

**В. А. Садовничий,  
В. В. Александров,  
А. В. Лебедев,  
С. С. Лемак**

**Максиминное  
тестирование качества  
управления  
устройством спасения  
космонавта**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:**  
Садовничий В. А., Александров В. В., Лебедев А. В., Лемак С. С. Максиминное тестирование качества управления устройством спасения космонавта // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – С. 23–30. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-23>

# МАКСИМИННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ УСТРОЙСТВОМ СПАСЕНИЯ КОСМОНАВТА \*)

**В. А. САДОВНИЧИЙ, В. В. АЛЕКСАНДРОВ, А. В. ЛЕБЕДЕВ, С. С. ЛЕМАК**

(МОСКВА)

В статье рассмотрена задача тестирования качества управления устройством спасения космонавта (УСК). Для оценки точности причаливания УСК к орбитальной станции предложено использование схемы максиминного тестирования [1], включающей три этапа. На первом этапе формируется стратегия тестирования, как результат решения игровой задачи. На втором этапе происходит непосредственно тестирование работы алгоритма управления. При этом используются действующие на систему возмущения, найденные на первом этапе и вычисляются реальные показатели точности управления. На третьем этапе формируется оценка работы алгоритма управления.

## 1. Постановка задачи

В связи с высокой степенью риска в задаче управления причаливанием УСК к орбитальной станции возникла необходимость тренировки космонавтов на Земле с целью выработки навыков поведения при возникновении нештатных ситуаций на орбите. На тестирующем тренажере эта задача решается сложным набором технических средств, способных достаточно точно имитировать условия управления объектом в реальных ситуациях. Ключевую роль при этом играет специальное математическое обеспечение, дающее возможность проанализировать экстремальные возможности алгоритма управления и оценить действия космонавта в той или иной ситуации. Функциональная схема такого тренажера представлена на рис. 1, где представлена модель управляемого объекта и действующих на него возмущений.

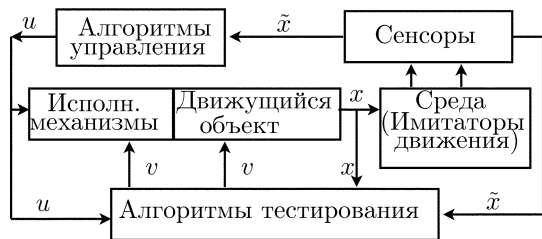


Рис. 1. Схема тестирующего тренажера

\*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 5-8-50148, 07-01-00216).

Исполнительные механизмы и динамический объект, изображенные на этой схеме, могут быть реализованы в виде компьютерной модели, а имитационный динамический стенд, в ответ на поведение этой модели, может воздействовать на вестибуло-глазо-двигательный аппарат тестируемого космонавта, создавая условия управления объектом, приближенные к реальным. Точность стабилизации оценивается в смысле выбранного функционала качества  $J$ .

Алгоритм тестирования состоит из трех этапов. На первом этапе находят наихудшие возмущения, действующие на динамическую систему, а также неуплучшаемая оценка функционала качества

$$J_0 = \max_{v \in V} \min_{u \in U} J(u, v),$$

получаемая из решения задачи на максимин. На втором этапе производится процесс испытания на компьютерном или динамическом тренажере с непосредственным участием тестируемого космонавта при наихудших возмущениях, действующих на систему. В конце второго этапа вычисляется показатель качества  $J$ , соответствующий реальной работе алгоритма управления. На третьем этапе выставляется оценка, которая формируется как отношение величин  $J_0$  и  $J$ . Ниже будет рассмотрена задача тестирования точности стабилизации управляемого движения космического модуля УСК.

Устройство для спасения космонавта предназначено для использования при кратковременных перемещениях вне орбитальной станции. Это устройство монтируется на скафандр и представляет собой прямоугольную металлическую раму, по углам которой расположено по четыре газовых микродвигателя. Также, на УСК находится система управления движением, которая включается автоматически при потере контакта космонавта со станцией, гасит угловые скорости, возникшие при отрыве и ориентирует космический модуль лицом к станции. После этого космонавт включает маршевый режим, который и позволяет сблизиться со станцией.

Представим космический модуль в виде прямоугольной рамы массы  $m$  со сторонами  $2a$  и  $2b$ , по углам рамы расположено по четыре двигателя направленных ортогонально друг другу. Центр масс рамы ( $C$ ) не совпадает с ее геометрическим центром ( $S$ ). Свяжем со станцией систему координат  $Oy_1y_2y_3$ , а с рамой — приборную систему координат  $Sz_1z_2z_3$ , таким образом, чтобы ось  $z_1$  имела направление «спина-грудь», а  $z_3$  дополняла систему до правой. Обозначим через  $\delta_1\delta_2\delta_3$  смещение центра масс относительно геометрического центра по осям  $z_1, z_2, z_3$  соответственно. Будем считать, что тяга маршевых двигателей, направленных вдоль оси  $z_1$  реализуется с переменной во времени ошибкой, а тяга остальных двигателей реализуется точно. Также, положим, что главные оси тензора инерции модуля не совпадают с осями приборной системы координат. Ввиду сравнительно малых начальных расстояний до станции и кратковременности процесса причаливания, будем пренебрегать орбитальным движением станции вокруг Земли.

Построим программное движение модуля таким образом, чтобы в некоторый момент времени  $t_k$  модуль имел близкие к нулю координаты и скорости. Программное движение будет состоять из трех этапов:  $[0, t_1]$  — разгон,  $(t_1, t_2)$  — дрейф,  $[t_2, t_k]$  — торможение. Программная траектория будет иметь вид отрезка на оси  $y_1$ .

Задача управления УСК состоит в минимизации отклонения от программной траектории в конечный момент времени.

Линеаризованные уравнения в отклонениях от программного движения имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^4 (v_{i1} - v_{i2}) \\ \ddot{x}_2 = \alpha_3 \sum_{i=1}^4 (u_{i1}^p - u_{i2}^p) + (u_{42} + u_{32} - u_{12} - u_{22}) \\ \ddot{x}_3 = -\alpha_2 \sum_{i=1}^4 (u_{i1}^p - u_{i2}^p) + (u_{11} + u_{41} - u_{21} - u_{31}) \\ J_1 \ddot{\alpha}_1 = M_1 + \gamma_2 M_3 - \gamma_3 M_2 - \sigma_1 M_1 \\ J_2 \ddot{\alpha}_2 = M_2 + \gamma_3 M_1 - \gamma_1 M_3 - \sigma_2 M_2 \\ J_3 \ddot{\alpha}_3 = M_3 + \gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 - \sigma_3 M_3 \\ \dot{x}_4 = \chi \sum_{i=1}^4 (u_{i1}^p + u_{i2}^p + u_{i1} + u_{i2} + v_{i1} + v_{i2}). \end{array} \right.$$

Здесь  $\sigma_i$  — постоянные ошибки по диагональным элементам тензора инерции,  $\gamma_i$  — постоянные малые угла поворота главных осей тензора инерции относительно приборной системы координат модуля,  $v_{ij}$  — переменные во времени ошибки в реализации тяги маршевых двигателей, входящие в выражения для моментов  $M_i$  относительно осей приборной системы координат,  $x_4$  — переменная, характеризующая расход топлива,  $\chi = \text{const} > 0$ .

## 2. Схема методики тестирования

Выписанную систему уравнений в отклонениях, можно записать в виде

$$\dot{x} = A(t)x + Bu + Cv, \quad (1)$$

где  $A(t)$  — кусочно-постоянная матрица, а  $B, C$  — постоянные матрицы,  $u$  — вектор управлений,  $v$  — вектор возмущений, действующих на систему.

Качество решения задачи тестирования будем оценивать при помощи функционала

$$J(u, v) = x_2(t_k)^2 + x_3(t_k)^2 + x_4(t_k)^2. \quad (2)$$

Тогда в динамической игре для системы (1) управления  $u$  стремятся уменьшить функционал качества  $J$ , а возмущения  $v$  стремятся его увеличить.

Согласно предложенной [1] методике тестирования, на первом этапе необходимо найти наилучшую оценку функционала качества (2) из решения задачи

$$J_0(u^0, v^0) = \max_v \min_u J(u, v), \quad (3)$$

а также наихудшие возмущения  $v^0$ , действующие на систему (1).

Для поиска максимина рассмотрим отклонение  $x$  как разность  $x = y - z$ , где  $y$  и  $z$  — решения подсистем:

а) по возмущениям

$$\dot{y} = Ay + Cv, \quad y(0) = x(0), \quad (4)$$

б) по управлениям

$$\dot{z} = Az - Bu, \quad z(0) = 0. \quad (5)$$

Построим проекции на пространство  $x_2 x_3 x_4$  областей достижимости по возмущениям  $V$  для подсистемы (4) и по управлениям  $U$  для подсистемы (5).

Тогда динамическая игровая задача сводится к геометрической игре на областях достижимости, а задача поиска максимина (3) — к нахождению  $\rho_0 = \max_{y(t_k) \in V} \min_{z(t_k) \in U} \rho(y, z)$ , где  $\rho$  — евклидово расстояние в пространстве  $x_2 x_3 x_4$ .

Особо важным является случай существования точки равновесия, т. е. выполнения равенства  $\rho_0 = \min_{z(t_k) \in U} \max_{y(t_k) \in V} \rho(y, z)$ , ибо только в этом случае неулучшаемая оценка функционала качества является достижимой, и оценка, полученная в результате процесса тестирования, будет объективной. В [1] приведен критерий существования точки равновесия.

На рис. 2 показаны области достижимости  $U$  и  $V$  в задаче причаливания УСК, найденные численным путем и отмечены точки, соответствующие решению максиминной задачи.

Для проведения второго этапа тестирования используется программа визуальной имитации процесса сближения со станцией.

На вход программы подаются наилучшие возмущения, найденные на первом этапе, а на выходе вычисляется реальное значение функционала качества  $J$ , исходя из которого можно дать оценку качества стабилизации, рассматривая отношение  $J_0/J$ .

Вопросы существования седловой точки, а также поиска максимина и минимакса на первом этапе тестирования рассмотрим для случая дискретных возмущений, действующих на управляемую систему.

### 3. Первый этап методики тестирования для систем с дискретными возмущениями

Рассмотрим следующий класс управляемых систем в отклонениях от программного движения:

$$\dot{x} = A_\alpha x + B_\alpha u + q^i(t) \quad (6)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x^j$ . Здесь  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния,  $A_\alpha$  — матрица размерности  $n \times n$ ,  $B_\alpha$  — матрица размерности  $m \times n$ ,  $u$  —  $m$ -мерная вектор-функция управления:

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_\infty[t_0, t_k], |u_s(t)| \leq \mu_s, s = 1, \dots, m\},$$

где  $t_0$  и  $t_k$  — два фиксированных момента времени,  $t_k > t_0$ . Матрицы  $A_\alpha$  и  $B_\alpha$  зависят от дискретного параметра  $\alpha \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $x^j$  — набор констант,  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ , а  $q^i(t)$  — набор фиксированных функций,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Таким образом, управления  $u$  в системе (6) принадлежат функциональному множеству  $U$ , а множество возмущений  $w = \{\alpha, x^j, q^i\}$  дискретно и состоит из  $R = LMN$  элементов. Будем рассматривать функционал качества

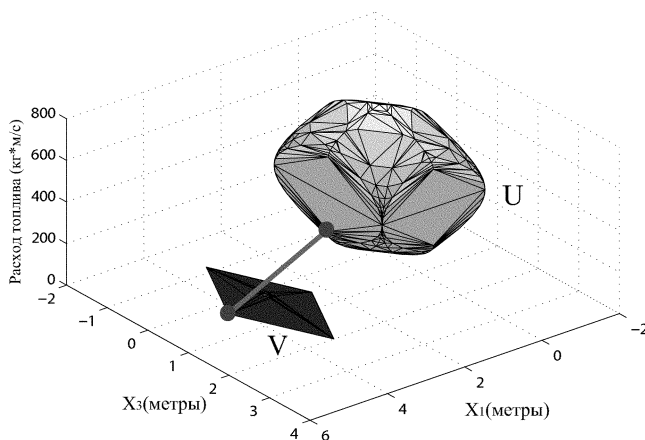


Рис. 2

вида  $J = (x^\top(t_k)x(t_k))^{1/2}$  и две экстремальных задачи первого этапа методики тестирования:  $\min_{u(\cdot) \in U} J \rightarrow \max_{1 \leq w \leq R}$  и  $\max_{1 \leq w \leq R} J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U}$ , первая из которых — задача нахождения наилучшаемой оценки функционала качества, а вторая — задача проверки существования точки равновесия динамической игры и, как следствие, наличия мягкого режима тестирования.

Для сведения исходной динамической игры к геометрической игре рассмотрим разложение вектора состояния  $x = x_w - x_u$ , получим разложение исходной системы (6) на подсистемы по возмущениям и по управлениям:

$$\dot{x}_w = A_\alpha x_w + q^i(t), \quad x_w(t_0) = x^j, \quad (7)$$

$$\dot{x}_u = A_\alpha x_u - B_\alpha u, \quad x_u(t_0) = 0. \quad (8)$$

Функционал качества принял смысл евклидова расстояния  $J = \rho(x_u(t_k), x_w(t_k))$ . Согласно (7), вектор  $x_w(t_k)$  может принять лишь  $R$  состояний, обозначим их  $x_w, w = 1, \dots, R$ . Управляемой подсистеме (8) соответствует  $L$  областей достижимости. Рассмотрим сужение множества управляющих функций  $U$  такое, что  $x_u(t_k)$  принадлежит пересечению этих областей достижимости:  $x_u(t_k) \in G_u = G_1 \cap \dots \cap G_L$ .

Имеют место две геометрических экстремальных задачи:

$$\tilde{\varphi}_0(x_w) = \min_{x_u \in G_u} \rho(x_u, x_w) \rightarrow \max_{1 \leq w \leq R}, \quad (9)$$

$$\varphi_0(x_u) = \max_{1 \leq w \leq R} \rho(x_u, x_w) \rightarrow \min_{x_u \in G_u}. \quad (10)$$

Первая из них решается конечным перебором по значениям  $w = 1, \dots, R$ , а вторая является негладкой экстремальной задачей. Рассмотрим подробнее эту минимаксную задачу и получим для нее необходимые условия экстремума.

Предположим, что существует абсолютный минимум функции  $\varphi_0(x_u)$  и равен он  $x_u^0 \in G_u$ . Построим  $R$  множеств, соответствующих возмущениям:

$$\Omega_r = \{x_u \mid \rho_r(x_u) < \varphi_0(x_u^0)\} \cup \{x_u^0\}, \quad \rho_r = \rho(x_u, x_r), \quad r = 1, \dots, R.$$

Эти множества представляют собой открытые шары радиуса  $\varphi_0(x_u^0)$  с центром в точке  $x_r$ , объединенные с точкой  $x_u^0$ .

**Лемма 1.** Точка  $x_u^0$  является точкой минимума функции  $\varphi_0(x_u)$  на множестве  $G_u$  в том и только в том случае, если

$$G_u \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_r = \{x_u^0\}. \quad (11)$$

Действительно, предположим, что существует точка  $\tilde{x}_u \neq x_u^0, \tilde{x}_u \in G_u \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_R$ . Это значит, что  $\tilde{x}_u$  достижима и для нее выполнены неравенства  $\rho_r(\tilde{x}_u) < \varphi_0(x_u^0)$ . Отсюда следует, что  $\varphi_0(\tilde{x}_u) < \varphi_0(x_u^0)$ , а это противоречит условию достижения минимума функции  $\varphi_0(x_u)$  в точке  $x_u^0$ .

Таким образом, приходим к абстрактной задаче пересечения: найти условия, при которых пересечение множеств  $G_u \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_R$  содержит единственную точку  $x_u^0$ .

Известен следующий результат [3].

**Теорема 1.** Пусть  $G_u, \Omega_1, \dots, \Omega_R$  — некоторые множества в пространстве  $R^n$  с общей точкой  $x_u^0$  и  $K_u, K_1, \dots, K_R$  — шатры этих множеств в точке  $x_u^0$ . Предположим, что хотя бы один из конусов не совпадает со своей аффинной оболочкой. Для справедливости равенства (11) необходимо, чтобы существовали такие векторы  $a, a^1, \dots, a^R$ , не все

равные нулю и принадлежащие сопряженным конусам  $K_u^*, K_1^*, \dots, K_R^*$ , что выполнено равенство  $a + a^1 + \dots + a^R = 0$ .

Построим шатры множеств  $G_u, \Omega_1, \dots, \Omega_R$  в точке  $x_u^0$  для нашей задачи. Шатер  $K_u(x_u^0)$  является опорным конусом множества  $G_u$ , если точка  $x_u^0$  лежит на границе  $G_u$  (рис. 3). Если же она внутри, то шатром  $K_u(x_u^0)$  является все пространство  $R^n$ .

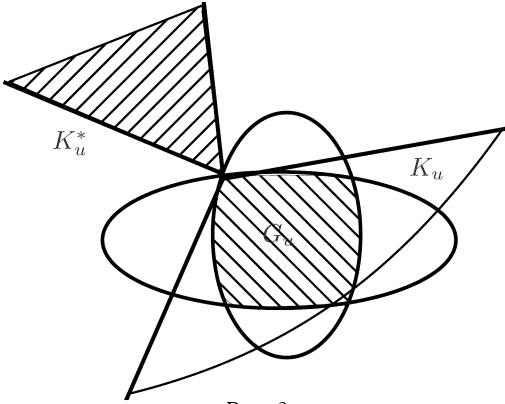


Рис. 3

В случае же когда  $\varphi_0(x_u^0) > \rho_i(x_u^0)$ , точка  $x_i$  лежит внутри шара  $\Omega_i$ , следовательно, конус  $K_i(x_u^0)$  совпадает с пространством  $R^n$ . Назовем в этом случае  $i$  пассивным индексом.

Построим сопряженные конусы  $K_u^*, K_1^*, \dots, K_R^*$ . В случае, когда  $x_u^0$  лежит внутри  $G_u$ , сопряженный конус  $K_u^*$  содержит лишь точку 0. В случае, когда  $x_u^0$  — угловая точка границы множества достижимости  $G_u$ , конус  $K_u^*$  выглядит, как показано на рис. 3. В случае, когда  $x_u^0$  не является угловой точкой, конус  $K_u(x_u^0)$  представляет собой полупространство, содержащее  $G_u$ , а сопряженный конус  $K_u^*$  — полупрямая, ортогональная опорной плоскости в точке  $x_u^0$  и не лежащая в полупространстве  $K_u(x_u^0)$ .

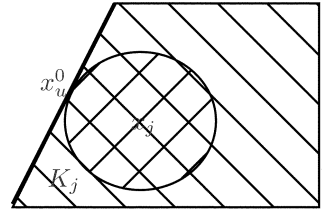


Рис. 4

Для активного индекса  $j$  сопряженный конус  $K_j^*$  к конусу  $K_j$  выглядит следующим образом:  $K_j^* = \left\{ a^j \in R^n \mid a^j = \lambda_j \frac{\partial \rho_j(x_u^0)}{\partial x}, \lambda_j \geq 0 \right\}$ . А для пассивных индексов  $i$  сопряженные конусы  $K_i^*$  содержат лишь нулевую точку пространства  $R^n$ .

Теперь можно сформулировать необходимые условия минимума функции  $\varphi_0(x_u)$  для задачи (10).

**Теорема 2.** Если  $x_u^0$  — абсолютный минимум функции  $\varphi_0(x_u)$ , то существует вектор  $a \in K_u^*$  и постоянные скалярные величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R$  такие, что

- 1)  $a + \sum_{r=1}^R \lambda_r \left( \frac{\partial \rho_r(x_u^0)}{\partial x} \right)^T = 0$ ,
- 2)  $\lambda_r \geq 0, r = 1, \dots, R$ ,
- 3)  $\lambda_r (\varphi_0(x_u^0) - \rho_r(x_u^0)) = 0$ ,
- 4)  $\sum_{r=1}^R |\lambda_r| + |a| \neq 0$ .

Условие 3 называется условием дополняющей нежесткости. В случае активного индекса  $\varphi_0(x_u^0) - \rho_r(x_u^0) = 0$ , в случае пассивного —  $\lambda_r = 0$ . Условие 4 называется условием нетривиальности.

В качестве примера использования данного необходимого условия приведем задачу первого этапа методики тестирования для плоского управляемого движения устройства спасения космонавта.

Уравнения движения управляемой системы следующие:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -v_1^i(t) + v_2^i(t) + v_3^i(t) - v_4^i(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_5(u_2^p(t) + u_3^p(t) - u_1^p(t) - u_4^p(t)) - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = ((b + \delta_2)(u_1 - u_4) + (a + \delta_1)(u_2^p(t) - u_1^p(t) + v_2^i(t) - v_1^i(t)) + \\ + (b - \delta_2)(u_3 - u_2) + (a - \delta_1)(u_4^p(t) - u_3^p(t) + v_4^i(t) - v_3^i(t))) / B \end{cases} \quad (12)$$

Эта система является линеаризованной системой уравнений в отклонениях от идеального движения для плоской модели сближения УСК с орбитальной станцией. Здесь  $x_1, x_3$  — отклонение от программной траектории в плоскости движения космического модуля,  $x_5$  — отклонение по углу от программного движения,  $u_i^p(t)$  — программное управление (заданные функции времени),  $u_i(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_\infty[t_0, t_1] \mid 0 \leq u_i(t) \leq f, f = \text{const}\}$  — стабилизирующие управления,  $v_j^i(t)$  — набор известных функций времени,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $i = 1, 2$ ,  $a$  и  $b$  — длина и ширина рамы УСК,  $\delta_1, \delta_2$  — смещения центра масс рамы УСК относительно ее геометрического центра,  $B$  — момент инерции рамы. Предположим, что начальные условия  $x(t_0) = x_0$  фиксированы, а возмущений — всего два набора ( $w = \{v_j^1, v_j^2\}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ).

Функционал качества управления следующий:  $J = \sqrt{x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k)}$ .

Множество достижимости  $G_u$ , соответствующее системе (8), представляет собой отрезок прямой на оси  $x_3$ , а системе (7) соответствуют две точки  $x^w$  (рис. 5). Будем считать для простоты, что точки  $x_1^w$  и  $x_2^w$  лежат по одну сторону от оси  $x_3$ , а их проекции на ось  $x_3$  принадлежат множеству  $G_u$ .

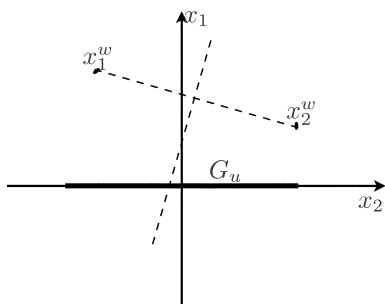


Рис. 5

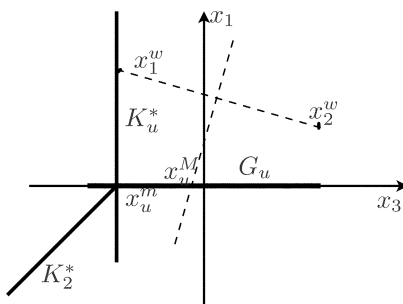


Рис. 6

Предположим, что нам известно решение максиминной задачи (9) — это пара точек  $x_1^w$  и  $x_u^m$ . Рассмотрим случай, когда серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки  $x_1^w$  и  $x_2^w$ , не пересекает отрезок, соединяющий точки  $x_1^w$  и  $x_u^m$ . Проверим существование точки равновесия геометрической игры в данном случае. Для этого необходимо проверить выполнение условий теоремы 2. Построим систему конусов, необходимых для этого (рис. 6). Шатер  $K_u$ , аппроксимирующий множество  $G_u$  в точке  $x_u^m$  — это прямая, совпадающая с  $x_3$ , поэтому сопряженный конус  $K_u^*$  — это прямая, ортогональная  $K_u$ , проходящая через точку  $x_u^m$ .



Имеем в данном случае один активный индекс — 2, поэтому  $\lambda_1 = 0$  из условия дополняющей нежесткости. Сопряженный конус  $K_2^*$  является продолжением отрезка, соединяющего точки  $x_2^w$  и  $x_u^m$ , как показано на рис. 6. Отсюда видно, что условие 1 теоремы 2 не может быть выполнено в точке  $x_u^m$  ни при каких  $\lambda_2$ , чтобы было выполнено условие нетривиальности 4. Поэтому точка  $x_u^m$  не может быть точкой равновесия геометрической игры. Очевидно, что в рассмотренном случае условия теоремы 2 могут быть выполнены только в точке  $x_u^M$  — равноудаленной от точек  $x_1^w$  и  $x_2^w$ , когда оба индекса являются активными. Поскольку решение задачи (10) существует, то  $x_u^M$  — решение задачи (10) для рассмотренного случая.

В случае же, когда серединный перпендикуляр к отрезку  $(x_1^w, x_2^w)$  пересекает отрезок  $(x_1^w, x_u^m)$ , активным индексом становится 1, следовательно  $\lambda_2 = 0$ . В этом случае сопряженный конус  $K_1^*$  коллинеарен  $K_u^*$ , поэтому условия теоремы 2 могут быть выполнены в точке  $x_u^m$ . Более того, ни в какой другой точке множества  $G_u$  условия теоремы 2 не выполняются. Докажем это утверждение.

Рассмотрим точку  $x_u \in G_u$ , не совпадающую с  $x_u^m$ , и построим для нее систему шатров и сопряженных конусов, необходимых для проверки условий теоремы 2. Когда один индекс активен, конус  $K_i^*$  для активного индекса не коллинеарен  $K_u^*$ , следовательно, условия 1 и 4 выполнены быть не могут. В случае же, когда оба индекса активны, т. е.  $x_u$  совпадает с  $x_u^M$  — равноудаленной от  $x_1^w$  и  $x_2^w$  точкой, конусы  $K_1^*$  и  $K_2^*$  лежат по одну сторону от  $K_u^*$ . Следовательно, ни при каких  $\lambda_1, \lambda_2, a$  условия 1 и 4 выполнены быть не могут, что и требовалось доказать.

Из всего вышесказанного следует утверждение: для того, чтобы в рассмотренном случае существовала точка равновесия геометрической игры, необходимо и достаточно, чтобы точке  $x_1^w$  соответствовал активный индекс.

Описанный пример наглядно показывает конструктивность применения необходимых условий теоремы 2 для проверки существования точки равновесия геометрической игры на множествах достижимости систем вида (7) и (8), а также поиска решения задачи на минимакс.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. В., Блаженова-Микулич Л. Ю., Гутиеррес-Ариас И. М., Лемак С. С. Максиминное тестирование точности стабилизации и седловые точки в геометрических играх // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2005. — № 1. — С. 43–50.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.9
3. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973.

Поступило в редакцию 15 VII 2006