в том, что если условие теоремы о дискретизации не выполняется, то спектральная плотность, находящаяся снаружи частотного диапазона $-f_c < f < f_c$, фиктивно перемещается внутрь этого диапазона.

Теперь оценим Фурье-образ функции через конечное число дискретных значений. Пусть у нас есть N последовательных дискретных значений

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7)$$

Для простоты предположим, что N четное. Мы имеем N независимых данных и, очевидно, что более чем N независимых результатов нам получить не удастся. Поэтому будем искать значения Фурье-образа функции только в точках

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (8)$$

Остается аппроксимировать интеграл из (2) дискретной суммой

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}. \quad (9)$$

Сумма в (9) и называется дискретным преобразованием Фурье N точек h_k . Обозначим его

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}. \quad (10)$$

Дискретное преобразование Фурье переводит N комплексных точек h_k в N комплексных точек H_n . Оно не зависит от размерных параметров, таких как временной масштаб Δ . Соотношение между дискретным преобразованием Фурье набора чисел и непрерывным преобразованием Фурье, в котором тот же набор рассматривается как значения непрерывной функции, дискретизированные с интервалом Δ , можно записать так:

$$H(f_n) \approx \Delta H_n. \quad (11)$$

Аналогичным преобразованием интеграла из формулы (3) выводится формула для обратного дискретного преобразования Фурье

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N}. \quad (12)$$

Кроме того, имеет место дискретный вариант теоремы Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2. \quad (13)$$

В работе при проведении вычислений используется встроенный в MATLAB алгоритм быстрого преобразования Фурье FFT (Fast Fourier Transformation).

Перейдем к изложению второго используемого способа обработки данных — фильтру Калмана. Будем следовать работе [4].

4.2.2 Фильтр Калмана

Фильтр Калмана — последовательный рекурсивный алгоритм, использующий принятую модель динамической системы для получения оценки, которая может быть существенно скорректирована в результате анализа каждой новой выборки измерений во временной последовательности. При управлении динамической системой необходимо иметь информацию о ее состоянии в каждый момент времени. Однако прямое измерение всех переменных не всегда возможно и в этих случаях может быть использован фильтр Калмана, который позволяет восстановить недостающую информацию по имеющимся, скорее всего неточным измерениям.

Предполагаем, что стохастическая система может быть описана моделями динамики и измерений (для непрерывного и дискретного случаев), представленных таблицей 1. Здесь $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния динамической системы, который является случайным гауссовским процессом, \mathbf{z}_k — измерения полученные в момент времени t_k . Шум системы и шум измерений \mathbf{w}_k и ν_k также являются гауссовскими случайными процессами с нулевым математическим ожиданием. Другими словами, мы предполагаем наличие как в самой системе, так и в измерениях *белого шума*.

Модель	Непрерывное время	Дискретное время
Система	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$	$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$
Измерения	$\mathbf{z} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \nu(t)$	$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \nu_k$
Шум системы	$E\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^\top(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{Q}(t)$	$E\langle \mathbf{w}_k \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{w}_k\mathbf{w}_i^\top \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{Q}_k$
Шум измерений	$E\langle \nu(t) \rangle = 0$ $E\langle \nu(t)\nu^\top(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{R}(t)$	$E\langle \nu_k \rangle = 0$ $E\langle \nu_k\nu_i^\top \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{R}_k$

Таблица 1: Линейные модели динамики и измерений

Задача фильтрации состоит в том, чтобы найти оценку вектора состояния системы \mathbf{x}_k , которую мы будем обозначать $\hat{\mathbf{x}}_k$, являющуюся функцией измерений $\mathbf{z}_i, \dots, \mathbf{z}_k$ и которая минимизирует среднеквадратичную ошибку

$$E \left\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^\top \mathbf{M} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k] \right\rangle ,$$

где \mathbf{M} симметричная положительно определенная матрица.

Фильтр Калмана работает по схеме *прогноз — коррекция*. Допустим, что в момент времени t_{k-1} получена оценка вектора состояния системы $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, и теперь мы хотим получить оценку в точке t_k . Для этого строим прогноз оценки $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ (*априори* оценка), базируясь на $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, получаем измерения \mathbf{z}_k и далее корректируем оценку в точке t_k , базируясь на прогнозе и измерениях. Окончательно получаем (*апостериори*) оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$.

Важную роль играет второй момент случайного процесса, который также подлежит априорной и апостериорной оценке:

$$\mathbf{P}(t) = E \left\langle [\mathbf{x}(t) - E\langle \mathbf{x}(t) \rangle] [\mathbf{x}(t) - E\langle \mathbf{x}(t) \rangle]^\top \right\rangle \quad (14)$$

Большинство динамических систем и сенсоров не являются линейными. Но методы фильтрации разработанные для линейных систем, могут быть применены и для нелинейных систем. Реальные задачи часто описываются нелинейной *непрерывно-дискретной* системой (непрерывная динамическая система с дискретными измерениями), использование которой мы и продемонстрируем. Такая система выбирается в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t), \quad (15)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(t_k)) + \nu_k. \quad (16)$$

Допустим, что в момент времени $t_{k-1}(+)$ получены апостериори значения $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+)$ и $\mathbf{P}_{k-1}(+)$, то есть на шаге t_{k-1} задача фильтрации выполнена и теперь необходимо определить $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ и $\mathbf{P}_k(+)$.

Априори значения оценок вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки $\mathbf{x}_k(-)$ и $\mathbf{P}_k(-)$ можно получить путем интегрирования модельного

Модель системы	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t)$
Модель измерений	$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(t_k)) + \nu_k, k = 1, 2, \dots$
Предположения	$\mathbf{w}(t) \sim N(0, Q(t)), \nu_k \sim N(0, \mathbf{R}_k), E \langle \mathbf{w}(t) \nu_k^\top \rangle = 0$
Начальные условия	$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+), \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$
Продолжение	$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ $\dot{\mathbf{P}}(t) = F(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)F^\top(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + Q(t)$
Коэффициент обратной связи	$\bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) [\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-))\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^\top(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) + \mathbf{R}_k]^{-1}$
Уточнение вектора состояния	$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k(-)]$
Уточнение матрицы ошибки	$\mathbf{P}_k(+) = (I - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-))) \mathbf{P}_k(-)$
Обозначения	$\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}_k(-)) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)}$ $F(\hat{\mathbf{x}}(t), t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}$

Таблица 2: Расширенный фильтр Калмана

уравнения и уравнения типа Риккати

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t); \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^\top(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{Q}(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(+)$ и $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{k-1}(+)$. Так как мы рассматриваем нелинейную задачу, то в качестве матрицы $F(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ возьмем матрицу $\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}$. Выполнив данную процедуру мы получим $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$ и $\mathbf{P}_k(-)$.

Далее находим линеаризованную матрицу чувствительности $\mathbf{H}_k(\hat{\mathbf{x}}(-))$ согласно формуле $\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k(-)}$.

Определяем коэффициент обратной связи $\bar{\mathbf{K}}_k$ и находим апостериори значения $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ и $\mathbf{P}_k(+)$. Эта процедура представлена в таблице 2.

4.3 Обработка измерений с помощью дискретного преобразования Фурье

Определим какой функцией должна описываться зависимость расстояния от ретрорефлектора до картинной плоскости в случае регулярной прецессии.

Матрица перехода из системы $OXYZ$ в систему $Oxyz$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

При регулярной прецессии $\varphi = \omega t$, $\psi = \Omega t$. Чтобы получить расстояние от ретрорефлектора до картинной плоскости, нужно его радиус-вектор преобразовать из связанной системы координат в орбитальную и скалярно умножить на нормаль к картинной плоскости. Получим линейную комбинацию синусоид с циклическими частотами ω и Ω . При этом поскольку в радиус-векторе относительно точки O ретрорефлектора, установленного на штанге, ненулевой будет только Z -компонента, то функция его расстояния до картинной плоскости от времени содержит только одну гармонику. Отсюда становится ясным способ определения скоростей прецессии и собственного вращения: нужно подвергнуть сигнал дискретному преобразованию Фурье и на частотах, соответствующих угловым скоростям, появятся пики. Среди нескольких выделенных кривых найдется кривая, в спектре которой присутствует только одна частота. Это будет кривая от ретрорефлектора, расположенного на штанге, а частота будет определяться скоростью прецессии Ω . Если $\Omega = 0$, то расстояние от ретрорефлектора на штанге до картинной плоскости будет постоянным, и единственный пик в спектре рефлекторов, расположенных не на оси вращения, будет соответствовать скорости собственного вращения. Если же $\omega = 0$, тогда в спектрах кривых для всех ретрорефлекторов будет единственный пик на частоте, соответствующей частоте Ω .

Таким образом, мы можем выделить кривую, отвечающую ретрорефлектору, расположенному на штанге. Если с помощью анализа спектров это сделать не удастся, можно попробовать ее выделить как единственную кривую, отходящую от картинной плоскости на расстояние большее, чем радиус основания спутника. Зная длину штанги и расстояние, на которое ретрорефлектор, расположенный на штанге, отклоняется от картинной плоскости, можно вычислить амплитуду движения оси симметрии спутника в орбитальной системе координат.

Процедура определения скорости прецессии происходит следующим образом. Из файла считываются данные, полученные с помощью программы REFLECTOR Proceeder, описанной в разделе 3, и интерполяцией определяются значения в точках, расположенных на равном расстоянии друг от друга. В связи со спецификой работы алгоритма быстрого преобразования Фурье удобнее, чтобы таких точек было 2^n , поэтому количеством точек интерполяции выбирается наименьшая степень двойки, которая больше чем начальное число точек (результаты этого этапа отображены на рис. 6 сплош-

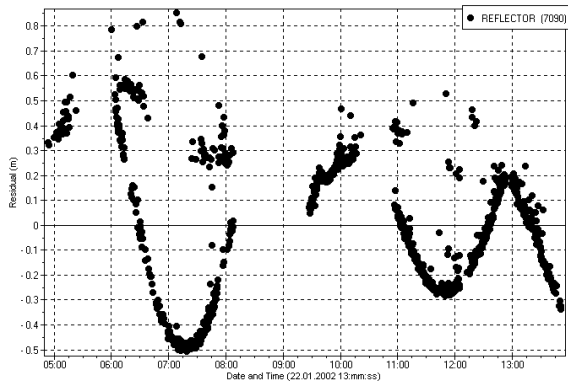


Рис. 4: Оригинальный кадр сессии, используемый для обработки данных с помощью дискретного преобразования Фурье

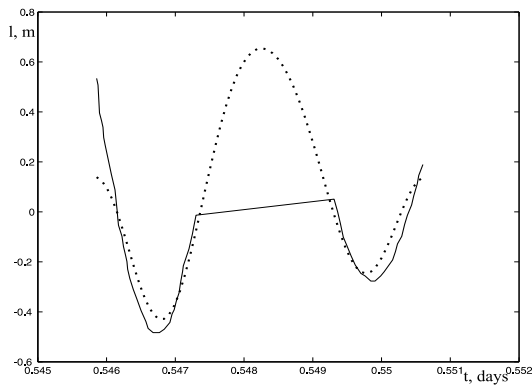


Рис. 6: Обработка данных с помощью дискретного преобразования Фурье. Сплошная линия — оцифрованные и интерполированные данные с кадра сессии, пунктирная линия — главная гармоника. По оси абсцисс — время в днях, по оси ординат — глубина в метрах

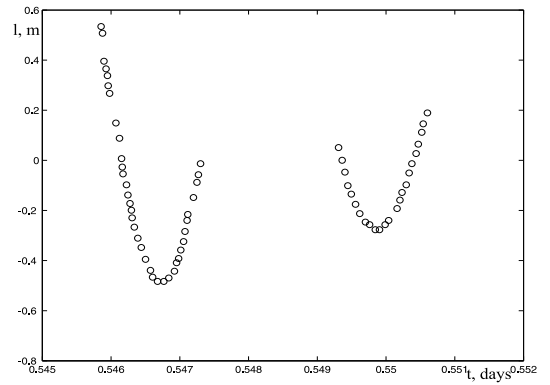


Рис. 5: Результаты обработки оригинального кадра программой REFLECTOR Proceeder

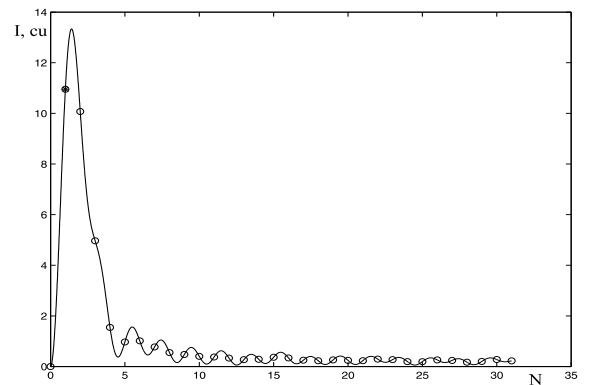


Рис. 7: Спектр функции глубины. Кружками обозначены дискретные значения. Черный кружок — главная гармоника. По оси абсцисс — интенсивность в условных единицах (cu), по оси ординат — порядковый номер гармоники (частоты гармоник кратны критической частоте Найквиста)

ной линией). Этот набор чисел подвергается дискретному преобразованию Фурье и берется максимум модуля спектра (результаты обозначены кружками), аппроксимированного по формуле (6) (сплошная линия на рис. 7). Аргументом, при котором достигается максимум и будет искомая частота. Но, как показывает практика, гармоника, отвечающая за периодическую структуру, не всегда является наиболее интенсивной, так что нужно удостовериться, что выделенный максимум принадлежит нужной гармонике. Для этого полученный дискретный спектр обнуляется во всех точках, кроме точки, наиболее близкой к максимуму (черный кружок в на рис. 7) и подвергается обратному дискретному преобразованию Фурье. Результаты обратного преобразования показаны на рис. 6 штриховой линией. В данном примере совпадение есть, значит нужная частота выбрана правильно. Примеры обработки сессий можно видеть на рис. 8 – 12.

Обработка 32 кадров сессий за 50 дней дает аппроксимированное прямой по методу наименьших квадратов выражение для частоты прецессии

$$f \approx -3 \cdot 10^{-4}t + 1.7 \cdot 10^{-2},$$

представленное на рис. 13, где по оси абсцисс указана дата сессии в днях, считая от 1 января 2002 года, а по оси ординат — полученная по результатам этой сессии частота.

4.4 Обработка измерений фильтром Калмана

В качестве модели для фильтра Калмана выберем модель, реализующую прецессионное движение. Таким образом, фазовое состояние модели будем описывать двумя угловыми координатами положения оси прецессии, углом нутации и углами и скоростями прецессии и собственного вращения. Поскольку в реальных данных по спутнику *REFLECTOR*, поступающих с ILRS, удалось идентифицировать только положения от рефлектора на штанге, связанные с собственным вращением переменные были исключены из состояния. Таким образом, среди описывающих состояние переменных осталось только пять: $\tilde{\psi}$, $\tilde{\theta}$ — углы, описывающие положение оси прецессии в сферической системе координат, θ — угол нутации, ψ — угол прецессии и Ω — угловая скорость прецессии (рис. 14). Соответствующие им динамические уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\psi}} = 0 \\ \dot{\tilde{\theta}} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\psi} = \omega \\ \dot{\Omega} = 0. \end{cases}$$

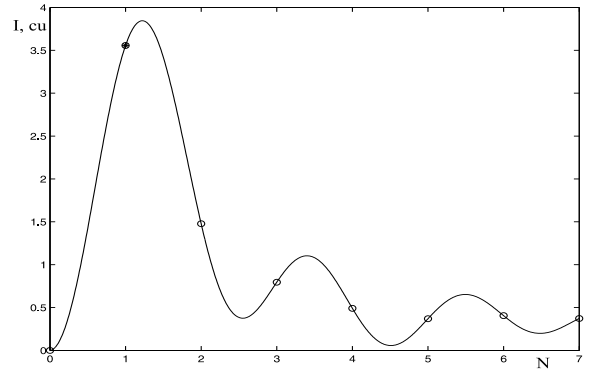
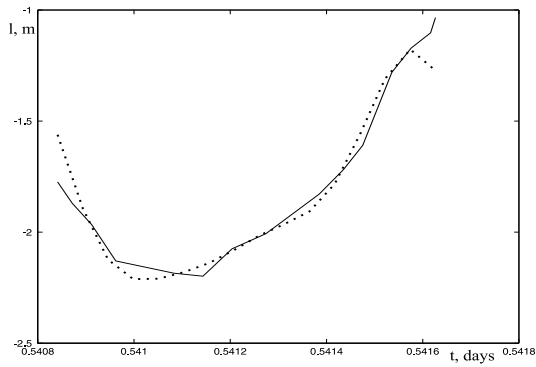


Рис. 8: Кадр сессии от 27 декабря 2001 г.

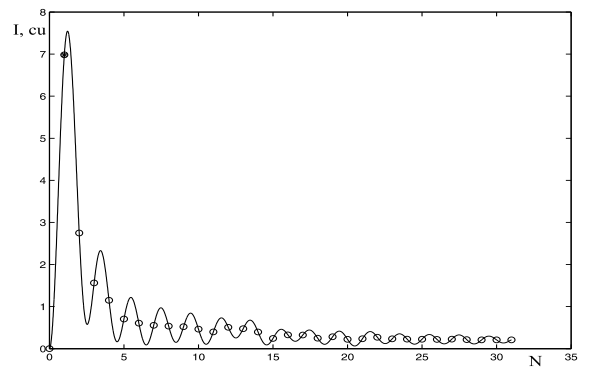
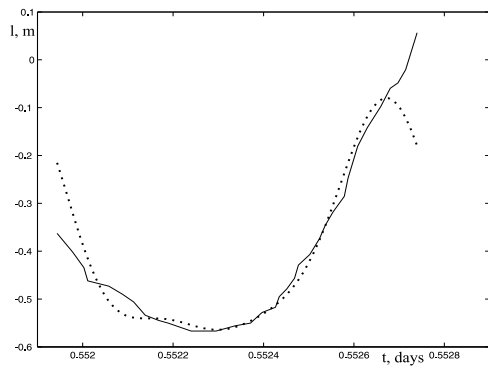


Рис. 9: Кадр сессии от 6 января 2002 г.

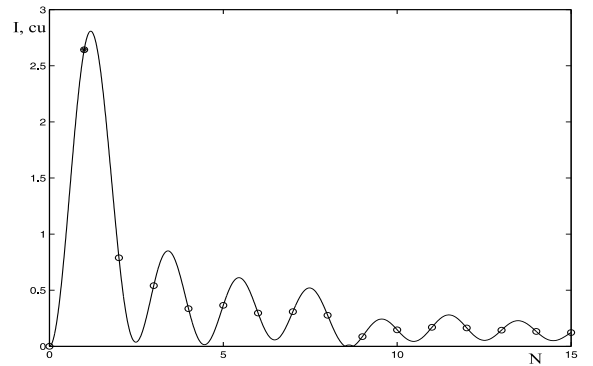
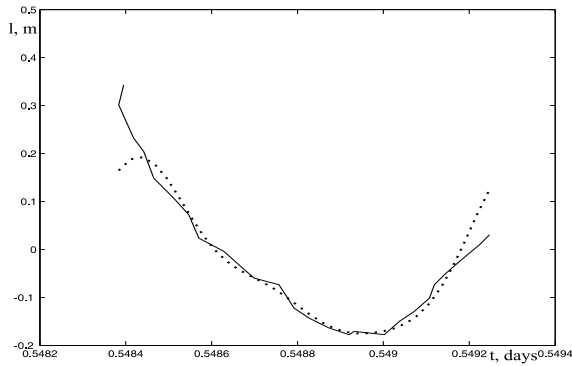


Рис. 10: Кадр сессии от 9 января 2002 г.

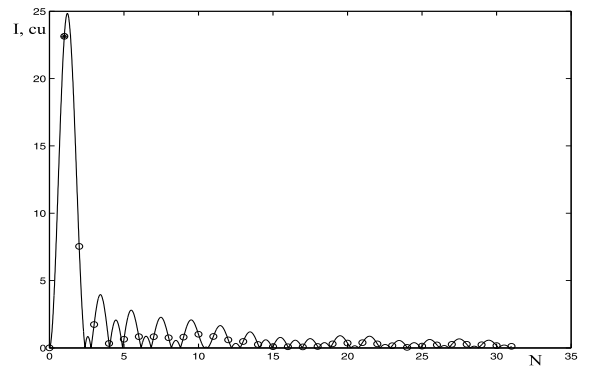
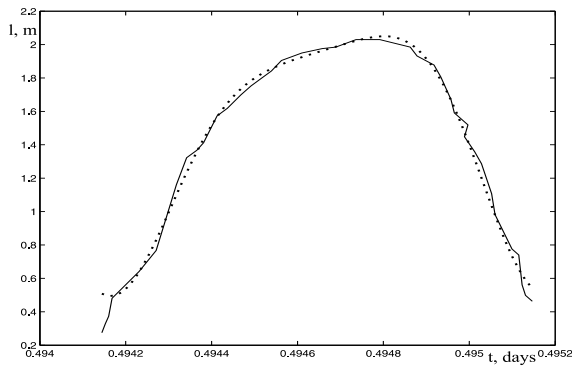


Рис. 11: Кадр сессии от 10 января 2002 г.

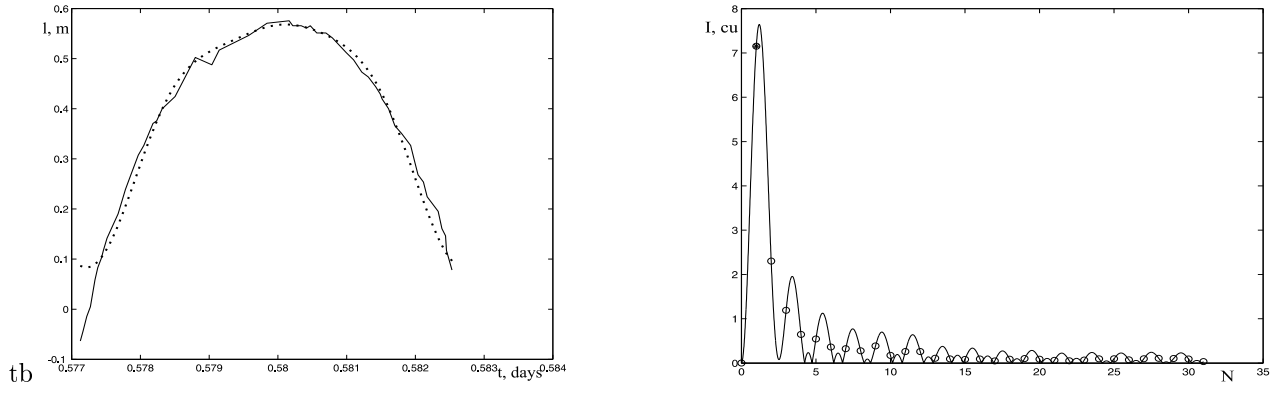


Рис. 12: Кадр сессии от 15 января 2002 г.

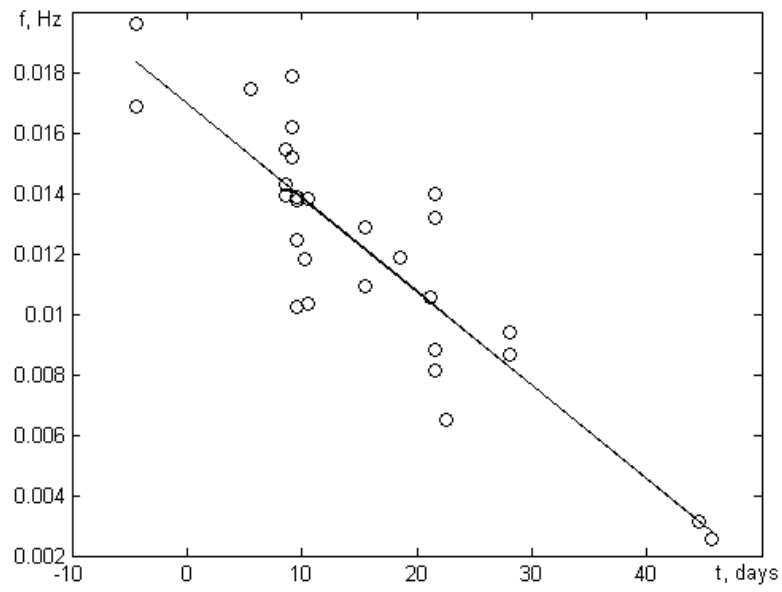


Рис. 13: Результаты обработки с помощью преобразования Фурье

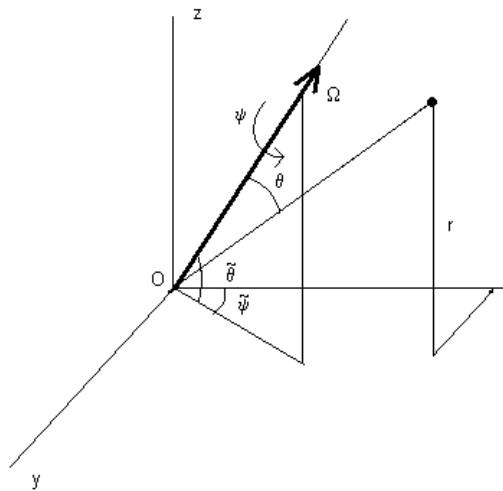


Рис. 14: Переменные в модели для фильтра Калмана

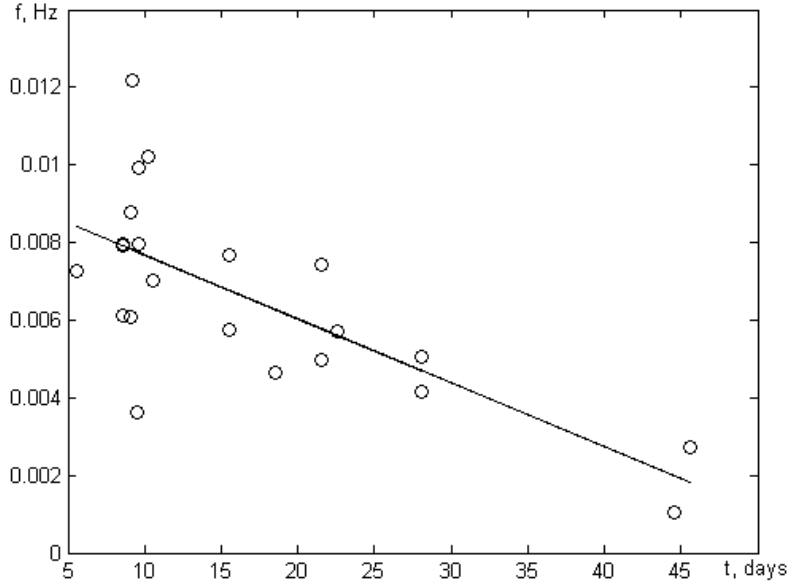


Рис. 15: Результаты обработки фильтром Калмана

Если такими динамическими уравнениями описывается вращение вектора с единичной длиной, он будет иметь координаты

$$\begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi} \sin \theta \cos \psi \sin \tilde{\theta} + \cos \tilde{\psi} \sin \theta \sin \psi + \sin \tilde{\psi} \cos \theta \cos \tilde{\theta} \\ \cos \tilde{\psi} \sin \theta \cos \psi \sin \tilde{\theta} - \sin \tilde{\psi} \sin \theta \sin \psi + \cos \tilde{\psi} \cos \theta \cos \tilde{\theta} \\ - \sin \theta \cos \psi \cos \tilde{\theta} + \cos \theta \sin \tilde{\theta} \end{pmatrix}.$$

В силу изотропности данной модели, в качестве функции измерений можно взять любую из координат. Была выбрана третья координата в силу простоты формулы, описывающей её изменение. Из-за малой длительности сессии мала для того, чтобы минимизации ошибки определения состояния системы фильтром Калмана, пришлось по результатам первого вычисления фильтром обратным интегрированием получать начальное приближение. Поскольку система простая, обратное интегрирование сводится к конечной формуле $\psi_0 = \psi_1 - \Delta t \Omega$, где ψ_0 — искомое начальное приближение, ψ_1 — значение, полученное из фильтра Калмана в конце сессии, Δt — длина сессии.

Обработка данных дает аппроксимированное прямой по методу наименьших квадратов выражение для частоты прецессии

$$f \approx -1.6 \cdot 10^{-4}t + 9 \cdot 10^{-3},$$

представленное на рис. 15, где по оси абсцисс указана дата сессии в днях, считая от 1 января 2002 года, а по оси ординат — полученная по результатам этой сессии частота. Совместно результаты, полученные двумя способами,

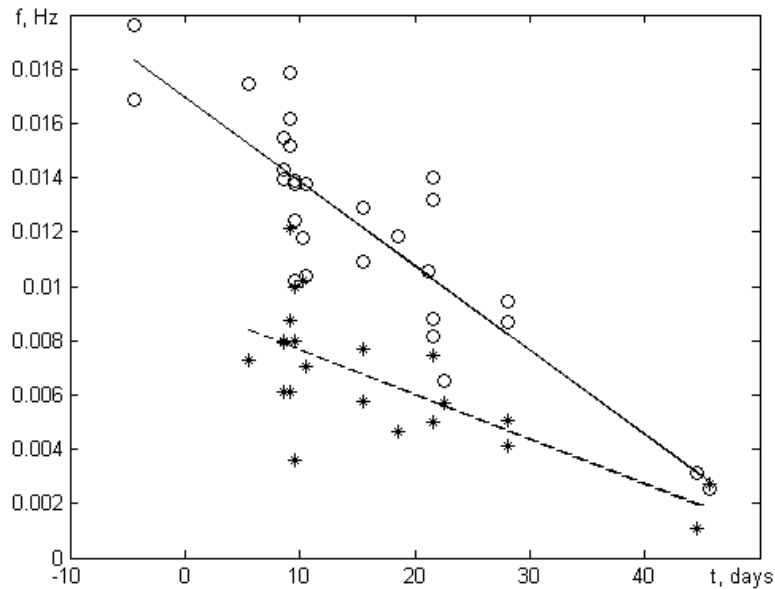


Рис. 16: Совместные результаты по определению декремента затухания

изображены на рис. 16. Результаты, полученные с помощью дискретного преобразования Фурье, обозначены кружками, а фильтром Калмана — звездочками, аппроксимирующие прямые, соответственно, сплошной и штриховой линиями.

5 Заключение

Описанные в работе методики позволяют даже при столь грубых измерениях с большой погрешностью и весьма приближенной модели движения получить достаточно близкие между собой и к теоретической величине оценки декремента затухания. Целесообразно уточнить модели, в частности, ввести учет географического положения станции слежения и параметров орбиты спутника.

Благодарности

Авторы благодарят Н.В.Третьякову за помощь при обработке сессионных кадров, Н.Н.Пархоменко за предоставление данных по спутнику *REFLECTOR*, А.А.Дегтярева и Штефана Тайля за полезные советы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 06-01-00389) и Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” Министерства образования и науки РФ (проект N 6827).

Список литературы

- [1] *М. Ю. Овчинников, В. И. Пеньков, С. А. Мурер.* Пассивная гравитационная система ориентации наноспутника REFLECTOR. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 1999, N30.
- [2] *Б. В. Раушенбах, М. Ю. Овчинников.* Лекции по динамике космического полета. М.:МФТИ, 1997.
- [3] *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling.* Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1992.
- [4] *А. А. Дегтярев, Ш. Тайль.* Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2003, N26.
- [5] *В. В. Белецкий.* Движение искусственных спутников относительно центра масс. М.: Наука, 1966.
- [6] *В. Ф. Журавлев.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.

Содержание

Введение	3
1 Конструкция и устройство наноспутника REFLECTOR	3
2 Постановка задачи	6
3 Предварительная обработка данных	7
4 Определение параметров движения спутника <i>REFLECTOR</i> на этапе переходного движения	8
4.1 Используемая модель движения спутника	9
4.2 Используемые способы обработки данных	9
4.2.1 Дискретное преобразование Фурье	9
4.2.2 Фильтр Калмана	11
4.3 Обработка измерений с помощью дискретного преобразования Фурье	13
4.4 Обработка измерений фильтром Калмана	16
5 Заключение	20
Благодарности	20
Список литературы	21