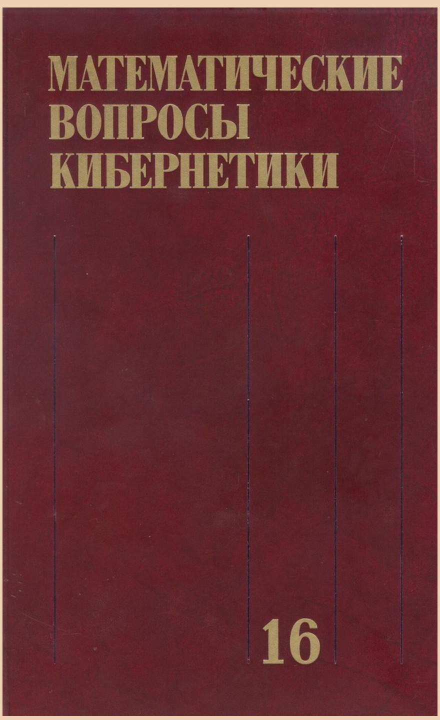
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 16



А. О. Иванов,
А. А. Тужилин

Единственность кратчайшего дерева, затягивающего границу общего положения на плоскости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов А. О., Тужилин А. А. Единственность кратчайшего дерева, затягивающего границу общего положения на плоскости // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 155–162. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-155

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КРАТЧАЙШЕГО ДЕРЕВА, ЗАТЯГИВАЮЩЕГО ГРАНИЦУ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ *)

А. О. ИВАНОВ, А. А. ТУЖИЛИН

(МОСКВА)

Мы посвящаем эту работу памяти Олега Борисовича Лупанова. Здесь не место перечислять заслуги этого замечательного математика, талантливого администратора, чуткого и отзывчивого человека. Скажем только, что мы стали студентами механико-математического факультета МГУ как раз в том учебном году (1980–1981), когда Олег Борисович пришел на наш факультет деканом. Вероятно поэтому нам до сих пор так трудно представить себе мех-мат без Олега Борисовича.

Выбор темы и формы данной заметки не случаен. Так случилось, что 5 мая 2006 года мы должны были делать доклад об этих наших результатах на семинаре Олега Борисовича. Но его неожиданная кончина пришлась на 3 мая. Поэтому мы решили опубликовать здесь текст того несостоявшегося доклада, лишь слегка изменив его, сделав более удобным для чтения.

§ 1. Введение

В данном разделе собраны необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности можно найти в [1].

1.1. Основные определения. Пусть $(\mathbb{X},\rho)$ — метрическое пространство, где ρ — функция расстояния, $V\subset\mathbb{X}$ — некоторое конечное подмножество, и $V^{(2)}$ — множество всех двухэлементных подмножеств множества V. Тогда пара $G=(V,E)$, где $E\subset V^{(2)}$ называется (простым) *графом* в метрическом пространстве $(\mathbb{X},\rho)$ *на множестве вершин* V с *множеством ребер* E. Элементы множеств V и E называются *вершинами* и *ребрами* графа G соответственно. Вершины x и y из V назовем *смежными* или *соседними*, если $\{x,y\}\in E$. Ребра e и e' из E назовем *смежными* или *соседними*, если $e\cap e'=x\in V$. Наконец, будем говорить, что ребро e и вершина x *инцидентны* друг другу, если $x\in e$. Количество ребер, инцидентных вершине x называется ее *степенью*. Для каждого графа G в метрическом пространстве $(\mathbb{X},\rho)$ естественно определена его *длина* $\rho(G)=\sum\limits_{\{x,y\}\in E}\rho(x,y)$.

Маршрутом в графе G называется такая последовательность $v_1,\dots,v_k$ его вершин, что $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ при $i=1,\dots,k-1$. Маршрут называется *пу-*

*) Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07–01–00648, 05–01–22002), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–4578.2006.1), Программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП–2.1.1.7988).

© А. О. Иванов, А. А. Тужилин, 2007

тем, если все его вершины попарно различны, и *циклом*, если попарно различны все его вершины кроме $v_1 = v_k$. Граф называется *связным*, если для каждых двух его различных вершин u и v существует маршрут $u = v_1, \ldots, v_k = v$, и *ацикличным*, если в нем не существует циклов. Связный ацикличный граф называется *деревом*.

Пусть фиксировано некоторое конечное подмножество M метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$. Будем называть это подмножество *граничным* и рассмотрим следующую граничную задачу. Будем говорить, что связный граф $G = (V, E)$ *соединяет множество* M, если $M \subset V$. Назовем *длиной минимального дерева Штейнера на* M или *длиной кратчайшего дерева на* M следующую величину:

$$\mathrm{smt}(M) = \inf\{\rho(G) \mid G \text{ — связный граф, соединяющий } M\}.$$

Ясно, что если этот инфинум достигается на некотором графе G_0, то граф G_0 является деревом. Каждое соединяющее M дерево G_0 такое, что $\rho(G_0) = \mathrm{smt}(M)$, называется *минимальным деревом Штейнера для* M или *кратчайшим деревом на* M. Множество всех таких деревьев обозначим через $\mathrm{SMT}(M)$. Задача поиска кратчайших деревьев для данного граничного множества M называется *проблемой Штейнера*. Отметим, что кратчайшее дерево может не существовать даже в полном метрическом пространстве (см. пример в [1], глава 7).

Перейдем теперь к важному частному случаю стандартной евклидовой плоскости, который является основным в данной работе.

1.2. Случай евклидовой плоскости. Проблема Штейнера в случае $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ называется *классической проблемой Штейнера*. История этой задачи восходит к П. Ферма, а в своей современной постановке она была сформулирована чешскими математиками Ярником и Кёсслером в 1934 году (см. подробности в [1] и [3]).

Пусть G — граф на плоскости. Каждому его ребру $\{x, y\}$ сопоставим отрезок $[x, y] \subset \mathbb{R}^2$. Объединение $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ всех таких отрезков назовем *геометрической реализацией графа* G или соответствующей графу G *сетью*. Отрезки, составляющие Γ, назовем *ребрами сети*, а точки из Γ, соответствующие вершинам графа G, — *вершинами сети*. Отметим, что, вообще говоря, ребра сети могут пересекаться не только по ее вершинам. Если же каждая пара ребер сети или не пересекается, или пересекается по концевой точке соответствующих отрезков, т. е. по общей вершине, то назовем такую сеть *вложенной*.

Отметим, что в случае плоскости (как и любого другого полного риманова многообразия), кратчайшее дерево существует для любого граничного множества (см., например, [1]). Кроме того, каждое кратчайшее дерево необходимо является вложенным.

Локальное устройство кратчайших деревьев на плоскости несложно описать. Для этого определим угол между любыми двумя ребрами дерева как угол между соответствующими отрезками его геометрической реализации. Имеет место следующий результат, который легко обобщается на случай произвольного риманова многообразия.

Теорема 1. *Пусть* G *— кратчайшая сеть для граничного множества* $M \subset \mathbb{R}^2$. *Тогда*

1) *углы между соседними ребрами дерева* G *не меньше чем* 120°,

2) *вершины степени* 1 *из* G *принадлежат* M,

3) *если вершина степени* 2 *не принадлежит* M, *то угол между инцидентными ей ребрами равен* 180°.

В частности, степень каждой вершины x *дерева* G *не превосходит* 3, *и если она равна* 3, *то инцидентные* x *ребра образуют углы равные* 120°.

Связный граф, удовлетворяющий условиям 1—3 теоремы 1, называется *локально минимальным графом на* M. Отметим, что локально минимальный граф не обязан быть кратчайшим. Геометрия таких графов представляет самостоятельный интерес и интенсивно изучается (см. [1]).

Не входящие в граничное множество вершины степени 2 называются *фиктивными вершинами*. Это название связано с тем, что добавление таких вершин на ребра локально минимального графа, так же как и удаление таких вершин и замена двух инцидентных фиктивной вершине ребер на одно ребро, не меняют геометрии локально минимального графа. В дальнейшем, не ограничивая общности, мы предполагаем, что локально минимальные графы не имеют фиктивных вершин.

1.3. Проблема единственности кратчайшего дерева. Ответ на естественный вопрос о единственности кратчайшего дерева, соединяющего данную границу M, разумеется, отрицательный. В качестве примера рассмотрим множество M, состоящее из вершин квадрата. На этом множестве имеется две кратчайших сети (см. рис. 1).

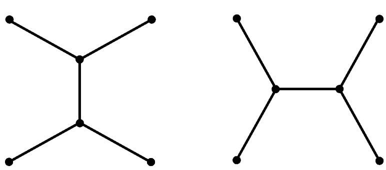


Рис. 1. Два кратчайших дерева на вершинах квадрата

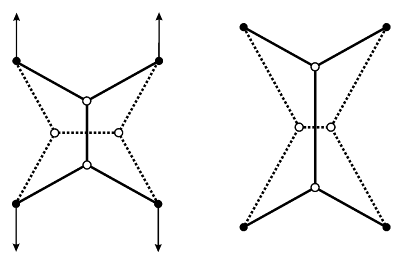


Рис. 2. Деформация множества вершин квадрата. Две кратчайших сети деформируются с разной скоростью

Впрочем, если рассмотреть малую деформацию множества вершин квадрата в множество вершин прямоугольника (см. рис. 2), то обе локально минимальных сети также продеформируются, оставаясь при этом локально минимальными, причем их длины будут меняться с разными скоростями. В результате, длина одной сети (на рисунке она изображена сплошными линиями) станет меньше длины второй, поэтому множество вершин сколь угодно близкого к квадрату прямоугольника, полученного в результате такой деформации, соединяется единственной кратчайшей сетью. Чтобы убедиться в этом, приведем формулу производной длины локально минимальной сети при деформации граничного множества (см. рис. 3).

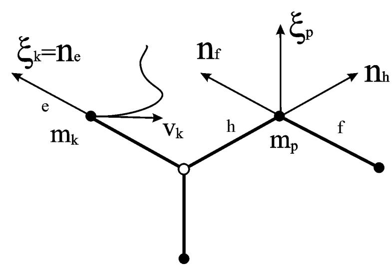


Рис. 3. Производная функции длины локально минимального дерева

Утверждение 1. *Пусть* $\{m_1, \ldots, m_n\}$ *— граничные вершины локально минимального дерева* Γ. *Пусть вершины дерева* Γ *движутся по гладким кривым, причем начальная скорость граничной вершины* m_i *равна* v_i. *Обозначим через* ξ_i *сумму единичных векторов* n_e *направлений ребер* e *дерева* Γ, *приходящих в вершину* m_i. *Тогда длина сети* Γ *дифференцируема в начальный момент времени, а ее производная равна* $\sum\limits_k \langle v_k, \xi_k \rangle$.

§ 2. Основной результат и препятствия к доказательству

В 1996 году, профессор Боннского университета С. Гильдебрандт (S. Hildebrandt) спросил нас, верно ли, что граничное множество общего положения соединяется единственным кратчайшим деревом. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Для почти всех граничных подмножеств плоскости кратчайшее дерево единственно.*

Казалось бы, приведенный в предыдущем разделе пример, вместе с утверждением 1, подсказывает простую идею доказательства этой теоремы. Действительно, как будет объяснено ниже, задача редуцируется к единственности *бинарного* кратчайшего дерева, т. е. кратчайшего дерева без вершин степени 2. Пусть граничное множество M соединяется несколькими бинарными кратчайшими деревьями, как, скажем, множество вершин квадрата. Выберем одно из них, которое обозначим через Γ_0. Рассмотрим деформацию граничного множества $M=\{m_1,\dots,m_n\}$, при которой граничная вершина $m_i\in M$ смещается вдоль инцидентного ей ребра дерева Γ_0. Тогда, в силу утверждения 1, длина дерева Γ_0 будет убывать со скоростью $-n$, а скорость изменения длин других деревьев будет меньше по абсолютной величине (см. рис. 4).

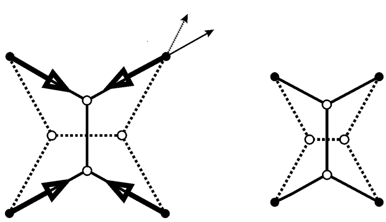


Рис. 4. Деформация множества вершин квадрата вдоль ребер одной из сетей

В результате, получим близкое граничное множество, которое соединяется единственным кратчайшим деревом (являющимся подмножеством исходного дерева Γ_0).

Однако, данное рассуждение содержит следующий пробел. Оно не работает, если на граничном множестве M имеется два разных кратчайших дерева, ребра которых, инцидентные одной и той же граничной вершине, сонаправлены. Действительно, в этом случае их длина будет меняться с одинаковой скоростью при любой деформации граничного множества.

Назовем *сонаправленными* такие графы G_1 и G_2 с общей границей M, что в каждой граничной вершине $m_i\in M$ векторы ξ_i^j, $j=1,2$, равные сумме единичных векторов направлений приходящих в m_i ребер графа G_j, попарно равны: $\xi_i^1=\xi_i^2$.

Таким образом, возникает следующий вопрос: существует ли граничное множество $M\subset\mathbb{R}^2$, которое соединяют различные сонаправленные кратчайшие бинарные деревья? Или, более общо, существует ли граничное множество, которое соединяется разными сонаправленными локально минимальными графами?

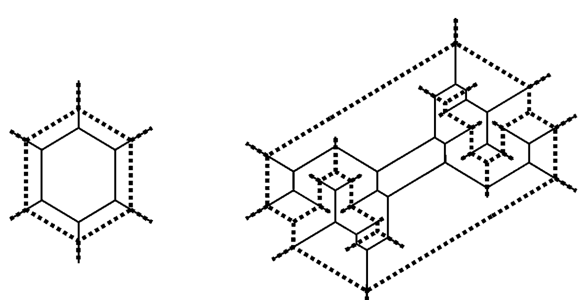


Рис. 5. Вложенные сонаправленные графы с циклами

На рис. 5 приведены примеры сонаправленных локально минимальных сетей с циклами. Причем, если на левом рисунке одна сеть получается из другой простой деформацией («сжатием цикла»), то на правом рисунке графы планарно не эквивалентны. Отметим, что все графы на рис. 5 являются вложенными.

На рис. 6 приведен пример сонаправленных локально минимальных деревьев. Отметим, что каждое из этих деревьев имеет самопересечения.

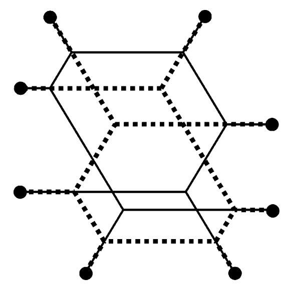


Рис. 6. Сонаправленные локально минимальные бинарные деревья с самопересечениями

Нам не известно, *существует ли граничное множество M, которое соединяется двумя разными сонаправленными локально минимальными вложенными деревьями.*

Ключевое соображение, на котором основано наше доказательство основной теоремы 2, состоит в том, что не существует граничного множества $M \subset \mathbb{R}^2$, соединенного двумя разными сонаправленными *кратчайшими* бинарными деревьями.

Дело в том, что кратчайшие деревья обладают набором дополнительных геометрических свойств, которые и позволяют доказать эту лемму. Грубо говоря, кратчайшее дерево не может слишком близко подходить само к себе (см. подробности в [1]).

§ 3. Основные моменты доказательства

Мы приведем здесь лишь ключевые моменты доказательства. Подробности можно найти в нашей статье [2].

3.1. Редукция к случаю бинарных деревьев. Прежде всего отметим, что каждое локально минимальное дерево Γ можно разложить в объединение *бинарных компонент*, разрезав Γ по граничным вершинам степени 2 и определив границу каждого полученного в результате локально минимального бинарного дерева как множество его вершин степени 1 (см. рис. 7). В результате граничное множество M представляется в виде объединения своих подмножеств M_i, каждое из которых является границей соответствующей бинарной компоненты.

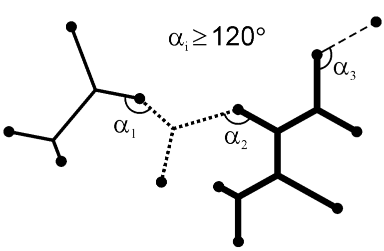


Рис. 7. Разложение локально минимального дерева на бинарные компоненты (в этом примере их 4)

Далее, мы показываем, что почти все граничные множества обладают следующими свойствами:

(1) они соединяются только такими кратчайшими деревьями, для которых углы между ребрами, принадлежащими разным бинарным компонентам, не кратны 60°;

(2) каждое кратчайшее дерево на этих множествах остается кратчайшим при малой деформации границы. Будем называть такие граничные множества *хорошими*.

Если два кратчайших дерева на хорошей границе M сонаправлены, то порожденные ими представления множества M в виде объединения границ бинарных компонент одинаковы. Более того, их бинарные компоненты, соединяющие одинаковые подмножества границы, сонаправлены.

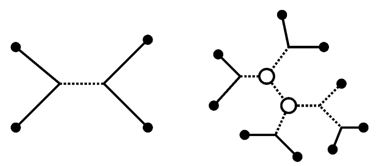
Таким образом, доказательство единственности сводится к доказательству несуществования сонаправленных кратчайших бинарных деревьев.

3.2. Усы и внутренние вершины. Пару смежных ребер бинарного дерева, инцидентных вершинам степени 1, назовем *усами*. Легко проверить, что каждое бинарное дерево, количество вершин степени 1 которого больше или равно 4, имеет не менее двух непересекающихся усов.

Вершина степени 3 бинарного дерева называется *вполне внутренней*, если она не смежна ни с одной вершиной степени 1.

Легко проверяется справедливость следующей леммы (см. рис. 8).

Лемма 1. *Пусть G — бинарное дерево, количество вершин степени* 1 *которого не меньше* 4. *Пусть k — количество его усов, а m — количество его вполне внутренних вершин. Тогда $k-m=2$.*



k = 2, m = 0, k - m = 2 k = 4, m = 2, k - m = 2

Рис. 8. Количество усов бинарного дерева на 2 больше количества его вполне внутренних вершин

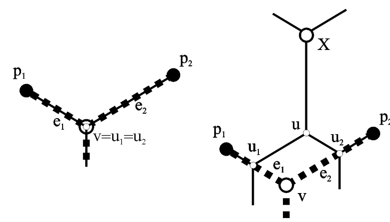


Рис. 9. Возможные конфигурации сонаправленных кратчайших бинарных деревьев вблизи усов одного из них. Вершина X справа не может быть граничной

Следующая лемма является ключевой в доказательстве несуществования сонаправленных кратчайших бинарных деревьев (см. рис. 9).

Лемма 2. *Пусть Γ_1 и Γ_2 — два сонаправленных кратчайших бинарных дерева, и пусть $\{e_1, e_2\}$ — некоторые усы дерева Γ_1, инцидентные общей вершине v, причем ребро e_i инцидентно граничной вершине p_i, $i=1,2$.*

Тогда вершины u_i дерева Γ_2, смежные с граничными вершинами p_i, или совпадают друг с другом и с вершиной v, т. е., другими словами, деревья Γ_1 и Γ_2 имеют совпадающие усы, или лежат внутри ребер e_i и смежны с вполне внутренней вершиной u дерева Γ_2.

3.3. Доказательство несуществования сонаправленных кратчайших бинарных деревьев. Если у сонаправленных кратчайших бинарных деревьев Γ_1 и Γ_2 имеются совпадающие усы, то эти усы можно отрезать, сделав общую вершину усов граничной и сведя, тем самым, задачу к деревьям с меньшим числом граничных вершин. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что Γ_1 и Γ_2 не имеют общих усов.

Кроме того, опуская очевидный случай граничного множества из трех точек, будем предполагать, что граничное множество состоит не менее чем из четырех вершин.

Тогда каждым усам одного дерева, в силу ключевой леммы 2, соответствует вполне внутренняя вершина другого дерева, причем разным усам соответствуют разные вершины.

Поэтому, если k_i — количество усов, а m_i — количество вполне внутренних вершин дерева Γ_i, $i=1,2$, то $k_i \leqslant m_i$. Но тогда, в силу леммы 1, имеем:

$$k_1 - 2 = m_1 \geqslant k_2 > k_2 - 2 = m_2 \geqslant k_1,$$

противоречие.

Остается заметить, что теперь пробел в приведенном выше доказательстве теоремы 2 устранен. Основная теорема доказана.

§ 4. Следствия и замечания

Приведем некоторые следствия основной теоремы 2.

Следствие 1. *Если сместить все граничные точки произвольного кратчайшего бинарного дерева* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *внутрь выходящих из них ребер, то на полученной границе имеется ровно одно кратчайшее дерево, а именно, соответствующее подмножество исходного дерева* Γ (*см. рис.* 10).

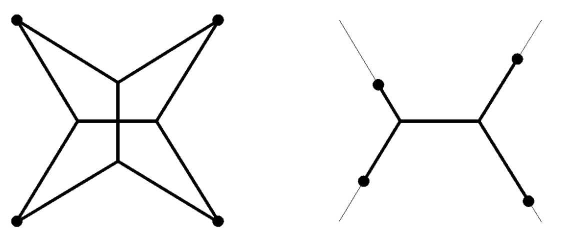


Рис. 10. К следствию 1.

Следствие 2. *Любое плоское дерево* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, *степени вершин которого не превосходят трех, планарно эквивалентно некоторому кратчайшему дереву, граница* M *которого соединяется единственным кратчайшим деревом.*

Более того, достаточно близкие к M *граничные множества также соединяются единственным кратчайшим деревом, планарно эквивалентным* Γ.

Следствие 3. *Длина минимального дерева Штейнера, как функция граничного множества, непрерывно дифференцируема на открытом всюду плотном подмножестве множества границ.*

Напомним, что *минимальным остовным деревом* на конечном множестве $M \subset \mathbb{R}^2$ называется кратчайшее из деревьев, множества вершин которых совпадают с M.

Если длина минимального остовного дерева на M отлична от нуля, то *отношением Штейнера* $\mathrm{sr}(M)$ множества M называется отношение длин минимального дерева Штейнера и минимального остовного дерева, построенных на M.

Следствие 4. *Отношение Штейнера, как функция граничного множества, непрерывно дифференцируемо на открытом всюду плотном подмножестве множества границ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Иванов А. О., Тужилин А. А. Единственность минимального дерева Штейнера для границ общего положения // Математический сборник. — 2006. — Т. 197, №9. — С. 55–90.

3. Hildebrandt S., Tromba A. The parsimonious universe. New York: Springer-Verlag, 1996.
4. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one-dimensional variational problems. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Publisher Press, 2001.

Поступило в редакцию 12 VIII 2006