ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П. А. Крутицкий, К.В. Прозоров

Уравнение Гельмгольца с косой производной и условием Дирихле на сторонах разрезов

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

П.А. Крутицкий, К.В. Прозоров

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА СТОРОНАХ РАЗРЕЗОВ

Москва, 2007 г.

П.А. Крутицкий, К.В. Прозоров. Уравнение Гельмгольца с косой производной и условием Дирихле на сторонах разрезов. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Изучена краевая задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. При этом на одной стороне каждого разреза задается условие Дирихле, а на другой — условие с косой производной, в котором при касательной производной стоит чисто мнимый коэффициент. Доказана единственность решения. Разрешимость задачи доказана в случае, когда упомянутый чисто мнимый коэффициент по модулю меньше единицы. В этом случае получено интегральное представление для решения задачи в виде потенциалов. Плотности в потенциалах определяются при решении системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая однозначно разрешима. Рассматриваемая краевая задача обобщает смешанную задачу Дирихле-Неймана.

P.A. Krutitskii, K.V. Prozorov. The Helmholtz equation with oblique derivative and the Dirichlet condition on sides of slits. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

The boundary value problem for the 2-d Helmholtz equation outside slits is considered. The Dirichlet boundary condition is specified on one side of each slit and the skew derivative boundary condition is given on the other side. The tangent derivative is multiplied by the purely imaginary constant in the skew derivative boundary condition. The uniqueness of the solution is proved. The solvability of the problem is proved in the case when the absolute value of the imaginary constant mentioned above is less then one. The integral representation for a solution of the problem in the form of potentials is obtained in this case. The densities in potentials are found by solving of a uniquely solvable system of Fredholm integral equations of the second kind and index zero. The problem considered generalizes the mixed Dirichlet–Neumann problem.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050).

E-mail: conf@math.phys.msu.su
http://www.keldysh.ru

Различные краевые задачи для уравнения Гельмгольца вне криволинейных разрезов на плоскости рассматривались в работах [1]–[5], [11]. В [2], [3] были изучены задачи Дирихле и Неймана. В [4], [5] исследованы смешанные краевые задачи, когда на одной совокупности разрезов задаётся условие Дирихле, а на другой — условие Неймана. Случай, когда на одной стороне каждого разреза задано условие Дирихле, а на другой – условие Неймана, изучен в [1]. В [11] для вещественного уравнения Гельмгольца, решения которого удовлетворяют принципу максимума, рассмотрена смешанная задача, когда на одной стороне каждого разреза задано условие Дирихле, а на другой — условие с косой производной, в котором при касательной производной стоит вещественный коэффициент.

В настоящей работе для более общего уравнения Гельмгольца, чем в [11], изучается краевая задача вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах каждого разреза. В отличие от [11], в настоящей работе рассмотрено уравнение Гельмгольца, описывающее распространяющиеся волны, а коэффициент при касательной производной в граничном условии предполагается чисто мнимым. Доказана единственность решения. С помощью потенциала простого слоя и неклассического углового потенциала [2] задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями. В случае, когда упомянутый чисто мнимый коэффициент по модулю меньше единицы, эта система сингулярных уравнений сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая оказывается однозначно разрешимой. Таким образом удаётся доказать разрешимость краевой задачи в указанном случае и найти интегральное представление для её решения.

2. Постановка задачи

На плоскости $x = (x_1, x_2) \in R^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$, класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов.

Эту совокупность кривых будем называть контуром Γ. Пусть контур Γ параметризован и в качестве параметра выступает дуговая абсцисса (длина дуги) s :

$$\Gamma_n = \{x : \; x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), \; s \in [a_n, b_n]\}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n, b_n]$

тельной к контуру Γ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s, обозначим $\tau_x = \{\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)\}$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x = \{\sin\alpha(s), -\cos\alpha(s)\}$. При выбранной параметризации

$$x_1'(s) = \cos\alpha(s), \quad x_2'(s) = \sin\alpha(s).$$

Совокупность отрезков оси $0s$, отвечающих контуру Γ, будем также обозначать Γ.

Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$, определённая на Γ, принадлежит банахову пространству $C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, если

$$\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s)\prod_{n=1}^{N}|[(s-a_n)(s-b_n)]^q| \in C^{0,\omega}(\Gamma).$$

Норма в пространстве $C_q^\omega(\Gamma)$ определяется формулой

$$\|\mathcal{F}(s)\|_{C_q^\omega(\Gamma)} = \|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)}.$$

Предположим, что плоскость R^2 разрезана вдоль контура Γ. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остается слева при возрастании параметра s, а через Γ^- — противоположную сторону. Через X обозначим множество точек плоскости, состоящее из концов контура Γ:

$$X = \bigcup_{n=1}^{N}(x(a_n) \cup x(b_n)).$$

Будем говорить, что функция $u(x) = u(x_1, x_2)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{G}$, если

1. $u(x) \in C^0(\overline{R^2 \setminus \Gamma})$, т.е. $u(x)$ непрерывна вне разрезов Γ, непрерывно продолжима на разрезы Γ слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы разрезов Γ;

2. $u_{x_1}, u_{x_2} \in C^0(\overline{R^2 \setminus \Gamma} \setminus X)$, где X — множество концов контура Γ;

3. на концах разрезов Γ функции u_{x_1}, u_{x_2} могут иметь интегрируемые особенности, т.е. при $x \to x(d) \in X$ для некоторых констант $\delta > -1$, $A > 0$ справедливо неравенство

$$|u_{x_j}(x)| \le A|x - x(d)|^\delta, \quad j = 1,\ 2, \tag{1}$$

где $d = a_n$ либо $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$.

системы разрезов на плоскости.

Задача **U.** Найти функцию $u(x)$ из класса **G**, удовлетворяющую в $R^2 \setminus \Gamma$ в классическом смысле уравнению Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0, \quad k \neq 0, \quad \arg k \in \{[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)\}, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(x)|_{x(s) \in \Gamma^+} = f^+(s), \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right)\Big|_{x(s) \in \Gamma^-} = f^-(s) \tag{4}$$

и условиям на бесконечности. Если $\arg k = 0$, т.е. $k = \operatorname{Re} k > 0$, то на бесконечности потребуем выполнение условий излучения Зоммерфельда:

$$|u(x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty. \tag{5}$$

Если $\arg k \in \{(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)\}$, то на бесконечности потребуем выполнение следующих условий:

$$|u(x)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |\nabla u| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty. \tag{6}$$

Считаем, что $f^+(s), f^-(s)$ — заданные функции, а β — заданная чисто мнимая константа, т.е.

$$\beta = i\,c, \quad c = \operatorname{Re} c. \tag{7}$$

Все условия задачи должны выполняться в классическом смысле, при этом выполнение граничного условия (4) на концах разрезов не требуется (см.(1)). В частном случае $\beta = 0$, задача **U** переходит в задачу Дирихле–Неймана, которая изучена в [1]. Аналог задачи **U** для вещественного уравнения Гельмгольца, решения которого удовлетворяют принципу максимума, изучен в [11]. Аналог задачи **U** для уравнения Лапласа изучен в [6].

Далее под $\int_\Gamma \ldots ds$ будем понимать $\sum_{n=1}^N \int_{a_n}^{b_n} \ldots ds$. Используя метод энергетических тождеств, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Задача* **U** *имеет не более одного решения.*

$u_1(x)$ и $u_2(x)$ из класса $\mathbf{G}$. Тогда функция $u_0(x) = u_1(x) - u_2(x)$ принадлежит классу $\mathbf{G}$ и удовлетворяет задаче $\mathbf{U}$ с однородными граничными условиями (3), (4) и с условиями на бесконечности (5), (6). Покажем, что $u_0(x) \equiv 0$. Пусть C_r — круг достаточно большого радиуса r с центром в начале координат. Окружим каждый разрез Γ_n замкнутым контуром и запишем 1-ую формулу Грина в области, ограниченной этими контурами и окружностью ∂C_r [7]. Устремим $r \to \infty$ и стянем контура к разрезам, используя гладкость решения задачи $\mathbf{U}$, гарантированную классом $\mathbf{G}$. Первая формула Грина примет вид следующего энергетического тождества

$$\lim_{r\to\infty}\left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(C_r\setminus\Gamma)} - k^2\|u_0\|^2_{L_2(C_r\setminus\Gamma)}\right) =$$

$$= \underbrace{\int_\Gamma \bar{u}_0^+ \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+ ds}_{I_1} - \underbrace{\int_\Gamma \bar{u}_0^- \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^- ds}_{I_2} + \lim_{r\to\infty}\int_{\partial C_r} \bar{u}_0 \frac{\partial u_0}{\partial |x|}\, dl,$$

где учтены условия (1). Индексами $+$ и $-$ обозначаются предельные значения функций на Γ^+ и Γ^-. Через $\bar{u}_0$ обозначена величина, комплексно сопряженная к u_0. Из однородного граничного условия (3) следует, что $I_1 = 0$. Используя однородное граничное условие (4), получим

$$I_2 = -\beta \int_\Gamma \bar{u}_0^- \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau_x}\right)^- ds.$$

Введем обозначения $\mathrm{Re}\, u_0 = U_1$, $\mathrm{Im}\, u_0 = U_2$, тогда $u_0 = U_1 + iU_2$, $\bar{u}_0 = U_1 - iU_2$ и будет выполняться следующее равенство:

$$I_2 = -\beta \int_\Gamma \left[U_1^- \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau_x}\right)^- + U_2^- \left(\frac{\partial U_2}{\partial \tau_x}\right)^- + \right.$$

$$\left. + i \left\{ U_1^- \left(\frac{\partial U_2}{\partial \tau_x}\right)^- - U_2^- \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau_x}\right)^- \right\} \right] ds.$$

Учитывая, что при выбранной параметризации $\partial/\partial\tau_x = \partial/\partial s$ в любой точке $x(s) \in \Gamma$, находим

$$I_2 = -\frac{\beta}{2}\left\{ \sum_{n=1}^{N} \left[|U_1^-(x(b_n))|^2 - |U_1^-(x(a_n))|^2 + |U_2^-(x(b_n))|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |U_2^-(x(a_n))|^2 \right] \right\} - i\beta \int_\Gamma \left[U_1^- \left(\frac{\partial U_2}{\partial \tau_x}\right)^- - U_2^- \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau_x}\right)^- \right] ds. \qquad (8)$$

$$u_0^+(x(b_n)) = u_0^-(x(b_n)), \quad u_0^+(x(a_n)) = u_0^-(x(a_n)), \quad n = 1, ..., N.$$

Учитывая однородное граничное условие (3), имеем

$$U_j^+(x(b_n)) = U_j^-(x(b_n)) = 0, \quad U_j^+(x(a_n)) = U_j^-(x(a_n)) = 0, \qquad (9)$$

где $n = 1, ..., N,\ j = 1, 2$. Подставляя (9) в (8), преобразуем энергетическое тождество к виду

$$\lim_{r\to\infty} \left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(C_r \setminus \Gamma)} - k^2 \|u_0\|^2_{L_2(C_r \setminus \Gamma)} \right) =$$

$$= i\beta \int_\Gamma \left[U_1^- \left(\frac{\partial U_2}{\partial \tau_x} \right)^- - U_2^- \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau_x} \right)^- \right] ds + \lim_{r\to\infty} \int_{\partial C_r} \bar{u}_0 \frac{\partial u_0}{\partial |x|}\, dl. \qquad (10)$$

Пусть $k \neq 0$ и $\arg k = 0$, т.е. $k = \operatorname{Re} k > 0$, тогда подставляя в (10) условия излучения Зоммерфельда (5), получим

$$\lim_{r\to\infty} \left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(C_r \setminus \Gamma)} - k^2 \|u_0\|^2_{L_2(C_r \setminus \Gamma)} \right) =$$

$$= i\beta \int_\Gamma \left[U_1^- \left(\frac{\partial U_2}{\partial \tau_x} \right)^- - U_2^- \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau_x} \right)^- \right] ds + ik \lim_{r\to\infty} \int_{\partial C_r} |u_0|^2\, dl. \qquad (11)$$

Согласно [9], при $k = \operatorname{Re} k > 0$ любое решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда (5), имеет следующее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$u_0(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \Upsilon(\phi) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}} \right), \quad |x| \to \infty,$$

где ϕ — полярный угол, а $\Upsilon(\phi)$ — непрерывная функция. Согласно этой формуле существует предел в правой части тождества (11)

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial C_r} |u_0|^2\, dl = \int_0^{2\pi} |\Upsilon(\phi)|^2\, d\phi,$$

следовательно предел в левой части тождества (11) также существует.

Рассматривая мнимую часть равенства (11) и учитывая (7), приходим к следующему выражению

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial C_r} |u_0|^2\, dl = 0.$$

Так как $k = \operatorname{Re} k > 0$ и $u_0(x)$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда (5), то из леммы Реллиха [9] следует: $u_0(x) \equiv 0$.

тождество (10) примет вид

$$\lim_{r\to\infty}\left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(C_r\setminus\Gamma)} - k^2\|u_0\|^2_{L_2(C_r\setminus\Gamma)}\right) =$$

$$= i\beta\int_\Gamma\left[U_1^-\left(\frac{\partial U_2}{\partial\tau_x}\right)^- - U_2^-\left(\frac{\partial U_1}{\partial\tau_x}\right)^-\right]ds, \qquad (12)$$

где приняты во внимание условия на бесконечности (6). Взяв мнимую часть тождества (12) и, учитывая, что

$$k^2 = (\operatorname{Re}k)^2 - (\operatorname{Im}k)^2 + 2i\operatorname{Re}k\operatorname{Im}k,$$

получаем

$$\operatorname{Re}k\operatorname{Im}k\lim_{r\to\infty}\|u_0\|^2_{L_2(C_r\setminus\Gamma)} = \operatorname{Re}k\operatorname{Im}k\|u_0\|^2_{L_2(R^2\setminus\Gamma)} = 0.$$

В рассматриваемом случае $\operatorname{Re}k\neq 0$ и $\operatorname{Im}k\neq 0$, поэтому $u_0(x)\equiv 0$. Тем самым, во всех случаях $u_0(x)\equiv 0$. Теорема доказана в силу линейности задачи $\mathbf{U}$.

3. Сведение задачи к интегральным уравнениям

Чтобы доказать разрешимость задачи $\mathbf{U}$, наложим дополнительные требования гладкости на функции из граничных условий (3), (4):

$$f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma),\quad f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma),\quad \lambda\in(0,1]. \qquad (13)$$

Заметим, что коэффициент Гёльдера λ при определении гладкости контура Γ и функций $f^+(s)$, $f^-(s)$ предполагается одним и тем же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве λ следует брать наименьший.

Вместо граничного условия (3) запишем эквивалентное

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\tau_x}\right|_{x(s)\,\in\,\Gamma^+} = f'^+(s),\quad f'^+(s)\equiv\frac{df^+(s)}{ds}\in C^{0,\lambda}(\Gamma), \qquad (14)$$

$$u(x(a_n)) = f^+(a_n),\quad n=1,\ldots,N. \qquad (15)$$

В условии (14) учтено, что при выбранной параметризации $\partial/\partial\tau_x = \partial/\partial s$ в любой точке $x(s)\in\Gamma$.

Через $H_0^{(1)}(z)$ обозначим функцию Ханкеля I рода нулевого порядка [8], которая является сингулярным решением уравнения (2).

Решение задачи $\mathbf{U}$ можно получить с помощью теории потенциала для уравнения (2). Ищем решение задачи $\mathbf{U}$ в виде

$$u[\mu,\nu](x) = V[\mu](x) + T[\nu](x), \qquad (16)$$

$$V[\mu](x)=\frac{i}{4}\int_\Gamma \mu(\sigma)H_0^{(1)}(k|x-y(\sigma)|)d\sigma$$

— потенциал простого слоя для уравнения (2) и

$$T[\nu](x)=\frac{i}{4}\int_\Gamma \nu(\sigma)U(x,\sigma)d\sigma$$

— угловой потенциал для уравнения (2). Угловой потенциал для уравнения Гельмгольца изучался в [2]. Плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ будем разыскивать в банаховом пространстве $C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega\in(0,1]$, $q\in[0,1)$. Ядро углового потенциала $U(x,\sigma)$ определено на каждой дуге $\Gamma_n\quad(n=1,\ldots,N)$ формулой

$$U(x,\sigma)=\int_{a_n}^{\sigma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_y}H_0^{(1)}(k|x-y(\xi)|)d\xi,\quad \sigma\in[a_n,b_n],$$

где

$$y=y(\xi)=(y_1(\xi),y_2(\xi)),\quad |x-y(\xi)|=\sqrt{(x_1-y_1(\xi))^2+(x_2-y_2(\xi))^2}.$$

Ниже будем полагать, что плотность углового потенциала удовлетворяет дополнительным условиям [2], [3]

$$\int_{a_n}^{b_n}\nu(\sigma)d\sigma=0,\quad n=1,\ldots,N. \tag{17}$$

Интегрируя $T[\nu](x)$ по частям и используя (17), выразим угловой потенциал через потенциал двойного слоя

$$T[\nu](x)=-\frac{i}{4}\int_\Gamma \rho(\sigma)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_y}H_0^{(1)}(k|x-y(\sigma)|)d\sigma,$$

где

$$\rho(\sigma)=\int_{a_n}^{\sigma}\nu(\xi)d\xi,\quad \sigma\in[a_n,b_n],\quad n=1,\ldots,N.$$

Очевидно, что потенциалы $T[\nu](x)$ и $V[\mu](x)$ удовлетворяют как уравнению (2) вне Γ, так и условиям на бесконечности (5), (6).

Свойства потенциалов $T[\nu](x)$ и $V[\mu](x)$ изучены в [2]. В [2] показано, что если плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ принадлежат $C_q^\omega(\Gamma)$ с $\omega\in(0,1]$, $q\in[0,1)$ и выполнены условия (17), то потенциалы $T[\nu](x)$, $V[\mu](x)$ принадлежат классу $\mathbf{G}$. В частности, неравенство (1) выполняется с $\delta=-q$, если $q\in(0,1)$. Более того, функция (16) принадлежит классу $\mathbf{G}$ и удовлетворяет всем условиям задачи $\mathbf{U}$ за исключением граничных условий (3), (4).

(14), (4), используем предельные формулы для углового потенциала из [2] и получаем интегральные уравнения для плотностей $\mu(s),\nu(s)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma+\frac{i}{4}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s)-y(\sigma)|)d\sigma+\frac{\nu(s)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(\sigma)\frac{\cos\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma+\frac{i}{4}\int_\Gamma \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}U_0(x(s),\sigma)d\sigma=$$

$$=f'^{+}(s),\quad s\in\Gamma, \tag{18}$$

$$-\frac{\mu(s)+\beta\nu(s)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma(\mu(\sigma)+\beta\nu(\sigma))\frac{\cos\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma+$$

$$+\frac{i}{4}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}h(k|x(s)-y(\sigma)|)d\sigma+\frac{i\beta}{4}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s)-y(\sigma)|)d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma(\nu(\sigma)-\beta\mu(\sigma))\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}d\sigma+$$

$$+\frac{i\beta}{4}\int_\Gamma \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}U_0(x(s),\sigma)d\sigma+\frac{i}{4}\int_\Gamma \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}U_0(x(s),\sigma)d\sigma=$$

$$=f^{-}(s),\quad s\in\Gamma, \tag{19}$$

где

$$U_0(x(s),\sigma)=\int_{a_n}^{\sigma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}h(k|x-y(\xi)|)d\xi,\quad \sigma\in[a_n,b_n],\quad n=1,\ldots,N,$$

$$h(z)=H_0^{(1)}(z)-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{z}{k}.$$

Через $\varphi_0(x,y)$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{xy}$ и направлением нормали $\mathbf{n}_x$ в точке $x\in\Gamma$. Угол $\varphi_0(x,y)$ считается положительным, если отсчитывается от вектора $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от $\mathbf{n}_x$ по часовой стрелке. Кроме того, функция $\varphi_0(x,y)$ непрерывна по обеим переменным $x,y\in\Gamma$, если $x\neq y$. Заметим, что при $x(s)$, $y\in\Gamma$ и $x\neq y$ справедливы формулы

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\ln|x-y|=-\frac{\cos\varphi_0(x,y)}{|x-y|},\quad \frac{\partial}{\partial s}\ln|x(s)-y|=-\frac{\sin\varphi_0(x(s),y)}{|x(s)-y|}.$$

Первый член в (18) и пятый член в (19) — сингулярные интегралы Коши [10].

Подставляя функцию (16) в условия (15), получим дополнительные уравнения для $\nu(s)$, $\mu(s)$

$$V[\mu](x(a_n))+T[\nu](x(a_n))=f^{+}(a_n),\quad n=1,\ldots,N. \tag{20}$$

относительно функций $\nu(s)$, $\mu(s)$. Из приведенных выше рассуждений вытекает

Теорема 2. *Если система уравнений (17) — (20) имеет решение $\nu(s)$, $\mu(s)$ такое, что $\nu(s)$, $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, то решение задачи* $\mathbf{U}$ *существует и дается формулой (16).*

Далее будем исследовать разрешимость системы интегральных уравнений (17) — (20). Введем обозначения

$$v_1(s,\sigma) \equiv \frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}U_0(x(s),\sigma),$$

$$v_2(s,\sigma) \equiv \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma-s}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s)-y(\sigma)|),$$

$$v_3(s,\sigma) \equiv \frac{\beta}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma-s}\right) + \frac{i\beta}{2}\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s)-y(\sigma)|)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}h(k|x(s)-y(\sigma)|),$$

$$v_4(s,\sigma) \equiv \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma-s}\right) - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}U_0(x(s),\sigma)-$$
$$-\frac{\beta}{\pi}\frac{\cos\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{i\beta}{2}\frac{\partial}{\partial s}U_0(x(s),\sigma).$$

Поскольку $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, то из [2, леммы 2, 3] и [3, леммы 1, 3] следует, что $v_j(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma\times\Gamma)$ при $j=1,...,4$, где

$$p_0 = \begin{cases} \lambda, & \text{если } 0<\lambda<1, \\ 1-\varepsilon_0, & \text{для любого } \varepsilon_0 \in (0,1], \quad \text{если } \lambda = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Тогда уравнения (18), (19) можно записать в виде

$$\nu(s) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s} + \int_\Gamma \nu(\sigma)v_1(s,\sigma)d\sigma + \int_\Gamma \mu(\sigma)v_2(s,\sigma)d\sigma =$$
$$= 2f'^{+}(s), \quad s\in\Gamma, \tag{22}$$

$$-\mu(s) - \beta\nu(s) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma(\nu(\sigma)-\beta\mu(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma-s} + \int_\Gamma \mu(\sigma)v_3(s,\sigma)d\sigma-$$
$$-\int_\Gamma \nu(\sigma)v_4(s,\sigma)d\sigma = 2f^-(s), \quad s\in\Gamma. \tag{23}$$

Произведем замену неизвестных функций по формулам:

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)\nu(s) - \mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma), \\ \rho_2(s) &= \left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)\mu(s) + \nu(s) \in C_q^\omega(\Gamma), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\nu(s) = \frac{\rho_1(s) + (\beta + \sqrt{\beta^2+1})\,\rho_2(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}}, \quad \mu(s) = \frac{\rho_2(s) - (\beta + \sqrt{\beta^2+1})\,\rho_1(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}}. \tag{25}$$

Уравнения (22), (23) в новых переменных примут вид ($s \in \Gamma$):

$$\rho_1(s) - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+1}}{\pi} \int_\Gamma \rho_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int_\Gamma \rho_1(\sigma) Y_{11}(s,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \rho_2(\sigma) Y_{12}(s,\sigma) d\sigma = 2(\sqrt{\beta^2+1} f'^{+}(s) + f^{-}(s)) \equiv f_1(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \tag{26}$$

$$\rho_2(s) + \frac{\sqrt{\beta^2+1} - \beta}{\pi} \int_\Gamma \rho_2(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int_\Gamma \rho_1(\sigma) Y_{21}(s,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \rho_2(\sigma) Y_{22}(s,\sigma) d\sigma = 2(\sqrt{\beta^2+1} - \beta)(\sqrt{\beta^2+1} f'^{+}(s) - f^{-}(s)) \equiv$$

$$\equiv f_2(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \tag{27}$$

где

$$Y_{11}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left\{ \sqrt{\beta^2+1} v_1(s,\sigma) - \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) \left(\sqrt{\beta^2+1} v_2(s,\sigma) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, v_3(s,\sigma) \right) - v_4(s,\sigma) \right\},$$

$$Y_{12}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left\{ \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) \sqrt{\beta^2+1} v_1(s,\sigma) + \sqrt{\beta^2+1} v_2(s,\sigma) + \right.$$

$$\left. + \, v_3(s,\sigma) - \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) v_4(s,\sigma) \right\},$$

$$Y_{21}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left\{ \left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right) \sqrt{\beta^2+1} v_1(s,\sigma) - \sqrt{\beta^2+1} v_2(s,\sigma) + \right.$$

$$\left. + \, v_3(s,\sigma) + \left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right) v_4(s,\sigma) \right\},$$

$$Y_{22}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left\{ \sqrt{\beta^2+1} v_1(s,\sigma) + \left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right) \left(\sqrt{\beta^2+1} v_2(s,\sigma) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \, v_3(s,\sigma) \right) + v_4(s,\sigma) \right\}.$$

Из гладкости функций $v_1(s,\sigma), \ldots, v_4(s,\sigma)$ вытекает, что

$$Y_{jl}(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma \times \Gamma), \qquad j,l = 1,2;$$

p_0 берется из (21). Запишем уравнения (26), (27) в виде

$$\rho_j(s) - \frac{\beta - (-1)^j \sqrt{\beta^2+1}}{\pi} \int_\Gamma \rho_j(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} = - \int_\Gamma \rho_1(\sigma) Y_{j1}(s,\sigma) d\sigma -$$

$$- \int_\Gamma \rho_2(\sigma) Y_{j2}(s,\sigma) d\sigma + f_j(s) \equiv F_j(s), \quad s \in \Gamma, \quad j = 1,2, \tag{28}$$

где $F_1(s),\ F_2(s) \in C$ [illegible] (Γ), ρ_0 определяется в (21).

В терминах $\rho_1(s),\ \rho_2(s)$ условия (17), (20) примут вид

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\rho_1(s) + \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_2(s)\right) d\sigma = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} V\left[\rho_2(s) - \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_1(s)\right](x(a_n)) + \\ + T\left[\rho_1(s) + \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_2(s)\right](x(a_n)) = \\ = 2\sqrt{\beta^2+1} f^+(a_n), \quad n = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, система интегральных уравнений относительно $\mu(s)$, $\nu(s)$ сведена к системе уравнений относительно $\rho_1(s),\ \rho_2(s)$. Главное преимущество последней системы заключается в том, что характеристическая часть каждого из уравнений (28) содержит только одну неизвестную функцию (либо $\rho_1(s)$, либо $\rho_2(s)$). Справедлива

Лемма 1. *Между решениями*

$$\mu(s),\, \nu(s) \in C_q^{\omega}(\Gamma) \qquad (\omega \in (0,1],\ q \in [0,1))$$

системы (17) — (20) и решениями $\rho_1(s),\ \rho_2(s) \in C_q^{\omega}(\Gamma)$ *системы (28) — (30) существует взаимно однозначное соответствие, которое устанавливается формулами (24), (25).*

Теоремы 1, 2 и лемма 1 справедливы для любых вещественных c в условии (7). Однако дальнейшая цель настоящей работы — доказать разрешимость задачи **U** в случае $c \in (-1,1)$. Поэтому разрешимость системы (28) — (30) в этой работе будет исследована для $c \in (-1,1)$. Решим уравнения (28) относительно $\rho_1(s),\ \rho_2(s)$, считая функции $F_1(s),\ F_2(s)$ известными. Используя результаты [10], можно доказать следующее утверждение (см. п.5).

Лемма 2. *Пусть* $c \in (-1,1)$ *в (7) и* $F_1(s), F_2(s)$ *— заданные гёльдеровые на* Γ *функции. Тогда уравнения (28) имеют решения в пространстве* $C_q^{\omega}(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$. *Эти решения даются следующими выражениями:*

$$\rho_j(s) = F_j(s)\frac{\sqrt{1+\beta^2} + (-1)^j\beta}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{(-1)^j}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}Z_j(s)}\int_\Gamma \frac{F_j(\sigma)Z_j(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma -$$

$$-\frac{1}{Z_j(s)}\sum_{m=0}^{N-1} B_{N(j-1)+m} s^m, \quad s \in \Gamma, \quad j = 1, 2,$$

где $B_0, \ldots, B_{2N-1}$ *— произвольные константы,* $\sqrt{1+\beta^2} = |\sqrt{1-c^2}|$,

$$Z_1(s) = Q_1(s)Q_0(s), \qquad Z_2(s) = Q_2(s)Q_0(s),$$

$$Q_0(s) = \prod_{n=1} \left|\frac{\quad n}{s - b_n}\right| , \quad p = \frac{}{4\pi i} \ln \left|\frac{}{1+c}\right|, \quad c = -i\,\beta,$$

$$Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{1/4} |s - b_n|^{3/4} \mathrm{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma),$$

$$Q_2(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{3/4} |s - b_n|^{1/4} \mathrm{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma).$$

Если $c \neq \pm 1$, то функции $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ принадлежат классу $C^{0,1/4}(\Gamma)$ согласно [10, § 6.3] и обращаются в нуль на концах Γ.

Раскрывая выражения $F_1(s)$, $F_2(s)$, получим для $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ систему регуляризованных уравнений:

$$\rho_1(s) + \frac{1}{Z_1(s)} \int_\Gamma \rho_1(\sigma) K_{11}(s,\sigma) d\sigma + \frac{1}{Z_1(s)} \int_\Gamma \rho_2(\sigma) K_{12}(s,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{Z_1(s)} \sum_{m=0}^{N-1} B_m s^m = \frac{\Phi_1(s)}{Z_1(s)}, \quad s \in \Gamma, \tag{31}$$

$$\rho_2(s) + \frac{1}{Z_2(s)} \int_\Gamma \rho_1(\sigma) K_{21}(s,\sigma) d\sigma + \frac{1}{Z_2(s)} \int_\Gamma \rho_2(\sigma) K_{22}(s,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{Z_2(s)} \sum_{m=0}^{N-1} B_{N+m} s^m = \frac{\Phi_2(s)}{Z_2(s)}, \quad s \in \Gamma, \tag{32}$$

где введены функции

$$K_{1j}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left[\left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right) Y_{1j}(s,\sigma) Z_1(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{Y_{1j}(\xi,\sigma) Z_1(\xi)}{\xi - s} d\xi \right],$$

$$K_{2j}(s,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left[\left(\sqrt{\beta^2+1} + \beta\right) Y_{2j}(s,\sigma) Z_2(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{Y_{2j}(\xi,\sigma) Z_2(\xi)}{\xi - s} d\xi \right],$$

$$\Phi_j(s) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+1}} \left[\left(\sqrt{\beta^2+1} + (-1)^j \beta\right) f_j(s) Z_j(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^j}{\pi} \int_\Gamma \frac{f_j(\xi) Z_j(\xi)}{\xi - s} d\xi \right], \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

Если $c \neq \pm 1$, то плотности сингулярных интегралов в выражениях для $K_{lj}(s,\sigma)$, $\Phi_j(s)$ с $l = 1, 2$, $j = 1, 2$ являются гёльдеровыми на Γ, причем плотности в $K_{lj}(s,\sigma)$ гёльдеровы по обеим переменным. А

$\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$ (равномерно по σ в случае $K_{lj}(s,\sigma)$) и обращаются в нуль, если ξ — конец Γ (так как функции $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ принадлежат классу $C^{0,1/4}(\Gamma)$ и обращаются в нуль на концах Γ). Отсюда и из свойств сингулярных интегралов [10, § 18] следует

Лемма 3. *Пусть $c \neq \pm 1$, тогда функции $K_{lj}(s,\sigma)$ с $l,j = 1,2$ являются гёльдеровыми на Γ по обеим переменным. В частности, эти функции гёльдеровы на Γ по переменной s с показателем $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$ равномерно по $\sigma \in \Gamma$. Если, кроме того, выполнены условия (13), то $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$.*

Ниже будем считать, что $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$.

Пусть $c \neq \pm 1$. Из (31) — (32) и из леммы 3 следует, что если функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ из пространства $C_q^{\omega_0}(\Gamma)$ с $\omega_0 \in (0,1]$, $q \in [0,1)$ дают решение интегральных уравнений (31), (32), то эти функции представимы в виде

$$\rho_1(s) = \rho_{1*}(s)/Z_1(s), \quad \rho_2(s) = \rho_{2*}(s)/Z_2(s),$$

где $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$. Поэтому, ниже функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ будем искать в таком виде. Из этого представления, в частности, следует, что $\rho_1(s)$, $\rho_2(s) \in C_{q_1}^{\omega_1}(\Gamma)$, где $q_1 \in (3/4, 1)$, $\omega_1 = \min\{\omega, q_1 - 3/4\} = \min\{\lambda, q_1 - 3/4\}$. Умножим уравнение (31) на $Z_1(s)$, а уравнение (32) на $Z_2(s)$. Примем за новые неизвестные функции $\rho_{j*}(s) = \rho_j(s) Z_j(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $j = 1,2$. Очевидно, что соотношение между $\rho_{j*}(s)$ и $\rho_j(s)$ взаимно однозначное ($j = 1,2$). Уравнения (31), (32) примут вид

$$\rho_{1*}(s) + \int_\Gamma \rho_{1*}(\sigma) K_{11}(s,\sigma) Z_1^{-1}(\sigma) d\sigma + \int_\Gamma \rho_{2*}(\sigma) K_{12}(s,\sigma) Z_2^{-1}(\sigma) d\sigma +$$
$$+ \sum_{m=0}^{N-1} B_m s^m = \Phi_1(s), \quad s \in \Gamma, \tag{34}$$

$$\rho_{2*}(s) + \int_\Gamma \rho_{1*}(\sigma) K_{21}(s,\sigma) Z_1^{-1}(\sigma) d\sigma + \int_\Gamma \rho_{2*}(\sigma) K_{22}(s,\sigma) Z_2^{-1}(\sigma) d\sigma +$$
$$+ \sum_{m=0}^{N-1} B_{N+m} s^m = \Phi_2(s), \quad s \in \Gamma. \tag{35}$$

Используя лемму 3, нетрудно показать, что справедлива

Лемма 4. *Пусть $c \neq \pm 1$ и функции $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ из $C^0(\Gamma)$ удовлетворяют уравнениям (34) для $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ с $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$. Тогда $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ принадлежат пространству $C^{0,\omega}(\Gamma)$.*

Замечание. Если $c \neq \pm 1$ и $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in C^{0,\omega_2}(\Gamma)$, $\omega_2 \in (0,1]$, то функции $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$, удовлетворяющие уравнениям (34), принадлежат пространству $C^{0,\omega_3}(\Gamma)$, $\omega_3 = \min\{\lambda, \omega_2, 1/4\}$.

Пусть $c \neq \pm 1$. Как следует из леммы 3, условие $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ выполнено, если выполнены условия (13). Тем самым, ниже будем искать решения $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ уравнений (34), (35) в $C^0(\Gamma)$. Согласно лемме 4, эти решения автоматически будут принадлежать $C^{0,\omega}(\Gamma)$. Разрешимость уравнений (34), (35) в $C^0(\Gamma)$ будем изучать при более слабых условиях на $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, а именно будем предполагать, что эти функции из $C^0(\Gamma)$. Если окажется, что уравнения (34), (35) имеют решение из $C^0(\Gamma)$ для $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$, то по лемме 4: $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$.

Определим операторы $\mathbf{K}_{lj}$ с помощью равенств

$$\mathbf{K}_{lj}[v](s) = \int_\Gamma K_{lj}(s,\sigma) Z_j^{-1}(\sigma) v(\sigma) d\sigma, \quad l,j = 1,2. \tag{36}$$

Лемма 5. *Если $c \neq \pm 1$, то операторы $\mathbf{K}_{lj}$ с $l,j = 1,2$ компактны как операторы, действующие из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$.*

Доказательство основано на теореме Арцела и проводится непосредственной проверкой, с использованием леммы 3.

Подставив в условия (29), (30) функции $\rho_j(s) = \rho_{j*}(s) Z_j^{-1}(s)$, $j = 1,2$, где $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ выражаются из (34), (35), запишем условия (29), (30) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{2} \int_\Gamma Z_j^{-1}(\sigma) L_{n,j}(\sigma) \rho_{j*}(\sigma) d\sigma + \sum_{m=0}^{2N-1} w_{n,m} B_m = \chi_n, \quad n = 1,2,\ldots,2N, \tag{37}$$

где введены обозначения

$$\chi_n = \int_{\Gamma_n} \left(\Phi_1(s) Z_1^{-1}(s) + \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) \Phi_2(s) Z_2^{-1}(s) \right) ds, \quad n = 1,2,...,N,$$

$$\chi_n = -2\sqrt{\beta^2+1} f^+(a_{n-N}) +$$

$$+V\left[\Phi_2(\cdot) Z_2^{-1}(\cdot) - \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) \Phi_1(\cdot) Z_1^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N})) +$$

$$+T\left[\Phi_1(\cdot) Z_1^{-1}(\cdot) + \left(\beta + \sqrt{\beta^2+1}\right) \Phi_2(\cdot) Z_2^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N}),$$

$$n = N+1, N+2, \ldots, 2N,$$

$$w_{n,m} = \int_{\Gamma_n} s^m Z_1^{-1}(s) ds, \quad m = 0,1,\ldots,N-1, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

$$w_{n,m} = \int_{\Gamma_n} s^{m-N} Z_2^{-1}(s) ds, \quad m = N, N+1, \ldots, 2N-1, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

$$w_{n,m} = -\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right) V\left[(\cdot)^m Z_1^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N}))+$$
$$+T\left[(\cdot)^m Z_1^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N})),$$
$$m = 0,1,\ldots,N-1, \quad n = N+1, N+2, \ldots, 2N,$$
$$w_{n,m} = V\left[(\cdot)^{m-N} Z_2^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N}))+$$
$$+\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right) T\left[(\cdot)^{m-N} Z_2^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N})),$$
$$m = N, N+1, \ldots, 2N-1, \quad n = N+1, N+2, \ldots, 2N,$$
$$L_{n,j}(\sigma) = \int_{\Gamma_n}\left(K_{1j}(s,\sigma)Z_1^{-1}(s) + \left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)K_{2j}(s,\sigma)Z_2^{-1}(s)\right)ds,$$
$$j = 1,2, \quad n = 1,2,...,N,$$
$$L_{n,j}(\sigma) = V\left[-K_{1j}(\cdot,\sigma)Z_1^{-1}(\cdot)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right) + K_{2j}(\cdot,\sigma)Z_2^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N}))+$$
$$+T\left[\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)K_{2j}(\cdot,\sigma)Z_2^{-1}(\cdot) + K_{1j}(\cdot,\sigma)Z_1^{-1}(\cdot)\right](x(a_{n-N})),$$
$$j = 1,2, \quad n = N, N+1, \ldots, 2N.$$

Точка $(\cdot)$ означает переменную интегрирования в потенциалах. В системе (37) номера $n = 1,2,...,N$ отвечают условиям (29), а $n = N+1, N+2, ..., 2N$ — условиям (30).

Введём вектор–столбец, составленный из коэффициентов

$$\vec{B} = (B_0, \ldots, B_{2N-1})^T \in E_{2N}.$$

Систему уравнений (34), (35), (37) можно записать в виде одного векторного уравнения относительно неизвестного вектор–столбца

$$\vec{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \vec{B})^T,$$

принадлежащего банахову пространству $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$ с нормой $\|\vec{\rho}\|_{C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}} = \|\rho_{1*}\|_{C^0(\Gamma)} + \|\rho_{2*}\|_{C^0(\Gamma)} + \|\vec{B}\|_{E_{2N}}$;

$$(I+\mathbf{R})\vec{\rho} = \overrightarrow{\Phi}, \tag{38}$$

где $\overrightarrow{\Phi} = (\Phi_1(s), \Phi_2(s), \chi_1, \chi_2, ..., \chi_{2N})^T \in C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$, функции $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ заданы в (33); I — единичный оператор, отображающий пространство $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$ в себя,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & P_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & P_2 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & W - I_{2N} \end{pmatrix},$$

I_{2N} — единичная матрица порядка $2N$, $W = \{w_{n,m}\}_{m=0,\dots,2N-1}$ — квадратная матрица размерности $2N \times 2N$, $\mathbf{L}_j = (\mathcal{L}_{1,j}, \mathcal{L}_{2,j}, \dots, \mathcal{L}_{2N,j})^T$, $j = 1, 2$, функционалы $\mathcal{L}_{n,j}$ определяются выражениями:

$$\mathcal{L}_{n,j}\rho_{j*} = \int_\Gamma Z_j^{-1}(\sigma) L_{n,j}(\sigma) \rho_{j*}(\sigma) d\sigma, \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, 2N,$$

операторы $\mathbf{K}_{l,j}$ с $l, j = 1, 2$ определены в (36), операторы умножения P_1, P_2 определяются равенствами $P_1 \vec{B} = \sum_{m=0}^{N-1} B_m s^m$, $P_2 \vec{B} = \sum_{m=0}^{N-1} B_{N+m} s^m$.

Лемма 6. *Если $c \neq \pm 1$, то уравнение (38) является уравнением Фредгольма 2-го рода в пространстве $C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N}$.*

Доказательство. Рассмотрим операторы, из которых составлен оператор $\mathbf{R}$. Операторы $\mathbf{K}_{l,j}$, $l, j = 1, 2$ являются компактными из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$ по лемме 5. Оператор $(W - I_{2N})$ действует из E_{2N} в E_{2N}. Поскольку всякий линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, компактен [12, с. 222], то $(W - I_{2N})$ — компактный оператор. Операторы P_1, P_2, действующие из E_{2N} в $C^0(\Gamma)$, операторы $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, действующие из $C^0(\Gamma)$ в E_{2N}, являются конечномерными, а потому компактными [13, с. 65], [12, с. 222]. Итак, все операторы, составляющие $\mathbf{R}$, компактны. Поэтому $\mathbf{R}$ является компактным оператором, отображающим $C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N}$ в себя. Согласно [13, с. 67], уравнение вида (38) с компактным оператором $\mathbf{R}$ удовлетворяет альтернативе Фредгольма. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия (13), $c \in (-1, 1)$ в (7), и пусть уравнение (38) имеет решение*

$$\vec{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \vec{B})^T \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N},$$

где $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$. Тогда

1) функции

$$\rho_j(s) = \rho_{j*}(s) Z_j^{-1}(s) \in C_{q_1}^{\omega_1}(\Gamma), \quad j = 1, 2, \tag{39}$$

дают решение системы (28) — (30), при этом $q_1 \in (3/4, 1)$, $\omega_1 = \min\{\lambda, q_1 - 3/4\}$;

2) решение задачи $\mathbf{U}$ существует и даётся формулой (16), в ко-

$$
\begin{aligned}
\nu(s) &= \frac{\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_2(s)+\rho_1(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}} = \\
&= \frac{\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_{2*}(s)Z_2^{-1}(s)+\rho_{1*}(s)Z_1^{-1}(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}} \in C^{\omega_1}_{q_1}(\Gamma), \\
\mu(s) &= \frac{-\rho_1(s)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)+\rho_2(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}} = \\
&= \frac{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)\rho_{1*}(s)Z_1^{-1}(s)+\rho_{2*}(s)Z_2^{-1}(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}} \in C^{\omega_1}_{q_1}(\Gamma).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Доказательство. Пусть уравнение (38) имеет решение $\vec{\rho}=(\rho_{1*}(s),\rho_{2*}(s),\vec{B})^T \in C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N}$, обращающее в тождества уравнения (34), (35), (37).

1) Очевидно, что функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, построенные по формулам (39), и константы $B_0, B_1, \ldots, B_{2N-1}$, входящие в вектор $\vec{B}$, обращают в тождества уравнения (31), (32). На функциях $w(s)\in C^{\omega}_q(\Gamma)$ определим следующие сингулярные операторы:

$$
\mathbf{S}_1 w = w(s) - \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+1}}{\pi}\int_\Gamma \frac{w(\sigma)}{\sigma-s}d\sigma,
$$

$$
\mathbf{S}_2 w = w(s) - \frac{\beta-\sqrt{\beta^2+1}}{\pi}\int_\Gamma \frac{w(\sigma)}{\sigma-s}d\sigma.
$$

Подействуем оператором $\mathbf{S}_1$ на тождество (31), а оператором $\mathbf{S}_2$ на тождество (32). В силу леммы 2 получим, что $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ удовлетворяют сингулярным интегральным уравнениям (28). Пользуясь тождествами (34), (35), (37), которые составляют тождество (38), можно показать, что функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ удовлетворяют условиям (29), (30). Тем самым функции (39) дают решение системы (28) — (30), и первое утверждение леммы доказано.

2) В предыдущем пункте показано, что функции из (39) дают решение системы (28) — (30). Согласно лемме 1, функции $\mu(s)$, $\nu(s)$, построенные по формулам (25) (или, что то же самое, по формулам (40)) дают решение системы (17) — (20). Подставим функции $\mu(s)$, $\nu(s)$ в функцию (16). По теореме 2 функция (16) является решением задачи $\mathbf{U}$. Лемма доказана.

4. Существование решения.

Докажем теперь разрешимость уравнения (38).

1) уравнение (38) имеет единственное решение $\vec{\rho}$ в пространстве $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$ при любой правой части $\overrightarrow{\Phi}\in C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$;

2) если правая часть $\overrightarrow{\Phi}$ принадлежит пространству

$$C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N}, \qquad \omega=\min\{\lambda,1/4\},$$

то это решение $\vec{\rho}$ принадлежит тому же пространству.

Доказательство.

1) По лемме 6 уравнение (38) является уравнением Фредгольма 2-го рода в пространстве $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$. Согласно альтернативе Фредгольма, для доказательства п. 1) достаточно показать, что однородное уравнение (38) имеет только тривиальное решение в этом пространстве. Доказательство проведем от противного. Пусть однородное уравнение (38) имеет нетривиальное решение $\vec{\rho}^{\,0}=(\rho^0_{1*}(s),\rho^0_{2*}(s),B^0_0,...,B^0_{2N-1})^T\in C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N}$. Это означает, что функции $\rho^0_{1*}(s)$, $\rho^0_{2*}(s)$ и константы $B^0_0,...,B^0_{2N-1}$ удовлетворяют однородным уравнениям (34), (35), которые являются частью векторного уравнения (38). На основании леммы 4 можно утверждать, что $\vec{\rho}^{\,0}\in C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N}$. Однородное уравнение (38) возникает, если $f^+(s)\equiv 0$, $f^-(s)\equiv 0$, т.е. однородной задаче $\mathbf{U}$ соответствует однородное уравнение (38). Согласно лемме 7 п. 2), функция

$$u^0(x)=V\left[\frac{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)\rho^0_{1*}(s)Z_1^{-1}(s)+\rho^0_{2*}(s)Z_2^{-1}(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}}\right](x)+$$

$$+T\left[\frac{\rho^0_{1*}(s)Z_1^{-1}(s)+\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)\rho^0_{2*}(s)Z_2^{-1}(s)}{2\sqrt{\beta^2+1}}\right](x)$$

является решением однородной задачи $\mathbf{U}$. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что однородная задача $\mathbf{U}$ имеет только тривиальное решение

$$u^0(x)\equiv 0. \tag{41}$$

Принимая во внимание предельные формулы для потенциалов [2]

$$\left[\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+-\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^-\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma}=\mu(s),$$

$$\left[\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+-\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^-\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma}=0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \tau_x}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \tau_x}\right)^{-}\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \tau_x}\right)^{+} - \left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \tau_x}\right)^{-}\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma} = \nu(s),$$

и учитывая формулы (24), видим, что справедливы следующие равенства:

$$\rho^0_{1*}(s) = Z_1(s)\left(\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)\left[\left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^{-}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^{-} - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^{+}\right)\Bigg|_{x(s)\in\Gamma},$$
$$\rho^0_{2*}(s) = Z_2(s)\left(\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)\left[\left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^{-}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^{-}\right)\Bigg|_{x(s)\in\Gamma}.$$

Поэтому в силу (41): $\rho^0_{j*}(s) \equiv 0,\ j = 1,2$. Из однородных тождеств (34), (35), которые являются составной частью векторного уравнения (38), вытекает $\sum_{m=0}^{N-1} B^0_m s^m \equiv 0,\ \sum_{m=0}^{N-1} B^0_{N+m} s^m \equiv 0$ при $s \in \Gamma$. Согласно основной теореме алгебры эти тождества возможны только в случае равенства нулю всех коэффициентов полиномов, т.е. $B^0_m = 0$, $m = 0,1,...,2N-1$. Итак $\vec{\rho}^{\,0} \equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\vec{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \vec{B})^T \in C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N}$ — решение неоднородного уравнения (38) для правой части $\overrightarrow{\Phi} \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N}$. Из пункта 1) следует, что такое решение существует. Функции $\rho_{1*}(s),\ \rho_{2*}(s)$ удовлетворяют уравнениям (34), (35), так как (34), (35) — часть (38). Следовательно, по лемме 4, $\vec{\rho} \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N}$. Теорема доказана.

Пусть $c \in (-1,1)$. Теорема 3 гарантирует однозначную разрешимость уравнения (38) в пространстве $C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N}$, когда правая часть $\overrightarrow{\Phi}$ принадлежит тому же пространству. По лемме 3 вектор $\overrightarrow{\Phi}$ будет принадлежать этому пространству, если выполнены условия (13). Согласно лемме 7(п.2) решение задачи $\mathbf{U}$ существует и даётся формулой (16), в которой плотности потенциалов $\mu(s)$, $\nu(s)$ выражаются через компоненты решения уравнения (38) соотношениями (40). При этом оказывается, что $\mu(s)$, $\nu(s) \in C^{\omega_1}_{q_1}(\Gamma)$, $q_1 \in (3/4,1)$, $\omega_1 = \min\{\lambda, q_1 - 3/4\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f^+(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. *Если* $c \in (-1,1)$ *в (7), то решение задачи* $\mathbf{U}$ *существует, единственно и даётся формулой (16), где плотности* $\mu(s)$, $\nu(s)$ *берутся из (40), а функции* $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ $(\omega = \min\{\lambda, 1/4\})$ *определяются в результате решения уравнения Фредгольма II рода (38), которое однозначно разрешимо по теореме 3.*

Из свойств потенциалов [2] вытекает, что градиент решения задачи $\mathbf{U}$ может быть неограниченным в окрестности концов контура Γ. Более того [2, теорема 5], неравенство (1) выполняется с любым $\delta \in (-1, -3/4)$.

5. Решение сингулярных уравнений

Докажем лемму 2.

Пусть z — точка комплексной плоскости с вещественной осью $0s$. Согласно [10] каждое из двух уравнений (28) имеет решение в пространстве $C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$. Решения уравнений (28) даются следующими выражениями:

$$\rho_j(s) = F_j(s)\frac{\sqrt{1+\beta^2} + (-1)^j\beta}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{(-1)^j}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}}\frac{1}{Z_j(s)}\int_\Gamma \frac{Z_j(\sigma)F_j(\sigma)}{(\sigma - s)}d\sigma -$$

$$- \frac{1}{Z_j(s)}\sum_{m=0}^{N-1} B_{N(j-1)+m}s^m, \quad s \in \Gamma, \quad j = 1,2, \tag{42}$$

где $B_0, \ldots, B_{2N-1}$ — произвольные константы; $1/Z_1(s)$, $1/Z_2(s)$ — с точностью до постоянных множителей предельные значения на Γ^+ канонических функций $X_1(z)$, $X_2(z)$ (класса h_0) соответствующих краевых задач сопряжения. Множители можно игнорировать, так как в выражениях (42) они либо сокращаются, либо переходят в произвольные константы полиномов.

Канонические функции имеют вид:

$$X_1(z) = \exp(\gamma_1(z))\prod_{n=1}^{N}(z - a_n)^{\lambda_n}(z - b_n)^{\lambda_n'},$$

$$X_2(z) = \exp(\gamma_2(z))\prod_{n=N+1}^{2N}(z - a_{n-N})^{\lambda_n}(z - b_{n-N})^{\lambda_n'}, \tag{43}$$

где

$$\gamma_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_j}{\sigma - z}d\sigma, \qquad j = 1,2,$$

$$G_1 = \frac{1 + i\left(\sqrt{\beta^2+1} + \beta\right)}{1 - i\left(\sqrt{\beta^2+1} + \beta\right)}, \qquad G_2 = \frac{1 - i\left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right)}{1 + i\left(\sqrt{\beta^2+1} - \beta\right)},$$

условиям, которые будут выписаны ниже.

Преобразуем $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$, для этого прологарифмируем G_1 и G_2, учитывая условия (7):

$$\ln G_1 = \ln\left|\frac{1+i\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)}{1-i\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)}\right| + i\arg\left(\frac{1+i\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)}{1-i\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)}\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{1+i\sqrt{1-c^2}-c}{1-i\sqrt{1-c^2}+c}\right| + i\arg\left(\frac{1+i\sqrt{1-c^2}-c}{1-i\sqrt{1-c^2}+c}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-c}{1+c}\right| + i\arg\left(\frac{i\sqrt{1-c^2}}{1+c}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-c}{1+c}\right| + i\frac{\pi}{2}; \qquad (44)$$

$$\ln G_2 = \ln\left|\frac{1-i\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}{1+i\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}\right| + i\arg\left(\frac{1-i\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}{1+i\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{1-i\sqrt{1-c^2}-c}{1+i\sqrt{1-c^2}+c}\right| + i\arg\left(\frac{1-i\sqrt{1-c^2}-c}{1+i\sqrt{1-c^2}+c}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-c}{1+c}\right| + i\arg\left(\frac{-i\sqrt{1-c^2}}{1+c}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-c}{1+c}\right| - i\frac{\pi}{2}. \qquad (45)$$

Вычисляя интегралы, находим выражения для $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$:

$$\gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln(G_1)\left[\sum_{n=1}^{N}\ln(b_n-z) - \sum_{n=1}^{N}\ln(a_n-z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\ln(G_1)\ln\left[\prod_{n=1}^{N}\frac{(z-b_n)}{(z-a_n)}\right],$$

$$\gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln(G_2)\ln\left[\prod_{n=N+1}^{2N}\frac{(z-b_{n-N})}{(z-a_{n-N})}\right].$$

Экспоненцируя $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$, имеем:

$$\exp(\gamma_1(z)) = \prod_{n=1}^{N}\left[\frac{z-b_n}{z-a_n}\right]^{(\ln G_1)/(2\pi i)},$$

$$\exp(\gamma_2(z)) = \prod_{n=N+1}^{2N}\left[\frac{z-b_{n-N}}{z-a_{n-N}}\right]^{(\ln G_2)/(2\pi i)}. \qquad (46)$$

Положим

$$\alpha_n = \mathrm{Re}\left[-\frac{\ln G_1}{2\pi i}\right] = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_n' = \mathrm{Re}\left[\frac{\ln G_1}{2\pi i}\right] = \frac{1}{4}, \quad n = 1,\ldots,N,$$

$$\alpha_n = \mathrm{Re}\left[-\frac{\cdots}{2\pi i}\right] = \frac{\cdots}{4}, \quad \alpha_n' = \mathrm{Re}\left[\frac{\cdots}{2\pi i}\right] = -\frac{\cdots}{4}, \qquad n = (N+1), \ldots, 2N. \tag{47}$$

Выберем целые числа λ_n, λ_n' таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

$$-1 < \alpha_n + \lambda_n \leq 0, \qquad -1 < \alpha_n' + \lambda_n' \leq 0, \qquad n = 1, \ldots, 2N. \tag{48}$$

Из этих условий целые числа λ_n, λ_n' находятся однозначно:

$$\lambda_n = 0, \qquad \lambda_n' = -1, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

$$\lambda_n = -1, \qquad \lambda_n' = 0, \qquad n = (N+1), \ldots, 2N. \tag{49}$$

Подставим (46), (44), (45), (49) в (43) и получим:

$$X_1(z) = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{z - b_n}{z - a_n}\right]^{(\ln G_1)/(2\pi i)} \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^0 (z - b_n)^{-1} =$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \left[(z - b_n)^{p - 3/4}\right] \left[(z - a_n)^{-p - 1/4}\right] = \frac{1}{Q_1(z) Q_0(z)},$$

$$X_2(z) = \frac{1}{Q_2(z) Q_0(z)},$$

где

$$Q_1(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{1/4} (z - b_n)^{3/4}, \quad Q_2(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{3/4} (z - b_n)^{1/4},$$

$$Q_0(z) = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{z - a_n}{z - b_n}\right]^p, \quad p = \frac{1}{4\pi i} \ln\left|\frac{1 - c}{1 + c}\right|, \quad c = -i\,\beta.$$

Воспользовавшись работой [6, §5], находим предельные значения этих функций на $\Gamma^{\pm}$:

$$Q_1^{\pm}(s) = e^{\pm 3\pi i/4} Q_1(s), \quad Q_2^{\pm}(s) = e^{\pm \pi i/4} Q_2(s),$$

$$Q_0^{\pm}(s) = \left|\frac{1 - c}{1 + c}\right|^{\mp 1/4} Q_0(s), \quad s \in \Gamma,$$

где

$$Q_0(s) = \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{s - a_n}{s - b_n}\right|^p,$$

$$Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{1/4} |s - b_n|^{3/4} \mathrm{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma),$$

$$Q_2(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{3/4} |s - b_n|^{1/4} \mathrm{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma).$$

$X_2(z)$ на Γ^+ с точностью до постоянных множителей имеют вид:

$$\frac{1}{Z_1(s)} = \frac{1}{Q_1(s)Q_0(s)}, \qquad \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{1}{Q_2(s)Q_0(s)}, \qquad s \in \Gamma.$$

Отсюда $Z_1(s) = Q_1(s)Q_0(s)$, $Z_2(s) = Q_2(s)Q_0(s)$, $s \in \Gamma$. Лемма 2 доказана.

Литература

[1] П. А. Крутицкий, К. В. Прозоров. Задача Дирихле–Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Докл. Акад. Наук — 2004. Т. 398, N 5. — С. 602–606.

[2] П. А. Крутицкий. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1994. Т. 34, N 8—9. — С. 1237–1258.

[3] П. А. Крутицкий. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1994. Т. 34, N 11. — С. 1652–1665.

[4] П. А. Крутицкий. Смешанная задача для уравнения Гельмгольца в многосвязной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. Т. 36, N 8. — С. 127–137.

[5] П. А. Крутицкий. Смешанная задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Дифф. уравнения. — 1996. Т. 32, N 9. — С. 1153–1162.

[6] П. А. Крутицкий, А. И. Сгибнев. Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2004, N 8, 28 с.

[7] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.

[8] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.

[9] Д. Колтон, Р. Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.

— М.: Наука, 1968.

[11] П. А. Крутицкий, К. В. Прозоров. Уравнение Гельмгольца с косой производной и условием Дирихле на сторонах разрезов на плоскости // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2005. N 5. — С. 3–6.

[12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.

[13] С. Г. Крейн. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1964.