

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

В.И.Абрашкин, Н.Л.Богоявленский, К.Е.Воронов,
А.Е.Казакова, В.А.Панкратов, В.В.Сазонов,
Н.Д.Семкин, Н.Р.Стратилатов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
СПУТНИКА *ФОТОН М-2* ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ЕГО
УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И НАПРЯЖЕННОСТИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ**

Москва - 2006

Аннотация

Выполнена реконструкция вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости сглаживаются тригонометрическими полиномами, которые подставляются в кинематические уравнения Пуассона для элементов матрицы перехода от системы координат, связанной со спутником, к орбитальной системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится из условия наилучшего в смысле метода наименьших квадратов согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Реконструкция выполнена на 7 интервалах времени продолжительностью по 83 мин.

V.I.Abrashkin, N.L.Bogoyavlensky, K.E.Voronov, A.E.Kazakova, V.A.Pankratov, V.V.Sazonov, N.R.Stratilatov, N.D.Semkin. Determining the attitude motion of the *Foton M-2* satellite on measurements of its angular rate and the strength of the Earth magnetic field using the kinematical model of the motion. The paper presents the results of reconstruction of the attitude motion of the *Foton M-2* satellite. The reconstruction are based on processing the measurements of two vectors — the satellite angular rate and the strength of the Earth magnetic field. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are smoothed by trigonometric polynomials and those polynomials are substituted in Poisson kinematical equations for elements of the transition matrix, which transforms the satellite coupled coordinate system to the orbital one. The equations obtained present the kinematical model of a satellite attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The reconstruction were made for 7 time intervals, each interval having the length of 83 min.

1. Введение. На спутнике *Фотон М-2* проводились измерения его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Обработка данных этих измерений позволила восстановить реальное движение спутника относительно центра масс и воспользоваться знанием этого движения для исследования квазистатических микроускорений на его борту [1 – 3]. Раздельная и совместная обработка полученных данных проводилась с помощью интегральных статистических методик, основанных на полных — кинематических и динамических — уравнениях вращательного движения спутника. Ниже описаны результаты совместной обработки этих данных с помощью интегральной статистической методики, основанной только на кинематических уравнениях. Эта методика не зависит от модели внешних моментов и поэтому может служить средством разного рода проверок.

Ранее "кинематическая" методика была опробована при обработке измерений угловой скорости и напряженности МПЗ, выполненных на спутнике *Фотон-12* [4, 5]. Там ее применение было не очень удачным из-за не вполне понятной посторонней составляющей в измерениях угловой скорости [6] (повидимому, эта посторонняя составляющая была наведена МПЗ). Измерения обоих видов на *Фотоне М-2* оказались более точными, и "кинематическая" методика позволила получить погрешность аппроксимации этих измерений не хуже, чем в [1 – 3]. Указанный факт служит дополнительным свидетельством адекватности принятых в [1 – 3] математических моделей и достаточно высокого качества полученных данных.

2. Предварительная обработка данных измерений датчиков угловой скорости и магнитометров. Назначение этой обработки — представление данных измерений в виде, который удобно анализировать с использованием дифференциальных уравнений движения спутника. Данные измерений обоих типов интерпретировались в жестко связанной со спутником приборной системе координат $Oy_1y_2y_3$. Точка O — центр масс спутника, ось Oy_1 параллельна продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку.

Фотон М-2 имел трехкомпонентный датчик угловой скорости с осями чувствительности, параллельными осям приборной системы координат. Сеансы измерений проводились ежедневно и охватывали отрезки времени длиной 83 мин. Практически сразу после сеанса данные измерений по телеметрическому каналу передавались на Землю. Это позволило оперативно следить за вращательным движением спутника.

Данные измерений, полученные во время одного сеанса, представляют собой совокупность чисел

$$t_n^\Omega, \Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}, \Omega_3^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (1)$$

где $\Omega_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$) приближенные значения компонент угловой скорости спутника в приборной системе координат в момент времени t_n^Ω , $t_0^\Omega < t_1^\Omega <$

$\dots < t_N^\Omega$. Если сеанс проходил без сбоев, то $N = 419$, $t_N^\Omega - t_0^\Omega = 4970.06$ с ≈ 82.83 мин, моменты t_n^Ω разбиваются на группы по 30 точек, внутри группы $t_{n+1}^\Omega - t_n^\Omega = 10$ с, на стыках групп $t_{n+1}^\Omega - t_n^\Omega \approx 70$ с. Из-за сбоев в некоторых сеансах несколько групп из 30 точек полностью или частично утеряны. Два сеанса — от 12 и 14 июня — утеряны полностью. Ниже обрабатываются только те сеансы, на которых не было потерь данных и во время которых выполнялись измерения вектора местной напряженности магнитного поля Земли. Это — сеансы от 1, 2, 4, 5, 7, 8 и 9 июня.

Аппроксимация данных измерений угловой скорости выполнялась с помощью тригонометрических полиномов. Аппроксимирующие выражения строились независимо для каждой векторной компоненты. Последовательности точек $(t_n^\Omega, \Omega_i^{(n)})$, $n = 0, 1, \dots, N$, аппроксимировались выражениями

$$\chi_i(t) = a_{i, M+1} + a_{i, M+2}(t - t_0^\Omega) + \sum_{m=1}^M a_{i, m} \sin \frac{\pi m(t - t_0^\Omega)}{t_N^\Omega - t_0^\Omega}, \quad (2)$$

где $a_{i, m}$ — коэффициенты и число M одинаково для всех $i = 1, 2, 3$. Это число должно не превосходить $N - 1$ и быть таким, чтобы выражения (2) позволяли с высокой точностью аппроксимировать на отрезке $t_0^\Omega \leq t \leq t_N^\Omega$ переменные ω_i системы (1) в ее решениях, описывающих возможные движения спутника [7]. Коэффициенты $a_{i, m}$ находились методом наименьших квадратов. Полученные таким образом выражения (2) иногда испытывают заметные сравнительно высокочастотные колебания. Чтобы избавиться от них, тригонометрические члены в (2) умножались на корректирующие множители:

$$\frac{M - m + 1}{M - M_1 + 1} a_{i, m} \rightarrow a_{i, m} \quad (m = M_1 + 1, \dots, M).$$

Здесь M_1 — целая часть числа $M/2$. Точность аппроксимации данных измерений выражениями (2) характеризовалась стандартными отклонениями

$$\sigma_{\Omega_i} = \left\{ \frac{1}{N - M - 1} \sum_{n=0}^N \left[\Omega_i^{(n)} - \chi_i(t_n^\Omega) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Типичный вид данных измерений (1) и графиков сглаживающих эти данные функций (2) приведен на рис. 1. Точки $(t_n^\Omega, \Omega_i^{(n)})$ изображены маркерами в виде крестов в левой части рисунка, там же сплошными линиями изображены графики функций (2). Поскольку маркеры в некоторых местах закрывают линии графиков, последние для ясности повторены в правой части рисунка.

В табл. 1 приведены результаты предварительной обработки данных измерений угловой скорости. Здесь для каждого сеанса указаны: его номер

(совпадающий с днем июня 2005 г., в который этот сеанс был проведен), начальный момент измерений t_0^Ω , число M в соответствующих выражениях (2) и стандартные отклонения ошибок аппроксимации, допускаемые этими выражениями.

На *Фотоне М-2* находилась аппаратура *Мираж*. Она имела шесть трехкомпонентных магнитометров и служила для измерения магнитного поля внутри спутника во время проведения космических экспериментов. Измерения проводились непрерывно с начала полета до 09.06.2005. Магнитометры были разбиты на две группы по три датчика. Каждая группа управлялась собственным контроллером. Оцифровка показаний всех трех магнитометров группы выполнялась для одних и тех же моментов времени с шагом 5 с. Моменты оцифровки разных групп не совпадали. Как показал анализ полученных данных, измерения магнитометров первого контроллера представляют собой достаточно точные измерения напряженности МПЗ, в показаниях одного из магнитометров второго контроллера имеются ошибки. Ниже описываются результаты обработки измерений магнитометров первого контроллера.

Предварительная обработка выполнялась следующим образом. Измерения магнитометров, относящиеся к одному и тому же моменту времени, пересчитывались в приборную систему $Oy_1y_2y_3$ и покомпонентно усреднялись с равными весами. Найденные средние значения считались измеренными значениями компонент h_i ($i = 1, 2, 3$) вектора напряженности МПЗ в точке O в указанный момент.

Данные магнитометров, полученные во время сеанса измерений угловой скорости, обрабатывались совместно. Объем этих данных велик, и перед построением по ним решения уравнений (1), описывающего фактическое движение спутника, проводилось их предварительное сжатие [7]. Для каждого сеанса выбирался отрезок времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ так, чтобы выполнялись условия $T = 270$ мин, $t_0^\Omega - t_0 > 20$ мин, $t_0 + T - t_N^\Omega > 20$ мин. На этом отрезке для компонент h_i по данным измерений строились сглаживающие выражения

$$f_i(t) = b_{i,M+1} + b_{i,M+2}(t - t_0) + \sum_{m=1}^M b_{i,m} \sin \frac{\pi m(t - t_0)}{T}, \quad (3)$$

где $b_{i,m}$ — коэффициенты. Выражения строились методом наименьших квадратов независимо для каждой компоненты, число M было одинаковым для всех i . С помощью выражений (3) вычислялась совокупность чисел

$$t_n = t_0 + \frac{nT}{N_H}, \quad h_i^{(n)} = f_i(t_n) \quad (i = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, \dots, N_H; \quad N_H > M), \quad (4)$$

служившая исходной информацией при реконструкции фактического вращательного движения спутника. Величины $h_i^{(n)}$ будем называть псевдоизме-

рениями. Они представляют собой приближенные значения компонент h_i в момент времени t_n . Ниже во всех вариантах обработки принято $M = 150 - 250$, $N_H = 270$.

Типичный вид данных измерений компонент h_i и аппроксимирующих эти данные выражений (3) представлен в левой части рис. 2. Здесь маркеры изображают данные измерений, сплошные кривые — графики выражений (3). Для большей ясности последние графики повторены в правой части рисунка. В этом примере число моментов времени с измерениями — 3109. В табл. 2 приведены результаты предварительной обработки данных измерений напряженности МПЗ. Здесь для каждого отрезка $[t_0, t_0 + T]$ указаны: номер сеанса, для которого он построен, начальный момент t_0 , число M в соответствующих выражениях (3) и стандартные отклонения σ_{hi} ($i = 1, 2, 3$) ошибок аппроксимации, допускаемые этими выражениями. Стандартные отклонения σ_{hi} рассчитывались аналогично стандартным отклонениям σ_{Ω_i} .

Из-за разного рода сбоев в измерениях магнитного поля имеются пропуски — отрезки времени между соседними измерениями иногда значительно превышают 5 с. В примере, представленном на рис. 2, хорошо заметны два таких пропуска. Выражения (3) в окрестности пропусков обычно содержат значительные ошибки (ср. рис. 2). По этой причине те псевдоизмерения (4), для которых t_n приходились на пропуски в исходных данных, из дальнейшей обработки исключались.

Часы аппаратуры *Мираж* отставали примерно на 77 с в сутки, поэтому моменты t_n содержат ошибку, которую они наследуют от исходных данных. Коррекция времени выполнялась по формуле $\alpha(t_n - t_*) + t_* \rightarrow t_n$, где $\alpha = 1.000894$, $t_* = 15:09:49$ ДМВ 31.05.2005 — момент включения аппаратуры. Значение α найдено методом наименьших квадратов из условия наилучшего совпадения модулей (псевдо)измеренного и расчетного векторов напряженности МПЗ в точках t_n . Эта задача решалась для нескольких отрезков $[t_0, t_0 + T]$ одновременно [3]. Ее решение требовало знания только орбитального движения спутника. Все приводимые ниже результаты по обработке данных измерений аппаратуры *Мираж* получены с использованием описанной коррекции времени.

3. Математическая модель движения спутника. Спутник считаем твердым телом, геоцентрическое движение центра масс которого — кеплерово эллиптическое. Элементы этого движения определяются по данным траекторных измерений [3]. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и соотношений, необходимых при обработке данных измерений, будем использовать введенную выше приборную систему координат $Oy_1y_2y_3$ и орбитальную систему координат $OX_1X_2X_3$. Последняя также является правой, ее оси OX_3 и OX_2 направлены соответственно по геоцентрическому радиусу-вектору точки O и вектору кинетического момента орбитального движения спутника.

Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к орбитальной системе обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} — косинус угла между осями OX_i и Oy_j . Кинематические уравнения вращательного движения спутника запишем в виде уравнений Пуассона для первой и третьей строк этой матрицы — направляющих косинусов осей OX_1 и OX_3 в системе координат $Oy_1y_2y_3$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= a_{12}\omega_3 - a_{13}\omega_2 - \omega_0 a_{31}, \\
\dot{a}_{12} &= a_{13}\omega_1 - a_{11}\omega_3 - \omega_0 a_{32}, \\
\dot{a}_{13} &= a_{11}\omega_2 - a_{12}\omega_1 - \omega_0 a_{33}, \\
\dot{a}_{31} &= a_{32}\omega_3 - a_{33}\omega_2 + \omega_0 a_{11}, \\
\dot{a}_{32} &= a_{33}\omega_1 - a_{31}\omega_3 + \omega_0 a_{12}, \\
\dot{a}_{33} &= a_{31}\omega_2 - a_{32}\omega_1 + \omega_0 a_{13}, \\
\omega_i &= \Delta_i + \chi_i(t - \tau), \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ω_i — компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $Oy_1y_2y_3$, $\chi_i(t)$ — выражения (1), аппроксимирующие низкочастотную составляющую в данных измерений угловой скорости (см. предыдущий раздел), Δ_i — постоянные смещения в задании этой составляющей, ω_0 — модуль абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат, τ — смещение шкалы времени аппаратуры *Мираж* относительно шкалы времени системы управления движением спутника. Параметры τ и Δ_i считаются неизвестными и определяются из обработки данных измерений МПЗ наряду с начальными условиями движения спутника.

Положим $I_\Omega(\tau) = [t_0^\Omega + \tau, t_N^\Omega + \tau]$, $I_H = [t_0, t_0 + T]$. Уравнения (5) рассматриваются при значениях τ и t , удовлетворяющих условиям $I_\Omega(\tau) \subset I_H$, $t \in I_\Omega(\tau)$. Недостающие элементы матрицы перехода $\|a_{ij}\|$ вычисляются по формулам $a_{21} = a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}$ и т. п.

Переменные a_{1i} и a_{3i} зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\|a_{ij}\|$. По этой причине в программах обработки данных измерений начальные условия для a_{1i} и a_{3i} выражаются через углы γ , δ и β , которые вводятся так, чтобы систему $Oy_1y_2y_3$ можно было получить из системы $OX_1X_2X_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Oy_1 . Выражения для элементов матрицы $\|a_{ij}\|$ через углы γ, δ и β приведены в [8]. Заметим, что β — угол между осью Oy_1 и плоскостью OX_1X_3 (плоскостью орбиты), δ — угол между проекцией оси Oy_1 на эту плоскость и осью $(-OX_3)$. Угол γ задает поворот спутника вокруг оси Oy_1 .

Углы γ , δ и β используются также для графического представления реконструкций движения спутника, в которых функция $\beta(t)$ на отрезке $I_\Omega(\tau)$

принимает значения разных знаков. Такие реконструкции получены для первых нескольких суток полета, когда компонента ω_1 угловой скорости была сравнительно невелика.

Спустя несколько суток после начала полета компонента ω_1 значительно увеличилась, и интересным стало только движение оси Oy_1 . Во всех построенных для этого этапа полета реконструкциях движения функция $\beta(t)$ оказалась положительной. Графическое представление таких движений выполнялось с помощью углов ψ , θ и Λ , определяемых следующим образом [7]. Ось OX_1 совмещается с осью Oy_1 двумя последовательными поворотами системы $OX_1X_2X_3$: 1) на угол ψ вокруг оси OX_3 , 2) на угол θ вокруг новой оси OX_2 . Угол Λ образован осями Oy_1 и OX_2 : $\Lambda = \arccos(\cos\theta \sin\psi) = \pi/2 - \beta$. При $\theta = 0$ и $\psi = \pi/2$ ось Oy_1 совпадает с осью OX_2 — нормалью к плоскости орбиты. В окрестности этого положения углы θ и $\psi - \pi/2$ задают смещения оси Oy_1 в направлениях, противоположных трансверсали к орбите и геоцентрическому радиусу-вектору точки O .

4. Методика определения вращательного движения спутника.

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке $I_\Omega(\tau)$ будем считать решение системы (5), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{n \in U(\tau)} \sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_{Hi} - h_i(t_n)]^2, \quad (6)$$

$$U(\tau) = \{n : t_n \in I_\Omega(\tau)\}, \quad h_i(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t) a_{ji}(t).$$

Здесь Δ_{Hi} — постоянные смещения в псевдоизмерениях МПЗ, $H_i(t)$ — расчетные значения компонент напряженности МПЗ в орбитальной системе координат в момент t . Функции $H_i(t)$ строятся с использованием кеплеровой аппроксимации орбитального движения спутника и аналитической модели МПЗ IGRF2005. Минимизация Φ проводится по начальным условиям решения в точке $t_0^\Omega + \tau$ и смещениям τ , Δ_i , Δ_{Hi} .

Число аргументов функционала (6) можно уменьшить, выполнив аналитически его минимизацию по смещениям Δ_{Hi} . Остальные аргументы при этом считаем фиксированными. В результате получаем новый функционал

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n \in U(\tau)} [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - N_\tau \tilde{\Delta}_{Hi}^2 \right\}, \quad (7)$$

$$\tilde{\Delta}_{Hi} = \frac{1}{N_\tau} \sum_{n \in U(\tau)} [h_i^{(n)} - h_i(t_n)],$$

где N_τ — число элементов множества $U(\tau)$. Отыскание решения системы (5), аппроксимирующего фактическое вращательное движение спутника, свелось к минимизации функционала (7) по начальным условиям этого решения $\gamma_0 = \gamma(t_0^\Omega + \tau)$, $\delta_0 = \delta(t_0^\Omega + \tau)$, $\beta_0 = \beta(t_0^\Omega + \tau)$ и смещениям Δ_i , τ .

Введем вектор $p = (\gamma_0, \delta_0, \beta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ и будем рассматривать функционал (7) как функцию $\Phi_1(p, \tau)$. Минимизация Φ_1 по p и τ сводилась к вычислению функции

$$\Phi_2(\tau) = \min_p \Phi_1(p, \tau)$$

в последовательности точек τ_n , сходящейся к пределу $\tau_* = \operatorname{argmin} \Phi_2(\tau)$. Минимизация Φ_1 по p при фиксированном τ выполнялась методом Левенберга – Марквардта, являющимся одной из модификаций метода Гаусса – Ньютона [9]. Расчет матрицы и свободного члена системы нормальных уравнений, возникающей на каждой итерации этого метода, осуществлялся по тем же правилам, которые использовались в [8]. Выделение переменной τ из полного набора аргументов Φ_1 вызвано тем обстоятельством, что в процессе изменения τ множество $U(\tau)$ может меняться. В точках, где происходит это изменение функция, $\Phi_2(\tau)$ недифференцируема. По этой причине вычисление точек τ_n выполнялось без использования производной $d\Phi_2/d\tau$.

Разработанное программное обеспечение позволяет также минимизировать функцию $\Phi_1(p, \tau)$ сразу по всем ее аргументам методом Левенберга – Марквардта. По указанной только что причине на практике такая возможность иногда оказывалась неэффективной, но всегда использовалась на заключительном этапе минимизации Φ_1 и при оценке точности найденной аппроксимации движения спутника. Эта точность характеризовалась стандартными отклонениями ошибок аппроксимации псевдоизмерений МПЗ и найденных оценок p и τ , полученными в рамках метода наименьших квадратов. Принятый способ расчета указанных характеристик соответствует следующим допущениям: 1) ошибки в псевдоизмерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, 2) средние значения ошибок, относящихся к одной и той же компоненте напряженности МПЗ, равны. Этот способ выбран из соображений удобства и вида функционала (5). Теоретико-вероятностные условия его адекватности требуют дополнительного обсуждения.

Приведем расчетные формулы. Пусть $(p_*, \tau_*) = \operatorname{argmin} \Phi_1(p, \tau)$, C — вычисленная в точке (p_*, τ_*) матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации $\Phi_1(p, \tau_*)$ по p и τ методом Гаусса-Ньютона (матрица $2C$ приближенно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi_1(p_*, \tau_*)$). Тогда стандартное отклонение ошибок аппроксимации псевдоизмерений находится по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi_1(p_*, \tau_*)}{3N_{\tau_*} - 10}}, \quad (8)$$

ковариационная матрица оценок $p = p_*$, $\tau = \tau_*$ равна $\sigma^2 C^{-1}$. Стандартные отклонения этих оценок суть квадратные корни из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы. Рассчитанные описанным способом стандартные отклонения оценок величин γ_0 , δ_0 , β_0 , Δ_i , τ будем обозначать σ_γ , σ_δ , σ_β , σ_{Δ_i} , σ_τ .

5. Результаты определения вращательного движения. Некоторые результаты определения фактического движения спутника *Фотон М-2* с помощью описанной методики приведены в табл. 3 и на рис. 3 — 9. В таблице для каждого отрезка $I_\Omega(\tau)$ приведены его начальная точка $t_0^\Omega + \tau$, оценки параметров τ и p , стандартные отклонения этих оценок, оценка σ стандартного отклонения ошибок в псевдоизмерениях, число N_τ включенных в обработку псевдоизмерений на заключительном этапе минимизации Φ_1 . Углы в таблице выражены в радианах, единицей измерения угловой скорости служит 0.001 c^{-1} .

Рисунки иллюстрируют найденное движение спутника и точность аппроксимации псевдоизмерений (4) функциями $h_i(t)$ в (6). Каждый из рисунков естественным образом разбивается на три части — левую, среднюю и правую. В правой части в каждой системе координат сплошной линией изображен график одной из функций $h_i(t)$, маркерами указаны точки $(t_n, h_i^{(n)} - \tilde{\Delta}_{Hi})$, $n \in U(\tau)$. В средней части помещены графики использованных в уравнениях (5) компонент угловой скорости $\omega_i(t)$, в левой части — построенные по решениям этих уравнений графики зависимости от времени углов, задающих положение спутника или только его оси Oy_1 относительно орбитальной системы координат. Все перечисленные графики построены на отрезке $I_\Omega(\tau)$. На рис. 3, 4 использованы углы γ , δ и β , на остальных рисунках — углы θ , ψ и Λ . В движениях, представленных на рис. 3 и 4, ось Oy_1 в некоторые моменты времени лежит в плоскости орбиты. В движениях на рис. 5 — 9 эта ось составляет с плоскостью орбиты угол не менее 20° .

Точность реконструкции реального движения спутника характеризуется стандартными отклонениями уточняемых параметров математической модели (табл. 3). Хотя, как уже отмечалось, обычные теоретико-вероятностные допущения метода наименьших квадратов в данном случае не выполнены, стандартные отклонения оказываются полезными характеристиками. В частности, они позволяют сравнить точность определения различных параметров. Анализ стандартных отклонений вместе анализом собственных векторов матрицы C (см. предыдущий раздел), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер ошибок, возникающих при определении движения спутника. Анализ основан на формуле

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right) \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right)^T,$$

где c_k и u_k — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы C . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов $u_k/\sqrt{c_k}$.

В качестве примера исследуем точность определение движения на сеансе 8 (рис. 8). Из приведенных в табл. 3 стандартных отклонений видно, что в указанных выше единицах интегрирования уравнений (5) наиболее точно определяется параметр τ , наименее точно определяются параметры Δ_2 , Δ_3 : $\sigma_\tau = 0.00091$, $\sigma_{\Delta_2} = 0.091$, $\sigma_{\Delta_3} = 0.089$. Расположенные в порядке возрастания собственные числа матрицы C в данном случае составляют $c_1 = 0.0506$, $c_2 = 0.0528$, 3.663, 9.408, 15.66, 235.2, 1302, и

$$\frac{u_1^T}{\sqrt{c_1}} = [-0.03, 0.04, -0.23, -0.08, 4.44, 0.05, 0.00],$$

$$\frac{u_2^T}{\sqrt{c_2}} = [-0.16, 0.27, 0.01, -0.01, -0.05, 4.34, 0.00].$$

В этих расчетах (как и в программах минимизации функций Φ_1 и Φ_2) единица измерения напряженности магнитного поля равнялась 50000 γ . Компоненты векторов u_k здесь упорядочены также, как в векторе (p, τ) . Как видно из приведенных формул, пятая компонента вектора $u_1/\sqrt{c_1}$ и шестая компонента вектора $u_2/\sqrt{c_2}$, отвечающие параметрам Δ_2 и Δ_3 , дают наибольший вклад в диагональные элементы матрицы C^{-1} . Минимальный вклад в эти элементы дают последние компоненты векторов $u_k/\sqrt{c_k}$, отвечающие параметру τ .

Аппроксимация псевдоизмерений в приведенных примерах оказалась довольно точной. Найденные оценки σ оказались даже меньше оценок этой величины, полученных в [1,3] для тех же отрезков псевдоизмерений. Правда, в [1,3] обрабатывались все псевдоизмерения на отрезке I_H , а не только попавшие в отрезок I_Ω . Результаты данной работы и работ [1, 2] свидетельствуют о высокой точности измерений угловой скорости и напряженности МПЗ, выполненных на спутнике *Фотон М-2*. В пользу высокой точности измерений свидетельствуют и стабильные оценки временного сдвига τ . Разброс этих оценок для рассмотренных интервалов $I_\Omega(\tau)$ примерно совпадает со значениями σ_τ .

Высокая точность измерений позволяет рассмотреть задачу о рассогласовании осей чувствительности датчика угловой скорости и аппаратуры *Мираж*. Эту задачу будем решать в рамках следующей модели. Рассмотрим две приборные системы координат $Oy_1y_2y_3$ и $Oy'_1y'_2y'_3$. В первой из этих систем интерпретируются данные измерений датчика угловой скорости, эта же система используется для записи уравнений (5). Во второй системе интерпретируются данные измерений магнитометров *Миража*. Матрицу перехода от первой системы ко второй обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$, b_{ij} — косинус угла

между осями Oy'_i и Oy_j . Элементы этой матрицы параметризуем углами γ_c , α_c и β_c [10], которые вводятся следующим образом. Система $Oy'_1y'_2y'_3$ может быть переведена в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол α_c вокруг оси Oy'_2 , 2) на угол β_c вокруг новой оси Oy'_3 , 3) на угол γ_c вокруг новой оси Oy'_1 , совпадающей с осью Oy_1 . Судя по характеристикам точности сборки спутника, значения каждого из введенных углов не должны превышать 1.5° .

Аппроксимацией движения спутника на отрезке $I_\Omega(\tau)$ будем теперь считать решение системы (5), доставляющее минимум функционалу (7), в котором функции $h_i(t)$ заданы соотношениями

$$h_i(t) = \sum_{j,k=1}^3 H_j(t) a_{jk}(t) b_{ik} \quad (i = 1, 2, 3).$$

При минимизации будем варьировать начальные условия этого решения $\gamma_0 = \gamma(t_0^\Omega + \tau)$, $\delta_0 = \delta(t_0^\Omega + \tau)$, $\beta_0 = \beta(t_0^\Omega + \tau)$, смещения Δ_i , τ и углы γ_c , α_c , β_c . Точность аппроксимации будем характеризовать стандартными отклонениями оцениваемых параметров и стандартным отклонением ошибок в псевдоизмерениях.

Минимизация и расчет стандартных отклонений выполнялись по описанной выше схеме, только вектор p имел компоненты γ_0 , δ_0 , β_0 , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , γ_c , α_c , β_c , и в формуле (8) число 10 было заменено числом 13. Результаты минимизации представлены в табл. 4 и на рис. 10, 11. Таблица устроена аналогично табл. 3, но содержит дополнительные столбцы, отвечающие углам γ_c , α_c , β_c и стандартным отклонениям σ_{γ_c} , σ_{α_c} , σ_{β_c} . Углы в табл. 4 выражены в радианах, единицей измерения угловой скорости служит 0.001 c^{-1} .

Сравнение табл. 3 и 4 показывает, что введение новых уточняемых параметров практически не уменьшило значения σ , но существенно увеличило стандартные отклонения σ_γ , σ_δ , σ_β , σ_{Δ_i} , σ_τ . Например, в случае сеанса 8 стандартные отклонения σ_γ и σ_{Δ_1} возросли более чем в 11 раз, стандартные отклонения σ_{Δ_2} и σ_{Δ_3} — более чем 7 раз, стандартные отклонения σ_τ , σ_β и σ_δ увеличились соответственно в 6.8, 5.4 и 4 раза. Значительно увеличился разброс в оценках τ .

Перейдем к оценкам углов γ_c , α_c и β_c . Оценки угла γ_c имеют сильный разброс, значительно превышающий указанный выше предел в $1.5^\circ = 0.026$ радиана. Этот разброс не отражает реального положения дел и будет объяснен ниже. Значения же величин α_c , β_c , σ_{α_c} и σ_{β_c} хорошо согласуются с указанным пределом. Поскольку полученные оценки углов γ_c , α_c и β_c примерно совпадают по порядку величины со своими стандартными отклонениями, рассогласование между системами координат $Oy_1y_2y_3$ и $Oy'_1y'_2y'_3$ не может быть надежно оценено в рамках принятой модели при имеющейся точности измерений. Поскольку эти оценки достаточно малы по абсолютной

величине, при обработке данных следует принять $\gamma_c = \alpha_c = \beta_c = 0$. Рисунки 10 и 11 лишь незначительными деталями на графиках углов отличаются от соответствующих рис. 3 и 8.

Исследуем подробнее формирование ошибок для сеанса 8 (рис. 11). Расположенные в порядке возрастания собственные числа матрицы C в данном случае составляют $c_1 = 8.396 \cdot 10^{-4}$, $c_2 = 9.185 \cdot 10^{-4}$, $c_3 = 2.313 \cdot 10^{-2}$, 4.130, 13.24, 15.59, 18.10, 18.75, 241.0, 1302; ее собственные векторы $u_k^T/\sqrt{c_k}$ ($k = 1, 2, 3$) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} &[-0.46, 0.29, -1.82, 2.33, 34.31, -1.09, -0.28, 0.19, -1.80, 0.02], \\ &[0.07, 1.94, 0.22, -0.19, 1.07, 32.86, 1.19, 1.63, 0.16, -0.09], \\ &[4.81, -0.69, 0.49, 0.01, 0.13, -0.12, 4.38, -0.32, 0.00, -0.29]. \end{aligned}$$

Компоненты этих векторов здесь упорядочены также, как в векторе (p, τ) . Как видно из приведенных формул, отвечающие параметрам Δ_2 и Δ_3 пятая компонента вектора $u_1/\sqrt{c_1}$ и шестая компонента вектора $u_2/\sqrt{c_2}$ дают наибольший вклад в диагональные элементы матрицы C^{-1} . Второй по значимости вклад дают отвечающие параметрам γ_0 и γ_c первая и седьмая компоненты вектора $u_3/\sqrt{c_3}$. Судя по этому вектору, большие значения σ_{γ_c} и σ_γ связаны друг с другом. На основании вида векторов $u_k/\sqrt{c_k}$ ($k = 1, 2, 3$) можно утверждать (ср. [1]), что разность $\gamma_0 - \gamma_c$ определялась бы примерно в четыре раза точнее. Этот факт означает, что большой разброс в оценках γ_0 и γ_c обусловлен сильной связью этих параметров в задаче минимизации функции Φ_1 при $\alpha_c \approx \beta_c \approx 0$.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00451).

Литература

- [1] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, № 96.
- [2] Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным бортовых измерений угловой скорости. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2005, № 110.

- [3] Sazonov V.V., et. al. Analysis of attitude motion of *Foton M-2* and residual accelerations on its board. The report of Keldykh Institute of Applied Mathematics, 2006.
- [4] Абрашкин В.И., Волков М.В., Воронов К.Е., Егоров А.В., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2003, № 8.
- [5] Абрашкин В.И., Волков М.В., Воронов К.Е., Егоров А.В., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения. Космические исследования, 2005, т. 43, № 4, с. 295-305.
- [6] Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон-12*. Космические исследования, 2003, т. 41, № 6, с. 632-651.
- [7] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции *Мир*. Космические исследования, 2001, т. 39, № 1, с. 27-42.
- [8] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Кузьмин С.П., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. Космические исследования, 1988, т. 26, № 3, с. 390-405.
- [9] Bard Y. Nonlinear parameter estimation. Academic Press, 1974.
- [10] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И. Повышение точности определения вращательного движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* по данным измерений. Космические исследования, 1991, т. 29, № 3, с. 375-389.

Таблица 1. Сеансы измерений угловой скорости и точность аппроксимации полученных данных

Сеанс	ДМВ начальной точки сеанса t_0^Ω	M	Ошибки аппроксимации исходных данных при построении выражений (2)		
			$s_{\Omega 1} (^{\circ}/c)$	$s_{\Omega 2} (^{\circ}/c)$	$s_{\Omega 3} (^{\circ}/c)$
1	15:09:36.3	50	0.0056	0.0056	0.0072
2	15:10:14.3	50	0.0048	0.0064	0.0061
4	16:36:42.3	80	0.0059	0.0084	0.0083
5	15:12:01.3	80	0.0055	0.0078	0.0086
7	13:39:31.3	80	0.0045	0.0091	0.0088
8	13:39:45.3	80	0.0056	0.0085	0.0083
9	13:39:35.3	80	0.0056	0.0087	0.0090

Таблица 2. Отрезки измерений вектора напряженности магнитного поля Земли и точность аппроксимации полученных данных

Сеанс	ДМВ начальной точки t_0	M	Ошибки аппроксимации исходных данных при построении выражений (3)		
			$s_{h1} (g)$	$s_{h2} (g)$	$s_{h3} (g)$
1	14:11:30	150	98	89	82
2	14:12:34	150	91	100	103
4	16:15:38	250	53	107	99
5	13:36:07	200	70	187	149
7	12:18:51	200	68	200	199
8	12:20:02	200	66	171	247
9	12:21:18	200	85	161	217

Таблица 3. Результаты определения движения

Сеанс	N_t	S (g)	t (с)	S_t (с)	$t_0^\Omega + t$ (ДМВ)	g_0	S_g	d_0	S_d	b_0	S_b
1	78	917	41.4	1.4	15 : 10 : 17.7	-0.0182	0.012	-1.8546	0.0058	0.2345	0.0069
2	77	897	37.3	1.1	15 : 10 : 56.6	2.6814	0.010	-1.5656	0.0058	0.3932	0.0056
4	78	1311	40.0	0.95	16 : 37 : 22.3	1.7107	0.017	-1.8675	0.017	1.0812	0.012
5	83	1032	38.9	0.68	15 : 12 : 40.2	1.6381	0.055	2.5005	0.055	1.4372	0.0062
7	78	1033	40.8	0.71	13 : 40 : 12.1	-2.9474	0.033	1.7284	0.032	1.3592	0.0077
8	77	1029	40.8	0.91	13 : 40 : 26.1	0.0727	0.0088	-2.8734	0.011	0.6715	0.0072
9	79	1077	41.1	0.84	13 : 40 : 16.3	0.5724	0.012	2.4598	0.010	0.6379	0.0080

Сеанс	Δ_1	$S_{\Delta 1}$	Δ_2	$S_{\Delta 2}$	Δ_3	$S_{\Delta 3}$
1	-0.0578	0.0061	0.0914	0.017	-0.0365	0.017
2	-0.0554	0.0042	0.2129	0.033	0.0748	0.032
4	-0.0335	0.0046	0.3758	0.080	0.1348	0.081
5	-0.0394	0.0030	0.2441	0.061	-0.0855	0.060
7	-0.0440	0.0033	0.3002	0.086	0.1374	0.088
8	-0.0543	0.0035	0.3855	0.091	0.0346	0.089
9	-0.0601	0.0031	0.2111	0.087	0.1391	0.087

Таблица 4. Результаты определения движения

Сеанс	N_t	$s(g)$	$t(c)$	$s_t(c)$	$t_0^2 + t$ (ДМВ)	g_0	s_g	d_0	s_d	b_0	s_b
1	78	837	51.9	5.1	15 : 10 : 28.2	-0.0136	0.028	-1.8596	0.0075	0.2503	0.011
2	77	879	51.4	6.8	15 : 11 : 10.6	2.7183	0.048	-1.6254	0.019	0.3776	0.020
4	79	1301	58.0	7.6	16 : 37 : 40.3	1.7722	0.096	-1.8836	0.046	1.0218	0.026
5	83	1039	37.2	6.1	15 : 12 : 38.5	1.6558	0.21	2.4780	0.20	1.4428	0.025
7	78	1023	16.6	7.6	13 : 39 : 47.9	-2.9640	0.13	1.6814	0.12	1.3027	0.031
8	76	1013	32.3	6.2	13 : 40 : 17.6	0.0555	0.098	-2.8920	0.043	0.7574	0.039
9	79	1077	38.2	6.6	13 : 40 : 13.4	0.5921	0.011	2.4091	0.046	0.6766	0.033

Сеанс	Δ_1	$s_{\Delta 1}$	Δ_2	$s_{\Delta 2}$	Δ_3	$s_{\Delta 3}$	g_c	s_{g_c}	a_c	s_{a_c}	b_c	s_{b_c}
1	-0.0448	0.0078	-0.0091	0.035	-0.0758	0.037	-0.0495	0.019	-0.0144	0.0083	-0.0330	0.0076
2	-0.0582	0.0078	0.0112	0.18	-0.1006	0.16	-0.0980	0.046	0.0305	0.018	0.0333	0.020
4	-0.0311	0.0048	-0.0030	0.32	-0.1006	0.32	-0.2005	0.085	-0.0161	0.023	0.0298	0.023
5	-0.0395	0.0052	0.2552	0.35	-0.0382	0.34	0.0207	0.075	0.0035	0.023	-0.0005	0.023
7	-0.1289	0.057	-1.6511	0.59	0.6579	0.56	0.3584	0.11	-0.0035	0.033	0.1124	0.033
8	-0.0979	0.048	-1.3100	0.70	0.1241	0.67	0.1278	0.092	-0.0038	0.034	0.0903	0.037
9	-0.0805	0.032	-0.8647	0.68	-0.0915	0.73	0.0454	0.10	-0.0135	0.038	0.0558	0.035

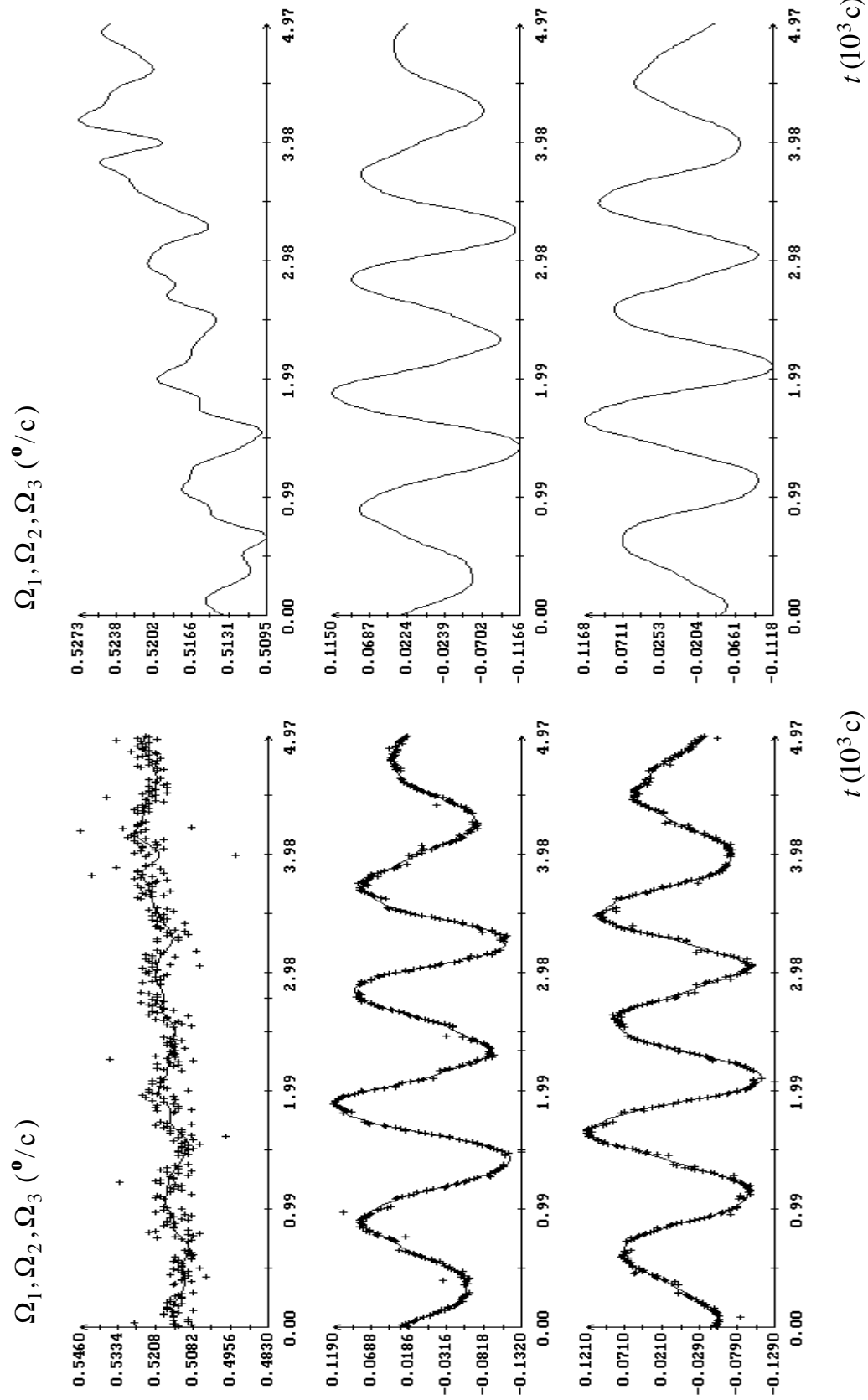


Рис. 1. Аппроксимация данных измерений сеанса 2, момент $t = 0$ соответствует 15:10:14.272 ДМВ 02.06.2005, маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (2).

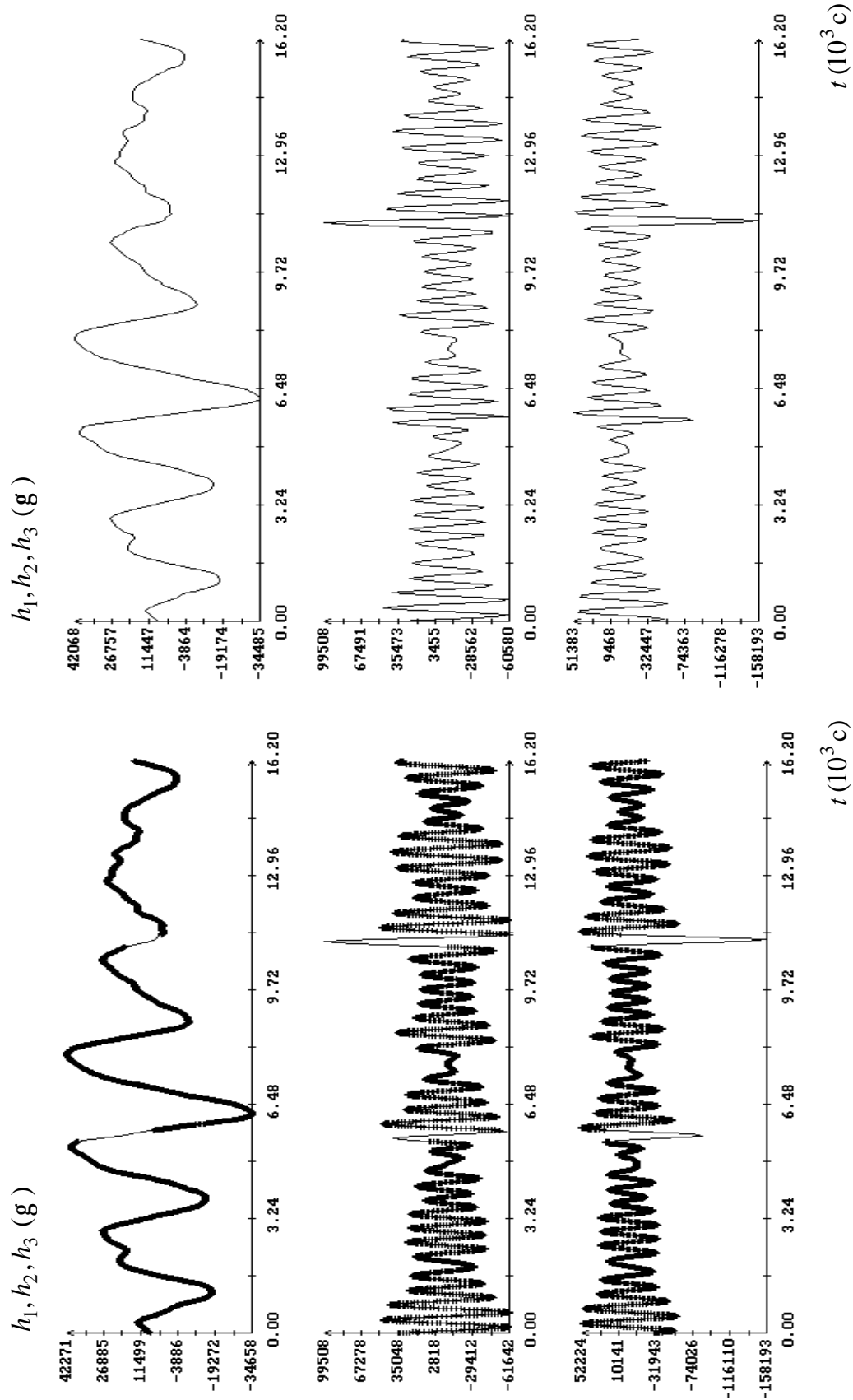


Рис. 2. Аппроксимация данных измерений, момент $t = 0$ соответствует 13:36:15 ДМВ 05.06.2005 (после коррекции времени); маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (3).

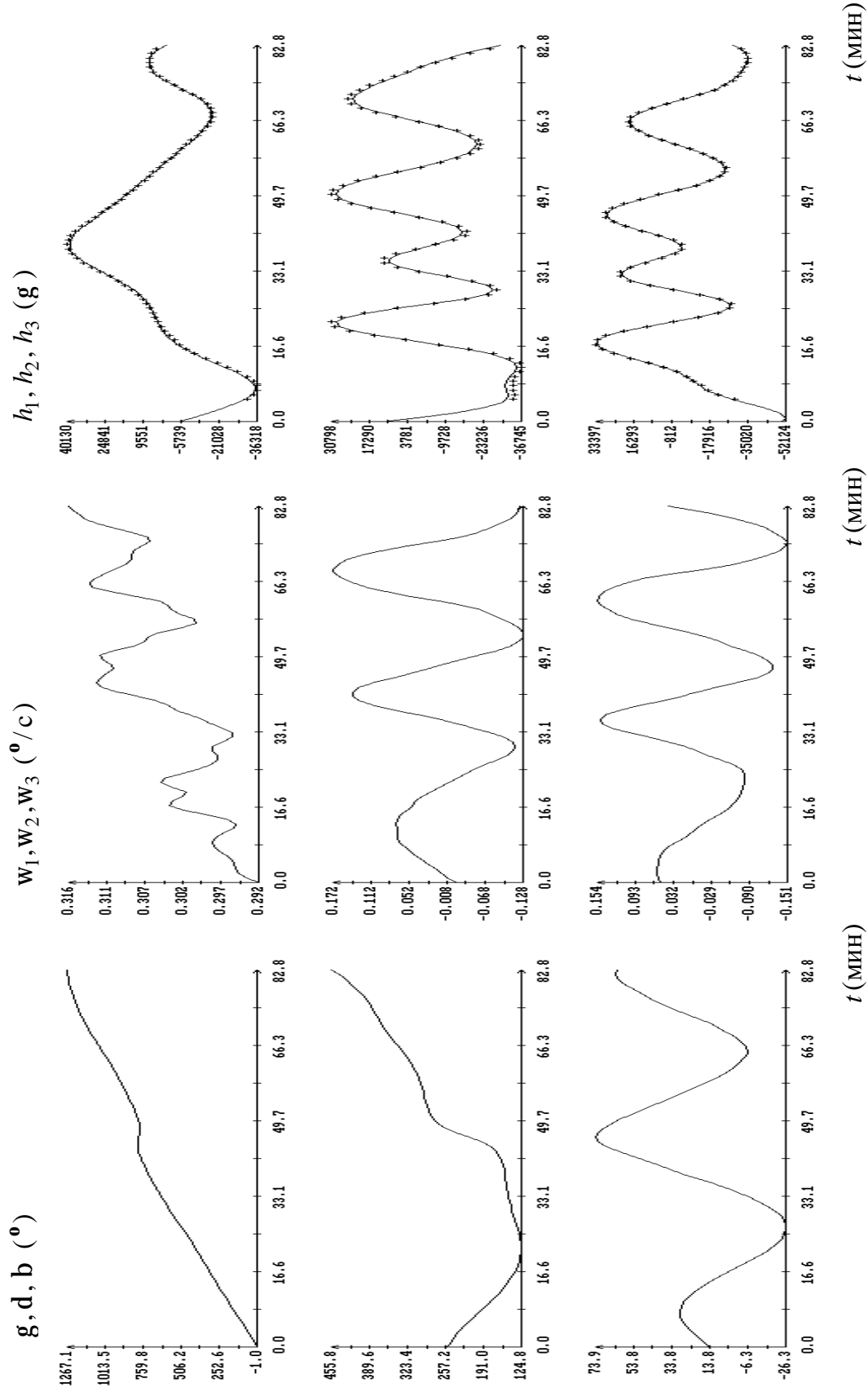


Рис. 3. Сеанс 1. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 15:10:18 ДМВ 01.06.2005, $s = 917\text{ g}$.

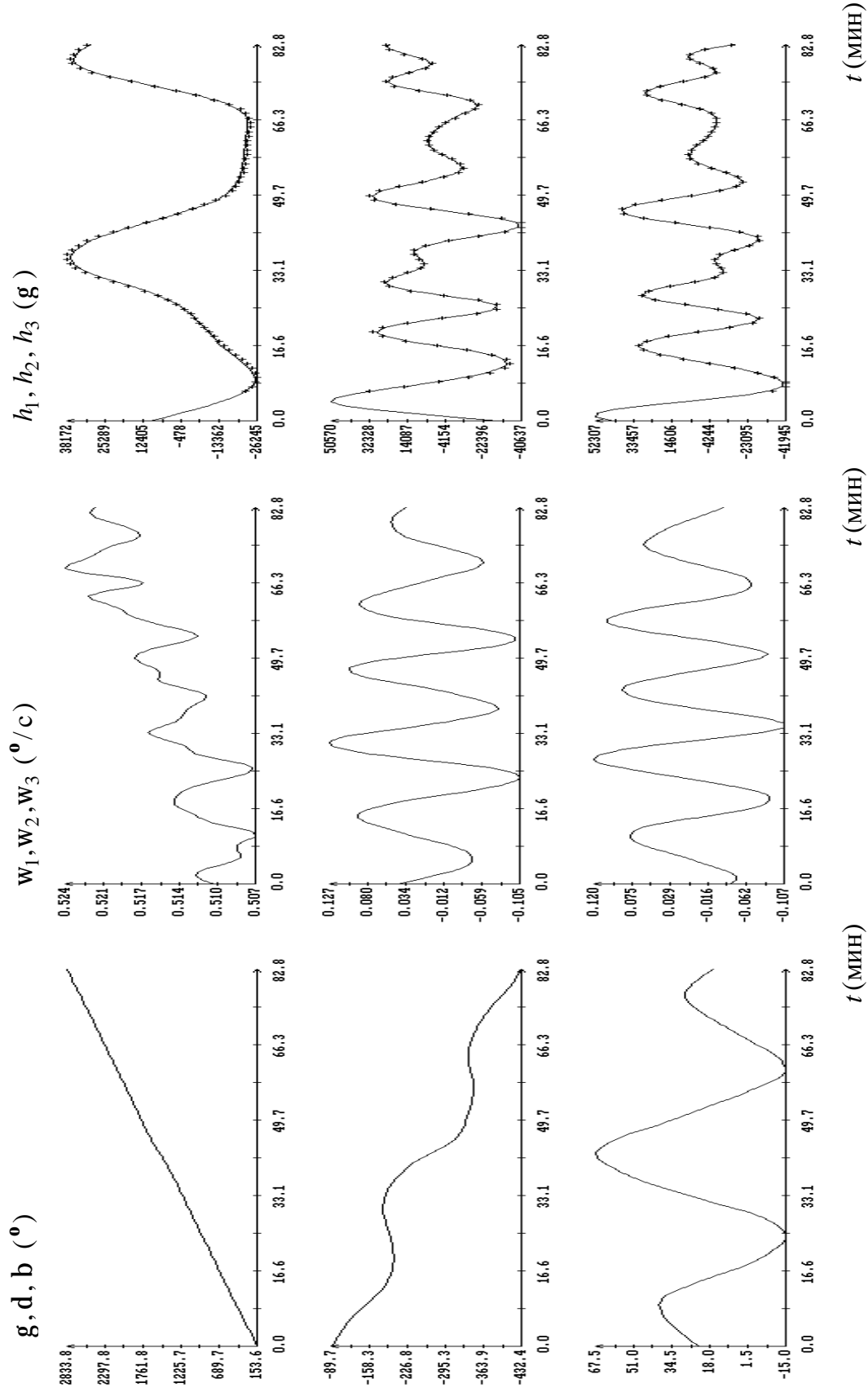


Рис. 4. Сеанс 2. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 15:10:57 ДМВ 02.06.2005, $s = 897$ g .

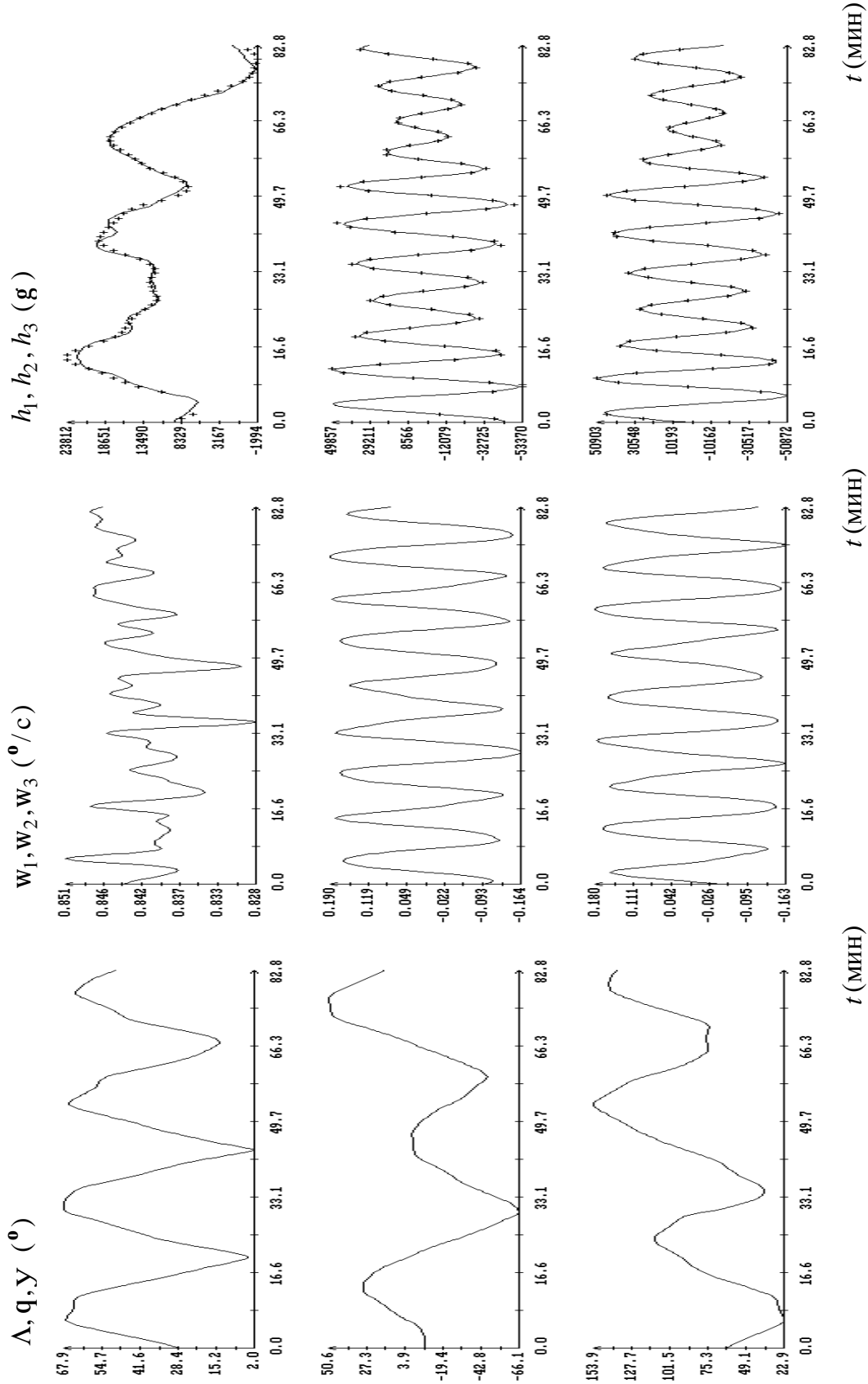


Рис. 5. Сеанс 4. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 16:37:22 ДМВ 04.06.2005, $s = 1311g$.

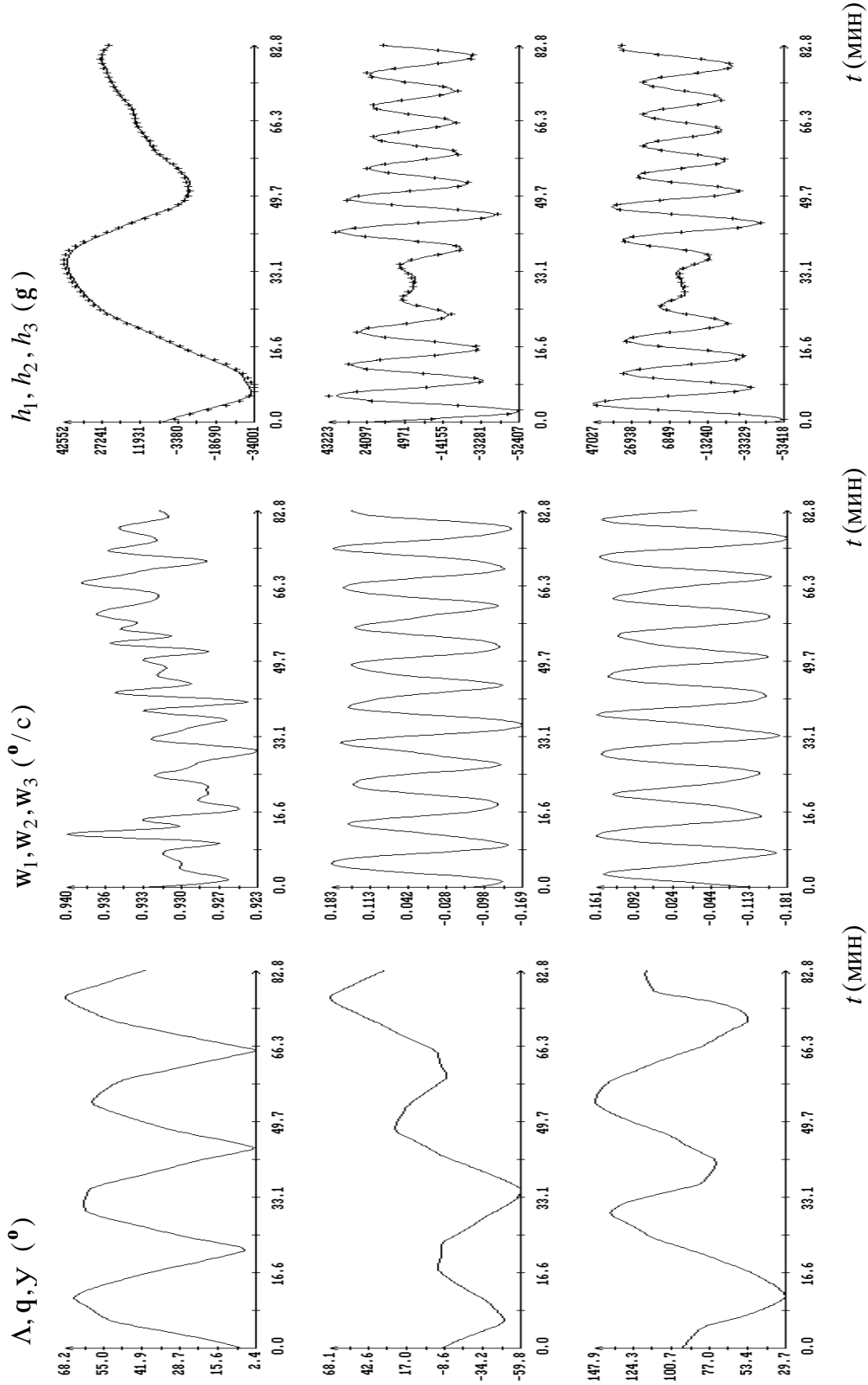


Рис. 6. Сеанс 5. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 15:12:40 ДМВ 05.06.2005, $s = 1032g$.

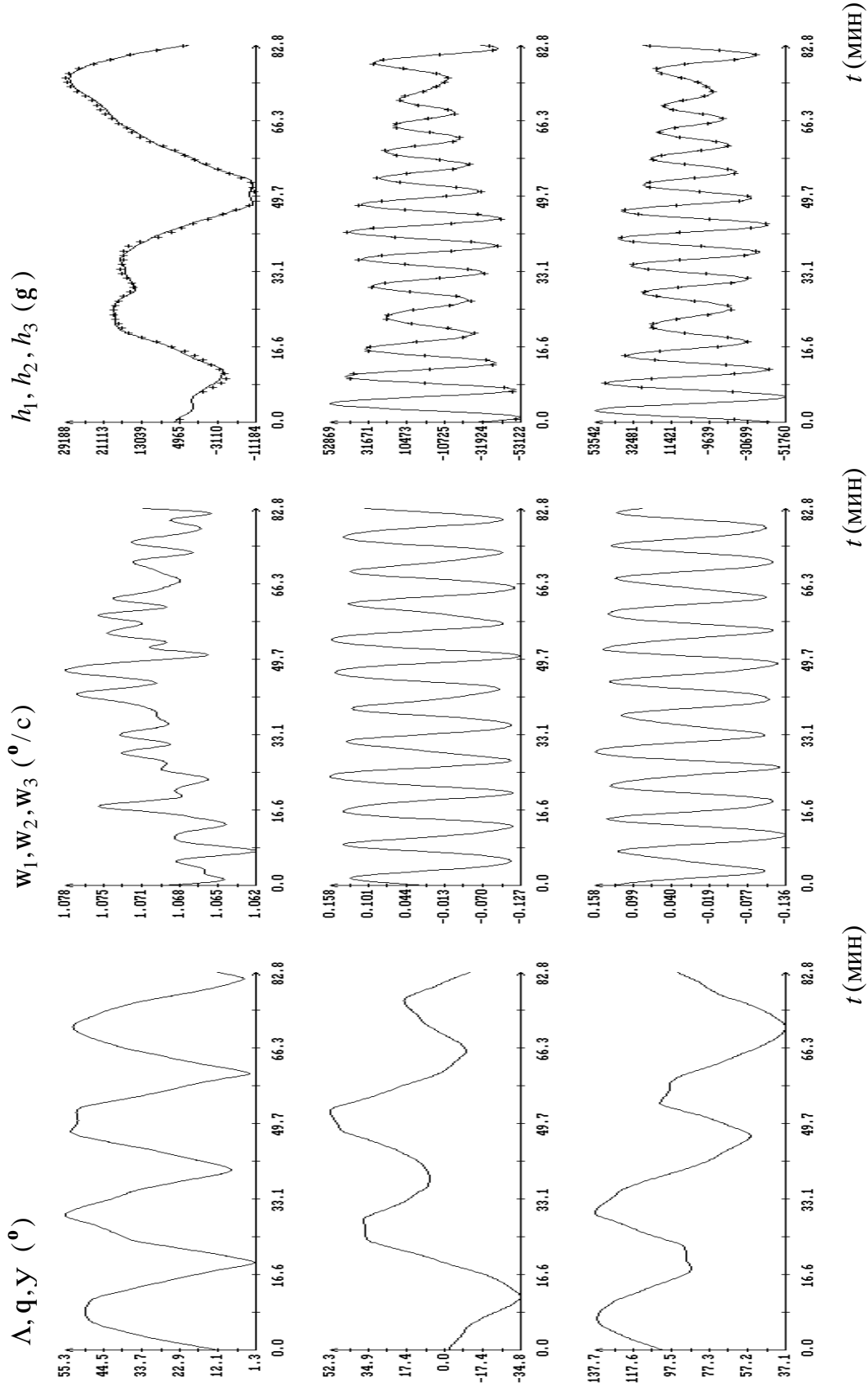


Рис. 7. Сеанс 7. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 13:40:12 ДМВ 07.06.2005, $s = 1033g$.

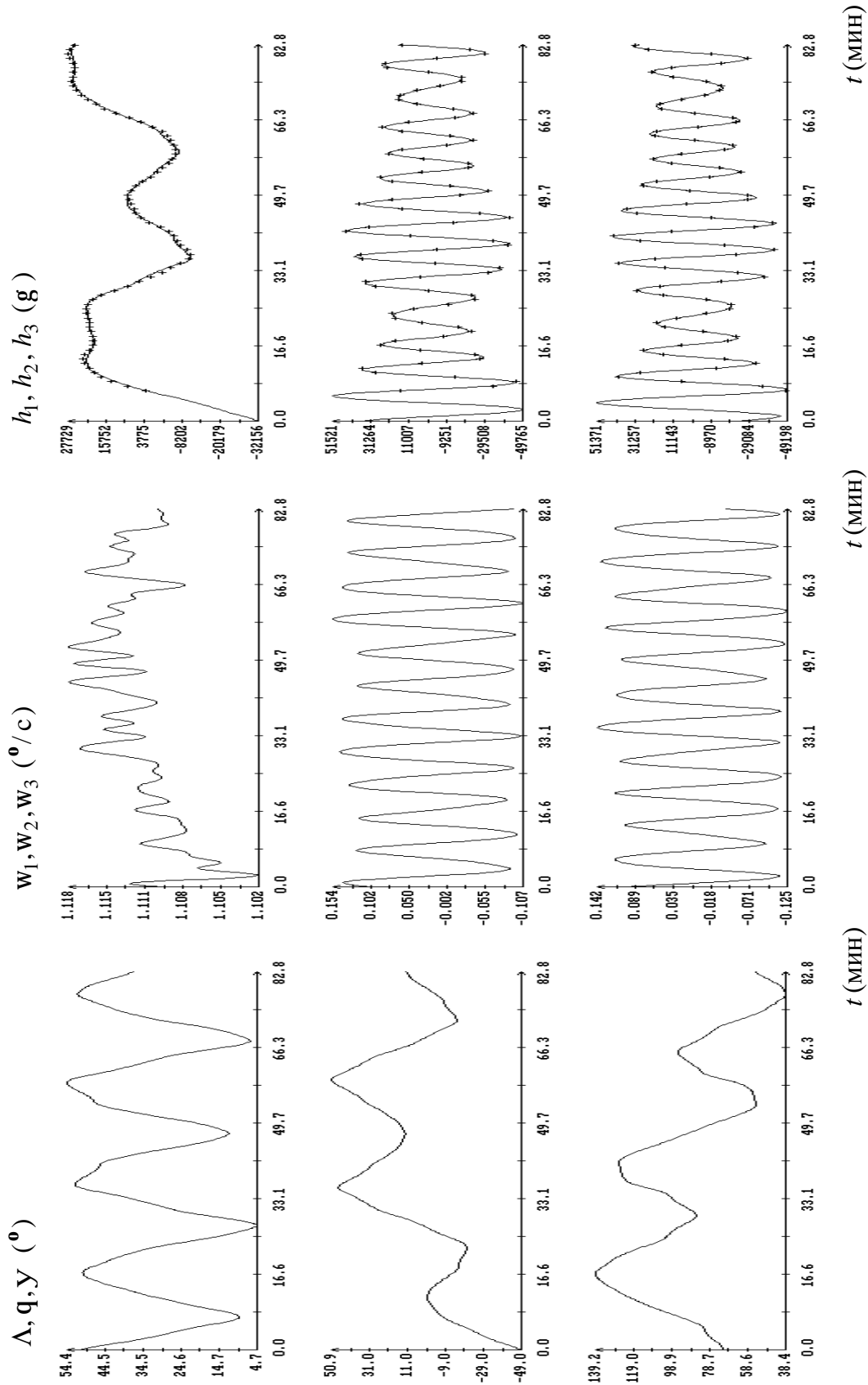


Рис. 8. Сeanс 8. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 13:40:26 ДМВ 08.06.2005, $s = 1029g$.

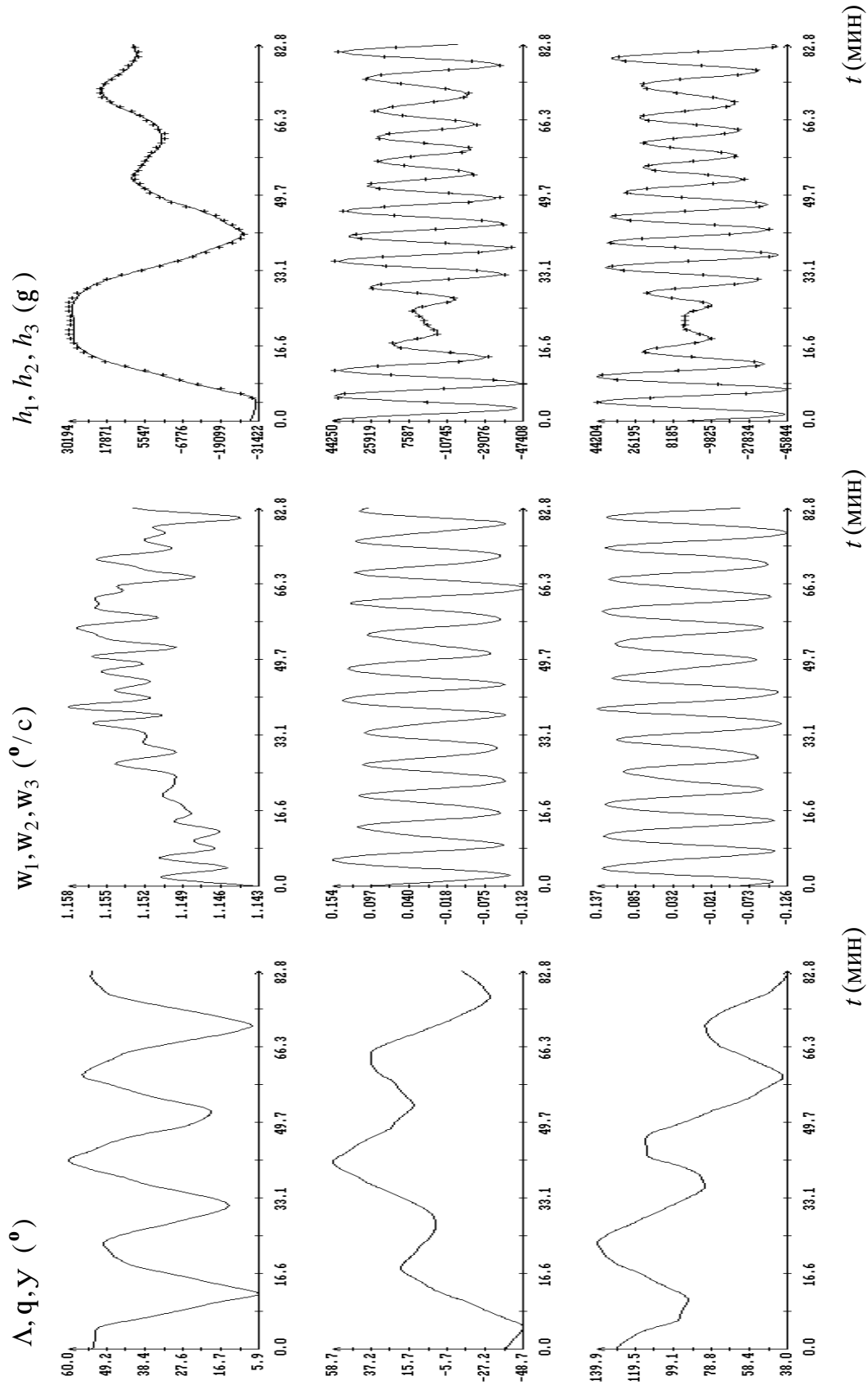


Рис. 9. Сeanс 9. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 13:40:16 ДМВ 09.06.2005, $s = 1077g$.

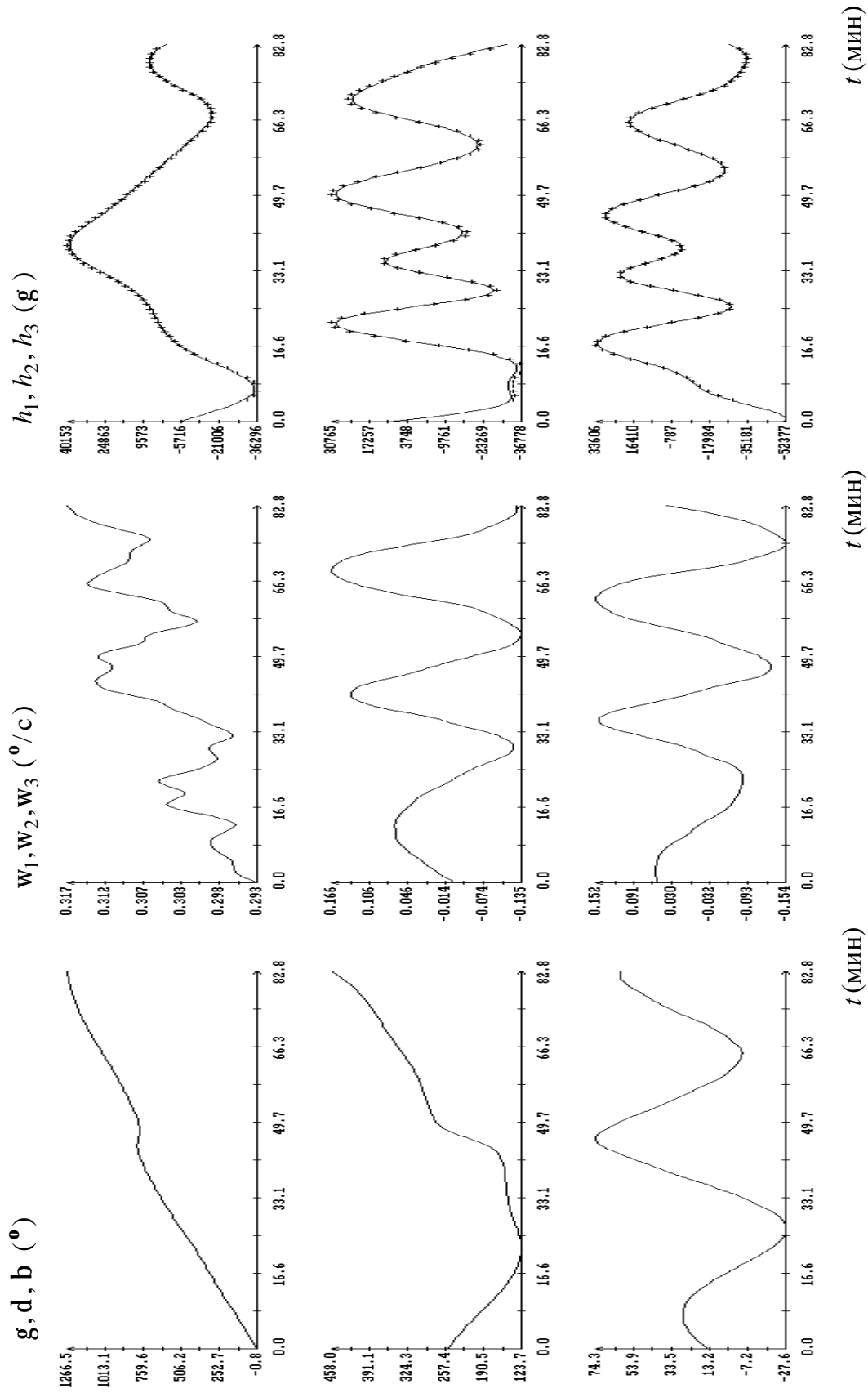


Рис. 10. Сеанс 1. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 15:10:28 ДМВ 01.06.2005, $s = 837g$.

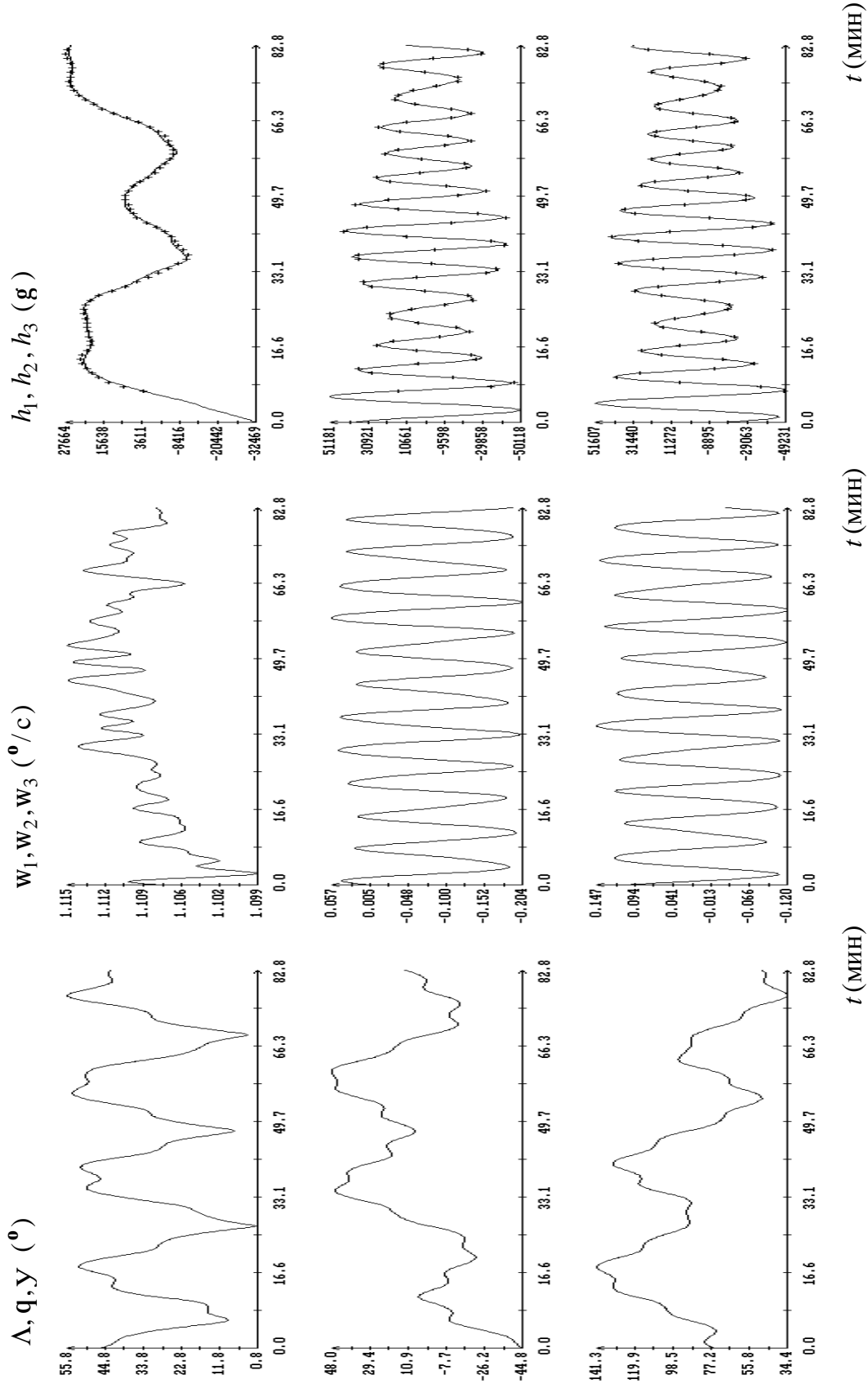


Рис. 11. Сеанс 8. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 13:40:18 ДМВ 08.06.2005, $s = 1013g$.