



В. Н. Шевченко

**Триангуляции
выпуклых
многогранников и
их булевы функции**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:

Шевченко В. Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: Физматлит, 2007. — С. 43–56.

URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-43>

ТРИАНГУЛЯЦИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ИХ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ*)

В. Н. ШЕВЧЕНКО

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

В статье представлен краткий обзор результатов о граничных комплексах $\Gamma(P)$ выпуклых многогранников и их триангуляций. Он был бы вполне традиционен для комбинаторной теории выпуклых многогранников, если бы не главная тема статьи — связь этой теории с булевыми функциями. Эта связь вводится в п. 1, где выпуклому многограннику P ставится в соответствие булева функция $\varphi_{\Gamma(P)}$, равная 0 на характеристических векторах граней P и только на них. В п. 2 рассматриваются граничные комплексы ∂_P симплицальных многогранников, для них функции φ_{∂_P} монотонны. В п. 3 рассматриваются симплицальные комплексы (для них соответствующие булевы функции тоже монотонны) триангуляций выпуклых многогранников. Поскольку функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и φ_{∂_P} имеют различные реализации, возникают разнообразные вопросы, связанные с их экономным представлением. Кроме того, они позволяют по-новому посмотреть на такие вопросы, изучаемые в теории линейных неравенств, как условия реализуемости f -векторов (i -я компонента f_i которого равна числу i -мерных граней) политопов и их триангуляций. Статья является расширенной версией доклада, прочитанного автором на 16-й международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» [12].

1. Пусть P — множество решений (называемое далее *полиэдром*) системы линейных неравенств (в вещественном евклидовом пространстве \mathbb{R}^d)

$$\sum_{k=1}^d a_{ik}x_k \leq a_{i0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Под *размерностью* P ($\dim P$) понимают максимальное число аффинно независимых решений системы (1), если она совместна, и считают $\dim P = -1$ в противном случае. Ограниченный полиэдр называют *выпуклым многогранником*. Будем называть его также *политопом* или *r -политопом*, если $\dim P = r$. Рассмотрим такую линейную функцию ax , для которой достигается $\max_{x \in P} ax = \alpha$. Множество $P_\alpha = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$ называют *гранью*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00552а).

полиэдра P , в частности при $a = 0$ получим, что P является (единственной) r -мерной гранью r -политопа P . Удобно также считать пустое множество (-1) -мерной гранью любого политопа P . Хорошо известно (см., например, [2, 4, 8, 18, 26]), что любой политоп P можно задать как выпуклую оболочку своих вершин (т. е. 0-мерных граней) $P = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где

$$\text{conv}(v_1, \dots, v_n) = \{x = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

а каждая его грань $P_a = \text{conv}(v_j, j \in J_a)$, где $J_a = \{j \mid av_j = \alpha\}$. В частности, положив $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id})$, с i -м неравенством системы (1) свяжем грань $F_i = \{x \in P \mid \sum_i a_{ik} x_k = a_{i0}\}$. Обозначим через $\Gamma_k(P)$ множество k -мерных

граней политопа P и положим $\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^r \Gamma_k(P)$, $\partial P = \Gamma(P) \setminus \{P\}$, $f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), \dots, f_r(P))$, где $f_k(P) = |\Gamma_k(P)|$ — число k -мерных граней политопа P ,

$$f(\lambda, P) = \sum_{k=-1}^r f_k(P) \lambda^{k+1}$$

и $f(\lambda, \partial P) = f(\lambda, P) - \lambda^{r+1}$.

Известно также, что если $r = d$ и система (1) *неприводима*, т. е. не содержит неравенств-следствий, то $f_{d-1}(P) = m$, $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, \dots, F_m\}$ и множество

$$\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^r \Gamma_k(P)$$

с естественным частичным упорядочиванием $F \subseteq G$ является решёткой (определение и свойства решётки см. в [1]), в частности $\inf(P_a, P_b) = P_a \cap P_b = P_{a+b}$. Она называется *граневой решёткой* политопа P , а множество ∂P называется *граничным комплексом* политопа P .

Политоп P называется *r -симплексом*, если $\dim P = f_0(P) - 1 = r$. Нетрудно видеть, что для него $\Gamma_k(P)$ составляет $(k+1)$ -мерный слой $(r+1)$ -мерного булева куба, $f_k(P) = \binom{r+1}{k+1}$, $f(\lambda, P) = (1+\lambda)^{r+1}$.

Рассмотрим $(n-1)$ -симплекс $S = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Для каждого $J, J \subseteq \{1, \dots, n\}$, рассмотрим булеву функцию

$$v^J = \prod_{j \in J} v_j \prod_{j \notin J} \bar{v}_j, \quad (3)$$

считая теперь v_1, v_2, \dots, v_n булевыми переменными, что, впрочем, не будет приводить к недоразумениям, но позволит несколько упростить запись. Отсылая за сведениями по булевым функциям к [14], заметим только, что, используя стандартные обозначения для отрицания и дизъюнкции, конъюнкцию мы записываем в виде произведения. Нетрудно видеть, что для любого $A, A \subseteq \{1, \dots, n\}$, формула

$$\varphi_A(v_1, v_2, \dots, v_n) = \bigvee_{J \notin A} v^J, \quad (4)$$

задаёт булеву функцию, *нуль* (т. е. двоичный набор, на котором $\varphi_A = 0$) которой соответствует подмножеству $J \in A$, а *единица* (определяемая аналогично) — подмножеству $J \notin A$.

Тогда для $\varphi_{\Gamma(P)}$ можно получить совершенную конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы:

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, \dots, v_n) = \prod_{F \in \Gamma(P)} ((\bigvee_{v_j \notin F} v_j) \vee (\bigvee_{v_j \in F} \bar{v}_j)), \quad (5)$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, \dots, v_n) = \bigvee_{F \notin \Gamma(P)} \prod_{v_j \in F} v_j \prod_{v_j \notin F} \bar{v}_j. \quad (6)$$

Заменяя в (5) и (6) множество $\Gamma(P)$ на ∂P , получим аналогичные формулы для $\varphi_{\partial P}$, из которых следует, что

$$\varphi_{\partial P}(v_1, \dots, v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, \dots, v_n) \bigvee \prod_{j=1}^n v_j. \tag{7}$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, \dots, v_n) = \left(\bigvee_{j=1}^n \bar{v}_j \right) \varphi_{\partial P}(v_1, \dots, v_n). \tag{8}$$

Пример 1. Если P — $(n-1)$ -симплекс, то $\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ — все переменные фиктивные — и $\varphi_{\partial P}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n v_i$.

Пример 2. Если $d = 2$ и P — квадрат, то следующая таблица задаёт булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$.

Таблица 1

1	0	1 0 0 0	1 1 0 1 0 0	1 1 1 0	1
2	0	0 1 0 0	1 0 1 0 1 0	1 1 0 1	1
3	0	0 0 1 0	0 1 1 0 0 1	1 0 1 1	1
4	0	0 0 0 1	0 0 0 1 1 1	0 1 1 1	1
$\varphi_{\Gamma(P)}$	0	0 0 0 0	0 1 0 0 1 0	1 1 1 1	0
$\varphi_{\partial P}$	0	0 0 0 0	0 1 0 0 1 0	1 1 1 1	1

Из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma(P)} &= (\bar{v}_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee \bar{v}_4)(v_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee \bar{v}_4)(\bar{v}_1 \bigvee v_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee \bar{v}_4) \& \\ &\& (\bar{v}_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee v_3 \bigvee \bar{v}_4)(\bar{v}_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee v_4)(v_1 \bigvee v_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee \bar{v}_4)(\bar{v}_1 \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee \bar{v}_4) \& \\ &\& (v_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee \bar{v}_3 \bigvee v_4)(\bar{v}_1 \bigvee \bar{v}_2 \bigvee v_3 \bigvee v_4)(v_1 \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee v_4) = \\ &= v_1 v_3 \bar{v}_4 \bigvee v_1 \bar{v}_2 v_3 \bigvee \bar{v}_1 v_2 v_4 \bigvee v_2 \bar{v}_3 v_4. \end{aligned}$$

Далее из (7) получаем

$$\varphi_{\partial P} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_1 v_2 v_3 v_4 = v_1 v_3 \bigvee v_2 v_4.$$

Пример 3. Пусть $P = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ — d -политоп в R^{d+1} и v_0 не принадлежит аффинной оболочке $\Gamma_0(P)$. *Пирамидой с основанием P и апексом v_0* называется [4, 18, 26] $(d+1)$ -политоп $Q = \text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n)$. Тогда $f(\lambda, Q) = (1 + \lambda)f(\lambda, P)$, $\varphi_{\partial Q} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_0 \varphi_{\partial P} = (v_0 \bigvee \bar{v}_1 \bigvee \dots \bigvee \bar{v}_n) \varphi_{\partial P}$ и $\varphi_{\Gamma(Q)}(v_0, v_1, \dots, v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, \dots, v_n) (v_0$ — фиктивная переменная).

В теории линейных неравенств [8, 26] известен алгоритм (назовём его алгоритмом Фурье-Моцкина), позволяющий переходить от описания политопы в виде (1) к виду (2) и обратно. В связи с оценкой трудоёмкости этого алгоритма возникает

Задача 1: при заданном $f_0(P) = n$ найти $\max f_k(P)$ — решенная П. МакМюлленом в 1970 г. [21].

Введённые нами булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$ позволяют по-новому взглянуть на задачу 1 и ставить новые разнообразные вопросы, связанные прежде всего с их экономным представлением. При решении таких вопросов нельзя не воспользоваться необозримым множеством результатов, накопленных маткибернетикой, о сложности булевых функций (см., например, [7]). Заметим, что при любой фиксированной размерности d сложность каждой из функций (5)–(8) ограничена сверху некоторым полиномом от n .

Естественно возникает

Задача 2 (о реализации f -вектора): перечислить необходимые и достаточные условия, которыми должен обладать целочисленный вектор f для того, чтобы он совпадал с $f(P)$ для некоторого d -политопа P .

Со времён Штейница, решившего задачу 2 при $d = 3$ в 1922 г. (см. например, [4]), прогресс невелик. В общем случае известно лишь необходимое условие Эйлера-Пуанкаре

$$f(-1, P) = \sum_{k=1}^d f_k(P)(-1)^{k+1} = 0 \quad (9)$$

и доказанная в [17] (в более общем варианте) Г. Бругессером и П. Мани.

Теорема 1. *Граничный комплекс ∂P имеет линейную развёртку.*

Конструкция, лежащая в основе доказательства этого утверждения, имеет прозрачный геометрический смысл. Рассматривается прямая $v_\lambda = \lambda q$, где $0 \in \text{int}P$ ($\text{int}P = P \setminus \partial P$ — множество внутренних точек политопа P), λ — вещественное число, $a_i q \neq 0$ при $i = 1, \dots, m$ и $\lambda_i = a_{i0}/a_i q$ — значение параметра λ , при котором прямая пересекает аффинную оболочку грани F_i . Ясно, что существует такое q , что $\lambda_i \neq \lambda_k$ при $i \neq k$. Тогда, переупорядочив $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, \dots, F_m\}$ неравенствами

$$\frac{1}{\lambda_1} > \dots > \frac{1}{\lambda_m}, \quad (10)$$

получим развёртку граневого комплекса ∂P , называемую *линейной*. Определение общего понятия *развертки* политопиального (и, в частности, симплициального) комплекса можно найти в [2, 25].

Под *ФМ-алгоритмом* будем понимать следующую процедуру, позволяющую по заданной последовательности точек v_1, \dots, v_n построить неприводимую систему (1), описывающую политоп $P = P_n = \text{conv}(v_1, \dots, v_n)$. Здесь не требуется, чтобы $v_j \in \Gamma_0(P)$; потребуем лишь, чтобы политоп P_{d+1} был d -симплексом и $0 \in \text{int}P_{d+1}$ (ограничения технического характера). Предположив, что задача решена для политопа P (при $n = d + 1$ это просто) и появилась новая точка v_{n+1} , покажем ее решение для политопа $P' = P_{n+1}$. Положим $\mu_i = a_{i0} - a_i v_{n+1}$ и разобьем множество $1, \dots, m$ на три подмножества

$$I_- = \{i \mid \mu_i < 0\}, \quad I_+ = \{i \mid \mu_i > 0\}, \quad I_0 = \{i \mid \mu_i = 0\}.$$

Далее для каждого $i \in I_-$ сформируем множество

$$M_i = \{i' \in I_+ \mid F_i \cap F_{i'} \in \Gamma_{d-2}(P)\}$$

и для каждого $i' \in M_i$ образуем неравенство

$$(\mu_{i'} a_i - \mu_i a_{i'}) x \leq \mu_{i'} a_{i0} - \mu_i a_{i'0}.$$

Если к системе (1) добавить все полученные таким способом неравенства и затем выбросить неравенства с номерами из I_- , то новая система будет описывать политоп P' . О неприводимости новой системы следует позаботиться дополнительно.

Следующее понятие является одним из основных в комбинаторной геометрии [2–4, 18, 25, 26]. Политоп P' называется *комбинаторно эквивалентным* политопу P ($P \sim P'$), если существует взаимно однозначное отображение множества $\Gamma(P)$ на множество $\Gamma(P')$, сохраняющее отношение включения (при этом решётки называют *изоморфными* и пишут $\Gamma(P) \approx \Gamma(P')$).

Ещё меньше известно о следующей задаче.

Задача 3 (о числе комбинаторно неэквивалентных d -политопов с заданными f -векторами).

На множестве булевых функций от n переменных введём отношение эквивалентности, положив $\varphi(y_1, \dots, y_n) \sim \varphi(y'_1, \dots, y'_n)$, если $\varphi(y'_1, \dots, y'_n) = \varphi(y_{\pi_1}, \dots, y_{\pi_n})$, при некоторой перестановке π номеров переменных y_1, \dots, y_n .

Следующее легко проверяемое утверждение позволяет дать точный перевод задач комбинаторной геометрии (подобных задачам 2 и 3) на язык булевых функций.

Утверждение 1. $P \sim P' \iff \varphi_P \sim \varphi_{P'}$.

2. В этом пункте рассмотрим класс $P^s(d, n)$ симплициальных (политоп P называется *симплициальным*, если любая его грань, отличная от P , является симплексом) d -политопов с n вершинами.

Граничный комплекс ∂P симплициального политопа P удовлетворяет условию:

$$\text{если } F \in \partial P \text{ и } G \in \Gamma(F), \text{ то } G \in \partial P, \quad (11)$$

и, следовательно, даёт пример того, что в топологии называется *симплициальным комплексом* [3, 4, 25, 26]. Из условия (11) следует, что для задания ∂P достаточно знать множество $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, \dots, F_m\}$ или множество $N(P)$ минимальных по включению подмножеств $\{N_1, \dots, N_l\}$ вершин булева n -куба, не принадлежащих ∂P . Множество $N(P)$ необходимо для построения *кольца Стенли-Райснера* [3, 25], применяемого при изучении симплициального комплекса ∂P алгебраическими методами.

Следующее утверждение, в частности, позволяет решить возникающий при этом вопрос о связи множеств $\Gamma_{d-1}(P)$ и $N(P)$ стандартными методами булевой алгебры.

Утверждение 2. Если $P \in P^s(d, n)$, то булева функция $\varphi_{\partial P}$ монотонна, $\Gamma_{d-1}(P)$ есть множество её верхних нулей, а $N(P)$ — множество её нижних единиц,

$$\varphi_{\partial P}(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^m \left(\bigvee_{j \notin F_m} v_j \right), \quad (12)$$

$$\varphi_{\partial P}(v_1, \dots, v_n) = \bigvee_{k=1}^l \prod_{j \in N_k} v_j. \quad (13)$$

Для решения вопросов, связанных с эффективным представлением монотонной булевой функции (в различных базисах) отошлём к обзору [6]. Весьма полезным может оказаться применение пороговых булевых функций, так как используя результаты В. К. Коробкова [5], множество нулей функции $\varphi_{\partial P}$ можно описать системой линейных неравенств

$$\sum_{j \in N_k} v_j \leq |N_k| - 1, \quad k = 1, \dots, l. \quad (14)$$

Из теоремы 1 следует: для любого P из $P^s(d, n)$ симплициальный комплекс ∂P линейно разворачиваем, т. е. существует вектор q , упорядочивающий грани из $\Gamma_{d-1}(P)$ неравенствами (10) так, что

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^m [G_i, F_i], \quad (15)$$

где $[G, F] = \{H \in \Gamma(P) \mid G \subseteq H \subseteq F\}$, G_{k+1} — наименьшая по включению грань грани F_{k+1} , не принадлежащая подкомплексу $(\partial P)_k = \bigcup_{i=1}^k [G_i, F_i]$, и $G_1 = \emptyset$.

Отсюда несложно получить (при $k = 1, 2, \dots, m-1$)

У т в е р ж д е н и е 3.

$$\varphi_{(\partial P)_{(k+1)}}(v_1, \dots, v_n) = \varphi_{(\partial P)_k}(v_1, \dots, v_n) \left(\prod_{v_j \notin F_{k+1}} v_j \right). \quad (16)$$

Соответствующее утверждение можно сделать и для дизъюнктивной нормальной формы.

Из [17] следует также, что для любого P , P из $P^s(d, n)$, многочлен $f(\lambda, \partial P)$ можно представить в виде

$$f(\lambda, \partial P) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} g_k(P) (\lambda^k (1 + \lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k} (1 + \lambda)^k), \quad (17)$$

где $g_0(P) = 1$ и $g_k(P)$ — целые неотрицательные числа.

Заметим, что (17) влечет равенство $f(-1 - \lambda, \partial P) = (-1)^d f(\lambda, \partial P)$, равносильное следующим уравнениям Дена-Соммервилля (см., например, [2-4, 18, 25, 26])

$$f_{k-1}(P) = \sum_{i=k}^d (-1)^{d-i} \binom{i}{k} f_{i-1}(P).$$

Для того, чтобы полностью охарактеризовать f -векторы симплицеальных политопов (а, значит, и представляемых ими булевых функций) нам понадобится следующее определение. Для любых натуральных чисел a и i существует единственное биномиальное i -разложение числа $a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$, где $a_i > a_{i-1} > \dots > a_j \geq j \geq 1$. Тогда число $a^{<i>} = \binom{1+a_i}{1+i} + \dots + \binom{1+a_j}{1+j}$ называется i -й псевдостепенью числа a .

Проанализировав накопленную к тому времени информацию, П. Мак-Мюллен в 1971 г. [22] предположил, что добавление к вышеперечисленным условий

$$g_{k+1}(P) \leq (g_k(P))^{<k>}, \quad k = 1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor - 1 \quad (18)$$

решает задачу 2, для класса симплицеальных политопов. В 1980 г. это было доказано (Л. Биллера и К. Ли — достаточность [16], Р. Стенли — необходимость [24]).

Сформулируем этот результат в следующем виде.

Т е о р е м а 2. Положим $F^\partial(\lambda, d, n) = \{f(\lambda, \partial P), P \in P^s(d, n)\}$. Тогда для того, чтобы $f(\lambda) \in F^\partial(\lambda, d, n)$, необходимо и достаточно существование таких неотрицательных целых чисел g_k ($k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$), что

$$g_0 = 1, \quad g_1 = n - d - 1, \quad g_{k+1} \leq g_k^{<k>} \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor d/2 \rfloor - 1$$

и

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} g_k (\lambda^k (1 + \lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k} (1 + \lambda)^k).$$

Следующие два примера дают нижние и верхние оценки величин $f_i(P)$ для P из $P^s(d, n)$. В той или иной форме они излагаются во многих работах,

например в [2, 3, 25, 26]. Там же можно найти сведения по истории вопроса и соответствующую библиографию.

Пример 4. Пусть $P_n \in P^s(d, n)$, F — одна из его $(d-1)$ -мерных граней, и v_{n+1} — точка «над» ней, т. е. если $ax \leq \alpha$ — неравенство, соответствующее F , то v_{n+1} удовлетворяет остальным неравенствам системы (1), но $av_{n+1} > d$. Тогда $P_{n+1} = \text{conv}(P_n, v_{n+1}) \subseteq P^s(d, n+1)$, $g_i(P_{n+1}) = g_i(P_n)$ при $i \neq 1$ и $g_1(P_{n+1}) = g_1(P_n) + 1$. В частности, взяв d -симплекс в качестве P_{d+1} , получим $g(P_n) = (1, n-d-1, 0, \dots, 0)$. Отсюда следует, что для любого P из $P^s(d, n)$

$$f_i(P) \geq \binom{d+1}{i+1} + (n-d-1)\binom{d}{i}, \quad i = 1, \dots, d-2, \text{ и}$$

$$f_{d-1}(P) \geq (n-d)(d-1) + 2$$

(это гипотеза Б. Грюнбаума о нижней границе, доказанная Д. Барнеттом в [15]).

Пример 5 (см., например, [2-4, 18, 26]). Пусть $v(t) = (t, t^2, t^3, \dots, t^d)$ — отображение R в R^d , $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. При $n > d$ определим *циклический многогранник* $C(d, n) = \text{conv}(v(t_1), \dots, v(t_n))$. Известно, что $C(d, n) \in P^s(d, n)$ и $f_i(C(d, n)) = \binom{n}{i+1}$ при $i = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor - 1$. Отсюда и из уравнения (17) следует, что $g_k(C(d, n)) = \binom{n-d+k-2}{k}$, а из неравенства (18), что при каждом $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ это максимально возможные значения для $g_k(P)$ на классе $P^s(d, n)$. Подставляя их в формулу (17), находим для $k = 0, 1, \dots, d$

$$f_{k-1}(C(d, n)) = \sum_{i=0}^{\delta} \left(\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} \text{ при } d = 2\delta + 1,$$

$$f_{k-1}(C(d, n)) = \sum_{i=0}^{\delta-1} \left(\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} +$$

$$+ \binom{\delta}{k-\delta} \binom{n-\delta-1}{\delta} \text{ при } d = 2\delta.$$

Это ключ к доказательству уже упомянутого в п. 1 результата П. Макмюлена [21]: для любого d -политопа P с n вершинами

$$f_i(P) \leq f_i(C(d, n)), \quad i = 0, 1, \dots, d-1.$$

Отсюда, в частности, следует неулучшаемая верхняя оценка числа m конъюнкций в (12)

$$m \leq \binom{n - \lfloor (d-1)/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor} + \binom{n - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}.$$

3. Множество $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, где $v_j \in \mathbb{R}^d$, назовём (d, n) -точечной конфигурацией, если $P = \text{conv}V$ есть d -политоп. Триангуляцией политопа P с узлами из множества V назовём множество $T(V) = \{S_1, \dots, S_t\}$ таких d -симплексов S_τ , для которых выполнены три следующие условия:

- 1) $\Gamma_0(S_\tau) \subseteq V$,

$$2) \bigcup_{\tau=1}^t S_\tau = P,$$

3) пересечение любых двух d -симплексов является гранью каждого из них.

Тогда множество $\Delta(T(V)) = \bigcup_{\tau=1}^t \Gamma(S_\tau)$ даёт ещё один пример симплициального комплекса. Будем писать Δ вместо $\Delta(T(V))$, если это не приводит к недоразумениям. При $k = -1, 0, \dots, d$ обозначим через $\Delta_k = \bigcup_{\tau=1}^t \Gamma_k(S_\tau)$ множество k -мерных граней симплициального комплекса Δ , через $\partial\Delta$ его граничный подкомплекс, положим $f_k(\Delta) = |\Delta_k|$, $f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), \dots, f_d(\Delta))$ и определим многочлены $f(\lambda, \Delta)$, $f(\lambda, \partial\Delta)$ и булевы функции φ_Δ и $\varphi_{\partial\Delta}$ аналогично прежнему.

Пример 6. Пусть $Q = \text{pyr}_{v_0} P$ — пирамида с апоксом v_0 и основанием $P = \text{conv}(v_1, \dots, v_n)$ (см. пример 3), $T(V) = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ — триангуляция политопа P с узлами из $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $S_\tau = \text{pyr}_{v_0} S_\tau$ ($\tau = 1, \dots, t$). Тогда $T(V') = \{S'_1, \dots, S'_t\}$ — триангуляция Q с узлами из $V' = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ и, если Δ и Δ' — соответствующие симплициальные комплексы, то $\varphi_{\Delta'}(v_0, \dots, v_n) = \varphi_\Delta(v_1, \dots, v_n)$ и $f(\lambda, \Delta') = (1 + \lambda)f(\lambda, \Delta)$.

Утверждение 4. Для любой триангуляции любой точечной конфигурации булевы функции φ_Δ и $\varphi_{\partial\Delta}$ монотонны. Если $V = \Gamma_0(P)$ и $P \in P^s(d, n)$, то $\varphi_{\partial\Delta} = \varphi_{\partial P}$.

Пример 7. Если $n = d + 2$, то существуют ровно две различных триангуляции $T_1(V)$ и $T_2(V)$. Если $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ такой ненулевой вектор, для которого $\sum_{j=1}^n \mu_j = 0$ и $V\mu = 0$, то он определяется однозначно с точностью до умножения на постоянную, отличную от нуля. Положим

$$J_{>} = \{j \mid \mu_j > 0\} \text{ и } J_{<} = \{j \mid \mu_j < 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta(T_1(V))}(v_1, \dots, v_n) &= \prod_{j \in J_{>}} v_j, \\ \varphi_{\Delta(T_2(V))}(v_1, \dots, v_n) &= \prod_{j \in J_{<}} v_j, \\ \varphi_{\partial\Delta}(v_1, \dots, v_n) &= \prod_{j \in J_{>}} v_j \vee \prod_{j \notin J_{>}} v_j = \prod_{j \in J_{<}} v_j \vee \prod_{j \notin J_{<}} v_j, \\ \partial\Delta &= \partial\Delta(T_1(V)) = \partial\Delta(T_2(V)), \text{ если } \{j \mid \mu_j = 0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Попытки распространить другие результаты п. 2 на симплициальные комплексы $\Delta(T(V))$ наталкиваются на серьезные трудности. Главная из них состоит в том, что $\Delta(T(V))$, вообще говоря, не является разворачиваемым: в [23] построен изящный пример триангуляции 3-симплекса (с добавленными к множеству вершин восемь узлами триангуляции), не допускающей никакой развертки. Однако, в рассматриваемом случае свойство разворачиваемости удаётся заменить разбиваемостью.

Пусть $\Delta = \bigcup_{\tau=1}^t \Gamma(S_\tau)$ — симплициальный комплекс и S_1, S_2, \dots, S_t — его максимальные элементы. Если для каждого $\tau = 1, \dots, t$ в S_τ можно указать такое J_τ так, что

$$\Delta = \bigcup_{\tau=1}^t [J_\tau, S_\tau], \quad (19)$$

где объединение дизъюнктно, т. е. $[J_\tau, S_\tau] \cap [J_\sigma, S_\sigma] = \emptyset$ при $\tau \neq \sigma$, то Δ называется *разбиваемым*.

Теорема 3. (П. Кляйншмидт и З. Смилански [19]). *Для любой триангуляции $T(V)$ любой точечной конфигурации V симплицальный комплекс $\Delta(T(V))$ разбиваем.*

Кратко опишем идею доказательства их утверждения. В симплексе S_1 выберем точку w , находящуюся «в общем положении» (то есть не принадлежащую аффинной оболочке ни одной из $(d - 1)$ -мерных граней ни одного из симплексов S_τ). При $\tau = 1, 2, \dots, t$ найдем решение крамеровской системы линейных уравнений:

$$\sum_j \mu_{j\tau} = 1, \quad \sum_j \mu_{j\tau} v_j = w, \quad (20)$$

где суммирование ведется по всем таким j , для которых $v_j \in \Gamma_0(S_\tau)$, и положим $J_\tau = \{v_j \mid \mu_{j\tau} < 0\}$. Ясно, что $J_1 = \emptyset$ и $1 \leq |J_\tau| \leq d$ при $\tau \geq 1$. Пусть $F \in \Delta$ и $x = \sum_{j=1}^n \mu_{j0} v_j$, где $\mu_{j0} > 0$, если $v_j \in F$, и $\mu_{j0} = 0$ в противном случае.

Тогда точка $x_\alpha = (1 - \alpha)x + \alpha w$ принадлежит P при $0 \leq \alpha \leq 1$. Отсюда следует, что существует при достаточно малом $\varepsilon > 0$ единственное τ такое, что симплекс S_τ содержит отрезок $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \varepsilon\}$ и $J_\tau \subseteq F \subseteq S_\tau$. Тогда

$$f(\lambda, \Delta) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\Delta) \lambda^k (1 + \lambda)^{d+1-k}, \quad (21)$$

где $\gamma_k(\Delta) = |\{\tau \mid |J_\tau| = k\}|$ — целое неотрицательное число, не зависящее от выбора точки w , $\gamma_0(\Delta) = 1$ и $\gamma_{d+1}(\Delta) = 0$.

Из определения триангуляции следует, что любая $F \in \Delta_{d-1}$ не может принадлежать трём различным симплексам, но обязана принадлежать хотя бы одному. Если она принадлежит единственному симплексу, то назовём её *граничной*, а если двум, то — *внутренней*. Пусть F_i граничная при $i = 1, 2, \dots, m_1$, и внутренняя при $i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$. Тогда $\partial\Delta = \bigcup_{i=1}^{m_1} \Gamma(F_i)$, а для остальных граней из Δ , используя (19) и описанную при доказательстве теоремы 3 процедуру, несложно доказать, что

$$\Delta \setminus \partial\Delta = \bigcup_{\tau=1}^t [\overline{J_\tau}, S_\tau], \quad (22)$$

где объединение дизъюнктно и $\overline{J_\tau}$ — множество вершин симплекса S_τ , дополнительное к J_τ (в предыдущем доказательстве надо рассмотреть отрезок $\{x_\alpha \mid -\varepsilon \leq \alpha \leq 0\}$). Отсюда следует, что

$$f(\lambda, \Delta \setminus \partial\Delta) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\Delta) \lambda^{d+1-k} (1 + \lambda)^k, \quad (23)$$

$$f(\lambda, \partial\Delta) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (\gamma_k(\Delta) - \gamma_{d+1-k}(\Delta)) (\lambda^k (1 + \lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k} (1 + \lambda)^k), \quad (24)$$

$$\varphi_{\partial\Delta}(v_1, \dots, v_n) = \varphi_\Delta(v_1, \dots, v_n) \vee \bigvee_{\tau=1}^t \prod_{v_j \in S_\tau \setminus J_\tau} v_j. \quad (25)$$

С л е д с т в и е 1 (аналог уравнений Дена-Соммервилля).

$$f(-1 - \lambda, \partial\Delta) = (-1)^d f(\lambda, \partial\Delta).$$

В случае, когда $\Gamma_0(\Delta) \subseteq \Gamma_0(P)$, последнее утверждение доказано другим способом в [8]. Там же показано, что если $P = C(d, n)$ и $V = \Gamma_0(P)$, то при четном $d = 2\delta$ многочлен $f(\lambda, \Delta)$ определяется единственным образом и равен

$$f(\lambda, \Delta) = \sum_{k=0}^{\delta} \binom{n-d+k-2}{k} \lambda^k (1+\lambda)^{d+1-k} = f(d, n, \lambda),$$

а при нечетном $d = 2\delta + 1$

$$f(\lambda, \Delta) = f(d, n, \lambda) + \alpha \lambda^{\delta+1} (1+\lambda)^{\delta+1},$$

где $0 \leq \alpha \leq \binom{n-\delta-2}{\delta+1}$, причем каждое значение α в указанных пределах реализуется на некоторой триангуляции политопа $C(d, n)$.

С л е д с т в и е 2. Если $P \in P^S(d, n)$ и $V = \Gamma_0(P)$, то при $k = 1, \dots, \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$

$$\gamma_k(\Delta) \leq \binom{n-d+k-2}{k}.$$

Этого оказалось достаточно для нахождения [11] максимального и минимального элементов на множестве f -векторов триангуляций. Рассмотрим множество всевозможных триангуляций $T(V)$ всевозможных (d, n) -точечных конфигураций и обозначим множество соответствующих многочленов $f(\lambda, \Delta)$ через $F(\lambda, d, n)$, векторов $f(\Delta)$ — через $F(d, n)$, а векторов $\gamma(\Delta) = (\gamma_0(\Delta), \dots, \gamma_d(\Delta))$ — через $H(d, n)$. Заметим, что лексикографический порядок на множествах $F(d, n)$ и $H(d, n)$ совпадает и обозначим через $\gamma^{max} = (\gamma_0^{max}, \dots, \gamma_d^{max})$ лексикографически максимальный на $H(d, n)$ вектор, а через $f^{max}(\lambda)$ — соответствующий ему многочлен. Покомпонентное сравнение векторов на множестве $F(d, n)$ задает на нем частичный порядок. Ясно, что γ^{max} соответствует единственному максимальному относительно этого частичного порядка элементу множества $F(d, n)$. Теперь, взяв $P = C(d+1, n)$ и выбросив из него одну d -мерную грань, несложно показать, что $f^{max}(\lambda) = -\lambda^{d+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \binom{n-d+k-3}{k} (\lambda^k (1+\lambda)^{d+2-k} - \lambda^{d+2-k} (1+\lambda)^k)$ и $\gamma_k^{max} = \binom{n-d+k-2}{k} = \gamma_{d+1-k}^{max}$ при $k = 1, 2, \dots, \lfloor (d+1)/2 \rfloor$. Аналогично доказываются остальные результаты, анонсированные в [11].

Следуя [9] и считая, что $\gamma_0(\Delta) = 1$ и $\gamma_i(\Delta) = 0$ при $i \notin \{0, 1, \dots, d\}$, положим при $i = 0, 1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ $\alpha_{2i}(\Delta) = \gamma_i(\Delta) - \gamma_{d+1-i}(\Delta)$ и $\varphi_{d,2i}(\lambda) = \lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i}$, а при $i = 0, 1, \dots, \lfloor (d+1)/2 \rfloor$ $\alpha_{2i+1}(\Delta) = \gamma_{d-i}(\Delta) - \gamma_{d+1-i}(\Delta)$ и $\varphi_{d,2i+1}(\lambda) = \lambda^i (1+\lambda)^{d+2-i} - \lambda^{d+2-i} (1+\lambda)^i$.

Тогда (21), (23) и (24) можно переписать соответственно в виде:

$$f(\lambda, \Delta) = \sum_{i=0}^d \alpha_i(\Delta) \varphi_{d,i}(\lambda), \quad (26)$$

$$f(\lambda, \Delta \setminus \partial \Delta) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\Delta) \lambda^{d+1-i} (1+\lambda)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \alpha_{2i+1}(\Delta) \varphi_{d,2i+1}(\lambda), \quad (27)$$

$$f(\lambda, \partial \Delta) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\Delta) \varphi_{d-1,2i-1}(\lambda), \quad (28)$$

откуда, в частности, следует, что $\alpha_2(\Delta) \geq 0$ и $\alpha_4(\Delta) \leq (\alpha_2(\Delta))^{<1>}$.

Следствие 3. Если $V = \Gamma_0(P)$, $P \in P^S(d, n)$ и $\Delta = \Delta(T(V))$, то $\alpha_{2i}(\Delta) = g_i(P)$ — неотрицательные целые числа и для них выполняются неравенства (18).

Пример 8. При $d \leq 4$ множества $H(d, n)$ полностью характеризуются следующими условиями: целочисленный неотрицательный вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d) \in H(d, n)$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 \leq n - d - 1$ и

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leq \gamma_1 \text{ при } d = 2, \\ \gamma_3 &\leq \gamma_2 \leq (\gamma_1)^{<1>}, \quad \gamma_3 \leq \gamma_1 \text{ при } d = 3, \\ \gamma_4 &\leq \gamma_3 \leq \gamma_2 \leq (\gamma_1)^{<1>}, \quad \gamma_4 \leq \gamma_1, \quad \gamma_2 - \gamma_3 \leq (\gamma_1 - \gamma_4)^{<1>} \text{ при } d = 4. \end{aligned}$$

Описанный в п. 1 ФМ-алгоритм можно модифицировать [13] так, чтобы на каждом шаге получалась триангуляция $T_n = T(v_1, \dots, v_n)$, и соответствующие ей симплициальные комплексы Δ_n и $\partial\Delta_n = \bigcup_{i=1}^m \Gamma(F_i)$. Появление новой точки v_{n+1} дает линейную развертку симплициального комплекса $\partial\Delta_n = \bigcup_{i=1}^m [H_i, F_i]$. Положим

$$m_- = |I_-|, \quad m_+ = |I_+|, \quad \Delta_n^- = \bigcup_{i=1}^{m_-} [H_i, F_i] \text{ и } \Delta_n^+ = \bigcup_{i=1}^{m_+} [H_{m+1-i}, F_{m+1-i}].$$

Тогда, добавляя к развертке S_1, \dots, S_t симплициального комплекса Δ_n развертку симплициального комплекса $\text{руг}\Delta_n^- = \bigcup_{i \in I_-} \text{руг}F_i$, где $\text{руг}F_i$ — пирамида с основанием F_i и апексом v_{n+1} , получаем продолжение развертки симплициального комплекса Δ_{n+1} . Назовём такие триангуляции ФМ-триангуляциями, а соответствующие им векторы γ ФМ-реализуемыми. Ясно, что симплициальные комплексы Δ_{n+1} , Δ_n^- и Δ_n^+ являются разворачиваемыми (ср. [20]),

$$f(\lambda, \Delta_{n+1}) = f(\lambda, \Delta_n) + \lambda f(\lambda, \Delta_n^-). \tag{29}$$

Отсюда нетрудно доказать неотрицательность чисел $\alpha_i(\Delta_n)$, $\alpha_i(\Delta_n^-)$ и $\alpha_i(\Delta_n^+)$, анонсированную в [10]. Кроме того, имеет место формула

$$\varphi_{\Delta_{n+1}}(v_1, \dots, v_{n+1}) = (\varphi_{\Delta_n}(v_1, \dots, v_n) \vee v_{n+1}) \varphi_{\Delta_n^-}(v_1, \dots, v_n), \tag{30}$$

из которой можно получить алгоритмы для нахождения множеств верхних нулей и нижних единиц функций $\varphi_{\partial\Delta} = \varphi_{\partial P}$, по крайней мере, если V — множество точек в общем положении.

Автор считает, что множество $H(d, n)$ состоит только из ФМ-допустимых векторов.

Вопросам построения ФМ-триангуляций, обладающих различными дополнительными свойствами, посвящена недавно защищённая Д. В. Груздевым кандидатская диссертация (см. также [13]).

Вопрос о характеристизации многочленов $f(\lambda, \Delta)$ остаётся открытым, однако автор имеет алгоритм, позволяющий определить, является ли γ — ФМ-реализуемым. Аспирант С. В. Сидоров приготовил лексикографически упорядоченные списки ФМ-реализуемых векторов (при $d = 5$ и небольших n), приведённых в Приложении.

В частности, под номером 78 значится ФМ-реализуемый вектор $\gamma = (1, 3, 3, 4, 0, 0)$, показывающий, что условие $\max(0, \gamma_{i+1} - \gamma_i) \leq (\max(0, \gamma_i - \gamma_{i-1}))^{<i>}$ не является необходимым, что опровергает гипотезу из [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

В следующих таблицах приведен список γ -векторов $\gamma(\Delta) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d)$ для всех ФМ триангуляций T 5-мерных точечных конфигураций размерности 5 с числом узлов от 6 до 9. Первую компоненту вектора $\gamma(\Delta)$ не будем заносить в таблицу, так как $\gamma_0 = 1$. Векторы записаны в лексикографическом порядке и занумерованы.

Таблица 2

N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$
1	0 0 0 0 0	29	2 3 3 0 0	57	3 2 2 2 2	85	3 3 4 3 1	113	3 4 4 4 1
2	1 0 0 0 0	30	2 3 3 1 0	58	3 3 0 0 0	86	3 3 4 3 2	114	3 4 4 4 2
3	1 1 0 0 0	31	2 3 3 2 0	59	3 3 1 0 0	87	3 4 0 0 0	115	3 4 4 4 3
4	1 1 1 0 0	32	2 3 3 2 1	60	3 3 1 1 0	88	3 4 1 0 0	116	3 4 5 0 0
5	1 1 1 1 0	33	2 3 3 3 0	61	3 3 1 1 1	89	3 4 1 1 0	117	3 4 5 1 0
6	1 1 1 1 1	34	2 3 3 3 1	62	3 3 2 0 0	90	3 4 1 1 1	118	3 4 5 1 1
7	2 0 0 0 0	35	2 3 3 3 2	63	3 3 2 1 0	91	3 4 2 0 0	119	3 4 5 2 0
8	2 1 0 0 0	36	2 3 4 0 0	64	3 3 2 1 1	92	3 4 2 1 0	120	3 4 5 2 1
9	2 1 1 0 0	37	2 3 4 1 0	65	3 3 2 2 0	93	3 4 2 1 1	121	3 4 5 3 0
10	2 1 1 1 0	38	2 3 4 2 0	66	3 3 2 2 1	94	3 4 2 2 0	122	3 4 5 3 1
11	2 1 1 1 1	39	2 3 4 2 1	67	3 3 2 2 2	95	3 4 2 2 1	123	3 4 5 3 2
12	2 2 0 0 0	40	2 3 4 3 0	68	3 3 3 0 0	96	3 4 3 0 0	124	3 4 5 4 0
13	2 2 1 0 0	41	2 3 4 3 1	69	3 3 3 1 0	97	3 4 3 1 0	125	3 4 5 4 1
14	2 2 1 1 0	42	2 3 4 3 2	70	3 3 3 1 1	98	3 4 3 1 1	126	3 4 5 4 2
15	2 2 1 1 1	43	3 0 0 0 0	71	3 3 3 2 0	99	3 4 3 2 0	127	3 4 5 4 3
16	2 2 2 0 0	44	3 1 0 0 0	72	3 3 3 2 1	100	3 4 3 2 1	128	3 5 0 0 0
17	2 2 2 1 0	45	3 1 1 0 0	73	3 3 3 2 2	101	3 4 3 3 0	129	3 5 1 0 0
18	2 2 2 1 1	46	3 1 1 1 0	74	3 3 3 3 0	102	3 4 3 3 1	130	3 5 1 1 0
19	2 2 2 2 0	47	3 1 1 1 1	75	3 3 3 3 1	103	3 4 3 3 2	131	3 5 2 0 0
20	2 2 2 2 1	48	3 2 0 0 0	76	3 3 3 3 2	104	3 4 4 0 0	132	3 5 2 1 0
21	2 2 2 2 2	49	3 2 1 0 0	77	3 3 3 3 3	105	3 4 4 1 0	133	3 5 2 2 0
22	2 3 0 0 0	50	3 2 1 1 0	78	3 3 4 0 0	106	3 4 4 1 1	134	3 5 2 2 1
23	2 3 1 0 0	51	3 2 1 1 1	79	3 3 4 1 0	107	3 4 4 2 0	135	3 5 3 0 0
24	2 3 1 1 0	52	3 2 2 0 0	80	3 3 4 1 1	108	3 4 4 2 1	136	3 5 3 1 0
25	2 3 2 0 0	53	3 2 2 1 0	81	3 3 4 2 0	109	3 4 4 3 0	137	3 5 3 2 0
26	2 3 2 1 0	54	3 2 2 1 1	82	3 3 4 2 1	110	3 4 4 3 1	138	3 5 3 2 1
27	2 3 2 2 0	55	3 2 2 2 0	83	3 3 4 2 2	111	3 4 4 3 2	139	3 5 3 3 0
28	2 3 2 2 1	56	3 2 2 2 1	84	3 3 4 3 0	112	3 4 4 4 0	140	3 5 3 3 1

Таблица 2 продолжение

N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$	N	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$
141	3 5 4 0 0	171	3 5 6 4 2	200	3 6 4 0 0	229	3 6 6 6 2	258	3 6 8 6 3
142	3 5 4 1 0	172	3 5 6 5 0	201	3 6 4 1 0	230	3 6 6 6 3	259	3 6 9 0 0
143	3 5 4 2 0	173	3 5 6 5 1	202	3 6 4 2 0	231	3 6 7 0 0	260	3 6 9 1 0
144	3 5 4 2 1	174	3 5 6 5 2	203	3 6 4 3 0	232	3 6 7 1 0	261	3 6 9 2 0
145	3 5 4 3 0	175	3 5 6 5 3	204	3 6 4 3 1	233	3 6 7 2 0	262	3 6 9 3 0
146	3 5 4 3 1	176	3 5 7 0 0	205	3 6 4 4 0	234	3 6 7 3 0	263	3 6 9 3 1
147	3 5 4 4 0	177	3 5 7 1 0	206	3 6 4 4 1	235	3 6 7 3 1	264	3 6 9 4 0
148	3 5 4 4 1	178	3 5 7 2 0	207	3 6 5 0 0	236	3 6 7 4 0	265	3 6 9 4 1
149	3 5 4 4 2	179	3 5 7 2 1	208	3 6 5 1 0	237	3 6 7 4 1	266	3 6 9 5 0
150	3 5 5 0 0	180	3 5 7 3 0	209	3 6 5 2 0	238	3 6 7 5 0	267	3 6 9 5 1
151	3 5 5 1 0	181	3 5 7 3 1	210	3 6 5 3 0	239	3 6 7 5 1	268	3 6 9 5 2
152	3 5 5 2 0	182	3 5 7 4 0	211	3 6 5 3 1	240	3 6 7 5 2	269	3 6 9 6 0
153	3 5 5 2 1	183	3 5 7 4 1	212	3 6 5 4 0	241	3 6 7 6 0	270	3 6 9 6 1
154	3 5 5 3 0	184	3 5 7 4 2	213	3 6 5 4 1	242	3 6 7 6 1	271	3 6 9 6 2
155	3 5 5 3 1	185	3 5 7 5 0	214	3 6 5 5 0	243	3 6 7 6 2	272	3 6 9 6 3
156	3 5 5 4 0	186	3 5 7 5 1	215	3 6 5 5 1	244	3 6 7 6 3	273	3 6 10 0 0
157	3 5 5 4 1	187	3 5 7 5 2	216	3 6 5 5 2	245	3 6 8 0 0	274	3 6 10 1 0
158	3 5 5 4 2	188	3 5 7 5 3	217	3 6 6 0 0	246	3 6 8 1 0	275	3 6 10 2 0
159	3 5 5 5 0	189	3 6 0 0 0	218	3 6 6 1 0	247	3 6 8 2 0	276	3 6 10 3 0
160	3 5 5 5 1	190	3 6 1 0 0	219	3 6 6 2 0	248	3 6 8 3 0	277	3 6 10 3 1
161	3 5 5 5 2	191	3 6 1 1 0	220	3 6 6 3 0	249	3 6 8 3 1	278	3 6 10 4 0
162	3 5 5 5 3	192	3 6 2 0 0	221	3 6 6 3 1	250	3 6 8 4 0	279	3 6 10 4 1
163	3 5 6 0 0	193	3 6 2 1 0	222	3 6 6 4 0	251	3 6 8 4 1	280	3 6 10 5 0
164	3 5 6 1 0	194	3 6 2 2 0	223	3 6 6 4 1	252	3 6 8 5 0	281	3 6 10 5 1
165	3 5 6 2 0	195	3 6 3 0 0	224	3 6 6 5 0	253	3 6 8 5 1	282	3 6 10 5 2
166	3 5 6 2 1	196	3 6 3 1 0	225	3 6 6 5 1	254	3 6 8 5 2	283	3 6 10 6 0
167	3 5 6 3 0	197	3 6 3 2 0	226	3 6 6 5 2	255	3 6 8 6 0	284	3 6 10 6 1
168	3 5 6 3 1	198	3 6 3 3 0	227	3 6 6 6 0	256	3 6 8 6 1	285	3 6 10 6 2
169	3 5 6 4 0	199	3 6 3 3 1	228	3 6 6 6 1	257	3 6 8 6 2	286	3 6 10 6 3
170	3 5 6 4 1								

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
2. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. — М. : Мир, 1988.

3. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2004.
4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.
5. Коробков В. К. О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы Кибернетики. — 1965 — Вып. 14. — М.: Наука. — С. 297–299.
6. Коршунов А. Д. Монотонные булевы функции // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, вып. 5 (353). — С. 89–162.
7. Сэвидж Дж. Е. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998.
8. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
9. Шевченко В. Н. О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия ВУЗ. Математика. — 1997. — № 12 (427). — С. 89–99.
10. Шевченко В. Н. Триангуляции точечных конфигураций и их f -векторы // «Проблемы теоретической кибернетики» тезисы докладов XII Международной конференции (Нижегород, 17–22 мая 1999 г.) ч. II. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. — 1999. — С. 255.
11. Шевченко В. Н. О максимальных триангуляциях выпуклых политопов // Международная конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: материалы конференции (Новосибирск, 26 июня — 1 июля 2000 г.) — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. — 2000. С. 159.
12. Шевченко В. Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции // Материалы XVI международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). — С. 135–142.
13. Шевченко В. Н., Груздев Д. В. Модификация алгоритма Фурье-Моцкина для построения триангуляции и её звёздной развёртки // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — Новосибирск: Изд-во ин-та математики. — 2006. — Т. 13, № 1. —
14. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.
15. Bagnette D. The minimum number of vertices of a simple polytope // Israel J. Math. — 1971. — V. 10. — P. 121–125.
16. Billera L., Lee C. Sufficiency of McMullens conditions for f -vectors of simplicial polytopes // Bull. AMS. — 1980. — V. 2, № 1. — P. 181–185.
17. Bruggesser H., Mani P. Shellable decompositions of cells and spheres // Math Scand. — 1971. — V. 29, № 197. — P. 205.
18. Grünbaum V. Convex polytopes. — N-Y: Wiley and Sons, 1967.
19. Kleinschmidt P., Smilansky Z. New results for simplicial spherical polytopes // Discrete and Computation Geometry. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — V. 6. — AMS. — 1991. — P. 187–197.
20. Lee C. Regular triangulations of convex polytopes // Applied Geometry and Discrete Mathematics — The Victor Klee Festschrift. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 4. — AMS. — P. 443–456.
21. McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. — 1970. — V. 17. — P. 179–184.
22. McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytopes // Israel J. Math. — 1971. — V. 9. — P. 559–570.
23. Rudin M. E. An unshellable triangulation of a tetrahedron // Bulletin AMS. — 1958. — V. 64. — P. 90–91.
24. Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytope // Advances in Math. — 1980. — V. 35, № 3. — P. 236–238.
25. Stanley R. P. Combinatorics and commutative algebra. Progress in mathematics. V. 41: Birkhauser, Boston, 1983.
26. Ziegler G. Lectures on polytopes. — Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Поступило в редакцию 15 VII 2006