

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**В.В.Сазонов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РАЗВЕРТЫВАНИЯ ТРОСОВОЙ  
СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ МАССЫ ТРОСА**

Москва - 2006

## Аннотация

Рассматривается известная математическая модель орбитальной тросовой системы, в рамках которой трос представляется в виде совокупности материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями. Эта модель описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями и позволяет учесть массу троса и действие на трос внешних сил. Силы считаются приложенными к указанным материальным точкам и определяются их массами и другими физическими характеристиками. Модели такого рода позволяют эффективно изучать движение уже развернутой тросовой системы. В данной работе показано, как в рамках этой модели можно изучать процесс развертывания. В качестве примера исследовано развертывание троса длиной 31 км со спутника массой 6.3 т, сферическая капсула на конце троса имеет радиус 2.5 м и массу 17 кг. Основное внимание уделено оценке влияния на движение системы сил аэродинамического торможения со стороны атмосферы.

**V.V.Sazonov. Mathematical modeling of the deployment of the orbital tether system.** The well-known mathematical model of an orbital tether system treats the tether as a set of mass points that are connected in series by weightless non-stretched threads. This model is described by ordinary differential equations and allows to take into account the tether mass and action of external forces upon the tether. The forces are considered to be applied to those mass points and depend on their physical characteristics. Such models allow to study motions of a deployed tether system. The given preprint demonstrates the use of such models for analysis of the deployment processes. The demonstration is given by the example in which the tether of 31 km is winded off the satellite with the mass of 6.3 t. The spherical capsule at the tether end has the diameter of 2.5 m and the mass of 17 kg. The special emphasis is placed to evaluation of the aerodynamic drag upon this system.

**1. Введение.** В данной работе рассматривается задача о разворачивании орбитальной тросовой системы. Со спутника массой около 6300 кг на тросе выпускается капсула сферической формы массой 17 кг. Максимальная длина троса — 31 км, его диаметр — 1 мм, масса троса — 6 кг. Система спутник — трос — капсула в развернутом виде располагается вдоль геоцентрического радиуса-вектора ее центра масс. Сила натяжения троса при этом составляет около 2.7 Н. Натяжение обеспечивается градиентом гравитационного поля Земли и силами инерции. Действие обоих этих факторов пропорционально длине выпущенного троса. В процессе разворачивания системы при длине троса 3 км диаметр капсулы увеличивают с 0.7 м до 2.5 м для увеличения действия на нее силы аэродинамического сопротивления.

В процессе разворачивания трос должен быть постоянно натянут. В противном случае на нем могут образоваться петли, которые при последующем натяжении затянутся и обломаются. Самым сложным в этом отношении является начальный этап разворачивания. На нем длина троса меняется по особому закону. Этот этап заканчивается, когда трос выпущен примерно на 1 км и сила натяжения составляет около 0.07 Н. Затем выпуск троса осуществляется с постоянной скоростью 1 м/с, причем капсула движется приблизительно вдоль геоцентрического радиуса-вектора спутника в направлении центра Земли. На заключительном этапе трос выпускается с постоянным замедлением  $0.001 \text{ м/с}^2$  до тех пор, пока скорость выпуска не станет равной нулю.

Рассмотрены два закона управления выпуском троса на начальном этапе. Первый закон — кинематический. Капсула отталкивается от спутника со скоростью 1.5 м/с, которая затем с постоянным замедлением  $0.0013 \text{ м/с}^2$  переходит в скорость 1 км/с. Второй закон — силовой. Капсула отталкивается от спутника со скоростью 1 м/с, и трос выпускается так, чтобы обеспечить постоянное его натяжение с силой 0.025 Н. Скорость выпуска троса при этом сначала уменьшается до 0.2 м/с, а затем возрастает. Когда она достигает значения 1 м/с, происходит переключение на закон, обеспечивающий ее постоянство.

Основное внимание ниже уделено разработке и испытанию математической модели тросовой системы, учитывающей массу троса и действие на трос силы аэродинамического торможения. В рамках предлагаемой модели трос рассматривается как совокупность материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями. В этих точках сосредоточены и действующие на трос гравитационные силы и силы аэродинамического торможения. Их величины определяются массами и баллистическими коэффициентами соответствующих материальных точек. Модели такого рода неоднократно рассматривались ранее. Они позволяют эффективно изучать движение уже развернутой тросовой системы, однако было неясно, как в рамках такой модели изучать процесс разворачивания. Ниже предлагается возможный способ решения этой задачи. Он состоит в следующем. Выпуск

троса со спутника моделируется выпуском невесомой нерастяжимой нити с закрепленными на ней материальными точками. В момент отделения каждой такой точки от спутника число точек модели увеличивается на единицу, а их скорости меняются определенным образом.

**2. Простейшие движения связки двух тел на орбите.** Рассмотрим две материальные точки  $P_1$  и  $P_2$ , соединенные нерастяжимой нитью и двигающиеся в поле неподвижного притягивающего центра — точки  $P_0$ . Введем обозначения:  $m_i$  — масса точки  $P_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор точки  $P_i$  относительно точки  $P_0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mu$  — гравитационный параметр притягивающего центра,  $l$  — длина нити,  $T$  — сила натяжения нити. Уравнения движения точек в предположении, что нить натянута, можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\mu\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \frac{T(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\mu\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} + \frac{T(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (1)$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по времени  $t$ . Эти уравнения должны интегрироваться вместе с уравнением связи

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l \quad (2)$$

и условием  $T > 0$ .

Уравнения (1), (2) имеют простейшие решения, которые можно использовать для развертывания и движения реальной тросовой системы [1]. Сначала, приняв  $l = \text{const}$ , опишем семейство стационарных решений этих уравнений, в котором точки  $P_1$  и  $P_2$  движутся по круговым орбитам вокруг точки  $P_0$  и лежат с ней на одной прямой. Введем неизменный орт  $\mathbf{n}$  и ортогональный ему орт  $\mathbf{e}$ , вращающийся вокруг  $\mathbf{n}$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 > 0$ . Такое вращение описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{e}} = \omega_0(\mathbf{n} \times \mathbf{e}). \quad (3)$$

Будем искать решение уравнений (1), (2) в виде

$$\mathbf{r}_i = r_i\mathbf{e}, \quad r_i = \text{const} > 0 \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Подстановка последних соотношений в (2) дает  $|r_1 - r_2| = l$ . Для определенности возьмем

$$r_2 = r_1 - l, \quad r_1 > l. \quad (5)$$

Подстановка выписанных выражений в (1) с учетом равенств  $\ddot{\mathbf{e}} = \omega_0(\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{e}}) = \omega_0^2[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e})] = -\omega_0^2\mathbf{e}$  приводит к соотношениям

$$\omega_0^2 r_1 = \frac{\mu}{r_1^2} + \frac{T}{m_1}, \quad \omega_0^2 (r_1 - l) = \frac{\mu}{(r_1 - l)^2} - \frac{T}{m_2}.$$

Исключив из них  $T$ , получим уравнение

$$\omega_0^2[m_1 r_1 + m_2(r_1 - l)] = \frac{\mu m_1}{r_1^2} + \frac{\mu m_2}{(r_1 - l)^2}, \quad (6)$$

определяющее  $\omega_0$  в функции  $r_1$ . Затем найдем

$$T = m_1 \left( \omega_0^2 r_1 - \frac{\mu}{r_1^2} \right). \quad (7)$$

Здесь  $T > 0$ , поскольку

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m_1 r_1 + m_2(r_1 - l)} \left[ \frac{\mu m_1}{r_1^2} + \frac{\mu m_2}{(r_1 - l)^2} \right] > \frac{\mu}{r_1^3}.$$

В результате получено семейство стационарных решений, в котором в роли параметра выступает  $r_1$ . Решения этого семейства могут служить идеализированным описанием конечной конфигурации, получающейся в результате развертывания тросовой системы на спутнике.

Рассмотрим теперь движения точек  $P_1$  и  $P_2$ , в которых  $|\mathbf{r}_1| \gg l$ . В этом случае уравнения (1), (2) можно упростить. Положим

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad (i = 1, 2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1.$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра масс точек  $P_1$  и  $P_2$  относительно притягивающего центра,  $m_1 \mathbf{p}_1 + m_2 \mathbf{p}_2 = 0$ . Подставим в уравнения (1)  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{p}_i$  ( $i = 1, 2$ ) и, поскольку  $|\mathbf{p}_i| \ll |\mathbf{R}|$ , линеаризуем их по  $\mathbf{p}_i$ . Получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \ddot{\mathbf{p}}_1 - \frac{\mu}{|\mathbf{R}|^3} \left[ \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} - \mathbf{p}_1 \right] &= \frac{T \mathbf{r}}{m_1 l}, \\ \ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \ddot{\mathbf{p}}_2 - \frac{\mu}{|\mathbf{R}|^3} \left[ \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} - \mathbf{p}_2 \right] &= -\frac{T \mathbf{r}}{m_2 l}. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих уравнений на  $m_1$ , второе — на  $m_2$  и сложим. Будем иметь

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}. \quad (8)$$

Затем вычтем первое уравнение из второго. Получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{|\mathbf{R}|^3} \left[ \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} - \mathbf{r} \right] - \frac{T \mathbf{r}}{m l}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}. \quad (9)$$

Здесь  $m$  — приведенная масса точек  $P_1$  и  $P_2$ . Решения уравнения (9) должны удовлетворять условиям  $|\mathbf{r}| = l$ ,  $T > 0$ .

В рассматриваемом приближении уравнение (8), описывающее движение центра масс точек  $P_1$  и  $P_2$ , отделяется от уравнения (9), описывающего их относительное движение. Решение уравнения (8) возьмем в виде, соответствующем круговой орбите. С помощью введенных выше ортов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}$ , связанных уравнением (3), такое решение (точнее, семейство решений) можно представить следующим образом

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}, \quad \omega_0^2 = \frac{\mu}{R^3}. \quad (10)$$

Здесь  $R > 0$  — радиус орбиты, он играет роль параметра. Подстановка решения (3), (10) в уравнение (9) дает

$$\ddot{\mathbf{r}} = \omega_0^2[3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} - \mathbf{r}] - \frac{T\mathbf{r}}{ml}. \quad (11)$$

Введем орбитальную систему координат с базисными ортами  $\mathbf{n} \times \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}$ . Пусть в этой системе  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Тогда в скалярной форме уравнение (11) можно записать так

$$\ddot{x} + 2\omega_0\dot{z} + \frac{Tx}{ml} = 0, \quad \ddot{y} + \left(\frac{T}{ml} + \omega_0^2\right)y, \quad (12)$$

$$\ddot{z} - 2\omega_0\dot{x} + \left(\frac{T}{ml} - 3\omega_0^2\right)z = 0.$$

Из решений уравнений (12) физический смысл имеют лишь те, которые удовлетворяют условиям  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ ,  $T > 0$ .

При  $l = \text{const}$  уравнения (12) имеют стационарное решение

$$x = y = 0, \quad z = l, \quad T = 3m\omega_0^2l, \quad (13)$$

которое соответствует указанному выше семейству (3) — (7) исходных уравнений (1), (2). Точнее, семейству (3) — (7) соответствует семейство (3), (10), (13) уравнений (8), (12). Кроме того, система (12) допускает семейство нестационарных решений [1]

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = v_0(t - t_0), \quad 2v_0 + 3\omega_0x_0 = 0, \quad (14)$$

$$T = 3m\omega_0^2l, \quad l^2 = x_0^2 + v_0^2(t - t_0)^2$$

с параметрами  $v_0$  и  $t_0$ . В этом семействе длина нити, связывающей точки  $P_1$  и  $P_2$ , меняется со временем. Решения (14) могут служить идеализированным описанием процесса разворачивания тросовой системы на спутнике.

**3. Разворачивание тросовой системы с невесомым тросом.** Достаточно реалистические уравнения движения спутника и капсулы, соединенных невесомым нерастяжимым тросом, можно получить незначительным

усложнением уравнений (1). А именно, примем, что в системе, описанной в предыдущем разделе, точка  $P_1$  представляет собой спутник, точка  $P_2$  является капсулой, точка  $P_0$  совпадает с центром масс Земли. Из внешних воздействий на точки  $P_1$  и  $P_2$  будем учитывать гравитационное притяжение Земли и сопротивление атмосферы. Уравнения движения этих точек запишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{w}_1 + \frac{T(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{w}_2 + \frac{T(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (15)$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{g}(\mathbf{r}_i, t) - c_i \varrho_a(\mathbf{r}_i, t) |\mathbf{v}_i| \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \vec{\omega}_e \times \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2).$$

Здесь  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varrho_a(\mathbf{r}, t)$  — напряженность гравитационного поля Земли и плотность атмосферы в точке с геоцентрическим радиусом вектором  $\mathbf{r}$  в момент  $t$ ,  $c_i$  — баллистический коэффициент тела  $P_i$ ,  $\vec{\omega}_e$  — угловая скорость вращения Земли,  $\mathbf{v}_i$  — скорость тела  $P_i$  относительно атмосферы, которая считается вращающейся вместе с Землей.

Поскольку длина троса постоянна или меняется по предписанному закону, например, служит управлением при развертывании, уравнения (15) должны рассматриваться вместе с уравнением (2). В этом случае сила натяжения троса  $T$  находится так (ср. процедуру исключения неопределенных множителей в уравнениях Лагранжа первого рода). Продифференцируем дважды по времени уравнение  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = l^2$ , эквивалентное уравнению (2). Получим

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) + (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)^2 = \ddot{l} + \dot{l}^2$$

Подставим сюда  $\ddot{\mathbf{r}}_1$  и  $\ddot{\mathbf{r}}_2$  из уравнений (15) и разрешим получившееся соотношение относительно  $T$ . Будем иметь

$$T = m \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)^2 - \ddot{l} - \dot{l}^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) образуют замкнутую систему, которая может быть проинтегрирована численно.

Если при развертывании тросовой системы управлением служит сила натяжения троса, то (16) является соотношением для расчета  $\ddot{l}$ . Скорость  $\dot{l}$  рассчитывается по формуле  $\dot{l} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)$ .

В качестве примера вычислим решения уравнений (15), (16), близкие простейшим решениям предыдущего раздела. Параметры тросовой системы возьмем следующие:  $m_1 = 6300$  кг,  $m_2 = 17$  кг,  $l = 31$  км,  $c_1 = 0.0016$  м<sup>2</sup>/кг,  $c_2 = 0.289$  м<sup>2</sup>/кг. Параметры  $m_1$  и  $c_1$  характеризуют спутник,  $m_2$  и  $c_2$  — капсулу в виде сферы диаметром 2.5 м на конце троса.

Уравнения (15) запишем в гринвичской системе координат. Эта система вращается вместе с Землей, и уравнения (15), (16) в ней имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}\mathbf{r}_1}{dt} &= \mathbf{v}_1, & \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{a}_1 + \frac{T(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{r}_2}{dt} &= \mathbf{v}_2, & \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{a}_2 + \frac{T(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},\end{aligned}\quad (17)$$

$$T = m \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \ddot{l} - \dot{l}^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) - c_i \varrho_a(\mathbf{r}_i, t) |\mathbf{v}_i| \mathbf{v}_i - 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_i - \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \mathbf{r}_i) \quad (i = 1, 2).$$

Здесь символом  $\tilde{d}(\cdot)/dt$  обозначена производная вектора по отношению к гринвичской системе координат: если в этой системе  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ , то  $\tilde{d}\mathbf{A}/dt = (\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3)$ . Напряженность гравитационного поля Земли  $\mathbf{g}$  в гринвичской системе можно считать не зависящей от времени. При вычислении  $\mathbf{g}$  нецентральность этого поля учитывалась с точностью до членов порядка (8,8) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Плотность атмосферы рассчитывалась согласно модели ГОСТ 25645.115-84 (редакция 1990 г.). Параметры атмосферы считались неизменными. Во всех расчетах принималось  $F = F_{81} = 150$ ,  $A_p = 12$ .

Начальные условия уравнений (17) зададим следующим образом. В качестве начальных значений  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{v}_1$ , которые оставались неизменными во всех расчетах, примем значения этих величин в восходящем узле кеплеровой эллиптической орбиты спутника Земли с элементами: высота в перигее  $h_\pi = 262$  км, высота в апогее  $h_\alpha = 304$  км [здесь  $h_\pi = a(1 - e) - R_E$ ,  $h_\alpha = a(1 + e) - R_E$ ,  $a$  и  $e$  — большая полуось и эксцентриситет орбиты,  $R_E$  — экваториальный радиус Земли], долгота восходящего узла  $-152.7^\circ$ , наклонение  $62.8^\circ$ , аргумент широты перигея  $107.0^\circ$ . Полагаем, что этот восходящий узел проходит в момент  $t_0 = 04 : 15 : 01.43$  декретного московского времени 10.09.1999. Указанный момент всюду в дальнейшем считается началом отсчета времени.

Начальные значения  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  в различных вариантах расчетов выбирались по-разному. При вычислении решений уравнений (17), близких решениям (3) — (7), эти значения были взяты в виде

$$\mathbf{r}_2 = \frac{|\mathbf{r}_1| - l}{|\mathbf{r}_1|} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{|\mathbf{r}_1| - l}{|\mathbf{r}_1|} \mathbf{v}_1 + \frac{\delta v_2}{|\mathbf{r}_1|} \mathbf{r}_1, \quad (18)$$

где  $\delta v_2$  определялось условием  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$ . В таких решениях длина троса  $l$  должна оставаться неизменной, поэтому в (17) принималось  $\dot{l} \equiv 0$ ,  $\ddot{l} \equiv 0$ . Условие, определяющее  $\delta v_2$ , означает, что в начальный момент времени  $\dot{l} = 0$ .

Система (17) содержит большое число переменных, поэтому сжатое и наглядное графическое отображение ее решения требует использования ряда



вспомогательных величин. Для представления относительного движения точек  $P_1$  и  $P_2$  введем орбитальную систему координат. Орты ее базиса  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  определим соотношениями

$$\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z. \quad (19)$$

В частном случае круговой орбиты центра масс точек  $P_1$  и  $P_2$  такая система уже использовалась в предыдущем разделе. В принятых там обозначениях  $\mathbf{e}_x = \mathbf{n} \times \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}_y = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}$ . Компоненты вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  в базисе  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  обозначим  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Графики зависимости этих компонент от времени дают полное представление об относительном движении точек  $P_1$  и  $P_2$ . Поскольку  $m_1 \gg m_2$ , точка  $P_1$  практически совпадает с центром масс рассматриваемой тросовой системы:  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{R}$ . Как показано ниже, представляющие интерес движения точек  $P_1$  и  $P_2$  происходят в основном в плоскости орбиты их центра масс, причем при развернутом на полную длину тросе векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  практически коллинеарны. В такой ситуации движение развернутой тросовой системы и процесс ее развертывания удобно характеризовать графиком изменения во времени угла  $\varphi = \arctan(x/z)$ .

Поскольку точка  $P_2$  имеет весьма большой баллистический коэффициент, изменение во времени действующей на нее силы аэродинамического сопротивления оказывает значительное влияние на движение точки. Это влияние будем характеризовать графиком отношения  $K(t)$  плотности атмосферы в точке  $P_2$  в момент времени  $t$  к минимальному значению этой плотности на интервале вычисления решения уравнений (17). Важнейшей характеристикой решения является сила натяжения троса. График изменения этой силы во времени, позволяет, в частности, контролировать условие  $T > 0$ . Таким образом, графики вычисляемых вдоль решения уравнений (17) функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $K(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $T(t)$  позволяют получить достаточно полное представление о движении тросовой системы.

Решение уравнений (17) с начальными условиями (18) для  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  представлено на рис. 1. Здесь слева изображены графики функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  и  $K(t)$ , справа — графики функций  $\varphi(t)$  и  $T(t)$ . Как видно из рисунка, система совершает малые колебания относительно радиуса-вектора своего центра масс. Сопоставление графиков функций  $x(t)$ ,  $z(t)$  и  $K(t)$  показывает, что колебания в плоскости орбиты обусловлены в основном раскачкой точки  $P_2$  силой сопротивления атмосферы. Точнее, изменением этой силы во времени, вызванным изменением высоты точки  $P_2$  над поверхностью Земли из-за эллиптичности орбиты центра масс связки. Обоснованием такого предположения служит достаточно точное совпадение точек экстремума этих функций и смещение среднего значения функции  $x(t)$  в область отрицательных значений. Колебания в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, имеют

другую природу (ср. график функции  $y(t)$ ). Их амплитуда слабо возрастает, а период при  $t > 40 \cdot 10^3$  с равен половине орбитального периода.

При вычислении решений уравнений (17), близких решениям (3), (10), (14), начальные значения  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  были взяты в виде

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + x_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_z(v_0 - \omega_0 x_0) - x_0(\vec{\omega}_e \times \mathbf{e}_x). \quad (20)$$

Здесь  $2v_0 + 3\omega_0 x_0 = 0$ ,  $\omega_0$  — среднее движение начальной орбиты точки  $P_1$ , орты  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  определены формулами (19) при  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1$ ,  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}_1$ . Такие начальные условия рассматривались для  $v_0 = -1$  м/с. В этом случае  $x_0 = 574$  м, и последним слагаемым в правой части выражения для  $\mathbf{v}_2$  можно пренебречь. В уравнении (17), определяющем натяжение троса, принималось

$$l = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 t^2}, \quad \ddot{l} + \dot{l}^2 = v_0^2. \quad (21)$$

Решение уравнений (17) при указанном выборе начальных условий и зависимости длины троса от времени приведено на рис. 2. Левая сторона этого рисунка устроена аналогично левой стороне рис. 1. Его правая сторона по сравнению с рис. 1 содержит два дополнительных графика — график разности (ср. (14))  $T - 3m\omega_0^2 l$  и график скорости  $\dot{l}$ . Как видно из рисунка, отклонения точки  $P_2$  от радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  центра масс системы в построенном движении примерно такие же, как в движениях на рис. 1.

Перейдем к математическому моделированию достаточно правдоподобных сценариев развертывания тросовой системы. Рассмотрим два простых сценария. В первом управление развертыванием осуществляется только изменением  $\dot{l}$ , во втором на начальном этапе фиксируется значение  $T$ . Сценарии отличаются только начальным этапом, который является самым важным. На нем сила натяжения троса весьма мала и вследствие разного рода погрешностей может оказаться отрицательной.

Начальные значения  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  в обоих сценариях задаются одинаково

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_0(\mathbf{e}_x \cos \alpha - \mathbf{e}_z \sin \alpha), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \dot{l}_0(\mathbf{e}_x \cos \alpha - \mathbf{e}_z \sin \alpha). \quad (22)$$

Здесь  $\alpha = 120^\circ$ ,  $l_0$  и  $\dot{l}_0$  — длина троса и скорость ее изменения в момент  $t = 0$ , орты  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  определены формулами (19) при  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1$ ,  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}_1$ .

*Сценарий 1.* Зададим моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , значения длины троса  $l_0 = l(0)$ ,  $l_1 = l(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $l_4 = l(t_4)$ , скорости ее изменения  $v_0 = \dot{l}(0) = \dot{l}_0$ ,  $v_1 = \dot{l}(t_1+0)$  и значения ускорения  $w_0 = \ddot{l}(0)$ ,  $w_1 = \ddot{l}(t_3+0)$ . Эти величины должны быть согласованы между собой так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + w_0 t_1, & l_1 &= l_0 + v_0 t_1 + \frac{w_0 t_1^2}{2}, \\ l_2 &= l_1 + v_1(t_2 - t_1), & l_3 &= l_2 + v_1(t_3 - t_2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$0 = v_1 + w_1(t_4 - t_3), \quad l_4 = l_3 + v_1(t_4 - t_3) + \frac{w_1(t_4 - t_3)^2}{2}.$$

Процесс выпуска троса разобьем на пять этапов. На этих этапах длина троса и ее первые две производные по времени меняются следующим образом:

Этап 1 ( $0 \leq t < t_1$ ):

$$\ddot{l} = w_0, \quad \dot{l} = v_0 + w_0 t, \quad l = l_0 + v_0 t + \frac{w_0 t^2}{2};$$

Этап 2 ( $t_1 \leq t < t_2$ ):

$$\ddot{l} = 0, \quad \dot{l} = v_1, \quad l = l_1 + v_1(t - t_1);$$

Этап 3 ( $t_2 \leq t < t_3$ ):

$$\ddot{l} = 0, \quad \dot{l} = v_1, \quad l = l_2 + v_1(t - t_2);$$

Этап 4 ( $t_3 \leq t < t_4$ ):

$$\ddot{l} = w_1, \quad \dot{l} = v_1 + w_1(t - t_3), \quad l = l_3 + v_1(t - t_3) + \frac{w_1(t - t_3)^2}{2};$$

Этап 5 ( $t_4 \leq t$ ):

$$\ddot{l} = 0, \quad \dot{l} = 0, \quad l = l_4.$$

При выполнении условий (23) определенная выписанными соотношениями кусочно-линейная функция  $\dot{l}(t)$  является непрерывной, а функция  $l(t)$  — гладкой. В момент  $t_2$  закон выпуска троса не меняется, но происходит мгновенное (в рамках описываемой модели) увеличение баллистического коэффициента капсулы. На этапах 1 и 2 он имеет значение  $c_2 = 0.023$  м<sup>2</sup>/кг, на этапах 3, 4 и 5 — значение  $c_2 = 0.289$  м<sup>2</sup>/кг. В расчетах было принято  $v_0 = 1.5$  м/с,  $v_1 = 1$  м/с,  $w_0 = -0.0013$  м/с<sup>2</sup>,  $w_1 = -0.001$  м/с<sup>2</sup>,  $l_0 = 1$  м,  $l_2 = 3$  км,  $l_4 = 31$  км.

Решение уравнений (17) при описанном законе управления длиной троса приведено на рис. 3, 4. Рис. 3 аналогичен рис. 2. Он описывает как процесс разворачивания троса, так и последующий полет системы в развернутом состоянии. Рис. 4 более детально воспроизводит начало процесса разворачивания. На этом рисунке отсутствуют графики функции  $K(t)$  и  $T(t) - 3m\omega_0^2 l(t)$ . Как видно из рис. 4, в самом начале разворачивания натяжение троса весьма мало. В рамках данного сценария его можно увеличить, увеличив  $v_0$ . В момент  $t_1$  сила натяжения троса испытывает небольшой скачок, который на графике функции  $T(t)$  на рис. 4 изображен вертикальным отрезком. Скачок вызван разрывом функции  $\dot{l}(t)$  (ср. выражения для  $\dot{l}$  на этапах 1 и 2). Аналогичные небольшие скачки происходят в точках  $t_3$  и  $t_4$ . Сгладив функцию

$\ddot{l}(t)$  за счет некоторого усложнения закона выпуска троса, можно обеспечить гладкость функции  $T(t)$  в окрестности указанных точек.

Графики  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  на рис. 3 показывают, что процесс разворачивания троса хотя и происходит в окрестности движения (14), но сильно возмущен. При  $t > t_4$  в соответствии с [1] в функции  $x(t)$  доминирует периодическая составляющая с частотой  $\sqrt{3}\omega_0$ , в функции  $y(t)$  присутствует составляющая с частотой  $2\omega_0$  и медленно возрастающей амплитудой. Эти составляющие обусловлены собственными колебаниями тросовой системы как твердого тела в форме спицы под действием приложенного к нему гравитационного момента. Неустойчивость вызвана резонансом 1:2 между частотой изменения силы аэродинамического сопротивления, приложенной к точке  $P_2$ , и одной из собственных частот спицы (ср. с неустойчивостью на рис. 1).

*Сценарий 2* также содержит 5 этапов, разделенных моментами времени  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  ( $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ), но момент  $t_1$  окончания первого этапа теперь не определен заранее. На первом этапе трос разматывается так, что сила его натяжения постоянна и равна заданному значению  $T_0 > 0$ . Этот этап описывается первыми четырьмя уравнениями (17) при  $T = T_0$ . Скорость выпуска троса при таком разматывании рассчитывается по формуле

$$\dot{l} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{l}.$$

В некотором диапазоне изменения  $T_0$  и  $\alpha$  в (22) эта скорость сначала убывает, а потом возрастает. Момент  $t_1$  определяется условием  $\dot{l}(t_1) = v_1$ . По этой причине  $T_0$  и  $\alpha$  надо выбрать так, чтобы выписанное уравнение относительно  $t_1$  имело положительный корень. При  $l_1 = l(t_1) < l_2 = 3$  км этапы 2 — 5 можно определить так же, как в сценарии 1. На этих этапах движение спутника и капсулы описывается полной системой уравнений (17), в которой длина троса  $l$  определяется приведенными выше формулами. При сшивке этапов 1 и 2 функции  $\mathbf{r}_i(t)$ ,  $\mathbf{v}_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ), разумеется, должны быть непрерывны в точке  $t_1$ , но сила натяжения троса в этой точке может испытать малый скачок из-за скачка  $\ddot{l}$ . Ситуация здесь в точности такая же, как в сценарии 1. Немного усложнив закон выпуска троса и обеспечив гладкость  $\ddot{l}(t)$ , можно обеспечить гладкость функции  $T(t)$  в окрестности точки  $t_1$ .

Решение уравнений (17) для сценария 2 приведено на рис. 5, 6. Эти рисунки аналогичны рис. 3, 4. В расчетах было принято  $T_0 = 0.025$  Н,  $\dot{l}_0 = 1$  м/с, параметры этапов 2 — 5 сохранили прежние значения. Про движение, представленное на рис. 5 и 6, можно повторить все сказанное выше о рис. 3, 4. Однако возмущенное движение в сценарии 2 оказалось несколько меньше, чем в сценарии 1. Возможно это связано с тем, что на этапе 1 скорость выпуска троса в сценарии 2 заметно ниже, чем в сценарии 1. Кроме того, этап 1 в сценарии 2 более чем в 4 раза длиннее этапа 1 в сценарии 1.

**4. Математическая модель орбитальной тросовой системы, учитывающая массу троса.** Математическую модель орбитальной тросовой системы, учитывающую массу троса, построим в виде совокупности материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями [2]. Пусть  $N$  — натуральное число,  $P_1, P_2, \dots, P_N$  — материальные точки, образующие такую модель. Точки  $P_i$  и  $P_{i+1}$  соединены невесомой нерастяжимой нитью длины  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ). В рамках этой модели точка  $P_1$  — спутник, точка  $P_N$  — капсула, а точки  $P_2, \dots, P_{N-1}$  и примыкающие к ним нити — трос. Введем обозначения:  $m_i, c_i$  и  $\mathbf{r}_i$  — масса, баллистический коэффициент и геоцентрический радиус-вектор точки  $P_i$ ,  $T_i$  — сила натяжения нити между точками  $P_i$  и  $P_{i+1}$ . Уравнения движения точек в предположении, что все нити натянуты, можно записать в виде (ср. (17))

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{r}_1}{dt} &= \mathbf{v}_1, & \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{a}_1 + \frac{T_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i, & \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_i}{dt} &= \mathbf{a}_i + \frac{T_{i-1}(\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i)}{m_i|\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i|} + \frac{T_i(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{m_i|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \\ & & (i = 2, 3, \dots, N - 1), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{r}_N}{dt} = \mathbf{v}_N, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_N}{dt} = \mathbf{a}_N + \frac{T_{N-1}(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N)}{m_N|\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N|}.$$

Здесь символ  $\tilde{d}(\cdot)/dt$  по-прежнему означает производную вектора по отношению к гринвичской системе координат, величины  $\mathbf{a}_i$  определены формулами (17) теперь и в случае  $i > 2$ .

Если длины нитей постоянны, то уравнения (24) следует дополнить соотношениями

$$|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \quad (25)$$

выражающими условия нерастяжимости нитей. Эти соотношения позволяют найти силы натяжения  $T_i$  с помощью процедуры, применяемой при исключении реакций связей в уравнениях Лагранжа первого рода. Определение сил выполняется следующим образом. Возведем каждое соотношение (25) в квадрат и продифференцируем его дважды по времени, записывая производные векторов в гринвичской системе координат. Получим

$$(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \cdot \left( \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_{i+1}}{dt} - \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_i}{dt} \right) + (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Подставим сюда производные  $\tilde{d}\mathbf{v}_i/dt$  из уравнений (24). После несложных преобразований придем к системе относительно  $T_i$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) T_1 - \frac{A_2}{m_2} T_2 = B_1, \\
& -\frac{A_i}{m_i} T_{i-1} + \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} \right) T_i - \frac{A_{i+1}}{m_{i+1}} T_{i+1} = B_i \\
& \quad (i = 2, \dots, N-2), \\
& -\frac{A_{N-1}}{m_{N-1}} T_{N-2} + \left( \frac{1}{m_{N-1}} + \frac{1}{m_N} \right) T_{N-1} = B_{N-1}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$A_i = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|}, \quad B_i = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) + (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|}.$$

Система (26) имеет трехдиагональную матрицу. Для строк этой матрицы в силу оценок  $|A_i| \leq 1$  ( $i = 2, 3, \dots, N-1$ ) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{|A_2|}{m_2} > 0, \\
& \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{|A_i|}{m_i} - \frac{|A_{i+1}|}{m_{i+1}} \geq 0 \quad (i = 2, \dots, N-2), \\
& \frac{1}{m_{N-1}} + \frac{1}{m_N} - \frac{|A_{N-1}|}{m_{N-1}} > 0.
\end{aligned}$$

Неравенства выписаны в порядке следования строк и означают, что указанная матрица удовлетворяет условиям диагонального преобладания [3]. Следовательно, система (26) не вырождена, и ее решение может быть найдено методом прогонки. Подставив решение системы (26) в уравнения (24) получим замкнутую систему уравнений относительно  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Эта система может быть проинтегрирована численно, причем при каждом вычислении ее правой части необходимо решать систему (26). В процессе интегрирования следует проверять выполнение неравенств  $T_i > 0$  — описанный способ решения системы (24), (25) физически содержателен только в том случае, когда все нити натянуты.

Описанным способом система (24), (25) решается и в ситуации, когда длины нитей — заданные функции времени. Ниже рассматривается случай, когда меняется только длина нити между точками  $P_1$  и  $P_2$ . В этом случае свободный член  $B_1$  в системе (26) вычисляется по формуле

$$B_1 = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - l_1 \ddot{l}_1 - \dot{l}_1^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

В качестве примера приведем решение уравнений (24), (25), описывающее малые колебания тросовой системы в окрестности положения, в котором она вытянута вдоль радиуса-вектора своего центра масс. Параметры системы зададим из следующих соображений. Поскольку точки  $P_1$  и  $P_N$  моделируют спутник и капсулу, положим  $m_1 = 6300$  кг,  $m_N = 17$  кг,  $c_1 = 0.0016$  м<sup>2</sup>/кг,  $c_N = 0.289$  м<sup>2</sup>/кг. Длины всех нитей примем одинаковыми:  $l_i = l/(N - 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ),  $l = 31$  км — длина троса. Массы и баллистические коэффициенты точек  $P_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N - 1$ ) также возьмем одинаковыми:  $m_j = m'/(N - 2)$ ,  $c_j = lD/m' \approx 5$  м<sup>2</sup>/кг,  $m' = 6$  кг и  $D = 1$  мм — масса и диаметр троса. В частности, при  $N = 40$  имеем  $l_i \approx 816$  м,  $m_j \approx 0.2$  кг.

Начальные условия решения зададим следующим образом. Начальные значения  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{v}_1$  возьмем такие же, как в предыдущем разделе. Начальные значения остальных точек зададим в виде (ср. (18))

$$\mathbf{r}_i = \frac{(N - 1)|\mathbf{r}_1| - (i - 1)l}{(N - 1)|\mathbf{r}_1|} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}_i = \frac{(N - 1)|\mathbf{r}_1| - (i - 1)l}{(N - 1)|\mathbf{r}_1|} \mathbf{v}_1 + \frac{\delta v_i}{|\mathbf{r}_1|} \mathbf{r}_1,$$

причем  $\delta v_i$  выберем из условий (ср. (25))  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}) = 0$  ( $i = 2, \dots, N$ ). Последние условия можно удовлетворить так. Сначала рассматривается условие для  $i = 2$  и находится величина  $\delta v_2$ , затем рассматривается условие для  $i = 3$  и находится  $\delta v_3$  и т. д. На каждом таком шаге определяется только одна величина  $\delta v_i$ .

Система уравнений (24) содержит большое число переменных, поэтому графическое представление ее решения должно быть сжатым. Воспользуемся введенной выше орбитальной системой координат. Орты ее базиса задаются формулами (19), где по-прежнему  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра масс рассматриваемой системы материальных точек, только теперь этот радиус-вектор вычисляется по более общей формуле

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1$  в базисе  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  обозначим  $x, y, z$ . Графики зависимости этих компонент от времени дают полное представление об относительном движении точек  $P_1$  и  $P_N$  — спутника и капсулы. Поскольку

$$m_1 \gg \sum_{i=2}^N m_i,$$

точка  $P_1$  практически совпадает с центром масс всей тросовой системы:  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{R}$ . Представляющие интерес движения точек  $P_1, P_2, \dots, P_N$  происходят вблизи плоскости орбиты их центра масс, причем при развернутом на полную длину тросе векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  почти коллинеарны. Такие движения удобно

характеризовать графиком изменения во времени угла  $\varphi = \arctan(x/z)$ . Ситуация здесь похожа на ситуацию с невесомым тросом, поэтому прежний выбор переменных для описания движения капсулы относительно спутника остался без изменений. По причинам, указанным выше, вместе с графиками функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  будем приводить график отношения  $K(t)$  плотности атмосферы в точке  $P_N$  в момент времени  $t$  к минимальному значению этой плотности на интервале вычисления решения уравнений (24).

В каждый момент времени рассматриваемая механическая система представляет собой ломаную с вершинами в точках  $P_1, P_2, \dots, P_N$ . Эта ломаная близка к отрезку  $P_1P_2$ , и ее можно характеризовать максимальным отклонением от него. Такое отклонение обозначим  $d$ . Оно равно максимуму среди расстояний точек  $P_2, \dots, P_{N-1}$  от отрезка  $P_1P_2$ .

Важнейшими характеристиками решения являются силы натяжения нитей. Совокупность этих сил можно описать величинами

$$T_{\min} = \min_{i \in I} T_i, \quad T_{\max} = \max_{i \in I} T_i, \quad I = \{1, 2, \dots, N - 1\}.$$

Таким образом, графики вычисляемых вдоль решения уравнений (24) функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $K(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $d(t)$ ,  $T_{\min}(t)$  и  $T_{\max}(t)$  позволяют получить достаточно полное представление о движении рассматриваемой механической системы.

Решение уравнений (24), (25) с описанными начальными условиями при  $N = 40$  приведено на рис. 7. Как уже говорилось, вычисленное решение описывает колебания системы относительно радиуса-вектора ее центра масс. Амплитуда этих колебаний заметно выше амплитуды колебаний на рис. 1, рассчитанных без учета массы троса и действия на него силы аэродинамического сопротивления. Наглядное представление об этом дает сравнение графиков функции  $\varphi(t)$  на рис. 1 и 7. В целом, несмотря на некоторые количественные отличия, движения капсулы относительно спутника на рис. 1 и на рис. 7 очень похожи. Сходство движений проявляется, в частности, в одинаковом поведении функций  $y(t)$ . Решения уравнений (24), (25), вычисленные при  $N = 20$  и при  $N = 80$ , дают практически те же графики, которые представлены на рис. 7.

Как видно из графика функции  $d(t)$  на рис. 7, ломаная  $P_1P_2 \dots P_N$  близка к отрезку  $P_1P_2$ . Анализ функций  $d(t)$  и  $x(t)$  показывает, что движение троса близко к движению твердого тела в форме спицы. Сравнительно высокочастотные колебания функции  $d(t)$  обусловлены собственными колебаниями троса. Такие колебания стали возможны, поскольку в рассматриваемой модели учитывается масса троса.

Сравнение графиков функций  $T_{\min}(t)$  и  $T_{\max}(t)$  на рис. 7 с графиком  $T(t)$  на рис. 1 показывает, что в новой модели натяжение троса несколько возросло. Это также обусловлено учетом массы троса. Строго говоря, величины



$T_{\min}(t)$  и  $T_{\max}(t)$  не позволяют судить о силах натяжения  $T_i(t)$  в функции  $i$  при фиксированном  $t$ . Однако все выборочные проверки показали выполнение равенств  $T_{\min} = T_{N-1}$ ,  $T_{\max} = T_1$ . Следовательно, натяжение троса вблизи спутника несколько больше его натяжения вблизи капсулы.

**5. Математическое моделирование разворачивания орбитальной тросовой системы с учетом массы троса.** Процесс разворачивания тросовой системы в рамках модели предыдущего раздела можно описать так. Трос представим в виде невесомой нерастяжимой нити, к которой с одинаковым шагом  $a$  прикреплены материальные точки одинаковой массы  $m$ . Один конец троса соединен со спутником — материальной точкой массы  $M_1$ , другой его конец прикреплен к капсуле — материальной точке массы  $M_2$ . Расчет разворачивания такого троса происходит по следующему правилу. До тех пор, пока длина  $l$  выпущенного троса не превосходит  $a + \lambda$  ( $0 < \lambda \ll a$ ), процесс разворачивания описывается в рамках модели невесомого троса. Эта модель была описана в разделе 2, начальный участок процесса разворачивания совпадает с начальным участком процесса, рассмотренного в разделе 3. В момент  $\tau_1$ , определяемый условием  $l(\tau_1) = a + \lambda$ , двухмассовая модель разделов 2, 3 с массами  $M_1$  и  $M_2$  преобразуется в трехмассовую модель предыдущего раздела с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  ( $N = 3$ ). Значения новых масс:  $m_1 = M_1 - m$ ,  $m_2 = m$ ,  $m_3 = M_2$ . В момент преобразования масса  $m_3$  помещается в ту же точку пространства, в которой находилась масса  $M_2$ . Масса  $m_2$  прикрепляется к нити между массами  $M_1$  и  $M_2$  на расстоянии  $a$  от массы  $M_2$  и, следовательно, на расстоянии  $\lambda$  от массы  $M_1$ . Масса  $m_1$  помещается на продолжении отрезка  $M_1M_2$  за точку  $M_1$  так, чтобы центр масс системы  $\{m_1, m_2\}$  совпадал с этой точкой. В дальнейшем движении длина нити между массами  $m_2$  и  $m_3$  остается неизменной и равной  $a$ , выпуск же троса осуществляется за счет изменения длины нити между массами  $m_1$  и  $m_2$ .

Пересчет координат и скоростей масс  $M_1$  и  $M_2$  в координаты и скорости масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  выполняется так. Пусть  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{V}_i$  — радиус-вектор и скорость массы  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathbf{r}_j$  и  $\mathbf{v}_j$  — радиус-вектор и скорость массы  $m_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), причем все векторные величины относятся к гринвичской системе координат и моменту времени  $\tau_1$ . Тогда в соответствии со сказанным выше

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{a}{a + \lambda} \mathbf{R}_1 + \frac{\lambda}{a + \lambda} \mathbf{R}_2, \quad (27)$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{M_1(a + \lambda) - ma}{(M_1 - m)(a + \lambda)} \mathbf{R}_1 - \frac{m\lambda}{(M_1 - m)(a + \lambda)} \mathbf{R}_2.$$

Справедливы соотношения

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 = -\frac{m\lambda}{(M_1 - m)(a + \lambda)} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1),$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_1 = \frac{\lambda}{a + \lambda}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \frac{\lambda M_1}{M_1 - m}.$$

Последнее из них означает, что в момент  $\tau_1$  трос стал скачком длиннее на  $\lambda m / (M_1 - m)$ . При  $m = 0.2$  кг,  $M_1 = 6300$  кг и  $\lambda = 2$  м удлинение составляет 0.06 мм.

Чтобы получить формулу пересчета скоростей, рассмотрим соотношение, связывающее скорости масс  $M_1$  и  $M_2$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) + u\mathbf{e}. \quad (28)$$

Здесь  $\mathbf{e} = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) / |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$  — орт направления от массы  $M_1$  к массе  $M_2$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость этого орта по отношению к гринвичской системе координат,  $u = \dot{l}(\tau_1)$  — скорость выпуска троса. Аналогичным образом скорость массы  $M_1$  можно связать со скоростями масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  (поскольку все эти точки лежат на прямой  $M_1 M_2$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1) + u_1\mathbf{e}, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_1) + u_2\mathbf{e}, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_1) + u_3\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (29)$$

и скорости масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  друг с другом

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + (u_2 - u_1)\mathbf{e}, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + (u_3 - u_2)\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Величины  $u_i$  здесь пока не определены. Из последних формул с учетом принятого определения векторов  $\mathbf{r}_i$  следует, что

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = u_2 - u_1, \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| = u_3 - u_2.$$

Нить между массами  $m_2$  и  $m_3$  имеет постоянную длину, поэтому последняя из выписанных производных равна нулю и  $u_3 = u_2$ . Первая из этих производных представляет собой скорость выпуска троса в момент  $\tau_1 + 0$ . Скорость выпуска троса не должна испытывать скачков, поэтому следует принять  $u_2 - u_1 = u$ . Еще одно соотношение для определения величин  $u_i$  можно получить, потребовав выполнения естественного в данной задаче условия

$$M_1 \mathbf{V}_1 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

Оно сводится к уравнению  $(M_1 - m)u_1 + m u_2 = 0$ . Теперь можно найти

$$u_1 = -\frac{m u}{M_1}, \quad u_2 = u_3 = \frac{(M_1 - m)u}{M_1}.$$

Чтобы воспользоваться формулами (29), необходимо еще найти  $\boldsymbol{\Omega}$ , точнее, векторное произведение  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}$  — в силу принятого определения векторов  $\mathbf{r}_i$  имеют место равенства

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1) = -\frac{m\lambda}{M_1 - m} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}), \quad \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_1) = \lambda (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}),$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_1) = (a + \lambda) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}).$$

Формулу для этого векторного произведения получим из соотношения (28):

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 - u\mathbf{e}}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|}.$$

Окончательные формулы для расчета скоростей  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  представим в виде

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_1 - \frac{m\lambda}{M_1 - m} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}) - \frac{mu}{M_1} \mathbf{e}, \quad (30)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_1 + \lambda (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}) + \frac{(M_1 - m)u}{M_1} \mathbf{e}.$$

Формулу для  $\mathbf{v}_3$  можно записать аналогично, но с учетом дальнейших приложений представим ее следующим образом:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{e} \delta u_3, \quad (31)$$

где  $\delta u_3$  определяется из условия

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

В данном случае  $\delta u_3 = u_3 - u = -mu/M_1$ . Следовательно, в момент  $\tau_1$  скорость капсулы меняется скачком. При  $m = 0.2$  кг,  $M_1 = 6300$  кг и  $u = 1$  м/с скачок скорости составляет  $3.2 \cdot 10^{-5}$  м/с.

При  $t > \tau_1$  процесс разворачивания троса описывается уравнениями (24), (25), в которых  $N = 3$ ,  $l_2 = a = \text{const}$ ,  $l_1 = l_1(t)$  — функция времени. Начальные условия вычисляемого решения задаются при  $t = \tau_1$  соотношениями (27), (30) и (31). В момент  $\tau_2$ , определяемый условием  $l_1(\tau_2) = a + \lambda$ , трехмассовая модель тросовой системы преобразуется в аналогичную четырехмассовую. Новая модель описывается уравнениями (24), (25) при  $N = 4$ . Пересчет масс, координат и скоростей точек модели при таком преобразовании выполняется по изложенной выше схеме. Дополнительно приходится корректировать скорость четвертой массы, моделирующей капсулу. Эта коррекция выполняется после коррекции скорости третьей массы и использует формулу, аналогичную формуле (31). Затем осуществляется переход к пяти-массовой модели и т. д.

Опишем подробно переход от модели с  $N-1$  массой к модели с  $N$  массами. Этот переход происходит в момент времени  $\tau_{N-2}$ . Массы, радиусы-векторы и скорости точек модели, рассматриваемой в момент  $\tau_{N-2} - 0$ , обозначим  $M_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{V}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ). Аналогичные характеристики модели в момент  $\tau_{N-2} + 0$  обозначим  $m_j$ ,  $\mathbf{r}_j$  и  $\mathbf{v}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Все указанные векторы относятся к гринвичской системе координат. Имеют место соотношения  $m_1 = M_1 - m$ ,  $m_2 = m$ ,  $m_i = M_{i-1}$  ( $i = 3, \dots, N$ ), и если проследить всю последовательность усложнений модели, то можно установить равенства  $m_3 = m_4 = \dots = m_{N-1} = m$ . В момент преобразования масса  $m_i$  ( $i > 2$ ) помещается в ту же точку пространства, в которой находилась масса  $M_{i-1}$ , т. е.  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{i-1}$ . Масса  $m_2$  прикрепляется к нити между массами  $M_1$  и  $M_2$  на расстоянии  $a$  от массы  $M_2$  и на расстоянии  $\lambda$  от массы  $M_1$ . Масса  $m_1$  помещается на продолжении отрезка  $M_1M_2$  за точку  $M_1$  так, чтобы центр масс системы  $\{m_1, m_2\}$  совпадал с этой точкой. Векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  задаются формулами (27). В дальнейшем длины нитей между массами  $m_i$  и  $m_{i+1}$  ( $i = 2, 3, \dots, N-1$ ) остаются неизменными и равными  $a$ , выпуск троса осуществляется за счет изменения длины нити между массами  $m_1$  и  $m_2$ . Скорости  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  этих масс определяются формулами (30), где теперь  $u = \dot{l}(\tau_{N-2})$ . Скорости  $\mathbf{v}_i$  при  $i > 2$  находятся последовательно по формулам (ср. (31))

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{i-1} + \frac{\mathbf{R}_{i-1} - \mathbf{R}_{i-2}}{|\mathbf{R}_{i-1} - \mathbf{R}_{i-2}|} \delta u_i,$$

где  $\delta u_i$  определяется из условия нерастяжимости нити между массами  $m_i$  и  $m_{i-1}$

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}) = 0.$$

В качестве примера приведем решение уравнений (24), (25), в котором движение спутника и капсулы близко движению (3), (10), (14). Полагаем, что расстояние  $a$  между материальными точками на тросе достаточно велико и в начале движения модель системы содержит только две массы. Соответствующие уравнения движения имеют вид (17), начальные значения  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  задаются формулами (20). Чтобы такое движение было возможно, должно выполняться неравенство  $a > |x_0|$ . Параметры начальной модели возьмем те же, что и в разделе 2,  $\lambda = 2$  м. Параметры  $m_i = m$ ,  $l_i = a$  и  $c_i = c$  ( $i = 2, 3, \dots, N-1$ ) будем рассчитывать по формулам раздела 3, задавшись максимальным значением  $l_{\max} = 31$  км и некоторым максимальным значением  $N_{\max}$ :

$$m = \frac{m'}{N_{\max} - 2}, \quad a = \frac{l_{\max}}{N_{\max} - 1}, \quad c = \frac{l_{\max} D}{m'}.$$

Величина  $N_{\max}$  ограничена сверху условием  $a > |x_0|$ .

При  $0 \leq t < \tau_1$  закон управления длиной  $l$  троса возьмем в виде (21), при  $\tau_N \leq t < \tau_{N+1}$  закон управления длиной  $l_1$  нити между массами  $m_1$  и  $m_2$  — в виде

$$l_1 + Na = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 t^2}. \quad (32)$$

Левая часть последней формулы выражает длину ломаной  $P_1 P_2 \dots P_{N+2}$ , так что эту формулу следует считать модификацией формулы (21) для рассматриваемой модели тросовой системы. Формула (32) позволяет найти моменты  $\tau_N$  в явном виде

$$\tau_N = \frac{\sqrt{(Na + \lambda)^2 - x_0^2}}{v_0} \quad (N = 1, 2, \dots, N_{\max} - 2).$$

В расчетах использовались именно эти значения  $\tau_N$ . Для повышения точности преобразования моделей величины  $a + \lambda$  и  $\lambda$  в приведенных выше формулах заменялись величинами  $|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$  и  $|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| - a$ . Хотя, в принципе, такой замены можно было бы и не делать — разности между соответственными величинами не превышали десятых долей миллиметра. Чтобы контролировать точность моделирования, на каждом шаге численного интегрирования длина троса, вычисляемая как длина соответствующей ломаной (на отрезке  $\tau_N \leq t \leq \tau_{N+1}$  рассматривается ломаная  $P_1 P_2 \dots P_{N+2}$ ), сравнивалась с правой частью формулы (32). В течение всего процесса модуль разности этих величин также не превышал десятых долей миллиметра.

Вычисленное описанным способом движение тросовой системы показано на рис. 8. Здесь приведены графики введенных в предыдущем разделе функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $K(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $d(t)$ ,  $T_{\min}(t)$  и  $T_{\max}(t)$ , а также график скорости выпуска троса  $\dot{l}(t)$ . Графики функций  $T_{\min}(t)$  и  $T_{\max}(t)$  изображены в одной системе координат. Расчет проводился при  $N_{\max} = 40$  на отрезке  $0 \leq t \leq \tau_{N_{\max}-1}$ . Аналогичный расчет в случае  $N_{\max} = 20$  дает близкий результат. Сравнение рис. 2 и 8 показывает, что учет массы троса и действующих на него сил аэродинамического сопротивления привел к увеличению возмущенного движения. Такое увеличение оказалось не очень большим и было ожидаемо.

Интересно сравнить движение, представленное на рис. 8, с движением на рис. 7. Последнее выглядит более возмущенным. Судя по графикам функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , в нем интенсивнее колеблется капсула, и, главное, судя по графикам функции  $d(t)$ , существенно иначе ведет себя трос. В движении на рис. 8 не заметны высокочастотные колебания троса, трос меньше отклоняется от прямой линии. По-видимому, начальные условия движения на рис. 7 были выбраны неудачно — без учета возмущающего действия атмосферы. При развертывании же трос двигался естественно и каким-то образом "минимизировал" действие на него возмущающих сил.

Предложенная многомассовая модель позволяет исследовать сценарии 1 и 2 развертывания тросовой системы, которые в разделе 3 изучались в рамках двухмассовой модели. Реализация этих сценариев в более сложной модели осуществляется практически без изменений. Закон выпуска троса представим в виде  $l(t) = l_1(t) + [N(t) - 2]a$ , где  $N(t)$  — число масс в модели в момент времени  $t$ ,  $l_1(t)$  — закон изменения расстояния между массами  $m_1$  и  $m_2$ . Внутри интервалов  $\tau_k < t < \tau_{k+1}$  функция  $N(t)$  постоянна:  $N(t) \equiv k + 2$ , и приведенная формула позволяет по  $l(t)$  найти  $l_1(t)$ . В частности, внутри этих интервалов  $\dot{l}(t) \equiv \dot{l}_1(t)$ . Последнее соотношение по непрерывности переносится и в точки  $\tau_k$ .

Расчет точек  $\tau_N$  производился так. Интегрирование уравнений (24) выполнялось методом Дормана и Принса 8(7)-го порядков с автоматическим контролем точности [4]. Это — метод типа Рунге-Кутты. С его помощью решение вычислялось последовательно на дискретном множестве точек (моментов времени). В каждой такой точке находилась величина  $l_1^* = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Как только в одной из точек выполнялось неравенство  $l_1^* > a + \lambda$ , в уравнениях (24) осуществлялся переход от независимой переменной  $t$  к независимой переменной  $l_1^*$ . Преобразованные уравнения вместе с уравнением для времени

$$\frac{dt}{dl_1^*} = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}$$

интегрировались по  $l_1^*$  от последней вычисленной точки до точки  $l_1^* = a + \lambda$ , в которой  $t = \tau_N$ . Обычно такое нестандартное интегрирование<sup>1</sup> выполняется за 1 — 2 шага. Дополнительным контролем точности вычислений при моделировании (помимо автоматического контроля, реализованного в стандартной процедуре интегрирования) служило сравнение величины  $l_1^*$  с величиной  $l_1(t)$ , рассчитываемой через закон выпуска троса. Их разность не превышала нескольких миллиметров.

Результаты моделирования в случае  $N_{\max} = 40$  представлены на рис. 9 — 12. Рис. 9, 10 построены с использованием сценария 1, рис. 11, 12 иллюстрируют сценарий 2. Параметры обоих сценариев здесь взяты такими же, как в разделе 3. Рис. 9 и 11 устроены аналогично рис. 8. На них показан процесс развертывания системы и ее последующий полет в развернутом состоянии. Рис. 10 и 12 в увеличенном масштабе иллюстрируют начало процесса. Некоторые малоинформативные графики на них отсутствуют. Сравнение рис. 9 — 12 с рис. 3 — 6 показывает, что при учете массы троса и действующих на него сил аэродинамического сопротивления (главным образом последних) колебания капсулы стали заметно больше. Некоторые экстремальные значения функций  $x(t)$  и  $y(t)$  увеличились по модулю в 1.5 — 2 раза. Однако в целом значимого изменения хода развертывания не произошло.

<sup>1</sup>Аналогично находится корень уравнения  $\dot{l}(t_1) = v_1$  в сценарии 2.

Результаты моделирования при  $N_{\max} = 20$  незначительно отличаются от результатов, представленных на рис. 9 — 12. При  $N_{\max} = 80$  изменяется начальный участок. Величина  $a$  оказывается малой, и появление первой массы на тросе происходит на уже этапе 1, где  $\ddot{l}_1 \neq 0$ . Соответствующий пример приведен рис. 13, иллюстрирующем начальный участок для сценария 2. Указанный эффект однако практически не сказывается на процессе в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00451).

## Литература

- [1] Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М., Наука, 1990.
- [2] Петров А.Л. Конечно-разностный метод расчета движения гибкой нити в гравитационном поле. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1988, № 147.
- [3] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М., Наука, 1985.
- [4] Хайрер Э., Нерсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., Мир, 1990.

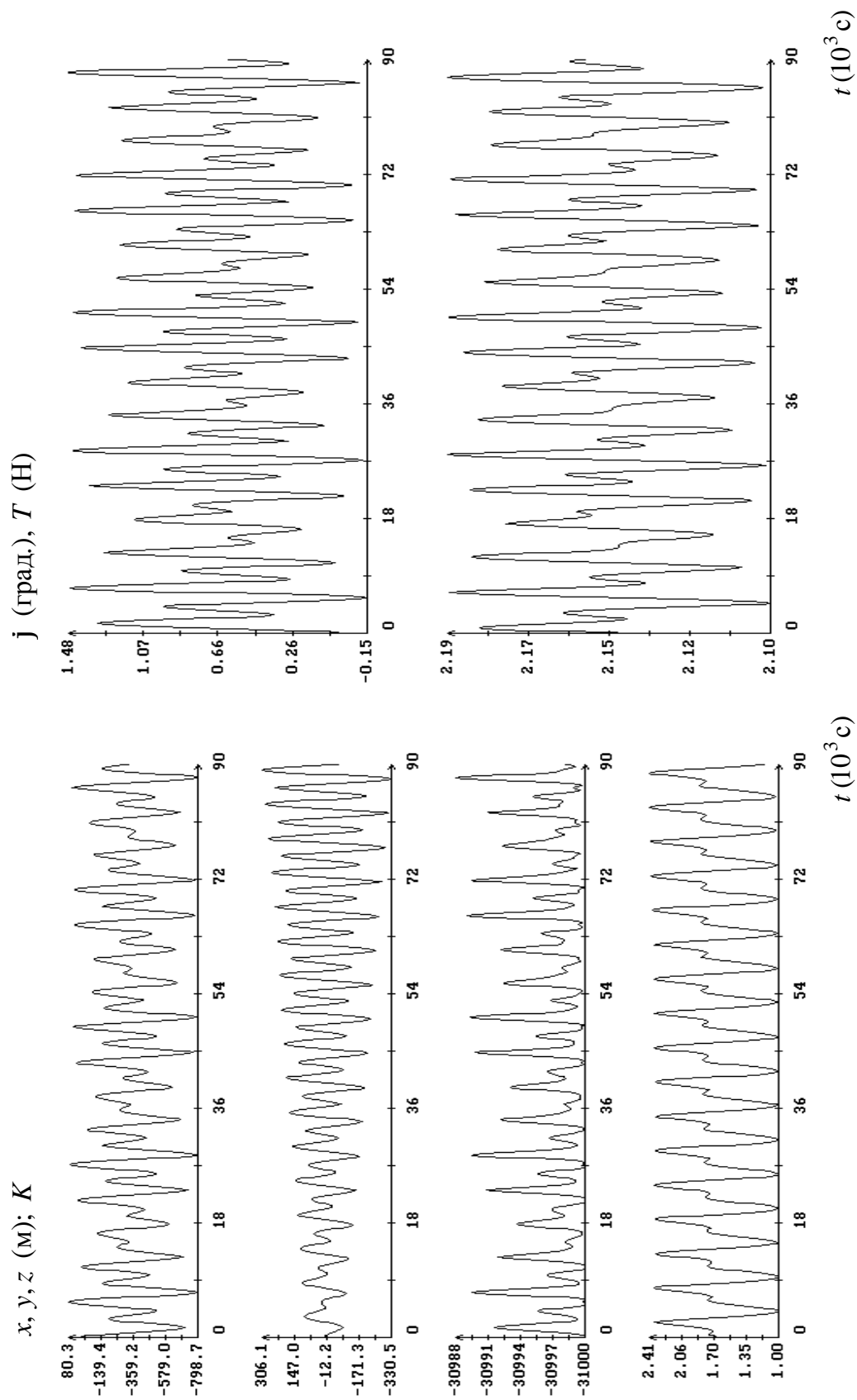


Рис. 1. Движение развернутой тросовой системы. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.



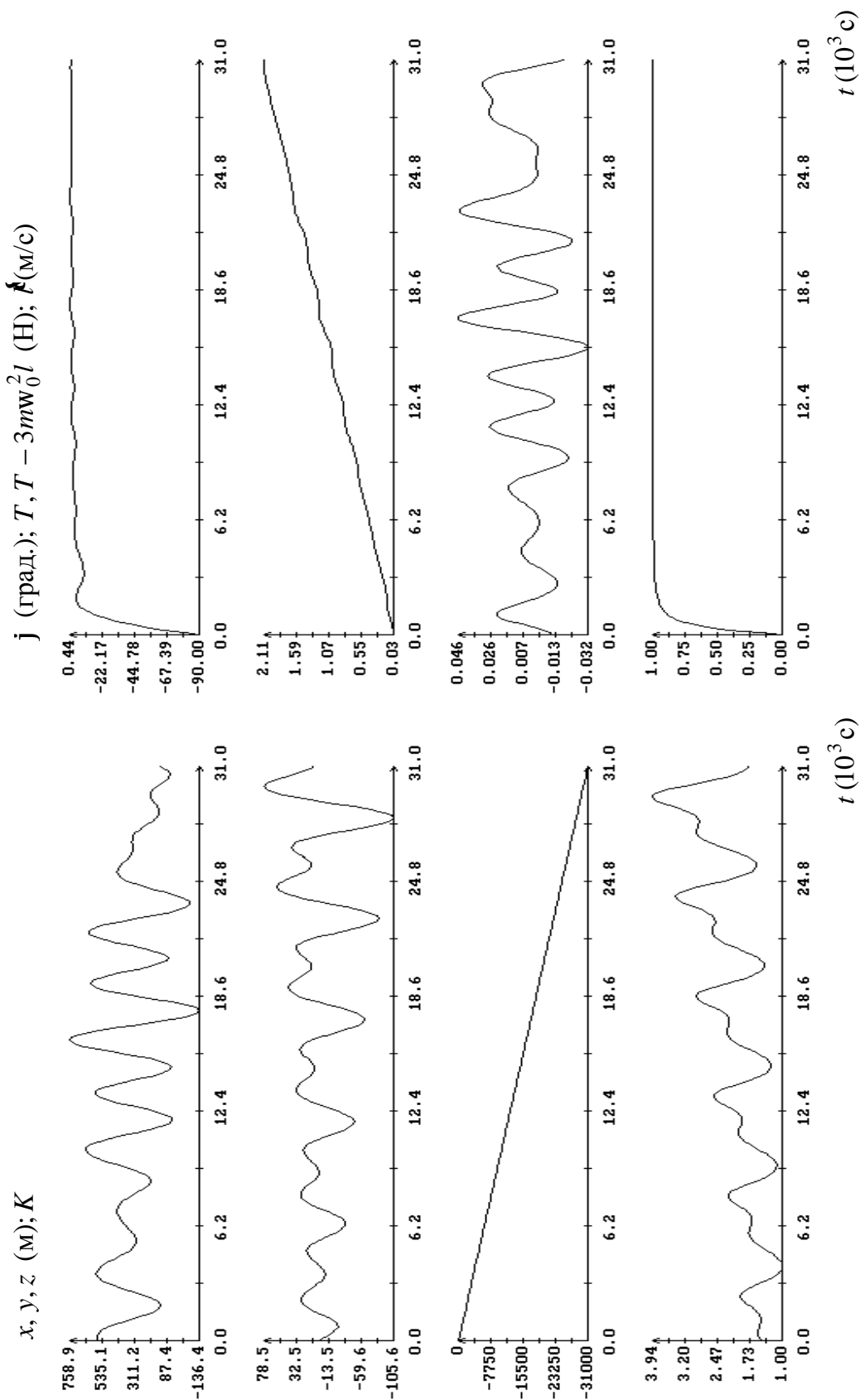


Рис. 2. Развертывание тросовой системы. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.

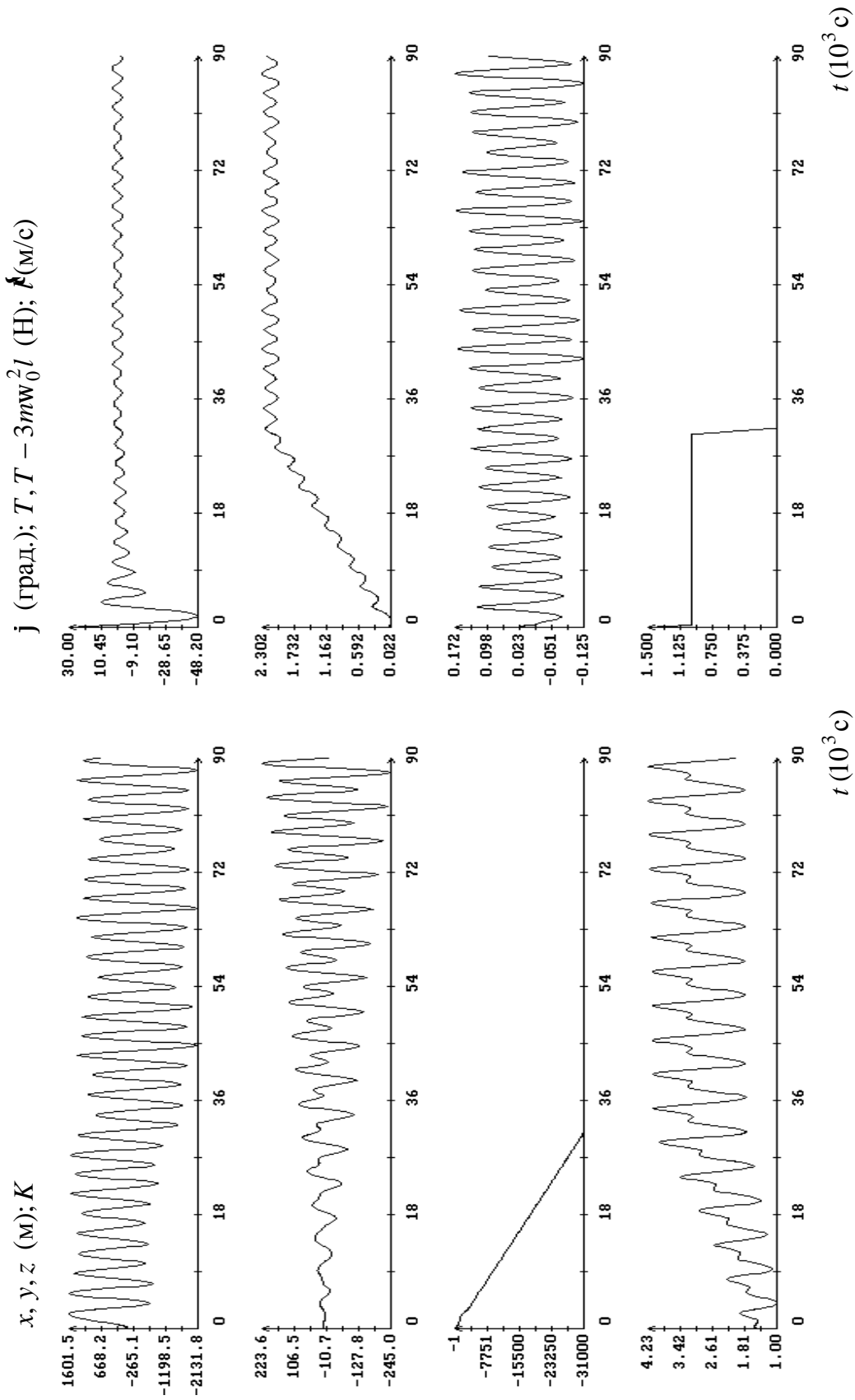


Рис. 3. Развертывание тросовой системы по сценарию 1. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.

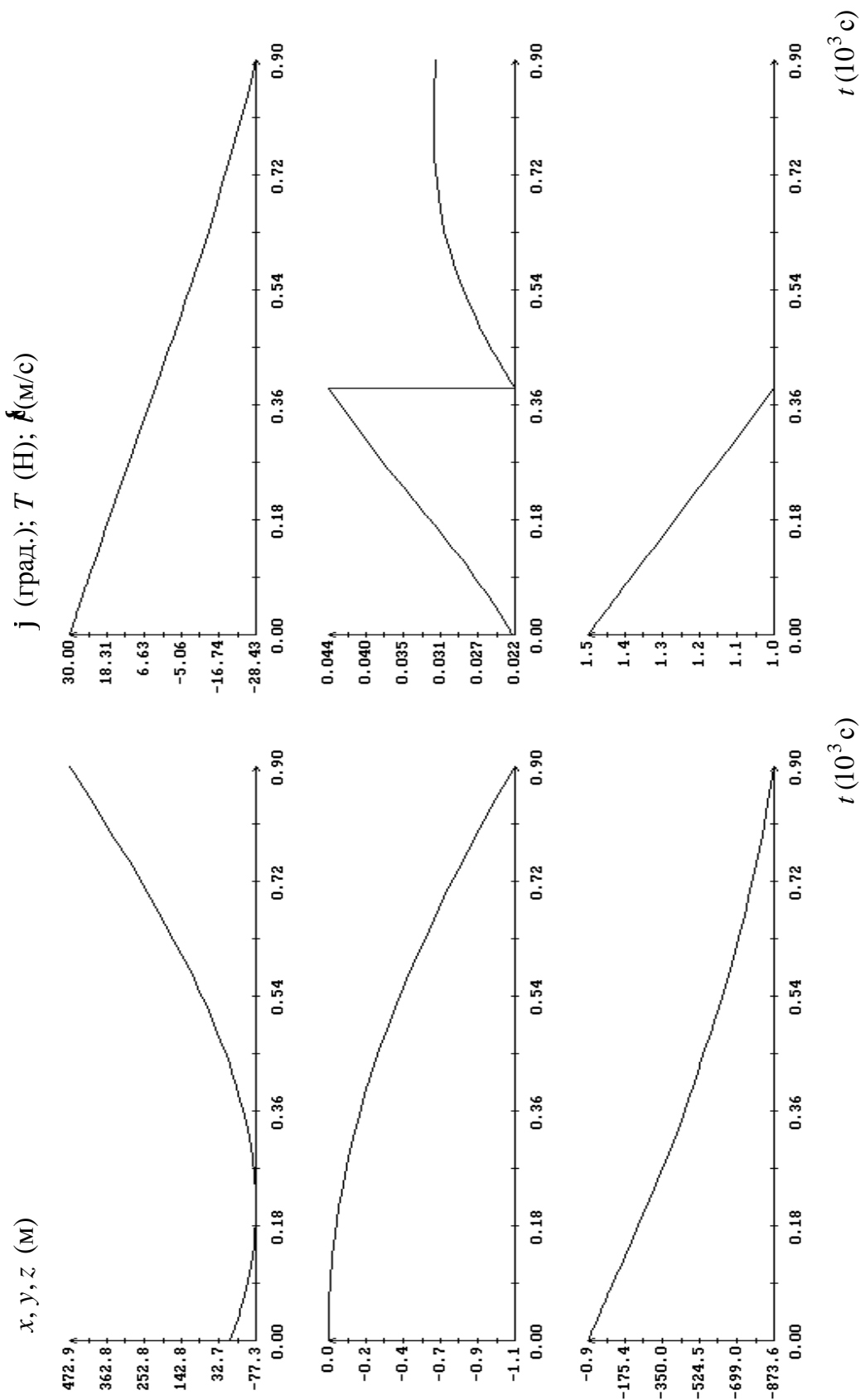


Рис. 4. Развертывание тросовой системы по сценарию 1, начальный участок. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.

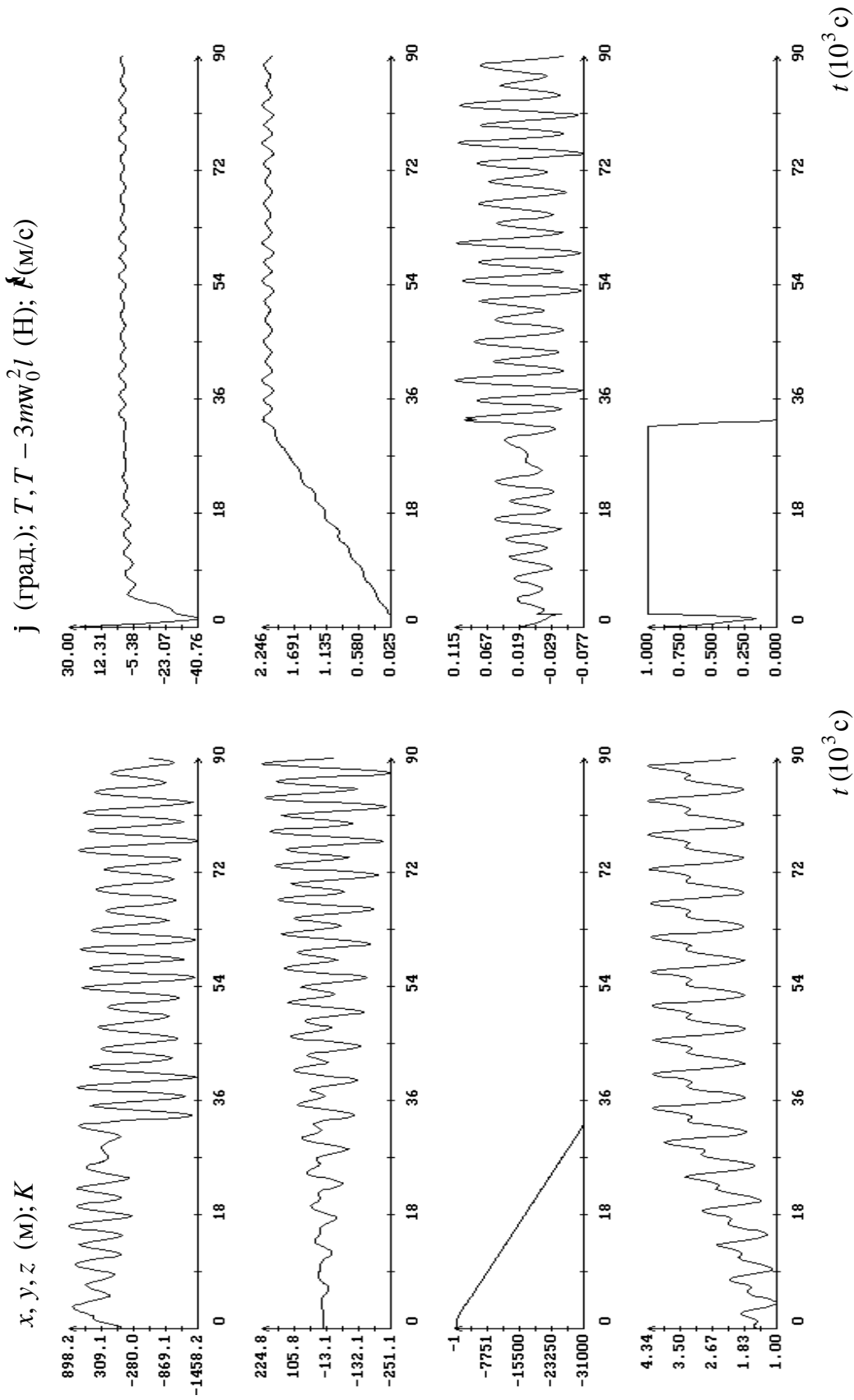


Рис. 5. Развертывание тросовой системы по сценарию 2. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.

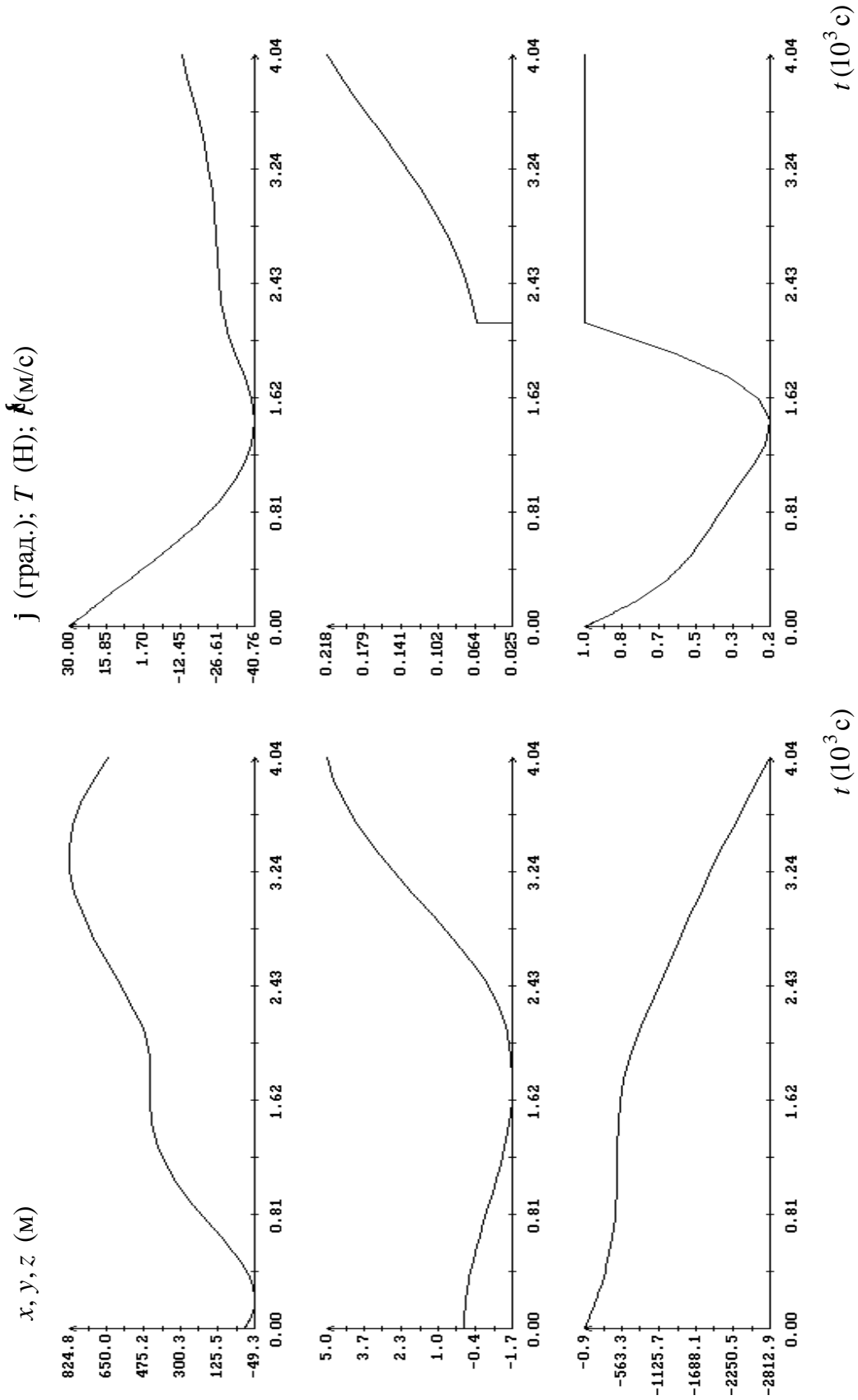


Рис. 6. Развертывание тросовой системы по сценарию 2, начальный участок. Масса троса и действие на трос аэродинамических сил не учитываются.

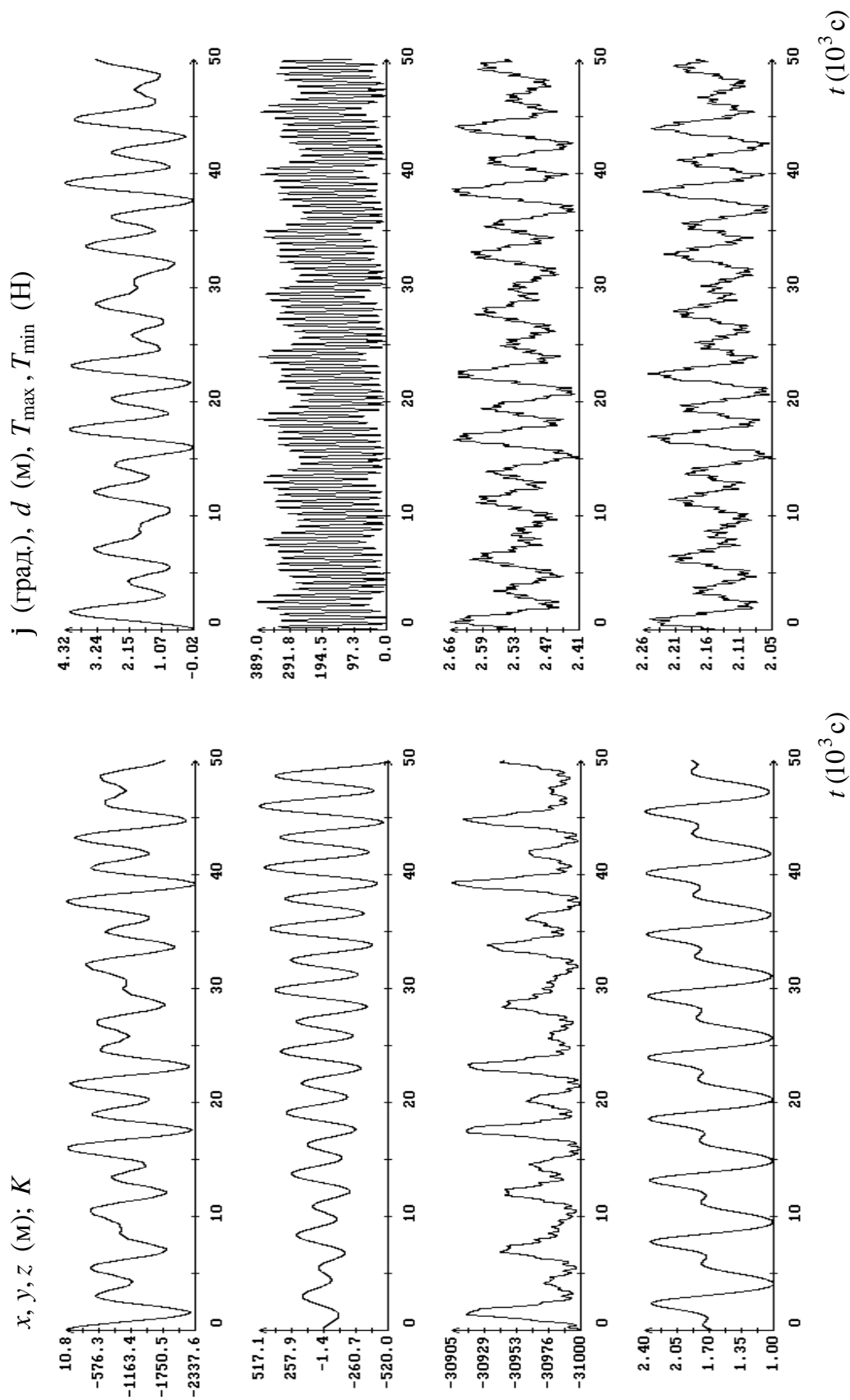


Рис. 7. Движение развернутой тросовой системы с учетом массы троса и действия на трос аэродинамических сил,  $N = 40$ .

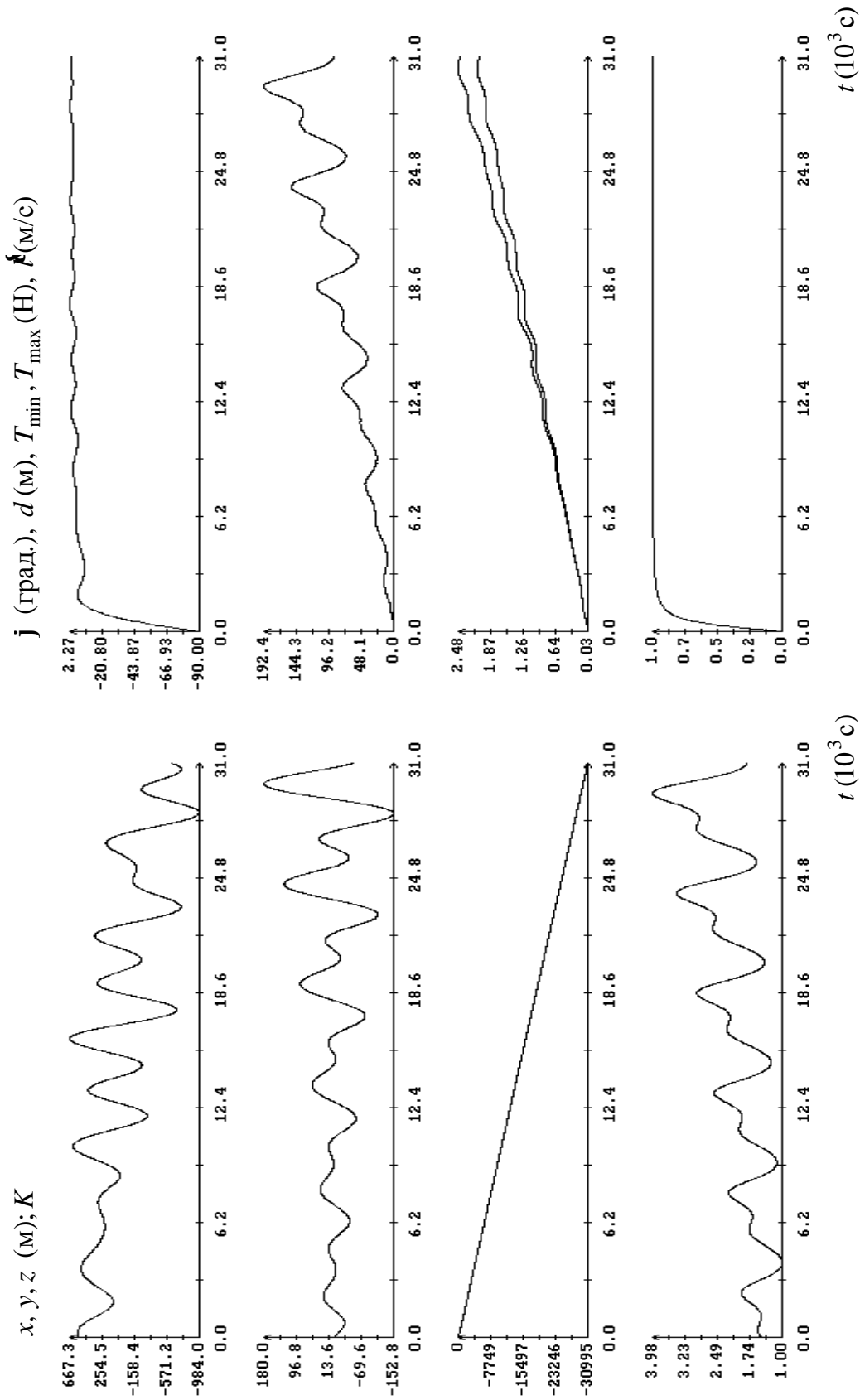


Рис. 8. Развергивание тросовой системы с учетом массы троса и действия на трос аэродинамических сил,  $N = 40$ .

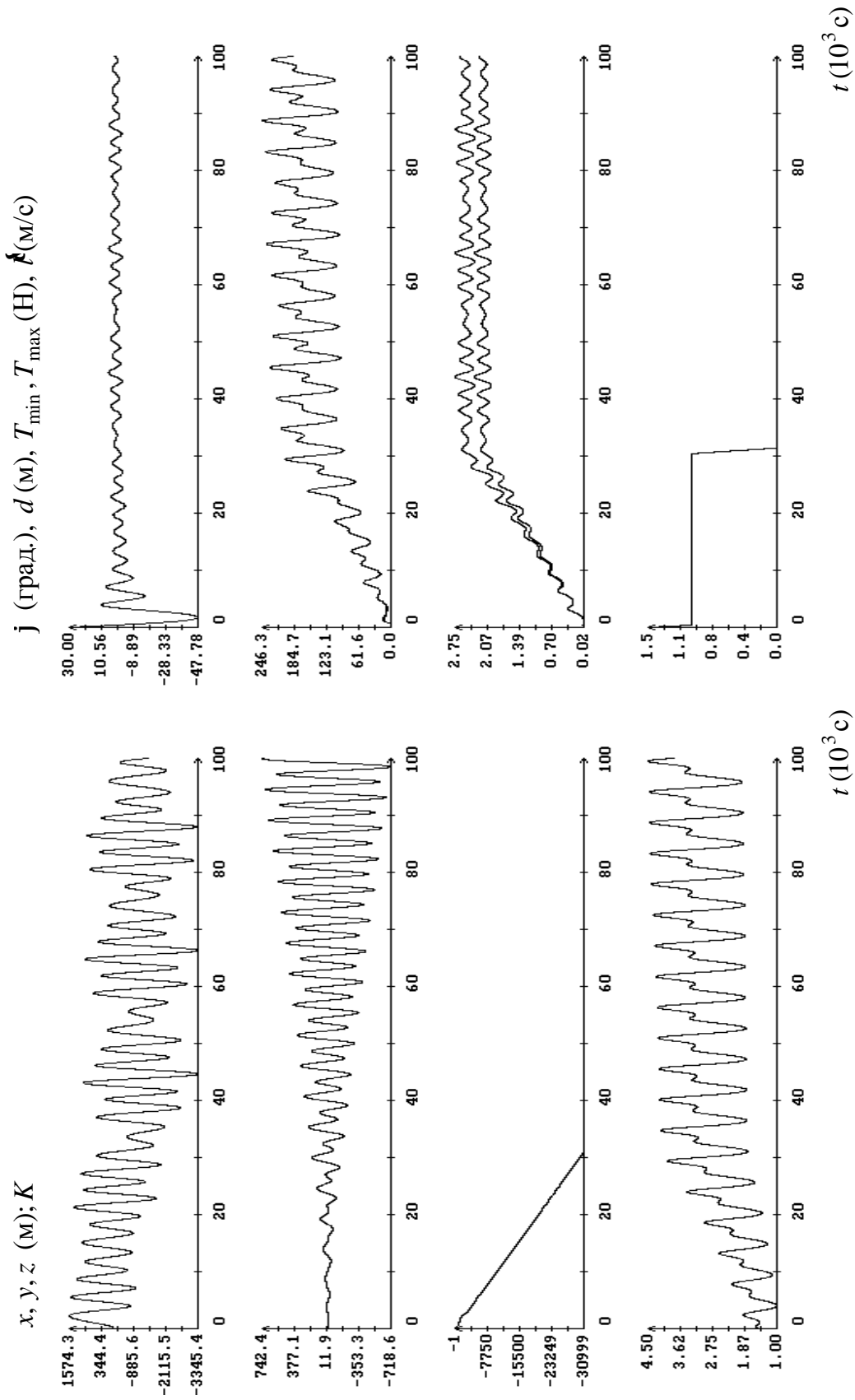


Рис. 9. Развертывание тросовой системы по сценарию 1. Учитываются масса троса и действие на трос аэродинамических сил,  $N = 40$ .



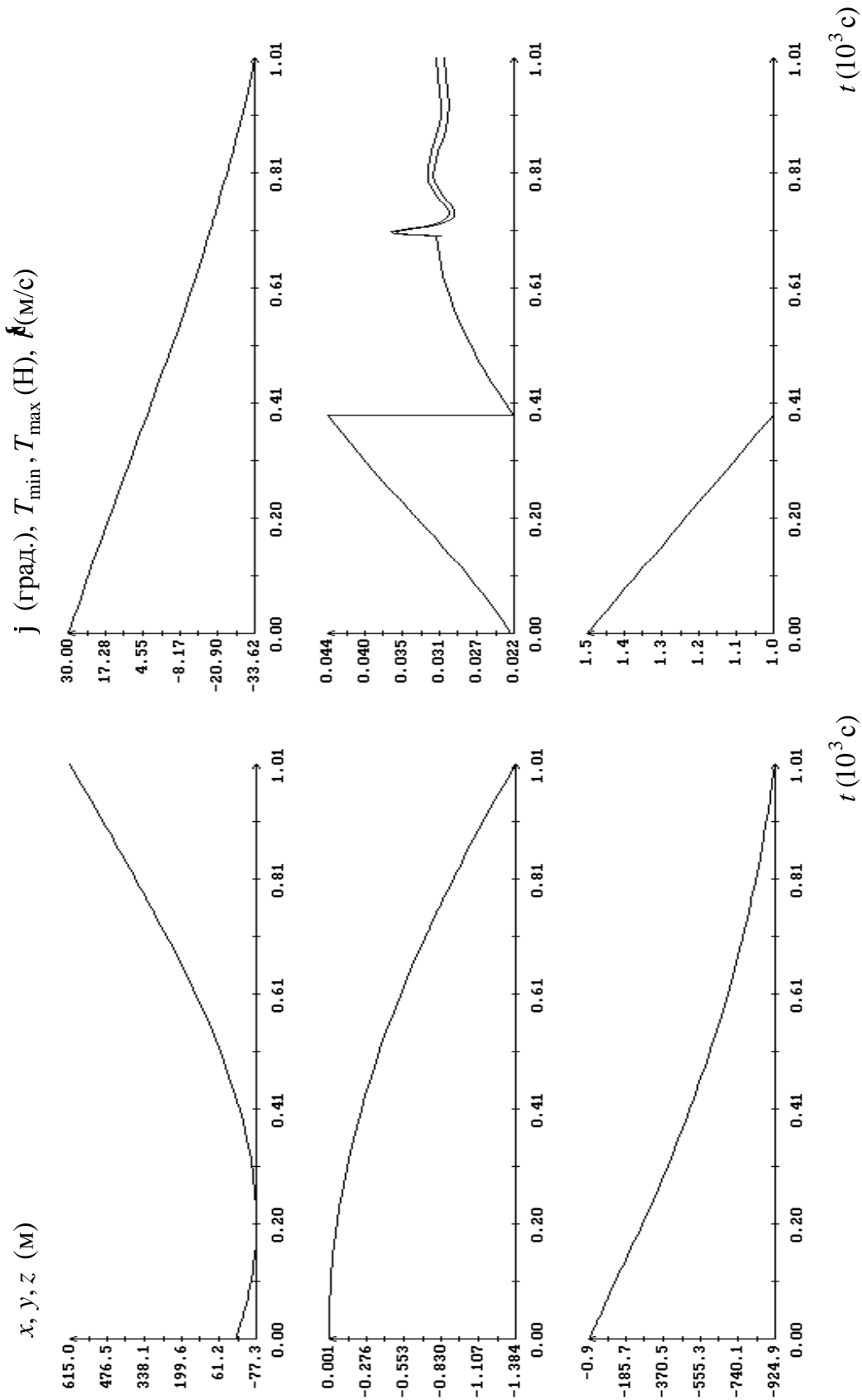


Рис. 10. Развертывание тросовой системы по сценарию 1, начальный участок. Учитываются масса троса и действие на трос аэродинамических сил,  $N = 40$ .

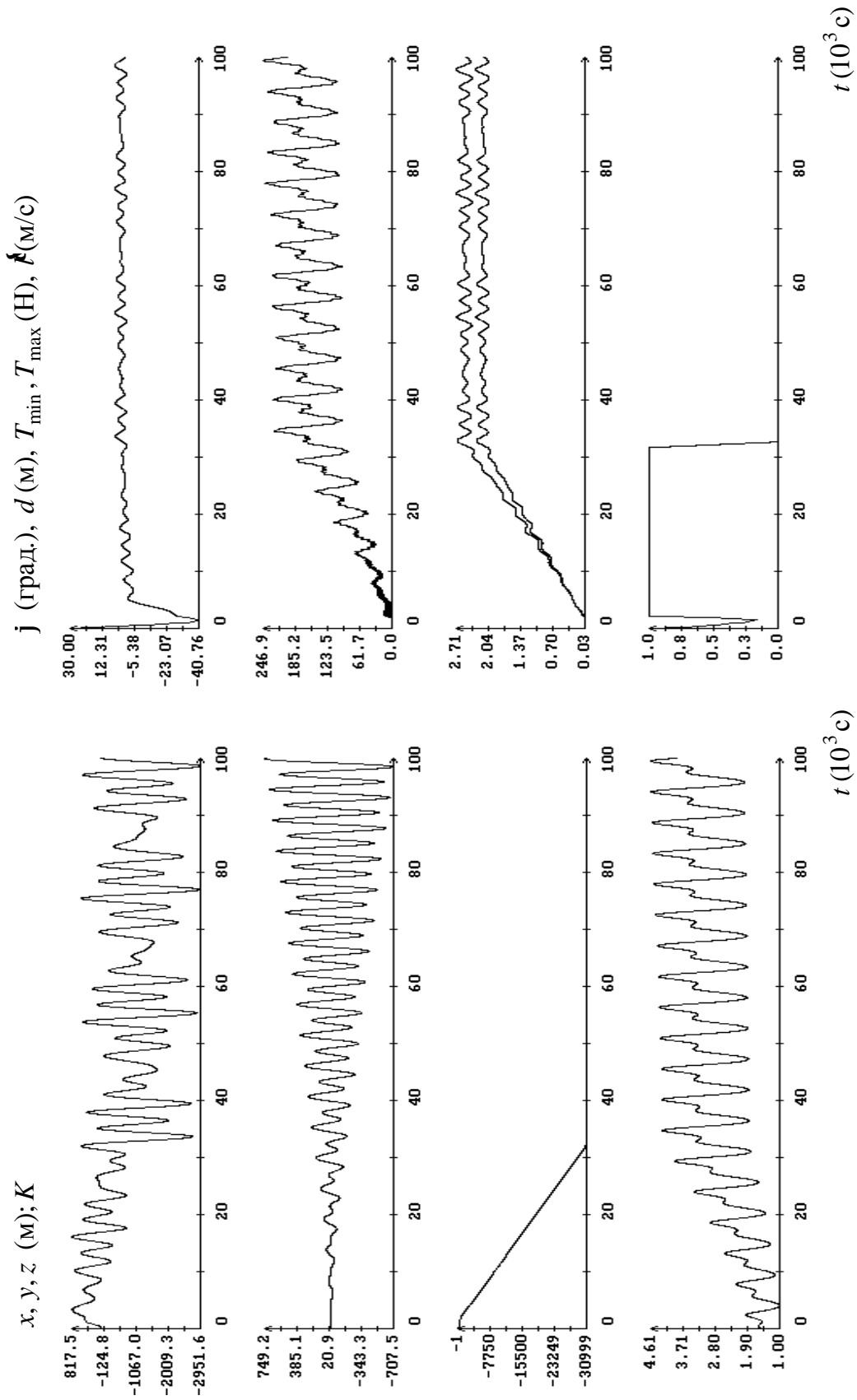


Рис. 11. Развертывание тросовой системы по сценарию 2. Учитываются масса троса и действие на трос аэродинамических сил,  $N_{\max} = 40$ .

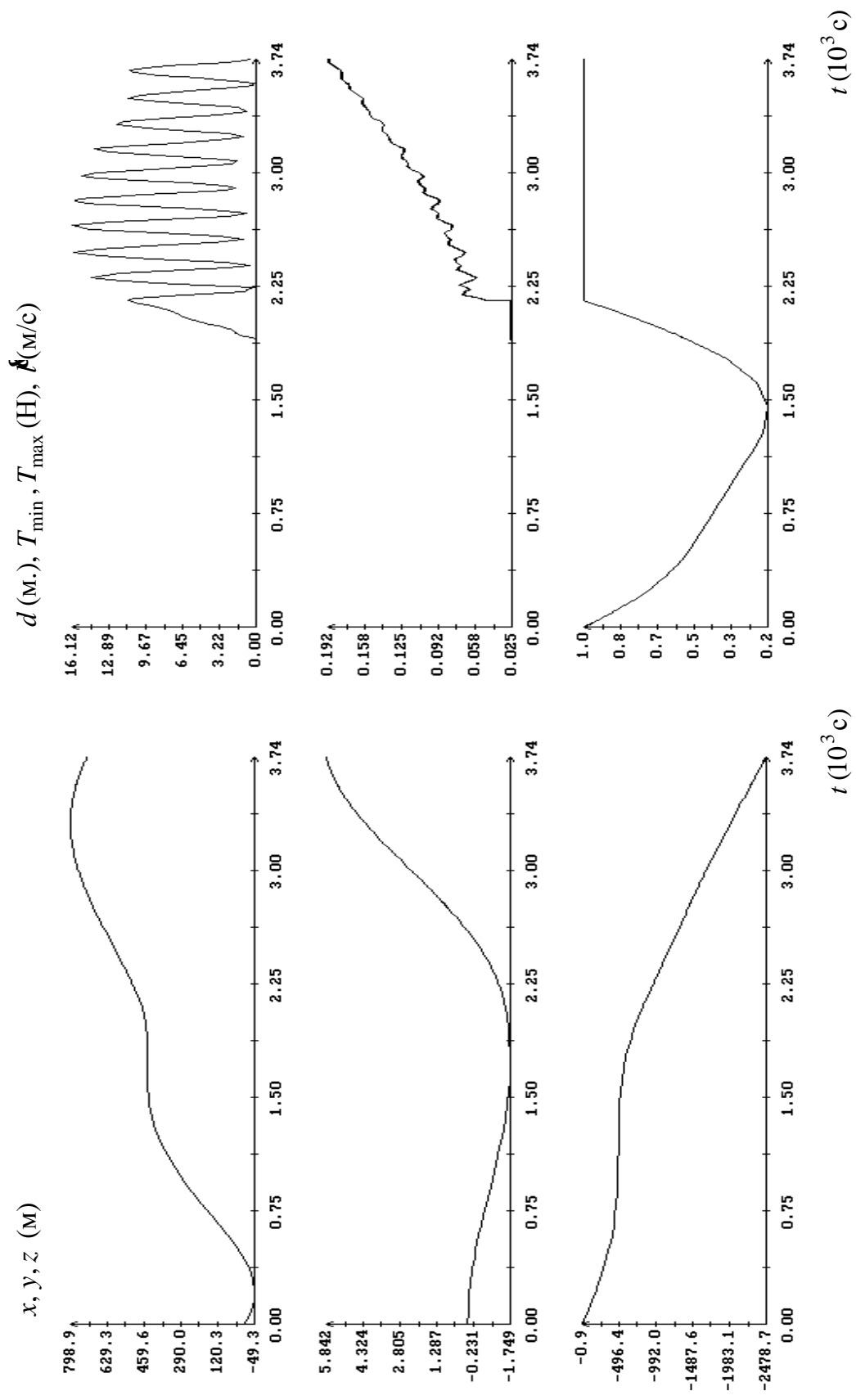


Рис. 12. Развертывание тросовой системы по сценарию 2, начальный участок. Учитываются масса троса и действие на трос аэродинамических сил,  $N_{\max} = 40$ .

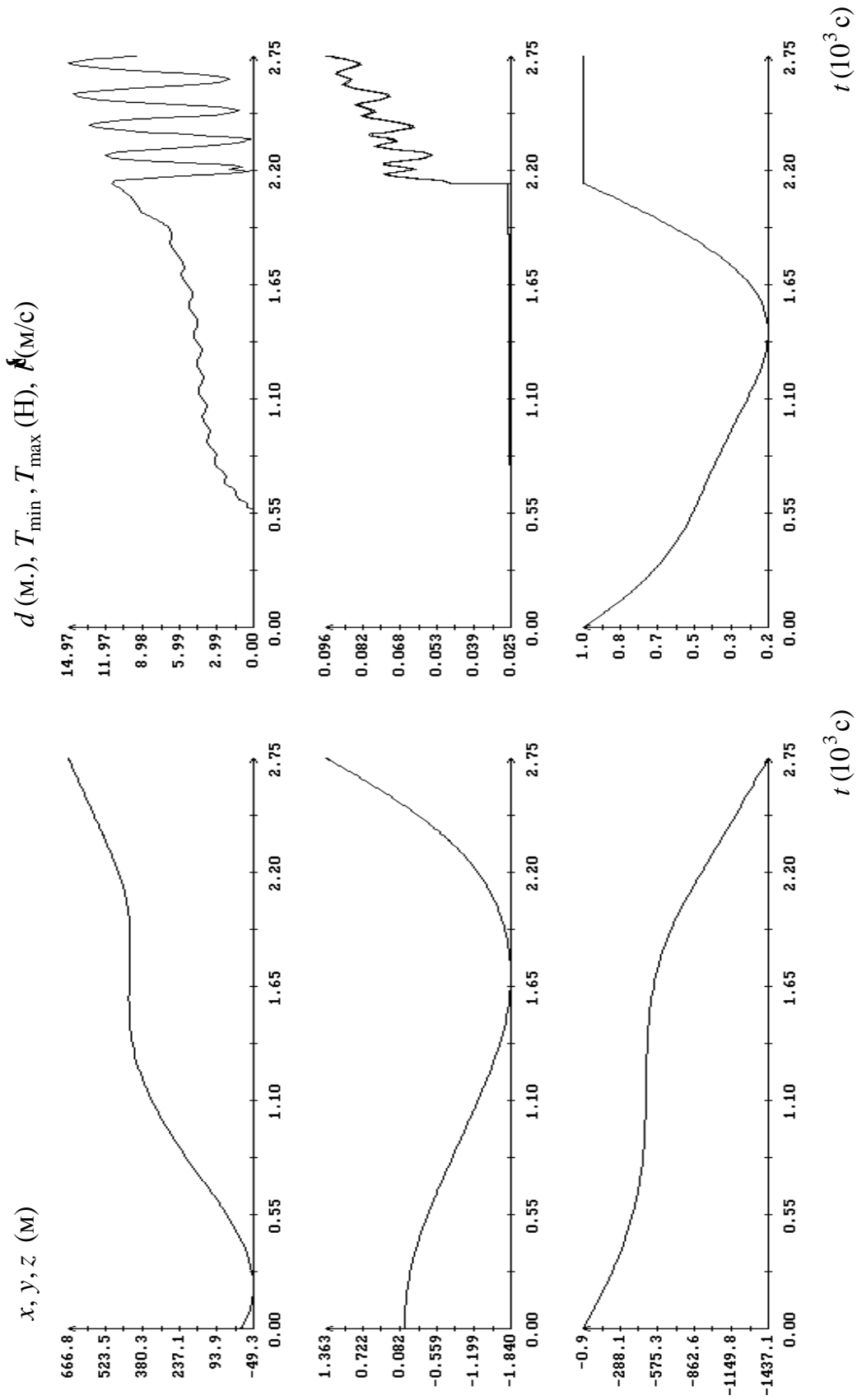


Рис. 13. Развертывание тросовой системы по сценарию 2, начальный участок. Учитываются масса троса и действие на трос аэродинамических сил,  $N_{\max} = 80$ .