

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша

А.К.Платонов

Определение параметров проективного отображения
в зрительном канале робота

Москва 2007г.

Определение параметров проективного отображения в зрительном канале робота

А.К.Платонов
(platonov@keldysh.ru)

Аннотация

Работа посвящена описанию методов определения и использования значений параметров отображения двумерной плоскости в себя в задаче построения модели зрительной системы робота. Методы, базирующиеся на представлении Ли непрерывной группы проективных преобразований, позволяют получать параметры прямого и обратного отображений “сцена - кадр” (или "сцена – сцена" - в процессе движения) без знания характеристик видеодатчика и места его установки на роботе. На примере алгоритмов системы зрения робота “Трикол” описывается метод привязки координат сцены к параметрам телевизионных кадров и приводится оценка его погрешностей.

Работа поддержана грантами РФФИ № 05-01-00885

Projective Mapping Determination for Robot Vision

A.K.Platonov
KIAM RAS
(platonov@keldysh.ru)

Annotation

This work deals with peculiarities of representation method for visual scene transforms in task of a mobile robot video scene analysis. This method permits to avoid necessity to know parameters and localization of a video sensor. Coefficients of Lie transformations for the direct and inverse mapping “scene – cadre” (or "scene – scene", during the robot motion) are got as result of a solving of calibration equations. An example of visual data interpretation is given for visual system of mobile robot “Трикол”..

The work was supported by RFFI grants # 05-01-00885

Содержание

Введение	3
Зрительный канал робота "Трикол"	5
Проективное пространство ВСК	7
Проективная группа Ли преобразований плоскости в себя.....	9
Определение коэффициентов преобразования	12
Оценка погрешности пиксельно-координатного отображения.....	14
Грубость оценки сверху	14
Выражения для вариаций коэффициентов отображения сцены в кадр.....	16
Оценка достижимой точности определения координат.....	17
Модель калибровочных погрешностей	17
Анализ свойств навигационных погрешностей.....	21
Особенности проективного преобразования.....	21
Благодарности	24
Цитированная литература	25
Приложение	27
Определение параметров проективного преобразования.....	27
Проективное преобразование прямой	27
Проективное преобразование плоскости на прямоугольник.....	28

Введение

Проективное отображение двумерной плоскости в себя является основной моделью при описании геометрических свойств изображений пространственных сцен на телевизионных или фотографических кадрах. При этом, проективные параметры обычно описываются в виде элементов матриц однородных координат и их линейных преобразований. Здесь хорошо известны постановки и решения задач трёх типов: задач машинной графики, задач калибровки видеокамер в интересах фотограмметрии и задач управления движением робота. Все они тесно связаны с предметом данной работы.

В задачах машинной графики (см., например, [1-5]) для получения в рамках геометрической оптики параметров матрицы проективного отображения рисуемой трехмерной сцены, как правило, задаются значения фокусного расстояния объектива и координаты его расположения в системе координат сцены. Однако следует отметить, что точные параметры расположения в пространстве источника видеоизображений и его угла зрения, как правило, неизвестны, или известны лишь приближённо. Вместе с этим, в искомом проективном преобразовании сцен гораздо более важную роль часто играют факторы нарушений постулатов геометрической оптики.

Это обстоятельство породило обширную литературу, связанную с решением задач калибровки видеокамер по предъявляемым образцам сцен с известными реперными точками. Наиболее ранние из этих работ были связаны с проблемами астрометрии и аэрофотосъёмки, когда высокоточная коррекция дисторсии и астигматизмов оптики играла наиболее важную роль в метрических интерпретациях деталей получаемых сцен. Анализ истории развития методов калибровки видеосистем содержится в работе [6], где прослежен трудный путь от создания образцовых линз и камер [7], сложных калибровочных стендов (мультиколлиматоров [8], гониометров [9]), наблюдений массивов звезд [10] с известным ($<0,4''$) угловым положением до высокоточных ($<1\text{ мкм}$) калибровочных математических методов [11,12].

Заметим, что по мере развития видеотехники усложнялись и сами задачи калибровки. Применительно к фотоплёночным астрографам и аэрокамерам исправлялись параметры оптики и зерна фотоэмульсии, для телевизионных приемников появились дополнительные параметры ошибок аналогового сигнала, а у современных цифровых видеокамер возникло новое множество параметров электрических и геометрических погрешностей изготовления светочувствительных матриц [13].

В 1948 г. появилась первая работа [14] с постановкой задачи "самокалибровки" камеры - непосредственно по видимой сцене (при точном знании метрических свойств расположения объектов на ней). Наиболее популярные способы такой калибровки (по наблюдению линейных объектов с известной метрикой деталей их поверхности) описаны в работах [15,16].

При этом, начиная с работы [16], понятие "калибровка камеры" стало всё более удаляться от задач фотограмметрии в сторону задач определения параметров технического зрения роботов и автомобилей. Особенностью этих

задач являются не столько проблемы метрических искажений внутри кадра фотоприёмника (поскольку требуемая точность распознавания метрических свойств зрительной сцены часто позволяет оставаться в рамках модели геометрической оптики) сколько - неизвестность взаимного расположения камеры и трёхмерной сцены наряду с проблемами неоднозначности распознавания трёхмерной позиции областей яркостей сцены на её двумерном изображении (вытекающими из теоремы Л.Брауера о топологической инвариантности отображений [17,18]).

Данная работа, как и многие другие работы (см., например, [19,20]) связана с проблемой навигации по сигналам единственной видеокамеры мобильного робота, предназначенного для движения по полу помещений. Здесь рассматривается проблема калибровки, но не калибровки внутренних и внешних *параметров видеокамеры* (которые не обязательно нужны, т.к. являются лишь промежуточными параметрами искомого проективного преобразования сцен), а - калибровки *параметров отображения метрик трёхмерных сцен и пикселей кадра с их изображением*.

С этой целью описывается метод прямой калибровки параметров отображения двумерной плоскости в себя, используемого в задаче построения навигационных алгоритмов по зрительным картинкам рисунка пола. Получаемое проективное преобразование пространств пола и кадра позволяет с требуемой навигационной точностью получать параметры прямого и обратного отображений "сцена - кадр" (или "сцена – сцена" - в процессе движения робота) без знания характеристик видеодатчика и координат места его установки на роботе.

Предлагаема ниже техника определения искомых параметров базируется на дробно-линейном представлении операций непрерывной группы Ли проективных преобразований. Это позволяет, используя непрерывные зависимости параметров группы от навигационных параметров, получать связь последних с пикселями видеокадра путём решения прямой и обратной задач отображения. На удобство дробно-линейного описания проективного преобразования вместо алгебры однородных матриц было обращено внимание в работах [21,22], направленных на разработку модели динамики изменения содержания сцен и моделей формообразования в машиностроении. Основная и весьма плодотворная идея здесь заключалась в применении математического аппарата непрерывных групп Ли для построения способов минимизации числа параметров описания изменений искомого преобразования.

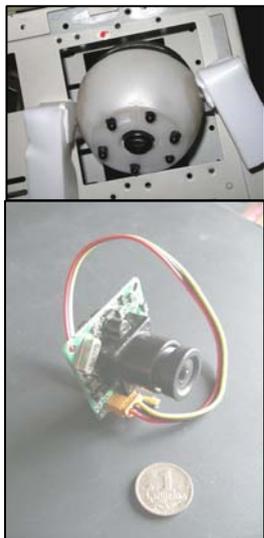
Ниже модель проективного отображения двумерной плоскости в себя рассматривается в задаче калибровочного построения модели зрительной системы робота "Трикол"^{*)}. Необходимость этой разработки возникла, именно благодаря упомянутым обстоятельствам неизвестности точных параметров и позиции используемого зрительного сенсора. Особое внимание уделено анализу ошибок преобразования.



^{*)} Название связано с трёхколесной реализацией полноприводного шасси робота.

Зрительный канал робота "Трикол".

Экспериментальный робот "Трикол" достаточно полно описан в работах [23-33]. Робот предназначен для движения по полу в комнатных стеснённых условиях. Он в разное время был оснащен аналоговой или цифровой телевизионной "вперед смотрящей камерой" (ВСК) с черно-белым изображением сцены перед роботом. Аналоговая камера показана на рисунке слева, цифровая - справа. Зрительный канал этих камер включает:



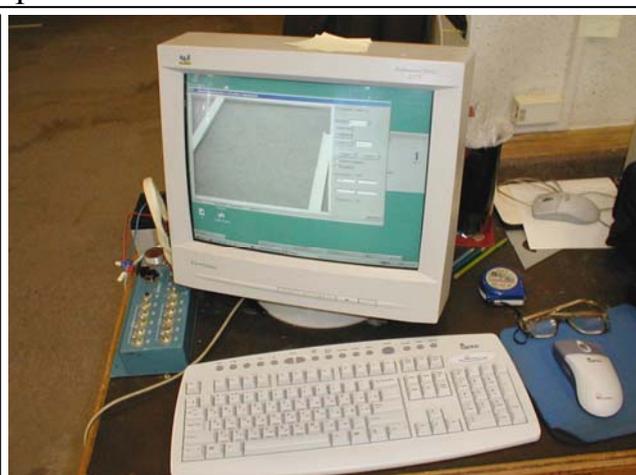
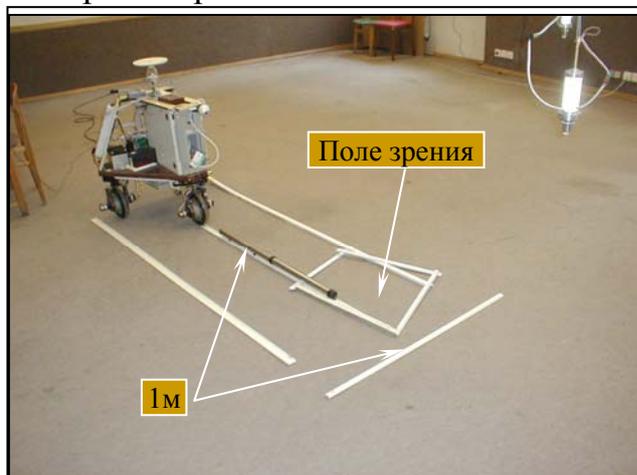
- объектив (его фокусное расстояние и угол зрения известны приблизительно);
- ПЗС- или КМОП-матрицы (число их пикселей особого значения не имеет, ввиду преобразования сигналов пикселей в телевизионный стандарт выходного сигнала [24]).
- преобразователя фотометрических данных в цифровую форму с заданным числом строк и пикселей в строке);



Особенностями зрительного канала робота "Трикол" [23,24] являются:

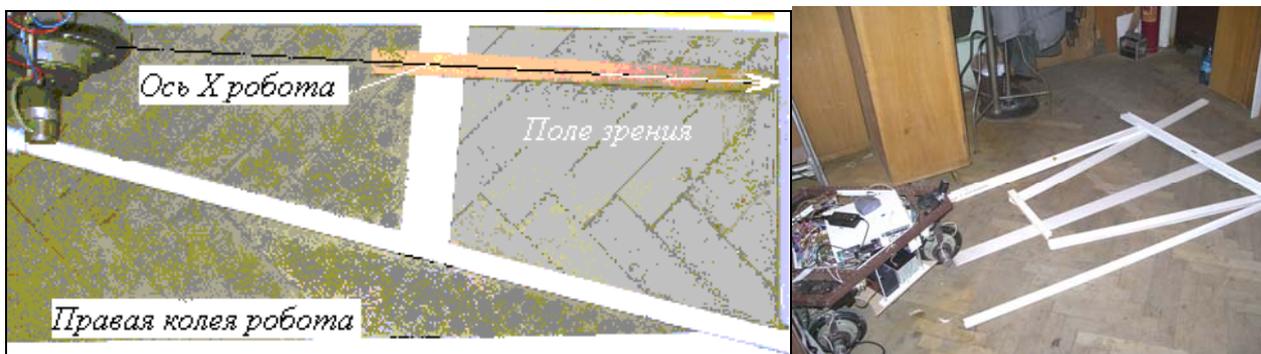
- установка TV-камеры внутри корпуса робота с невозможностью точного измерения её положения и ориентации в системе координат робота;
- регулируемое разрешение кадра сцены: 640x480; 176x144; 128x90; 80x60;
- неопределённость позиции ПЗС в поле зрения объектива;
- наклон вниз оси зрения для осмотра предметов на поверхности пола;
- малый угол поля зрения объектива.

В зависимости от расположения камеры на роботе и её наклона система управления имеет информацию внутри некоторой "области видимости", ограниченной границами пространственного угла поля зрения, поверхностью пола и объектами на нём. Её параметры легко получить, отображая на экран монитора границы поля зрения на полу и измеряя их расположение относительно робота.



Колея, её осевая линия и поле зрения ВСК перед роботом и на экране монитора

На рисунках выше и ниже показаны варианты областей видимости робота "Трикол", использовавшиеся в опытах управления движением робота среди препятствий. Здесь хорошо видны типы смещения поля зрения относительно продольной оси робота и перспективное расширение поля зрения.

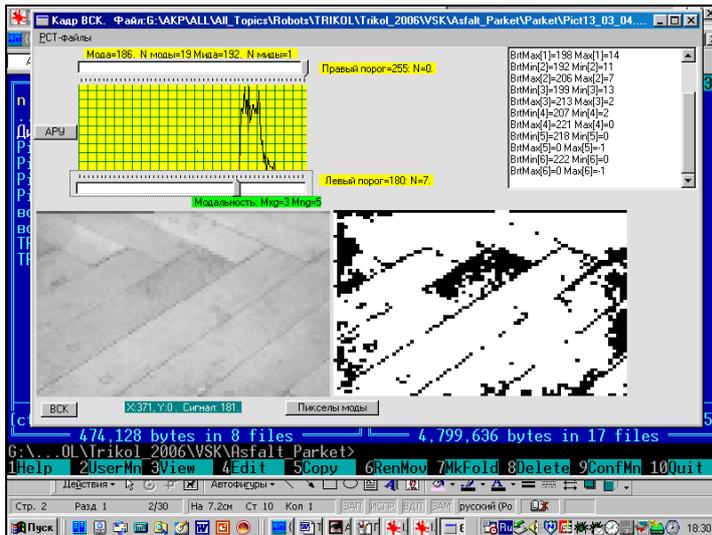


Приведенные примеры иллюстрируют не совсем очевидные особенности влияния на алгоритмы управления движением робота параметров высоты расположения и угла наклона видео-приёмника. При его высоком расположении (верхний и левый рисунки) необходимость контролировать окружение робота в пределах ширины его колеи заставляет, изменяя угол наклона, далеко отодвигать поле зрения от робота или смещать его в сторону левой или правой колеи. Это приводит к анизотропии алгоритмов построения движений при объезде препятствий справа или слева. Поэтому, вопреки бытующему мнению, что камеру зрения желательно устанавливать повыше, иногда более целесообразно именно низкое расположение камеры с расширением её поля зрения, как это показано на правом рисунке.

Оптимальная высота расположения камеры та, при которой дальний край поле зрения охватывает всю ширину колеи робота, в то время, как ближний край поля зрения расположен на расстоянии не более удвоенной длины его тормозного пути. Это правило обеспечивает минимальные требования к точности счисления пути, определяемые необходимостью движения "по памяти" внутри увиденной ранее слепой части поля зрения робота.

Проективные искажения картины окружения робота могут быть велики. Например, на следующей странице показан экран инструментальной системы при работе с высокорасположенной ВСК. Видно, что на ближнем срезе поля зрения кадра уместятся не более 3,5 элементов паркета пола, в то время, как на верхнем срезе поля зрения их видно почти все 5. Приближение поля зрения (левый рисунок на этой стр.) слабо меняет это, близкое к 1,5 соотношение. Однако при низком расположении камеры проективные искажения увеличиваются до соотношения порядка 3 (рисунок справа внизу).

Это означает, что зрительные каналы робототехники при уменьшении наклона камеры и увеличении дальности обзора по необходимости приводят к разработке методов анализа проективных преобразований пространства в области видимости робота. Заметим, что, использование объектива с узким углом зрения порождает чистую "проективность" отображения пола - без элементов дисторсии в кадре. При широкоугольном объективе следует использовать упомянутые методы борьбы с дисторсией (см. также [34]).



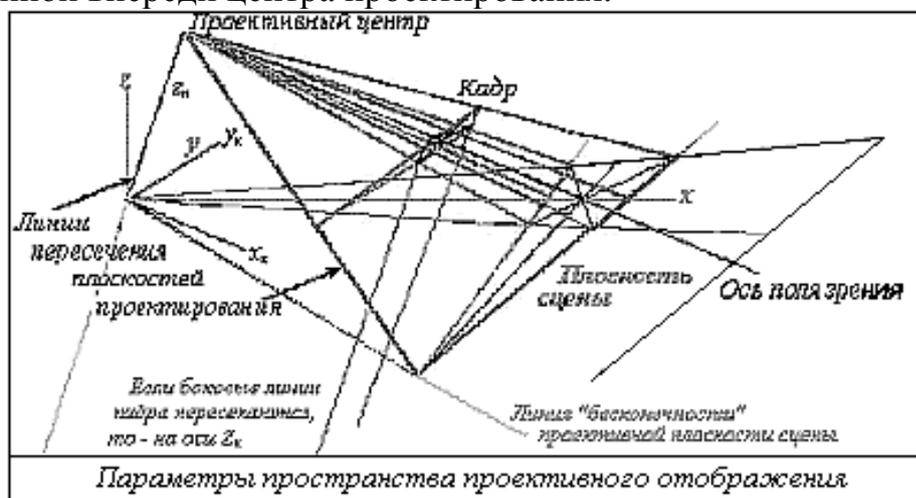
Проективное пространство ВСК

Построим модель центрального проективного отображения плоскости сцены на плоскость кадра ВСК в самых общих предположениях. Ими являются предположения:

- о возможном смещении системы координат камеры относительно системы координат робота по трём координатам и трём углам,
- о возможном отсутствии прямоугольности сторон матрицы ПЗС и кадра,
- о наличии единого проективного центра (т.е. - об отсутствии астигматизма и дисторсии объектива).

Заметим, что выше нигде не используются параметры объектива, - речь здесь идёт лишь о некоем отображении двумерной плоскости на себя.

В этих общих предположениях картина проективного преобразования выглядит так, как она показана на рисунке. С центром проективного преобразования и направлением линии визирования (оси поля зрения) связаны оси камерной системы координат x_k, y_k, z_k , начало которой совмещено с началом системы координат x, y, z в плоскости сцены. При этом ось x есть проекция оси поля зрения x_k на плоскость сцены. Хотя в реальности плоскость кадра расположена за центром проектирования относительно наблюдаемой сцены, тем не менее, из соображений симметрии её удобнее представлять расположенной впереди центра проектирования.



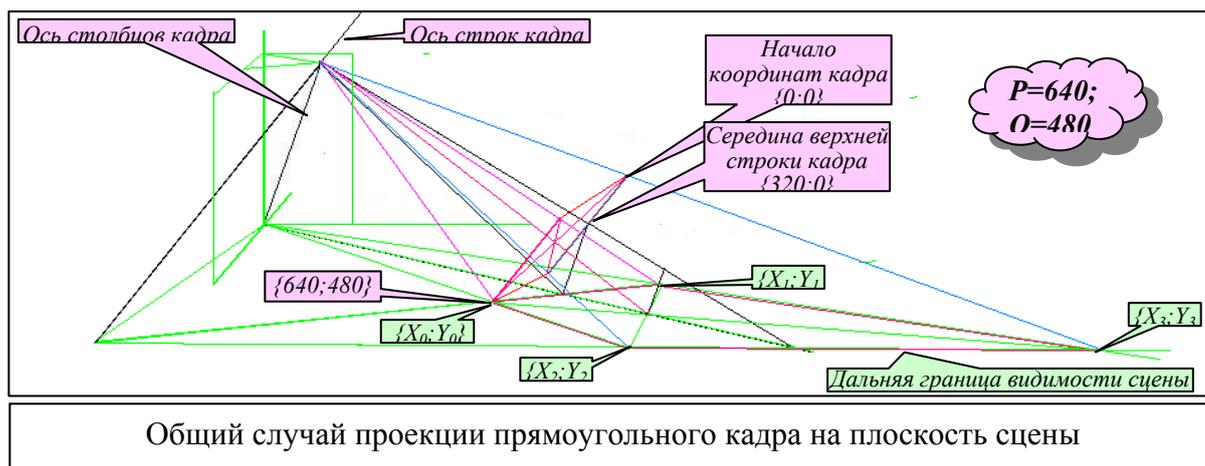
Заметим, что расстояние от центра проектирования до плоскости кадра равно фокусному расстоянию объектива лишь тогда, когда размеры изображения и координаты в плоскости сцены выражены в одинаковых метрических мерах. В нашем случае это не так: размеры фоточувствительного элемента используемой камеры, как правило, не известны с нужной точностью. Более того, после ряда программно-аппаратных преобразований оптического сигнала "размеры" плоскости кадра выражаются в единицах выбранного разрешения изображения сцены (число пикселей в строках кадра и число строк в кадре). Поэтому размеры кадра, известные в лишь единицах разрешения, определяют лишь его "виртуальное" расстояние от центра проектирования, линейно связанное с фокусным расстоянием и масштабом размеров сцены, приходящихся на одну дискрету (пиксел) изображения. Поскольку это расстояние нигде не используется, то оно и не вычисляется.

Далее, хотя плоскость кадра в реальных условиях, вообще говоря, не обязательно расположена перпендикулярно оси оптики, но из факта сохранения фокуса по всему кадру эта ортогональность следует с точностью до параметров глубины резкости. В общем случае кадр и не обязательно прямоуголен. Тогда прямые пересечения плоскостей пространственного угла проектирования с плоскостями кадра и сцены в силу свойств проективного преобразования имеют точки схода, принадлежащие общим прямым, как это показано на рисунке.

Однако в нашем случае видеоизображение сцены на экране монитора при любых искажениях в оптическом тракте всегда имеет прямоугольную форму (в силу свойств программно-аппаратных преобразований при изображении цифрового кода яркостей). При таком прямоугольном кадре, перпендикулярном оси камеры, линии пересечения пар плоскостей его проектирования взаимно ортогональны и лежат в плоскости, параллельной плоскости кадра. На этих линиях (возможно – в бесконечности) лежат точки схода границ сцены пола (принадлежащих плоскостям проектирования). Это свойство позволяет уточнять измерения координат вершин поля зрения.

Под "перспективным преобразованием сцены" будем понимать отображение на плоскость кадра $K(p,q)$ видимой части векторного пространства $\{x,y\}$ плоскости S сцены. Видимая часть плоскости сцены представляет собой неправильный четырёхугольник, ограниченной линиями её пересечения с плоскостями пространственного угла проектирования кадра. Введём в рассмотрение векторы углов этого четырёхугольника с координатами x_0,y_0 ; x_1,y_1 ; x_2,y_2 и x_3,y_3 , как это показано на рисунке ниже. В плоскости кадра введём координаты с началом в левом верхнем углу кадра, если смотреть из центра проектирования, связанные с номером пиксела p в строке кадра и номером q строки кадра (например, $p=\{0..640\}$, $q=\{0..480\}$).

Задача, таким образом, заключается в построении проективного преобразования без использования параметров камеры (фокусного расстояния объектива, линейных размеров фотоприёмника) и её расположения на работе.



Проективная группа Ли преобразований плоскости в себя

Приведенное описание искомого преобразования соответствует проективной группе преобразований плоскости из подкласса примитивных групп класса групп Ли [20]. Примитивные группы Ли описывают непрерывные (по параметрам) группы преобразований со свойством параметрической изотропии (симметрии параметрических выражений относительно преобразуемых элементов группового множества - см. [21]) Число степеней свободы деформации плоскости в этой группе (её число " n -транзитивности") равно четырём (4 произвольные точки плоскости *изотропно* определяют положения всех остальных её точек). Умножение числа n -транзитивности группы на размерность пространства даёт число неизвестных параметров преобразования. Этот подход и позволяет избежать необходимости знания параметров камеры и её положения в пространстве в задаче отображения сцена – кадр. С другой стороны, знание параметров преобразования позволяет (при необходимости, с помощью специально подобранных измерений) определить неизвестные параметры камеры и её положение в пространстве.

Проективная группа Ли преобразования плоскости в себя описывается дробно-линейными выражениями восемипараметрической непрерывной связи отображаемых пар двумерных координат:

$$P = \frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a \cdot x + b \cdot y + 1}$$

$$Q = \frac{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}{a \cdot x + b \cdot y + 1}$$

Отсюда следует, что система проективного отображения связывает координаты на плоскости с координатами кадра линейными формами вида:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = P \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = Q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1).$$

Заметим, что эти линейные выражения обычно записывают с помощью матричной связи однородных координат в плоскости сцены и кадра

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

но при этом элементы перспективы и сдвига c_1 , c_2 , a и b выражают, как было сказано, через параметры фокусного расстояния и расположения камеры [1].

Искомые 8 параметров отображения плоскости сцены S на плоскость кадра K получаются в принятых системах координат кадра и сцены из решения системы 8-ми уравнений связи 4-х точек $\{0,0\}; \{0,Q\}; \{P,0\}; \{P,Q\}$ вершин прямоугольника кадра с соответствующими ему вершинами $\{x_3,y_3\}; \{x_1,y_1\}; \{x_2,y_2\}; \{x_0,y_0\}$ четырёхугольника сцены, видимого в кадре:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0 + c_1 &= P \cdot (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1) \\ a_2 \cdot x_0 + b_2 \cdot y_0 + c_2 &= Q \cdot (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1) \\ a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 &= 0 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1 + c_2 &= Q \cdot (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + 1) \\ a_1 \cdot x_2 + b_1 \cdot y_2 + c_1 &= P \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + 1) \\ a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2 &= 0 \\ a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1 &= 0 \\ a_2 \cdot x_3 + b_2 \cdot y_3 + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или – в более удобной записи:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0 + c_1 - a \cdot x_0 \cdot P - b \cdot y_0 \cdot P &= P \\ - a \cdot x_0 \cdot Q - b \cdot y_0 \cdot Q + a_2 \cdot x_0 + b_2 \cdot y_0 + c_2 &= Q \\ a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 &= 0 \\ - a \cdot x_1 \cdot Q - b \cdot y_1 \cdot Q + a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1 + c_2 &= Q \\ a_1 \cdot x_2 + b_1 \cdot y_2 + c_1 - a \cdot x_2 \cdot P - b \cdot y_2 \cdot P &= P \\ a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2 &= 0 \\ a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1 &= 0 \\ a_2 \cdot x_3 + b_2 \cdot y_3 + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

С целью упрощения записи решения этой системы введём обозначения для входящих в его выражение следующих всегда не равных нулю значений круговых подстановок измеренных координат (четырёх типов их *треугольных* индексов из номеров четырёхугольника поля зрения):

$$C013 = x_0 \cdot (y_1 - y_3) + x_1 \cdot (y_3 - y_0) + x_3 \cdot (y_0 - y_1)$$

$$C021 = x_0 \cdot (y_2 - y_1) + x_2 \cdot (y_1 - y_0) + x_1 \cdot (y_0 - y_2)$$

$$C032 = x_0 \cdot (y_3 - y_2) + x_3 \cdot (y_2 - y_0) + x_2 \cdot (y_0 - y_3)$$

$$C132 = x_1 \cdot (y_3 - y_2) + x_3 \cdot (y_2 - y_1) + x_2 \cdot (y_1 - y_3)$$

В этих обозначениях выражения для искомых коэффициентов проектирования четырёхугольника сцены на прямоугольник кадра имеют вид (вывод этих выражений приведен в приложении):

$$a := \frac{\frac{(y_2 - y_0)}{C032} + \left[\frac{(-y_1 + y_0)}{C013} + \frac{(-y_2 + y_1)}{C132} \right]}{\frac{(-x_0 y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]}$$

$$b := \frac{\frac{(x_0 - x_2)}{C032} + \left[\frac{(-x_0 + x_1)}{C013} + \frac{(-x_1 + x_2)}{C132} \right]}{\frac{(-x_0 y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]}$$

$$a1 := \frac{\frac{C021 \cdot (y3 - y1)}{C132 \cdot C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot P$$

$$b1 := \frac{\frac{C021 \cdot (-x3 + x1)}{C132 \cdot C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot P$$

$$c1 := \frac{\frac{C021 \cdot (-x1 \cdot y3 + y1 \cdot x3)}{C132 \cdot C013}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot P$$

$$a2 := \frac{\frac{C021 \cdot (y2 - y3)}{C132 \cdot C032}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot Q$$

$$b2 := \frac{\frac{C021 \cdot (x3 - x2)}{C132 \cdot C032}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot Q$$

$$c2 := \frac{\frac{C021 \cdot (x2y3 - y2 \cdot x3)}{C132 \cdot C032}}{\frac{(-x0y2 + y0 \cdot x2)}{C032} + \left[\frac{(-y0 \cdot x1 + x0y1)}{C013} + \frac{(-x2y1 + y2 \cdot x1)}{C132} \right]} \cdot Q$$

С найденными коэффициентами $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ и a, b из исходного выражения для проективного преобразования получаем связь координат других точек плоскости сцены (например, - точек пола) с координатами пикселей на кадре.

В свою очередь, применение закона перспективных преобразований, как системы уравнений относительно неизвестных координат сцены при известных координатах кадра, после решения относительно x и y исходной системы уравнений

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = p \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

по известным координатам пикселей p, q для видимых в кадре точек плоскости сцены имеем выражения для координат этих точек в принятых координатах плоскости сцены имеем:

$x = \frac{b \cdot (c_1 \cdot q - c_2 \cdot p) + b_2 \cdot (p - c_1) - b_1 \cdot (q - c_2)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$
$y = -\frac{a \cdot (c_1 \cdot q - c_2 \cdot p) + a_2 \cdot (p - c_1) - a_1 \cdot (q - c_2)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$

Заметим, что отсутствие симметрии знаков в выражениях для значений x и y объясняется тем, что для описания пикселей кадра принята стандартная для машинной графики левая система координат (x – направо, y – вниз).

Относительно p и q выражения для x и y имеют вид:

$$x = \frac{(b_2 - b \cdot c_2) \cdot p + (b \cdot c_1 - b_1) \cdot q + (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$$

и

$$y = -\frac{(a_2 - a \cdot c_2) \cdot p + (a \cdot c_1 - a_1) \cdot q + (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$$

(*)

Если выполнить нормирование коэффициентов при p и q величиной свободного члена знаменателя, то получим стандартное выражение для отображения "Кадр→ПЗ", обратного исходному преобразованию "ПЗ→Кадр":

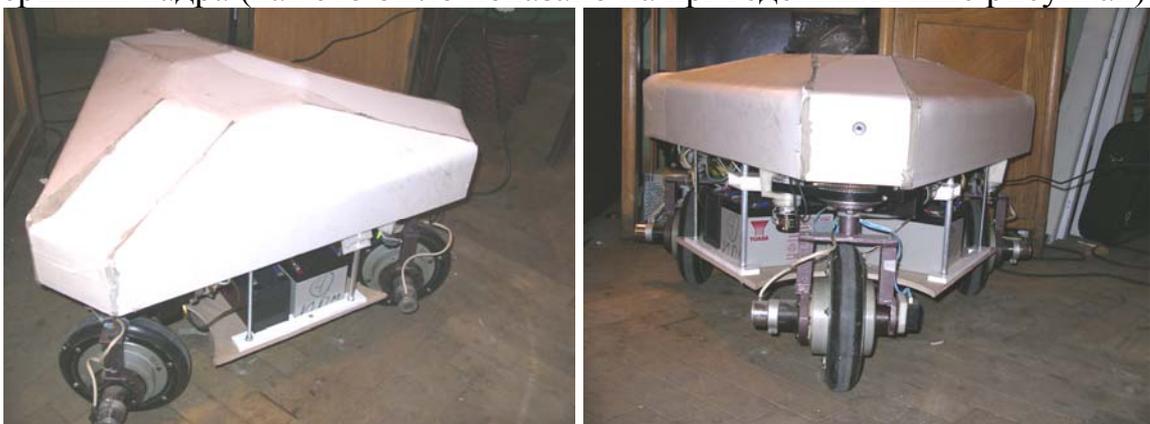
$$x = \frac{\frac{b_2 - b \cdot c_2}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot p + \frac{b \cdot c_1 - b_1}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot q + \frac{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}}{\frac{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot p + \frac{(b_1 \cdot a - b \cdot a_1)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot q + 1}$$

$$y = -\frac{\frac{(a_2 - a \cdot c_2)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot p + \frac{(a \cdot c_1 - a_1)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot q + \frac{a_1(1 - c_2) - a_2 \cdot (1 - c_1)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}}{\frac{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot p + \frac{(b_1 \cdot a - b \cdot a_1)}{(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)} \cdot q + 1}$$

Этими выражениями определена связь коэффициентов прямого и обратного проективных преобразований (элементов матриц однородных координат)..

Определение коэффициентов преобразования

Полученные выражения коэффициентов a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 и a, b обеспечивают получение взаимно однозначной связи пикселей кадра и точек видимой плоскости сцены применительно к задаче определения координат объектов в интересах навигации при движении робота. Для определения параметров этого отображения следует измерить координаты вершин четырёхугольника границ видимости, полагая, что эти вершины отображаются на вершины кадра (как это было показано на приведенных выше рисунках).

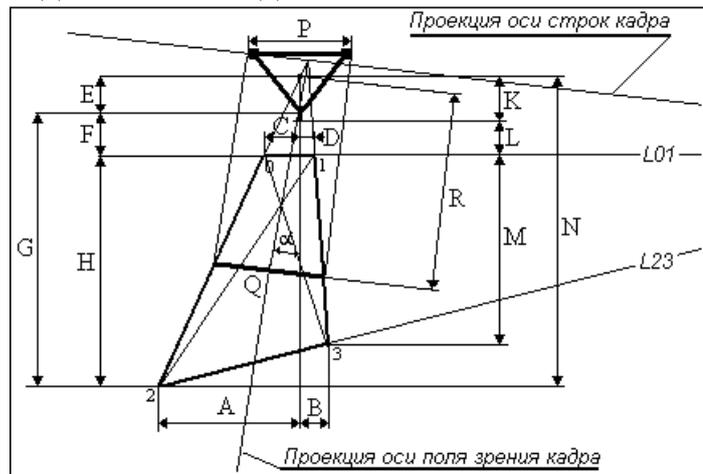


В качестве примера приведём полученные значения коэффициентов для цифровой камеры последней конфигурации робота Трикол (см. рис. выше). Из условий захвата кадров в периоде их преобразований в темпе реального времени разрешение камеры было выбрано равным: $P=176$; $Q=144$.

При расположении камеры внутри корпуса робота с учётом необходимости видимости пространства перед роботом на расстоянии около удвоенного его тормозного пути была получена следующая картина поля зрения на горизонтальной плоскости пола:



На заднем плане левого снимка видна ширина колеи робота P , определяемая внешним размером двигателей задних колёс.



Проекция строк кадра на плоскость сцены (пересечение последней с фокальной плоскостью) определяется направлением из проекции центра зрения на точку пересечения прямых $L01$, $L12$.

Измерение параметров поля зрения дало следующие значения [см]:

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	P	Q	R	α°
83	34	21	12	32	54	208	154	42	44	138	240	82	83	181	5

Координаты углов поля зрения, отображаемые на вершины кадра, соответственно, равны:

$$X_0 = E + F = K + L = 86 \text{ см}; \quad X_1 = X_0 = 86 \text{ см}; \quad X_2 = N = 240 \text{ см}; \quad X_3 = E + F + M = K + L + M = 224 \text{ см};$$

$$Y_0 = -C = -21 \text{ см}; \quad Y_1 = D = 12 \text{ см}; \quad Y_2 = -A = -83 \text{ см}; \quad Y_3 = B = 34 \text{ см}.$$

Тогда коэффициенты преобразования ПЗ \leftrightarrow Кадр при $P=176$ и $Q=144$ равны:

$$a = 0,0222 [\text{см}^{-1}]; \quad a_1 = 0,718 [\text{px}, \text{см}^{-1}]; \quad b_1 = -8,252 [\text{px}, \text{см}^{-1}]; \quad c_1 = 148,980 [\text{px}];$$

$$b = -0,00190 [\text{см}^{-1}]; \quad a_2 = -1,995 [\text{px}, \text{см}^{-1}]; \quad b_2 = -0,283 [\text{px}, \text{см}^{-1}]; \quad c_2 = 372,395 [\text{px}].$$

Оценка погрешности пиксельно-координатного отображения

Погрешностей измерения значений координат четырёх калибровочных точек $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, z_{\max}$ и соответствующих им величин P и Q влияют на точность определения параметров проективного отображения. Прежде всего выпишем вариации треугольных комплексов S_{xxx} при варьировании этих координат :

$$\begin{aligned}\delta C_{013} &= \delta x_0 \cdot (y_1 - y_3) + \delta x_1 \cdot (y_3 - y_0) + \delta x_3 \cdot (y_0 - y_1) + \\ &+ \delta y_0 \cdot (x_3 - x_1) + \delta y_1 \cdot (x_0 - x_3) + \delta y_3 \cdot (x_1 - x_0); \\ \delta C_{021} &= \delta x_0 \cdot (y_2 - y_1) + \delta x_2 \cdot (y_1 - y_0) + \delta x_1 \cdot (y_0 - y_2) + \\ &+ \delta y_0 \cdot (x_1 - x_2) + \delta y_2 \cdot (x_0 - x_1) + \delta y_1 \cdot (x_2 - x_0); \\ \delta C_{032} &= \delta x_0 \cdot (y_3 - y_2) + \delta x_3 \cdot (y_2 - y_0) + \delta x_2 \cdot (y_0 - y_3) + \\ &+ \delta y_0 \cdot (x_2 - x_3) + \delta y_3 \cdot (x_0 - x_2) + \delta y_2 \cdot (x_3 - x_0); \\ \delta C_{132} &= \delta x_1 \cdot (y_3 - y_2) + \delta x_3 \cdot (y_2 - y_1) + \delta x_2 \cdot (y_1 - y_3) + \\ &+ \delta y_1 \cdot (x_2 - x_3) + \delta y_3 \cdot (x_1 - x_2) + \delta y_2 \cdot (x_3 - x_1); \end{aligned}$$

Полагая ошибки измерения координат одинаковыми по величине, но с наихудшими знаками: $\delta x_u = \{\pm \delta x_0, \pm \delta y_0, \pm \delta x_1, \pm \delta y_1, \pm \delta x_2, \pm \delta y_2, \pm \delta x_3, \pm \delta y_3\}$, получим максимальные оценки их влияния на искомые параметры: Наборы численных значений вариаций δS_{xxx} и коэффициентов преобразования имеют 2^8 вариантов (соответствующих вершинам единичного куба в восьмимерном пространстве знаков вариаций δx_u). Можно попытаться построить их оценку сверху, полагая в каждом случае присутствие наихудшего знака ошибки координат. Хотя это и грубая оценка, но следует оценить её точность.

Грубость оценки сверху

Такая мажоранта имеет вид:

$$\delta C_{013}_{\max} = \delta x_u \cdot [|(y_1 - y_3)| + |(y_3 - y_0)| + |(y_0 - y_1)| + 2|(x_0 + x_1 + x_3)|] = \delta x_u \cdot D_{013}_{\max}$$

$$\delta C_{021}_{\max} = \delta x_u \cdot [|(y_2 - y_1)| + |(y_1 - y_0)| + |(y_0 - y_2)| + 2|(x_0 + x_2 + x_1)|] = \delta x_u \cdot D_{021}_{\max}$$

$$\delta C_{032}_{\max} = \delta x_u \cdot [|(y_3 - y_2)| + |(y_2 - y_0)| + |(y_0 - y_3)| + 2|(x_0 + x_3 + x_2)|] = \delta x_u \cdot D_{032}_{\max}$$

$$\delta C_{132}_{\max} = \delta x_u \cdot [|(y_3 - y_2)| + |(y_2 - y_1)| + |(y_1 - y_3)| + 2|(x_1 + x_3 + x_2)|] = \delta x_u \cdot D_{132}_{\max}$$

Тогда, используя технику логарифмического дифференцирования, получим:

$$\delta a_{1_{\max}} = |a_1| \cdot \{\delta P/P + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{013}/|C_{013}| + 2/|(y_3 - y_1)| + R]\};$$

$$\delta b_{1_{\max}} = |b_1| \cdot \{\delta P/P + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{013}/|C_{013}| + 2/|(x_3 - x_1)| + R]\};$$

$$\delta c_{1_{\max}} = |c_1| \cdot \{\delta P/P + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{013}/|C_{013}| + \\ + (|x_1| + |x_3| + |y_1| + |y_3|) / (y_1 \cdot x_3 - y_3 \cdot x_1) + R]\};$$

$$\delta a_{2_{\max}} = |a_2| \cdot \{\delta Q/Q + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{032}/|C_{032}| + 2/|(y_2 - y_3)| + R]\};$$

$$\delta b_{2_{\max}} = |b_2| \cdot \{\delta Q/Q + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{032}/|C_{032}| + 2/|(x_3 - x_2)| + R]\};$$

$$\delta c_{2_{\max}} = |c_2| \cdot \{\delta Q/Q + \delta x_u \cdot [D_{021}/|C_{021}| + D_{132}/|C_{132}| + D_{013}/|C_{013}| + \\ + (|x_2| + |x_3| + |y_2| + |y_3|) / (y_2 \cdot x_3 - y_3 \cdot x_2) + R]\};$$

$$\delta a_{\max} = |a| \cdot \delta x_u \cdot \{[2/|C_{032}| + D_{032} \cdot |(y_2 - y_0)| / C_{032}^2 + \\ 2/|C_{013}| + D_{013} \cdot |(y_0 - y_1)| / C_{013}^2 + \\ 2/|C_{132}| + D_{132} \cdot |(y_1 - y_2)| / C_{132}^2] / \\ / [(y_2 - y_0) / C_{032} + (y_0 - y_1) / C_{013} + (y_1 - y_2) / C_{132}] + R\};$$

$$\delta b_{\max} = |b| \cdot \delta x_u \cdot \{[2/|C_{032}| + D_{032} \cdot |(y_2 - y_0)| / C_{032}^2 + \\ 2/|C_{013}| + D_{013} \cdot |(y_0 - y_1)| / C_{013}^2 + \\ 2/|C_{132}| + D_{132} \cdot |(y_1 - y_2)| / C_{132}^2] / \\ / [(x_0 - x_2) / C_{032} + (x_1 - x_0) / C_{013} + (x_2 - x_1) / C_{132}] + R\}.$$

Общее слагаемое R является мажорантой логарифмической вариации знаменателя в исходных выражениях для коэффициентов преобразования:

$$R = [(|x_0|+|x_1|+|y_0|+|y_1|)/C_{013}+D_{013} \cdot (x_0 \cdot y_1 - y_0 \cdot x_1)/C_{013}^2 + (|x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|)/C_{132}+D_{132} \cdot (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)/C_{132}^2 + (|x_0|+|x_2|+|y_0|+|y_2|)/C_{032}+D_{032} \cdot (y_0 \cdot x_2 - x_0 \cdot y_2)/C_{032}^2] / [(x_0 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_0)/C_{013} + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)/C_{132} + (x_2 \cdot y_0 - x_0 \cdot y_2)/C_{032}]$$

Выполненные расчёты показали, что эта мажоранта на несколько порядков больше величины истинной погрешности (ошибка ± 1 см при измерениях координат вершин поля зрения приводит к погрешностям знания координат сцены порядка 1 м, что, вообще говоря, хоть и возможно (см. ниже), но не всегда и не везде в поле зрения). Оказалось, что причина неудобства мажоранты связана с треугольностью комплексов S^{***} .

Действительно, следует иметь в виду, что при любом выборе знаков вектора ошибок δx_i он при варьировании не изменяется, и поэтому в силу круговой подстановки индексов один из трёх членов вида

$$\delta C_{013} = x_0 \cdot (\delta y_1 - \delta y_3) + x_1 \cdot (\delta y_3 - \delta y_0) + x_3 \cdot (\delta y_0 - \delta y_1) \leq 2|(x_0 + x_1 + x_3)|$$

в вариациях треугольных комплексов δS_{xxx} *обязательно равен нулю*. Поскольку при низком расположении камеры велики значения координат x_2 и x_3 дальнего края поля зрения, то отсутствие в мажорирующей оценке такого обнуления приводит в каждом из трёх членов вариаций S_{xxx} практически к удвоению их значений. Подтвердим это примером ошибок, расширяющих размеры поля зрения:

$$\delta x_i = \{x_0 = \delta x_1 = -1, \delta x_2 = \delta x_3 = +1, \delta y_0 = \delta y_2 = -1, \delta y_1 = \delta y_3 = +1\}.$$

Тогда имеем (справа показана суммарная величина множителя при x_i):

$$\begin{aligned} D_{013} &= (-(y_1 - y_3) - (y_3 - y_0) + (y_0 - y_1) + x_0 \cdot (1 - 1) + // 0 \\ &\quad + x_1 \cdot (1 - (-1)) + // 2 \\ &\quad + x_3 \cdot ((-1) - 1)); // -2 \\ D_{021} &= (-(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - (y_0 - y_2) + x_0 \cdot ((-1) - 1) + // -2 \\ &\quad + x_2 \cdot (1 - (-1)) + // 2 \\ &\quad + x_1 \cdot ((-1) - (-1))); // 0 \\ D_{032} &= (-(y_3 - y_2) + (y_2 - y_0) + (y_0 - y_3) + x_0 \cdot (1 - (-1)) + // 2 \\ &\quad + x_3 \cdot ((-1) - (-1)) + // 0 \\ &\quad + x_2 \cdot ((-1) - 1)); // -2 \\ D_{132} &= (-(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_3) + x_1 \cdot (1 - (-1)) + // 2 \\ &\quad + x_3 \cdot ((-1) - 1) + // -2 \\ &\quad + x_2 \cdot (1 - 1)); // 0 \end{aligned}$$

Поэтому для низко расположенной камеры робота "Трикол" величины D^{***} равны $D_{013} = -362$, $D_{021} = 394$, $D_{032} = -542$, $D_{132} = 510$, вместо $+650$, 782 , $+1082$, 1082 .

Вместе с тем, эти производные D_{xxx} треугольных комплексов S_{xxx} по величине модуля ошибки калибровочных измерений координат поля зрения имеют наибольшие значения в выражениях для вариаций коэффициентов проективного преобразования. Отсюда и происходит неоправданное увеличение мажоранты.

Таким образом, для оценки знания погрешностей коэффициентов проективного отображения поля зрения в кадр необходимо получить значения вариаций этих коэффициентов на всём множестве векторов ошибок измерений поля границ зрения и привязки этих границ к границам кадра. Ниже для этого приводятся выражения дифференциалов коэффициентов отображения.

Выражения для вариаций коэффициентов отображения сцены в кадр

Заметим, что дробно-линейные выражения для коэффициентов проективного отображения поля зрения на кадр зрительной системы имеют одинаковый знаменатель:

$$z_{\text{nam}} = (x_0 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_0) / C_{013} + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) / C_{132} + (x_2 \cdot y_0 - x_0 \cdot y_2) / C_{032},$$

а сами коэффициенты можно представить в виде:

$$a_1 = (y_3 - y_1) \cdot k_{fc1}; \quad b_1 = (x_1 - x_3) \cdot k_{fc1}; \quad c_1 = (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) \cdot k_{fc1};$$

$$a_2 = (y_2 - y_3) \cdot k_{fc2}; \quad b_2 = (x_3 - x_2) \cdot k_{fc2}; \quad c_2 = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot k_{fc2};$$

где

$$k_{fc1} = P \cdot C_{021} / (C_{132} \cdot C_{013} \cdot z_{\text{nam}});$$

$$k_{fc2} = Q \cdot C_{021} / (C_{132} \cdot C_{032} \cdot z_{\text{nam}});$$

и

$$a = ((y_0 - y_1) / C_{013} + (y_1 - y_2) / C_{132} + (y_2 - y_0) / C_{032}) / z_{\text{nam}};$$

$$b = ((x_1 - x_0) / C_{013} + (x_2 - x_1) / C_{132} + (x_0 - x_2) / C_{032}) / z_{\text{nam}};$$

Как было упомянуто, величина погрешности знания этих коэффициентов является функцией восьми переменных - компонент вектора ошибок измерения угловых координат поля зрения:

$$\delta x_u = \{\pm \delta x_0, \pm \delta y_0, \pm \delta x_1, \pm \delta y_1, \pm \delta x_2, \pm \delta y_2, \pm \delta x_3, \pm \delta y_3\}.$$

Для каждого значения компонент вектора δx_u и соответствующего (см. выше) значений вариаций δC_{xxx} треугольных параметров имеем:

$$\begin{aligned} \delta z_{\text{nam}} = & (\delta y_1 \cdot x_0 + \delta x_0 \cdot y_1 - \delta y_0 \cdot x_1 - \delta x_1 \cdot y_0) / C_{013} - \delta C_{013} \cdot (x_0 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_0) / C_{013}^2 + \\ & + (\delta y_2 \cdot x_1 + \delta x_1 \cdot y_2 - \delta y_1 \cdot x_2 - \delta x_2 \cdot y_1) / C_{132} - \delta C_{132} \cdot (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) / C_{132}^2 + \\ & + (\delta y_0 \cdot x_2 + \delta x_2 \cdot y_0 - \delta y_2 \cdot x_0 - \delta x_0 \cdot y_2) / C_{032} - \delta C_{032} \cdot (x_2 \cdot y_0 - x_0 \cdot y_2) / C_{032}^2; \end{aligned}$$

$$\delta k_{fc1} = k_{fc1} \cdot (\delta P / P + \delta C_{021} / C_{021} - \delta C_{132} / C_{132} - \delta C_{013} / C_{013} - \delta z_{\text{nam}} / z_{\text{nam}});$$

$$\delta k_{fc2} = k_{fc2} \cdot (\delta Q / Q + \delta C_{021} / C_{021} - \delta C_{132} / C_{132} - \delta C_{032} / C_{032} - \delta z_{\text{nam}} / z_{\text{nam}}).$$

И тогда $\delta a_1 = a_1 \cdot ((\delta y_3 - \delta y_1) / (y_3 - y_1) + \delta k_{fc1} / k_{fc1});$

$$\delta b_1 = b_1 \cdot ((\delta x_1 - \delta x_3) / (x_1 - x_3) + \delta k_{fc1} / k_{fc1});$$

$$\delta c_1 = c_1 \cdot ((\delta x_3 \cdot y_1 + \delta y_1 \cdot x_3 - \delta x_1 \cdot y_3 - \delta y_3 \cdot x_1) / (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + \delta k_{fc1} / k_{fc1});$$

и $\delta a_2 = a_2 \cdot ((\delta y_2 - \delta y_3) / (y_2 - y_3) + \delta k_{fc2} / k_{fc2});$

$$\delta b_2 = b_2 \cdot ((\delta x_3 - \delta x_2) / (x_3 - x_2) + \delta k_{fc2} / k_{fc2});$$

$$\delta c_2 = c_2 \cdot ((\delta x_2 \cdot y_3 + \delta y_3 \cdot x_2 - \delta x_3 \cdot y_2 - \delta y_2 \cdot x_3) / (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + \delta k_{fc2} / k_{fc2}).$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} \delta a = & ((\delta y_0 - \delta y_1) / C_{013} - \delta C_{013} \cdot (y_0 - y_1) / C_{013}^2 + \\ & + (\delta y_1 - \delta y_2) / C_{132} - \delta C_{132} \cdot (y_1 - y_2) / C_{132}^2 + \\ & + (\delta y_2 - \delta y_0) / C_{032} - \delta C_{032} \cdot (y_2 - y_0) / C_{032}^2) / z_{\text{nam}} - \delta z_{\text{nam}} \cdot a / z_{\text{nam}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta b = & ((\delta x_1 - \delta x_0) / C_{013} - \delta C_{013} \cdot (x_1 - x_0) / C_{013}^2 + \\ & + (\delta x_2 - \delta x_1) / C_{132} - \delta C_{132} \cdot (x_2 - x_1) / C_{132}^2 + \\ & + (\delta x_0 - \delta x_2) / C_{032} - \delta C_{032} \cdot (x_0 - x_2) / C_{032}^2) / z_{\text{nam}} - \delta z_{\text{nam}} \cdot a / z_{\text{nam}}; \end{aligned}$$

Получаемые погрешности коэффициентов отображения поля зрения в кадр при данном векторе δx_u ошибок измерения вершин поля зрения сами по себе мало интересны. Они являются промежуточными величинами, необходимыми для оценки погрешности привязки видимых в кадре точек сцены.

Оценка достижимой точности определения координат.

Пусть в результате анализа видеоизображения сцены определены пиксельные индексы p и q некоторой точки сцены и с помощью обратного преобразования "Кадр→ПЗ" (см. выше (*)) вычислены в системе координат робота координаты x и y наблюдаемой точки. Спрашивается, с какой точностью известны эти координаты? Очевидно, что оценка их погрешности получается путём варьирования обратного преобразования (*) погрешностями знания коэффициентов прямого преобразования, полученными выше.

Запишем преобразование (*) в виде: $x=u/w$ и $y=-v/w$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \delta x = & (u \cdot (b \cdot q - b_2) / w^2) \cdot \delta a_1 + (u \cdot (b_1 - b \cdot p) / w^2) \cdot \delta a_2 + \\ & + ((c_2 - q) / w + u \cdot (a_2 - a \cdot q) / w^2) \cdot \delta b_1 + ((p - c_1) / w + u \cdot (a \cdot p - a_1) / w^2) \cdot \delta b_2 + \\ & + ((b \cdot q - b_2) / w) \cdot \delta c_1 + ((b_1 - b \cdot p) / w) \cdot \delta c_2 + \\ & + (u \cdot (b_2 \cdot p - b_1 \cdot q) / w^2) \cdot \delta a + ((c_1 \cdot q - c_2 \cdot p) / w + u \cdot (a_1 \cdot q - a_2 \cdot p) / w^2) \cdot \delta b; \\ \delta y = & ((q - c_2) / w + v \cdot (b_2 - b \cdot q) / w^2) \cdot \delta a_1 + ((c_1 - p) / w + v \cdot (b \cdot p - b_1) / w^2) \cdot \delta a_2 + \\ & + (v \cdot (a \cdot q - a_2) / w^2) \cdot \delta b_1 + (v \cdot (a_1 - a \cdot p) / w^2) \cdot \delta b_2 + \\ & + ((a_2 - q \cdot a) / w) \cdot \delta c_1 + ((p \cdot a - a_1) / w) \cdot \delta c_2 + \\ & + ((p \cdot c_2 - q \cdot c_1) / w + v \cdot (a_2 \cdot p - b_2 \cdot p) / w^2) \cdot \delta a + (v \cdot (b_1 \cdot q - a_1 \cdot q) / w^2) \cdot \delta b; \end{aligned}$$

В процессе разработки вычислительных алгоритмов эти дифференциальные соотношения сравнивались с результатами вычислений в конечных разностях при отклонении в 1 см измерений координат в стороны расширения поля зрения, и было получено хорошее их совпадение (до 3х десятичных знаков).

Модель калибровочных погрешностей

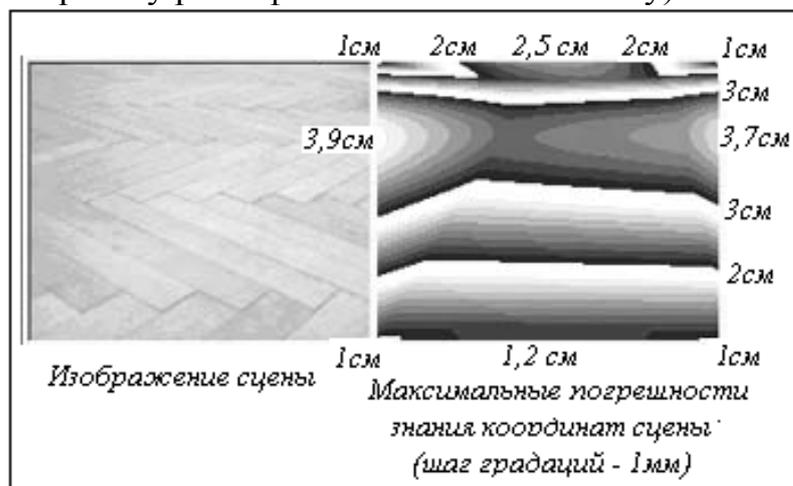
Имея выражения для вариаций $\delta \{xy\} = f(\{abc, pq\}) = F(\{PQ\}, \{xy\}_i, \delta \{xy\}_i)$ по вариациям вершин $\{xy\}_i$ калибровочного четырёхугольника, оценим характер и величину погрешностей навигационной привязки координат $\{xy\}$ в зависимости от выбора места и размеров калибровочной области $\{PQ\}$ в кадре. Желательность такой оценки связана с принципиальной возможностью определения коэффициентов преобразования не по углам кадра, а по некоторой видимой в кадре области с известными координатами (например, - по рисунку пола). Но для этого надо проверить предположение, что при малом размере области или её неудачном положении (например, в далёкой перспективе изображения сцены) навигационные ошибки могут расти.

Выбранным пиксельным номерам вершин четырёхугольника $\{PQ\}$ соответствуют в поле зрения сцены координаты точек $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2$ и x_3, y_3 , (см. рисунки выше) и вектор $\delta \{xy\}_i$ ошибок калибровочного измерения. Для получения требуемой оценки применим следующий алгоритм:

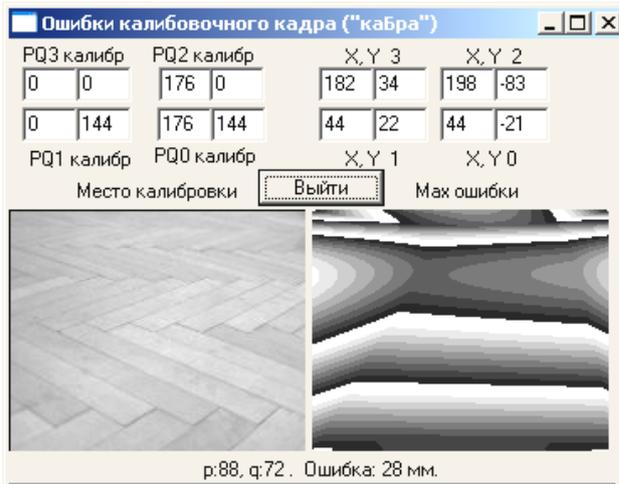
1. Предположим, что калибровочная область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам кадра. В этом случае, после преобразований пиксельных номеров $p := p - p_3$ и $q := q - q_3$ (т.е. - переноса начала пиксельных координат в левый верхний угол выбранного калибровочного прямоугольника) удобным образом сохраняется вид всех полученных выше зависимостей $\{abc\} = F(\{PQ\}, \{xy\}_i)$.

2. Выберем пиксельные номера для диагональных вершин $\{p,q\}_3$ и $\{p,q\}_0$ анализируемой калибровочной области.
3. Координаты точек сцены, соответствующих пикселям вершин нового калибровочного прямоугольника, вычислим по приведенным выше полнокадровым коэффициентам взаимного отображения пикселей в координаты сцены.
4. Используя приведенные выше зависимости $\{abc\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i)$ определим коэффициенты калибровочного отображения для выбранной калибровочной области.
5. Выберем вектор ошибок измерения координат $x_0,y_0; x_1,y_1; x_2,y_2$ и x_3,y_3 . Например, положим равными модули погрешностей измерения координат $|\delta x|=|\delta y|=1$ см. Тогда множество векторов ошибок совпадает с множеством двоичных чисел в диапазоне 0-255, где каждый разряд $\{0,1\}$ каждого числа этого множества представляет собой знак ошибки соответствующей координаты x_i или y_i ($i=0..3$).
6. Для каждого выбранного номера вектора ошибок, используя приведенные выше зависимости $\delta\{abc\}=F(\{PQ\},\{xy\}_i,\delta\{xy\}_i)$ определим параметры ошибок коэффициентов калибровочного отображения.
7. Далее, для каждого пиксела p,q полного кадра определим погрешность определения координат на плоскости сцены $\delta\{xy\}=f(\{abc,\delta\{abc\},pq)$.
8. Повторим эти действия для каждого вектора ошибок $\delta\{xy\}_i$ из их числа и при этом для каждого пиксела кадра оставим максимальное значение погрешности навигационной привязки координат сцены к системе координат робота.

Ниже приведен результат расчёта поля этих погрешностей (правое изображение) для случая калибровки отображения по углам кадра с ошибкой измерения 1 см. Для такого "полнокадрового" отображения плоскости пола на плоскость кадра максимум погрешности знания координат видимых точек равен 4 см. (см. вершину рельефа изолиний слева сбоку)

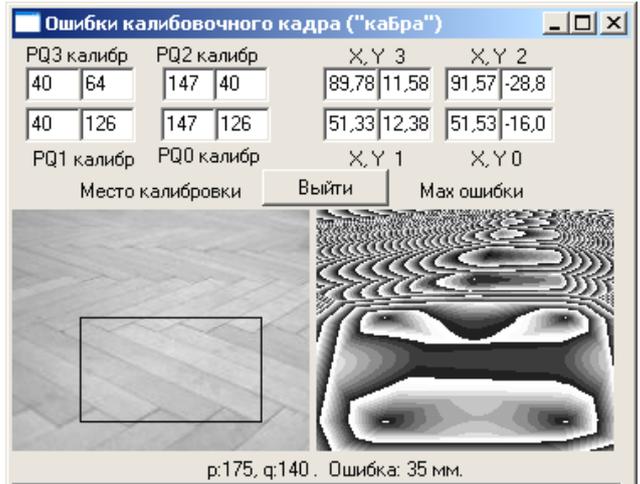


Примеры полей ошибок при изменении размеров и позиций калибровочных прямоугольников в кадре (показываемых на левом изображении) приведены ниже. Здесь приводятся параметры калибровочной области, № вектора ("ttt№") у максимальной ошибки и относительные частоты ошибок разной величины.



tttN² = 124 Коорд. P= 0 Коорд. Q= 39 MaxE_X= 3,887 см
 tttN² = 188 Коорд. P= 92 Коорд. Q= 0 MaxE_Y= 2,532 см
 Гистограмма ошибок и их относит./частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
E _X : 3.5 и выше	0,000462	3,501
E _Y : 3.5 и выше	0,000000	0,000
E _X : 3.0 - 3.5	0,006067	3,001
E _Y : 3.0 - 3.5	0,000000	0,000
E _X : 2.5 - 3.0	0,022634	2,508
E _Y : 2.5 - 3.0	0,000007	2,502
E _X : 2.0 - 2.5	0,049667	2,020
E _Y : 2.0 - 2.5	0,001738	2,000
E _X : 1.5 - 2.0	0,098523	1,503
E _Y : 1.5 - 2.0	0,017805	1,501
E _X : 1.0 - 1.5	0,207452	1,000
E _Y : 1.0 - 1.5	0,185152	1,000
E _X : 0.5 - 1.0	0,324923	1,000
E _Y : 0.5 - 1.0	0,461105	1,000
E _X : 0.0 - 0.5	0,290272	0,497
E _Y : 0.0 - 0.5	0,334192	0,495



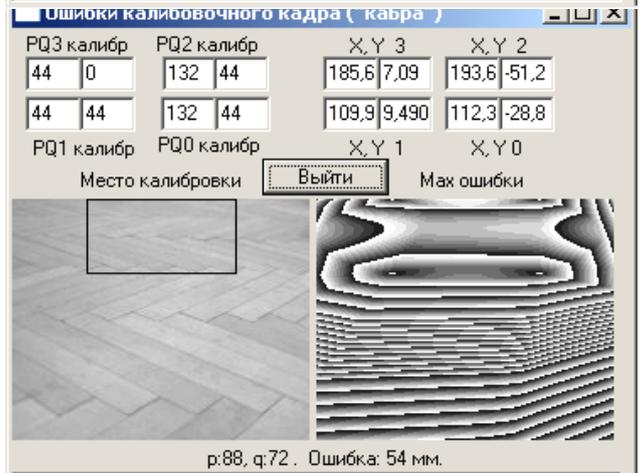
tttN² = 60 Коорд. P= 0 Коорд. Q= 0 MaxE_X= 156,580 см
 tttN² = 105 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 0 MaxE_Y= 65,512 см
 Гистограмма ошибок и их относит./частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
E _X : 3.5 и выше	0,200633	3,514
E _Y : 3.5 и выше	0,103742	3,512
E _X : 3.0 - 3.5	0,017592	3,097
E _Y : 3.0 - 3.5	0,022318	3,004
E _X : 2.5 - 3.0	0,021106	2,531
E _Y : 2.5 - 3.0	0,029320	2,503
E _X : 2.0 - 2.5	0,032139	2,028
E _Y : 2.0 - 2.5	0,043376	2,004
E _X : 1.5 - 2.0	0,073737	1,923
E _Y : 1.5 - 2.0	0,078750	1,502
E _X : 1.0 - 1.5	0,210724	1,000
E _Y : 1.0 - 1.5	0,230615	1,000
E _X : 0.5 - 1.0	0,250388	1,000
E _Y : 0.5 - 1.0	0,281154	1,000
E _X : 0.0 - 0.5	0,193681	0,485
E _Y : 0.0 - 0.5	0,210725	0,494



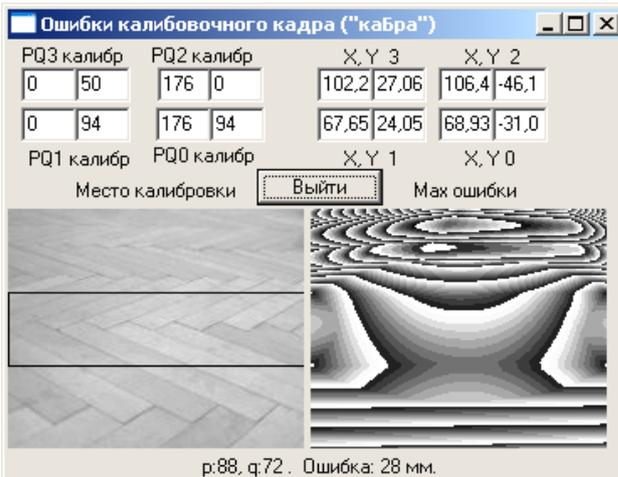
tttN² = 135 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 143 MaxE_X= 8,790 см
 tttN² = 188 Коорд. P= 91 Коорд. Q= 0 MaxE_Y= 2,997 см
 Гистограмма ошибок и их относит./частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
E _X : 3.5 и выше	0,068259	5,489
E _Y : 3.5 и выше	0,000000	0,000
E _X : 3.0 - 3.5	0,029921	3,494
E _Y : 3.0 - 3.5	0,000000	0,000
E _X : 2.5 - 3.0	0,041862	2,999
E _Y : 2.5 - 3.0	0,021269	2,506
E _X : 2.0 - 2.5	0,059533	2,351
E _Y : 2.0 - 2.5	0,066165	2,000
E _X : 1.5 - 2.0	0,088051	1,992
E _Y : 1.5 - 2.0	0,114592	1,501
E _X : 1.0 - 1.5	0,182048	1,000
E _Y : 1.0 - 1.5	0,242596	1,000
E _X : 0.5 - 1.0	0,276198	1,000
E _Y : 0.5 - 1.0	0,301328	1,000
E _X : 0.0 - 0.5	0,254128	0,493
E _Y : 0.0 - 0.5	0,254050	0,496



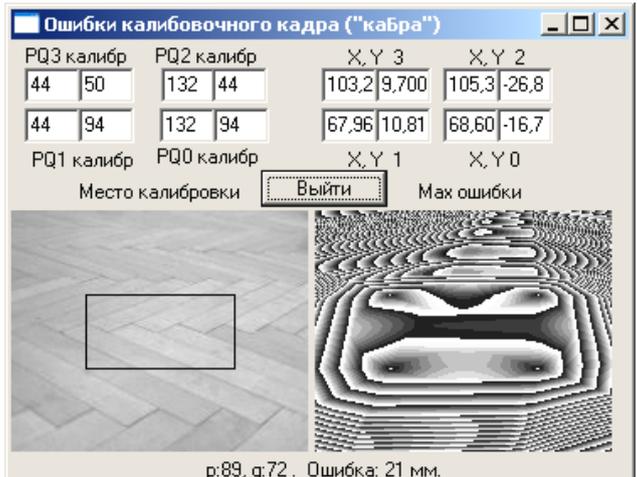
tttN² = 195 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 143 MaxE_X= 18,520 см
 tttN² = 99 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 0 MaxE_Y= 5,432 см
 Гистограмма ошибок и их относит./частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
E _X : 3.5 и выше	0,195440	3,917
E _Y : 3.5 и выше	0,006815	3,515
E _X : 3.0 - 3.5	0,037726	3,479
E _Y : 3.0 - 3.5	0,013267	3,009
E _X : 2.5 - 3.0	0,051168	2,994
E _Y : 2.5 - 3.0	0,049633	2,504
E _X : 2.0 - 2.5	0,071724	2,486
E _Y : 2.0 - 2.5	0,087610	2,009
E _X : 1.5 - 2.0	0,111035	1,979
E _Y : 1.5 - 2.0	0,132228	1,500
E _X : 1.0 - 1.5	0,180962	1,000
E _Y : 1.0 - 1.5	0,266421	1,000
E _X : 0.5 - 1.0	0,192112	1,000
E _Y : 0.5 - 1.0	0,271726	1,000
E _X : 0.0 - 0.5	0,159832	0,492
E _Y : 0.0 - 0.5	0,172300	0,496



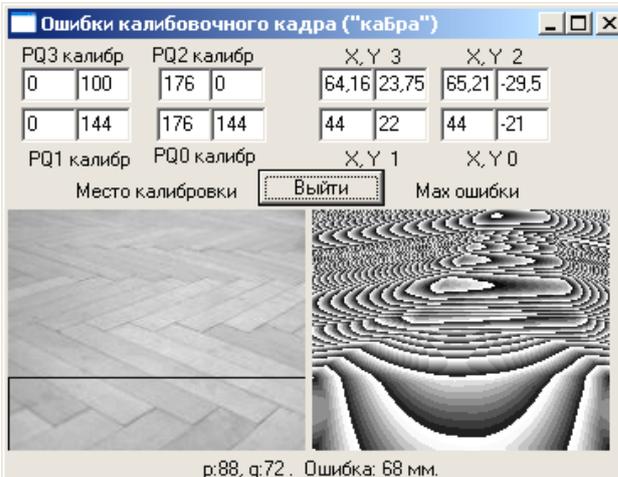
tttN^z = 60 Коорд. P= 0 Коорд. Q= 0 MaxEiX= 41,043 см
 tttN^z = 105 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 0 MaxEiY= 19,371 см
 Гистограмма ошибок и их относит/частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
EiX: 3.5 и выше	0,105125	3,609
EiY: 3.5 и выше	0,062087	3,505
EiX: 3.0 - 3.5	0,020928	3,048
EiY: 3.0 - 3.5	0,019374	3,000
EiX: 2.5 - 3.0	0,029107	2,548
EiY: 2.5 - 3.0	0,029367	2,500
EiX: 2.0 - 2.5	0,044737	2,171
EiY: 2.0 - 2.5	0,060799	2,000
EiX: 1.5 - 2.0	0,072548	1,993
EiY: 1.5 - 2.0	0,115650	1,501
EiX: 1.0 - 1.5	0,191904	1,000
EiY: 1.0 - 1.5	0,216124	1,000
EiX: 0.5 - 1.0	0,285776	1,000
EiY: 0.5 - 1.0	0,270055	1,000
EiX: 0.0 - 0.5	0,249876	0,494
EiY: 0.0 - 0.5	0,226544	0,497



tttN^z = 60 Коорд. P= 0 Коорд. Q= 0 MaxEiX= 144,568 см
 tttN^z = 105 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 0 MaxEiY= 80,239 см
 Гистограмма ошибок и их относит/частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
EiX: 3.5 и выше	0,186683	3,628
EiY: 3.5 и выше	0,093660	3,530
EiX: 3.0 - 3.5	0,029612	3,488
EiY: 3.0 - 3.5	0,024727	3,080
EiX: 2.5 - 3.0	0,038904	2,977
EiY: 2.5 - 3.0	0,038724	2,556
EiX: 2.0 - 2.5	0,059767	2,491
EiY: 2.0 - 2.5	0,071894	2,002
EiX: 1.5 - 2.0	0,106199	1,999
EiY: 1.5 - 2.0	0,122849	1,501
EiX: 1.0 - 1.5	0,193720	1,000
EiY: 1.0 - 1.5	0,229300	1,000
EiX: 0.5 - 1.0	0,212987	1,000
EiY: 0.5 - 1.0	0,242827	1,000
EiX: 0.0 - 0.5	0,172127	0,499
EiY: 0.0 - 0.5	0,176019	0,328



tttN^z = 60 Коорд. P= 0 Коорд. Q= 0 MaxEiX= 635,242 см
 tttN^z = 105 Коорд. P= 175 Коорд. Q= 0 MaxEiY= 176,627 см
 Гистограмма ошибок и их относит/частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
EiX: 3.5 и выше	0,339666	3,536
EiY: 3.5 и выше	0,251767	3,503
EiX: 3.0 - 3.5	0,023385	3,078
EiY: 3.0 - 3.5	0,036831	3,003
EiX: 2.5 - 3.0	0,027257	2,573
EiY: 2.5 - 3.0	0,048282	2,500
EiX: 2.0 - 2.5	0,033174	2,039
EiY: 2.0 - 2.5	0,061602	2,000
EiX: 1.5 - 2.0	0,043511	1,556
EiY: 1.5 - 2.0	0,091947	1,507
EiX: 1.0 - 1.5	0,119795	1,000
EiY: 1.0 - 1.5	0,145500	1,000
EiX: 0.5 - 1.0	0,221803	1,000
EiY: 0.5 - 1.0	0,190439	1,000
EiX: 0.0 - 0.5	0,191410	0,493
EiY: 0.0 - 0.5	0,173631	0,483



tttN^z = 105 Коорд. P= 102 Коорд. Q= 1 MaxEiX= 9,163755E7 см
 tttN^z = 120 Коорд. P= 113 Коорд. Q= 6 MaxEiY= 2,622343E7 см
 Гистограмма ошибок и их относит/частота присутствия в кадре

Диапазоны:	Отн. частота:	Примеры:
EiX: 3.5 и выше	0,419884	3,526
EiY: 3.5 и выше	0,302366	3,512
EiX: 3.0 - 3.5	0,020841	3,048
EiY: 3.0 - 3.5	0,033372	3,029
EiX: 2.5 - 3.0	0,026161	2,598
EiY: 2.5 - 3.0	0,041168	2,526
EiX: 2.0 - 2.5	0,034939	2,021
EiY: 2.0 - 2.5	0,053128	2,001
EiX: 1.5 - 2.0	0,062410	1,818
EiY: 1.5 - 2.0	0,079182	1,502
EiX: 1.0 - 1.5	0,135210	1,000
EiY: 1.0 - 1.5	0,155460	1,000
EiX: 0.5 - 1.0	0,169852	1,000
EiY: 0.5 - 1.0	0,181344	1,000
EiX: 0.0 - 0.5	0,130702	0,498
EiY: 0.0 - 0.5	0,153980	0,460

Анализ свойств навигационных погрешностей

Может показаться, что из группового свойства непрерывности параметров рассматриваемого преобразования следует, что малым вариациям координат калибровочного четырёхугольника соответствуют малые вариации параметров прямого и обратного отображений, а следовательно - и малые вариации координатной привязки пиксельных точек. Действительно, во всех приведенных выше вариантах при ошибке калибровочных измерений в ± 1 см погрешности привязки к осям системы координат робота точки, видимой в центре кадра ($p=88$, $q=72$), достаточно малы и лежат в диапазоне 4..11 см.

Однако, во всех приведенных случаях калибровочных прямоугольников меньших размеров (вне зависимости от положения последних внутри кадра) максимальные ошибки (см. "MaxErX" и "MaxErY") достигают громадных величин (до $9 \cdot 10^2$ км(!)). Заметим, что эти максимальные ("экстраполяционные" по их существу) погрешности возникают при попытках привязки точек, принадлежащих границам кадра, *наиболее удалённым* от калибровочных точек.

Может вызвать удивление и то обстоятельство (см. рисунки на предыдущих и на следующей страницах), что при "полнокадровой" калибровке её "интерполяционные" погрешности координат внутренних точек поля зрения превышают калибровочную ошибку, равную 1 см (максимальная погрешность равна 3,9 см). Эти факты требуют объяснения.

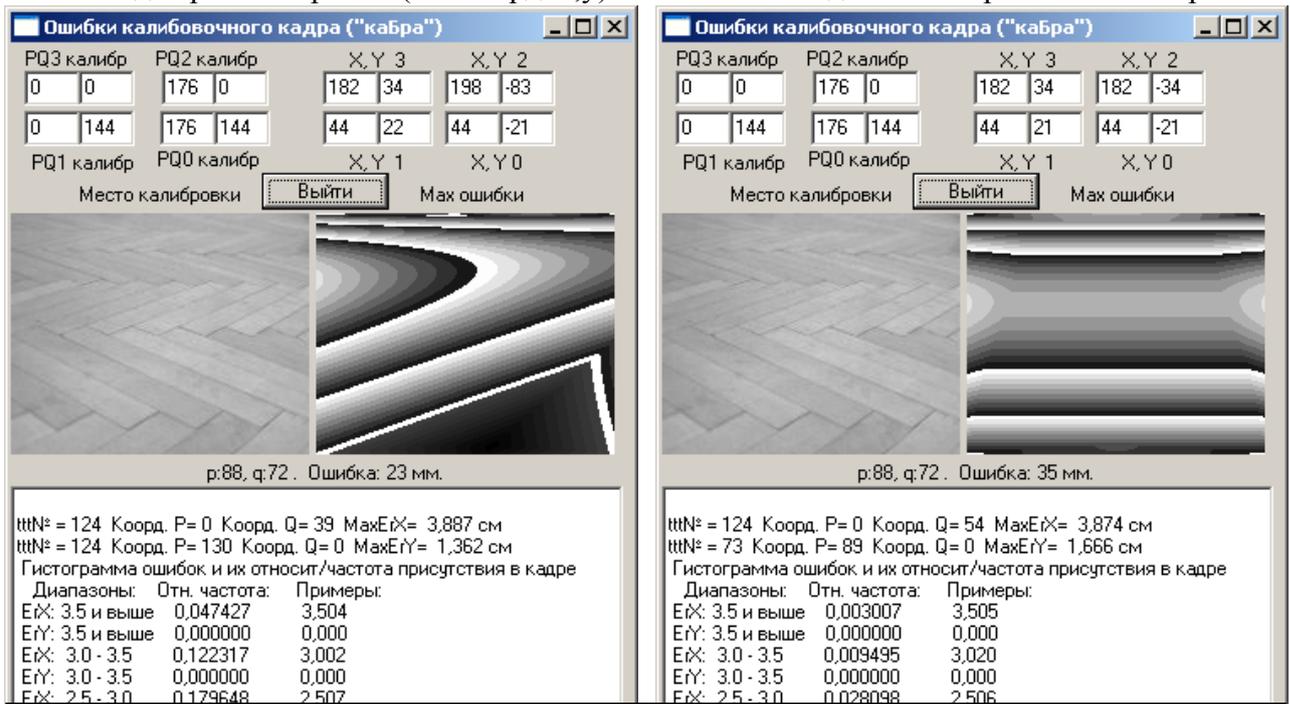
Обратим внимание на то, что получаемые километровые ошибки привязки координат возникают только для точек на верхней границе кадра. Это обстоятельство наталкивает на мысль, что дело здесь в свойствах проективного преобразования. Рассмотрим эти свойства и их влияние на точность навигационной привязки координат.

Особенности проективного преобразования

Достаточно очевидно, что эти особенности связаны с геометрическими свойствами пространственного проективного угла. Однако отображение плоскости в себя не зависит от размеров видеодатчика и положения центра проектирования в осях системы координат робота. Поэтому полученные коэффициенты отображения "сцена-кадр" *не позволяют определить параметры видеокамеры и её позиции* (для этого следует построить отображение "3D-сцена-2D-кадр" с присущим ему неоднозначным обратным отображением неподвижного кадра). Тем не менее, у конкретной камеры есть конкретное положение её центра проектирования в пространстве, и пусть мы умеем его определять, делая дополнительные измерения видимых высот.

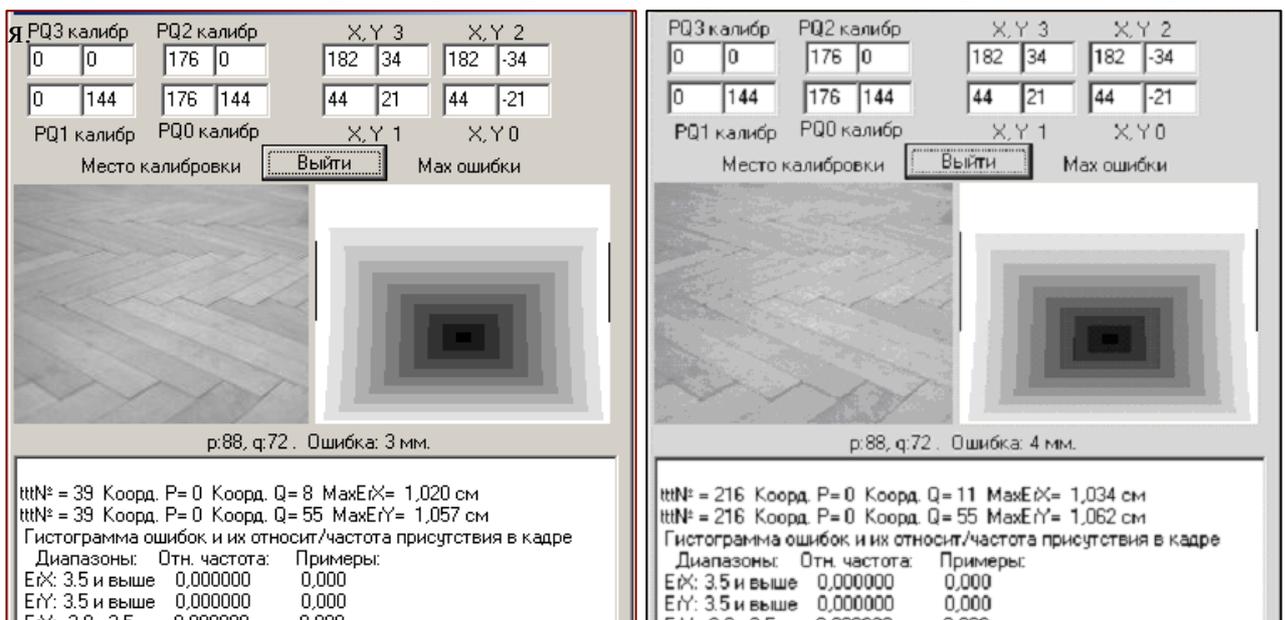
Что происходит с этим центром проектирования при ошибочном изменении калибровочных координат? Это изменение в общем случае приводит к изменению геометрии угла зрения и/или положения его центра в системе координат робота. Можно подозревать, что если в проективном преобразовании существуют особые точки, то такое фиктивное перемещение центра проектирования может приводить ситуацию проектирования в окрестность особой точки, что, возможно, и объясняет быстрый рост экстраполяционных ошибок привязки координат видимых точек.

Поля вектора максимальной ошибки № 124 ($11111100 = -dy_3 - dx_3 - dy_2 - dx_2 - dy_1 - dx_1 + dy_0 + dx_0$).
Ошибки для робота Трикол (см. коорд. x,y) и поле ошибок для симметричного поля зрения:



Видно, что поле ошибок у одного вектора (№124,) вызывающего максимальную ошибку привязки координат точек поля зрения (в малой области вверху слева), практически повторяет вытянутую вперед направо форму проективного растяжения поля зрения робота (см. рис. на стр.13). А симметричное поле зрения приводит к симметричному полю ошибок, но - с той же максимальной погрешностью привязки координат и том же месте поля зрения.

Ниже показаны поля погрешностей привязки координат в поле зрения для векторов №№ 39 и 216, симметрично расширяющих и сужающих симметричное поле зрения



Видно, что ошибки похожи, и что (черные линии сбоку) существуют области погрешностей привязки координат, которые несколько больше исходной ошибки калибровки, равной 1 см (белая полоса). Этому соответствует и вогнутые внутрь изолинии границ погрешностей (с шагом 1 мм), что означает наличие максимума погрешности по q на каждом столбце кадра $p = \text{Const}$.

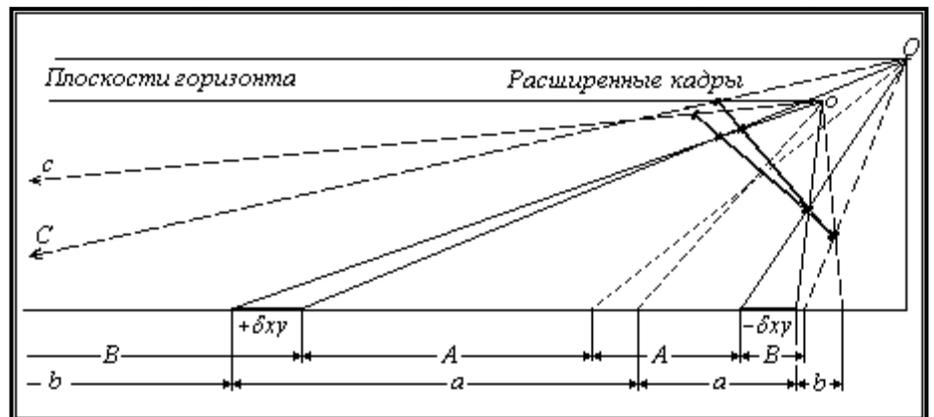
Поскольку проективное отображение описывается дробно-линейными выражениями, то его особенности могут быть связаны с нулями знаменателей этих дробей. Прямое преобразование "сцена-кадр" в общем случае вырождения не испытывает. Действительно, знаменатели выражений, определяющих коэффициенты преобразования, представляют собой суммы трёх слагаемых вида: $C_1 \cdot (y_0 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_0) + C_2 \cdot (y_1 \cdot x_0 - y_0 \cdot x_1) + C_3 \cdot (y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1)$, где коэффициенты C_i представляют собой произведения и частные треугольных комплексов S^{***} , никогда не равных нулю.

Вырождение этого преобразования возможно лишь в случае одновременного равенства нулю трёх скобочных членов, которые представляют собой модули векторных произведений векторов координат трёх вершин четырёхугольника поля зрения. Их одновременное равенство нулю, геометрически означает, что три вершины четырёхугольника лежат на одной прямой (условие коллинеарности легко доказывается через равенство трёх отношений y/x компонент этих векторов). Это невозможно при любом расположении камеры (если плоскость матрицы фотоприёмника ортогональна оптической оси объектива). Заметим, что геометрически условие вырождения проективного отображения, как условие отображения линии в плоскость, достаточно очевидно.

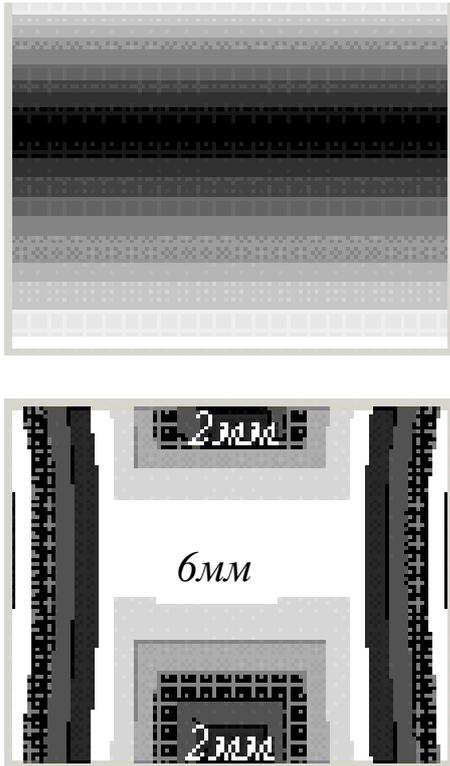
У обратного преобразования его знаменатели имеют вид $w = A \cdot p + B \cdot q + C$. Условие $w=0$ является уравнением прямой в плоскости пикселей кадра, проходящей через точки на его границах:

$$w=0 \Rightarrow \begin{cases} p=0, q=-C/B \\ q=0, p=-C/A \end{cases}$$

Эта прямая представляет собой геометрическое место лучей проектирования, параллельных плоскости сцены, т.е. она отображает линию горизонта в плоскости кадра. Если камера достаточно сильно наклонена вниз, то эта линия горизонта проходит вне кадра. Однако если наклон мал (что бывает при низком расположении камеры), то линия горизонта может быть расположенной весьма близко к границам кадра. И тогда лучи проектирования вверху кадра будут далеко пересекать плоскость сцены, а их вариации (см. рисунок справа) из-за калибровочных ошибок могут быть рядом с горизонтом. Этим объясняются большие размеры ошибок координаты x вблизи верхней границы кадра.



На рисунке показана ситуация влияния ошибок калибровки δx_u по области внутри поля зрения на параметры проективного отображения при их расширении на весь кадр. Видно получаемое смещение центра проектирования и соответствующие изменения лучей



Причиной роста ошибок привязки координат внутри точек области калибровки, как это не странно, являются не продольные, а боковые искажения её углов δu_i . Действительно, на рис. слева вверху показано поле ошибок привязки координат при единичном сдвиге вперёд дальней границы симметричной калибровочной области ($\delta x_2 = \delta x_3 = +1$ см, остальные $\delta x_u = 0$). Видно, что координатные ошибки регулярны по x и всюду меньше 1 см ($\min \delta x = 3$ мм).

Однако при чисто боковом растяжении симметричной калибровочной области ($\delta y_1 = \delta y_3 = +1$ см и $\delta y_0 = \delta y_2 = -1$ см) поле ошибок (рис. слева внизу) имеет максимумы на левой и правой границах кадра (черные линии у границ) с их округлённой величиной 11 мм ($\min \delta x = 1$ мм – в самых вверху и внизу кадра).

Это объясняется разной степенью проективного растяжения из-за изменения направления и наклона лучей точек (координат пиксельных образов обратного отображения) вдоль номинальной и отклонённой границ калибровочных полей. Сравнение координат взаимных положений соответствующих точек показывает, что если угловая точка дальней границы смещена только по y на 1 см, то уже вторая точка отклонённой границы сильнее смещена по оси x чем соответствующая точка номинальной границы (180,48 и 180,45 см соответственно). Из-за этого малого смещения по x расстояние по y между этими точками становится больше 1 см (!,0025), Таким образом, уже в граничной точке мы имеем положительные производные погрешностей координатной привязки по боковому отклонению углов калибровочной области. Поэтому при боковом отклонении углов области калибровки расхождение координат растёт от краёв к центру. Этот обстоятельство и объясняет причину роста и максимума "интерполяционной" ошибки привязки координат.

Суммируя сказанное, заметим, что из приведенного анализа полей ошибок привязки координат следует, что для исключения больших ошибок калибровочный прямоугольник желательно выбрать с максимальными значениями ширины и площади и располагать его ближе к центру кадра или - непосредственно в районе места контроля координат сцены.

Благодарности

Автор выражает большую признательность своим товарищам по разработке систем робота "Трикол" В.С.Ярошевскому и Н.С.Сербенюку за большую помощь в работе и полезные дискуссии по теме этого исследования.

Цитированная литература

1. Роджерс Д., Адамс Дж. *Математические основы машинной графики*. М.:Мир, 2001. 604с
2. Хорн Б.К.П. *Зрение роботов*. М.: "Мир", 1989г., 488с.
3. Дуда Р., Харт П. *Распознавание образов и анализ сцен*. М.:Мир, 1976. 511с.
4. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. *Computer graphics: principles and practice*. 2nd ed. Addison-Wesley Publ.Co. 1990. 1174р.
5. Шапиро Л., Стокман Дж. *Компьютерное зрение*. М.: Бином, 2006. 752с.
6. Clarke T.A., Fryer J.F. *The development of camera calibration methods and models*, Photogrammetric Record, 16(91), 1998, pp 51-66.
7. Gardener I.C., Case. *Precision camera for testing lenses*, Journal of Research. National Bureau of Standards, 1937, RP 984.
8. Karren R.J. *Camera calibration by the multicollimator method*. Photogrammetric Engineering, 1968, 34(7), pp 706-719.
9. Hakkarainen J., *Determination of radial and tangential distortion of aerial cameras with a horizontal goniometer*. Photogrammetric Record, 1974, 8(44), pp 180-187.
10. Schmid H.H. *Stellar calibration of the Orbigon lens*. Photogrammetric Engineering, 1974, 40(1), pp 101-111.
11. Hallert B. *Photogrammetry, basic principles and general survey*. McGraw-Hill Book company, USA, 1960, 340 p..
12. Brown D.C. *Calibration of close-range cameras*. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 19(5) 1972, ISP Congress, Ottawa, 26 p
13. Clarke T.A., Fryer J.G., Wang X. *The principal point for CCD cameras*. Submitted to the Photogrammetric Record, 1997.
14. Merrit E.L. *Field camera calibration*. Photogrammetric Engineering, 1948, 14(2), pp 303-309.
15. Ziemann H. *Thoughts on a standard algorithm for camera calibration*. *Progress in Imaging Sensors*, Proc. ISPRS Symposium, Stuttgart, 1986. pp 41-48.
16. Tsai R.Y. *A versatile camera calibration technique for high accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses* IEEE J. Robotics Automat. 1987, Vol. RA-3, No. 4, pp 323-344.
17. Brouwer L.E.J. "Math. Ann", 1912, Bd 71, pp 91-117.
18. Александров П.С., Ефремович В.А. *Очерк основных понятий топологии*. М.Л.:ОНТИ НКТП СССР, 1936. сс 65-91.
19. Visual navigation using a single camera. (- 382K gzipped), appeared in ICCV'95 proceedings, Boston, USA, 8 p.
20. Zhang Zh. *Flexible Camera Calibration by Viewing a Plane from Unknown Orientations* ICCV99
21. Файн В.С. *Опознавание изображений*. М.: Наука, 1970, 296с.
22. Файн В.С. *Алгоритмическое моделирование формообразования*. М.:Наука, 1975, 141с.
23. Сербенюк Н.С. "Экспериментальное исследование свойств конического сенсора". Мобильные роботы и мехатронные системы: Труды школы-

- конференции (Москва, 5-6 дек.2000г.). Москва: Изд-во МГУ, 2000г.с56-68.
24. Платонов А.К., Сербенюк Н.С. *Выявление с помощью TV-камеры препятствий движению робота* Препринт ИПМ, 2004, №71, 26 с.
 25. Емельянов С.Н., Платонов А.К., Ярошевский В.С.. "*Система управления полноприводного трехколесного движителя*" Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва: Изд-во МГУ, 2000г., сс. 89-100.
 26. Богуславский А.А., Сербенюк Н.С., Соколов С.М. "*Конический сенсор для навигации подвижного робота по маякам*". Мобильные роботы и мехатронные системы: Материалы научной школы-конференции Москва: Изд-во МГУ, 2000г.. 42-56с.
 27. Ярошевский В.С. "*Согласованное управление движением колес и корпуса полноприводного колесного движителя*". Мобильные роботы и мехатронные системы. М.:МГУ, 2001г.,70-78с.
 28. Емельянов С.Н., Платонов А.К. "*Метод согласования электрических сенсорных сигналов и геометрических характеристик мобильного робота*". В сб. Мобильные роботы и мехатронные системы. М.:МГУ, 2001г., сс 78-84.
 29. Ярошевский В.С. "*Организация процессов пятипроцессорной системы управления мобильного трёхколёсного робота*". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва: ИМех. МГУ, 2002г.
 30. Платонов А.К. "*Система управления поведением мобильного робота*". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2002г., ИМех. МГУ.
 31. Богуславский А.А., Соколов С.М. "*Компонентные методы разработки программного обеспечения СТЗ*". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2003г., ИМех. МГУ.
 32. Богуславский А.А., Платонов А.К., Сербенюк Н.С.. "*Система машинного видения робота Трикол*". Труды школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва 2003г., ИМех. МГУ.
 33. Богуславский А.А., Сербенюк Н.С., Соколов С.М. *СТЗ для навигации подвижного робота по маякам на основе анализа конической проекции окружающего пространства на ТВ камеру*. Препринт ИПМ 1991г 23с.
 34. Носков В.П., Рубцов В.И., Романов А.Ю. *Объединение дальнометрической и телевизионной информации при формировании модели внешней среды* Известия Тульского Государственного университета. Выпуск 3. Системы управления. Том.2. Тула: ТулГУ, 2006, сс100-103
 35. Чеботарёв Н.Г. *Теория групп Ли*. М,Л:ГИТТЛ, 1940. 397с.
 36. Эйзерхарт П.П. *Непрерывные группы преобразований*. М.:ИЛ, 1947.359с.
 37. Клейн Ф. *Высшая геометрия* М.:ГОНТИ, 1939, 399с.
 38. Гильберт Д. *Основания геометрии* М.: Гостехиздат, 1948, 491с.
 39. Юнг Дж.В. *Проективная геометрии* М: ИЛ, 1949, 184с.
 40. Бэр Р. *Линейная алгебра и проективная геометрия* М.: ИЛ, 1955, 399с.
 41. Комацу М. *Многообразие геометрии* М.: Знание, 1981, 207с.

Определение параметров проективного преобразования

Любое проективное преобразование n -мерного пространства (прямой, двумерной плоскости, трёхмерного пространства, ...) в себя принадлежит классу взаимно однозначных $(n+1)^2-1$ -параметрических преобразований (3-х, 8-и, 15-, ...) в составе *примитивных групп Ли* из всех непрерывных по параметрам композиции их преобразований с групповыми свойствами. Эти преобразования позволяют неким однородным (изотропным - в смысле отсутствия специальных направлений и/или областей многообразия) способом преобразовывать пространство с сохранением его топологии. В частности, при проективном преобразовании сохраняются прямолинейность любых линий и топология их инцидентности (пересечения).

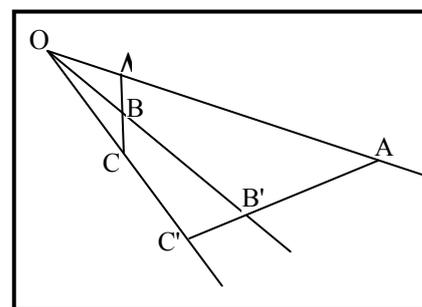
Выпишем полезные аналитические формулы для прямых и обратных проективных преобразований.

Проективное преобразование прямой

Одномерное групповое проективное преобразование имеет вид:

$$\frac{a_1 \cdot x + c_1}{a \cdot x + 1} = p$$

Для определения трёх параметров этого преобразования нужно задать соответствие *трёх* точек на прямой: x_0, x_1, x_2 и p_0, p_1, p_2 . Это связано с тем, что одномерное проективное преобразование в отличие от одномерного аффинного преобразования не только сдвигает и растягивает отрезки прямой, но и подвергает их внутренней деформации. Если группа аффинных растяжений отрезка соответствует параллельному движению его концов по сторонам некоторого угла, то проективное растяжение соответствует такому же, но непараллельному движению - с одновременными поворотами. Это преобразование хорошо изучено в тех отделах проективной геометрии, в которых, в частности, рассматриваются инвариантность *двойного отношения гармонических точек* и свойства преобразований *коллинеации* и *гомологии* (*перспективной коллинеации*) (см. [22 - 26]).



Попарное соответствие трёх точек доставляет систему уравнений вида

$$a_1 \cdot x_0 + c_1 = p_0 \cdot (a \cdot x_0 + 1)$$

$$a_1 \cdot x_1 + c_1 = p_1 \cdot (a \cdot x_1 + 1)$$

$$a_1 \cdot x_2 + c_1 = p_2 \cdot (a \cdot x_2 + 1)$$

или

$$a_1 \cdot x_0 + c_1 - a \cdot p_0 \cdot x_0 = p_0$$

$$a_1 \cdot x_1 + c_1 - a \cdot p_1 \cdot x_1 = p_1$$

$$a_1 \cdot x_2 + c_1 - a \cdot p_2 \cdot x_2 = p_2$$

Решение этой системы относительно параметров "a", "a1" и "c1" следующее:

$$a_1 \cdot (x_0 - x_1) - a \cdot (p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1) = p_0 - p_1$$

$$a_1 \cdot (x_2 - x_1) - a \cdot (p_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_1) = p_2 - p_1$$

$$a_1 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) - a \cdot (p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1) \cdot (x_2 - x_1) = (p_0 - p_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$a_1 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) - a \cdot (p_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_1) \cdot (x_0 - x_1) = (p_2 - p_1) \cdot (x_0 - x_1)$$

$$a = \frac{(p_0 - p_1) \cdot (x_2 - x_1) - (p_2 - p_1) \cdot (x_0 - x_1)}{(p_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot x_1) \cdot (x_0 - x_1) - (p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$a_1 = \frac{(p_0 - p_1) \cdot (x_2 - x_1) + a \cdot (p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1) \cdot (x_2 - x_1)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$c_1 = p_0 + a \cdot p_0 \cdot x_0 - a_1 \cdot x_0$$

При известных параметрах a , a_1 , c_1 значение координаты x для данного p равно:

$$x = \frac{p - c_1}{a_1 - a \cdot p}$$

Проективное преобразование плоскости на прямоугольник

Проективное отображение координат $\{x, y\}$ двумерной плоскости в координаты другой плоскости $\{p, q\}$ описывается дробно-линейными выражениями с восьмью коэффициентами [1,2,3,4]

$$p = (a_1x + b_1y + c_1) / (ax + by + 1)$$

$$q = (a_2x + b_2y + c_2) / (ax + by + 1)$$

Коэффициенты этих уравнений являются элементами матрицы однородных координат отображения, причём знаменатель дроби отражает условие нормирования однородной последней координаты результата. (подробнее см.[5]):

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \\ ax + by + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(ax + by + 1) \\ q(ax + by + 1) \\ ax + by + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому для определения искомым восьми параметров $\{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a, b\}$ достаточно выбрать в каждой плоскости по 4 точки с известными координатами.

В качестве таких точек выберем углы прямоугольника кадра с их номерами пикселей $\{0,0, P,0, 0,Q, P,Q\}$, а в плоскости сцены возьмём видимые координаты точек $\{x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$ отображения углов кадра на плоскость. Тогда имеем более простую систему линейных уравнений относительно искомым коэффициентов преобразования:

$$a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0 + c_1 - P \cdot (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1) = 0$$

$$a_2 \cdot x_0 + b_2 \cdot y_0 + c_2 - Q \cdot (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1) = 0$$

$$a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 = 0$$

$$a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1 + c_2 - Q \cdot (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + 1) = 0$$

$$a_1 \cdot x_2 + b_1 \cdot y_2 + c_1 - P \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + 1) = 0$$

$$a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2 = 0$$

$$a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1 = 0$$

$$a_2 \cdot x_3 + b_2 \cdot y_3 + c_2 = 0$$

Эта система уравнений состоит из двух частей: четырёх однородных и четырёх неоднородных уравнений.

Выделим сначала однородную часть системы уравнений,

$$a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 = 0$$

$$a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1 = 0$$

$$a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2 = 0$$

$$a_2 \cdot x_3 + b_2 \cdot y_3 + c_2 = 0$$

и решив её относительно параметров a_1, b_1, a_2, b_2 найдем их связь с параметрами c_1, c_2 и координатами $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$. Имеем:

$$\begin{array}{l} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{array} = \begin{array}{l} -c_1 \cdot \frac{(y_3 - y_1)}{(x_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_3)} \\ -c_1 \cdot \frac{(-x_3 + x_1)}{(x_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_3)} \\ -c_2 \cdot \frac{(-y_2 + y_3)}{(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3)} \\ -c_2 \cdot \frac{(x_2 - x_3)}{(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3)} \end{array}$$

Оставшиеся уравнения с неизвестными c_1, c_2, a и b теперь имеют вид:

$$\left(\frac{c_1}{P}\right) \cdot \left[1 + \frac{(x_1 - x_3) \cdot y_0}{(-y_3 \cdot x_1 + x_3 \cdot y_1)} + \frac{-1 \cdot [(y_1 - y_3) \cdot x_0]}{(-y_3 \cdot x_1 + x_3 \cdot y_1)}\right] = (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1)$$

$$\left(\frac{c_1}{P}\right) \cdot \left[1 + \frac{(x_1 - x_3) \cdot y_2}{(-y_3 \cdot x_1 + x_3 \cdot y_1)} + \frac{-1 \cdot [(y_1 - y_3) \cdot x_2]}{(-y_3 \cdot x_1 + x_3 \cdot y_1)}\right] = (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + 1)$$

$$\left(\frac{c_2}{Q}\right) \cdot \left[1 + \frac{-y_3 + y_2}{x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3} \cdot x_0 - \frac{(x_2 - x_3)}{(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3)} \cdot y_0\right] = (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + 1)$$

$$\left(\frac{c_2}{Q}\right) \cdot \left[1 + \frac{-y_3 + y_2}{x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3} \cdot x_1 - \frac{(x_2 - x_3)}{(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3)} \cdot y_1\right] = (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + 1)$$

Приведение к общему знаменателю и учёт подобных членов в квадратных скобках приводят в числителе дроби к трём из четырех (в соответствии с числом сочетаний из четырёх по три) выражениям второго порядка, имеющим скобочно-симметричный вид с циклическими круговыми подстановками трёх индексов. Обозначим их как S^{***} и заметим, что любая единичная перестановка цифр в S^{***} меняет знак этих выражений:

$$S_{013} = x_0 (y_1 - y_3) + x_1 (y_3 - y_0) + x_3 (y_0 - y_1)$$

$$S_{032} = x_0 (y_3 - y_2) + x_3 (y_2 - y_0) + x_2 (y_0 - y_3)$$

$$S_{132} = x_1 (y_3 - y_2) + x_3 (y_2 - y_1) + x_2 (y_1 - y_3)$$

$$S_{021} = x_0 (y_2 - y_1) + x_2 (y_1 - y_0) + x_1 (y_0 - y_2)$$

(выражение S_{021} возникнет ниже).

В геометрическом смысле параметры C^{***} суть суммарные площади совокупности прямоугольников, построенных из координат с индексами $***$.

Удобное свойство этих циклических выражений (помимо удобства контроля правильности выкладок) заключается в том, что они не превращаются в нуль при любых совпадениях координат плоского невырожденного (т.е. - имеющего площадь) четырёхугольника поля зрения. Это свойство весьма важно, т.к. (это будет видно в дальнейшем) все четыре циклические трёх-индексные выражения являются знаменателями элементов решения, и их отличие от нуля позволяет избежать неопределённостей.

Тогда имеем:

$$-c1 \cdot \frac{C013}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P} = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$-c1 \cdot \frac{C213}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P} = (a \cdot x2 + b \cdot y2 + 1)$$

$$-c2 \cdot \frac{C032}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q} = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + 1)$$

$$-c2 \cdot \frac{C132}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q} = (a \cdot x1 + b \cdot y1 + 1)$$

Эти 4 уравнения относительно неизвестных $c1$, $c2$, a , b также доставляют связь коэффициентов a и b с коэффициентами $c1$ и $c2$:

$$a := \frac{1}{(-y0 \cdot x2 + x0 \cdot y2)} \cdot \left[\frac{(-y0 \cdot C213 + C013 \cdot y2)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3) \cdot P} \cdot c1 - (y2 - y0) \right]$$

$$b = \frac{1}{(-y0 \cdot x2 + x0 \cdot y2)} \cdot \left[\frac{(-x2 \cdot C013 + C213 \cdot x0)}{(x1 \cdot y3 - y1 \cdot x3) \cdot P} \cdot c1 + (-x0 + x2) \right]$$

Используя подстановку

$$u1 := \frac{C013}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P}$$

$$w1 := \frac{C213}{(-y3 \cdot x1 + x3 \cdot y1) \cdot P}$$

$$u2 := \frac{C032}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q}$$

$$w2 := \frac{C132}{(x2 \cdot y3 - y2 \cdot x3) \cdot Q}$$

имеем

$$u1 \cdot c1 + x0 \cdot a + y0 \cdot b = -1$$

$$w1 \cdot c1 + x2 \cdot a + y2 \cdot b = -1$$

$$u_2 \cdot c_2 + x_0 \cdot a + y_0 \cdot b = -1$$

$$w_2 \cdot c_2 + x_1 \cdot a + y_1 \cdot b = -1$$

Тогда решение для a и b имеет вид:

$$a := \frac{\frac{(y_2 - y_0)}{C032} + \left[\frac{(-y_1 + y_0)}{C013} + \frac{(-y_2 + y_1)}{C132} \right]}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]}$$

$$b := \frac{\frac{(x_0 - x_2)}{C032} + \left[\frac{(-x_0 + x_1)}{C013} + \frac{(-x_1 + x_2)}{C132} \right]}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]}$$

Для упрощения получаемого решения оставшихся уравнений относительно c_1 и c_2 удобно использовать подстановку четвертого циклического выражения, упомянутого выше:

$$C021 = x_0 (y_2 - y_1) + x_2 (y_1 - y_0) + x_1 (y_0 - y_2)$$

Тогда

$$c_1 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(-x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3)}{C013}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]} \cdot P$$

$$c_2 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3)}{C032}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]} \cdot Q$$

$$a_1 := \left[-c_1 \cdot \frac{(y_3 - y_1)}{(x_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_3)} \right]$$

$$a_1 := \frac{\frac{C021}{C132} \cdot \frac{(y_3 - y_1)}{C013}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C032} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C013} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C132} \right]} \cdot P$$

$$b_1 := -c_1 \cdot \frac{(-x_3 + x_1)}{(x_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_3)}$$

$$b_1 := \frac{\frac{C_{021}}{C_{132}} \cdot \frac{(-x_3 + x_1)}{C_{013}}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C_{032}} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C_{013}} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C_{132}} \right]} \cdot P$$

$$a_2 := -c_2 \cdot \frac{(y_2 - y_3)}{(-x_2 \cdot y_3 + y_2 \cdot x_3)}$$

$$a_2 := \frac{\frac{C_{021}}{C_{132}} \cdot \frac{(y_2 - y_3)}{C_{032}}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C_{032}} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C_{013}} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C_{132}} \right]} \cdot Q$$

$$b_2 := c_2 \cdot \frac{(x_2 - x_3)}{(-x_2 \cdot y_3 + y_2 \cdot x_3)}$$

$$b_2 := \frac{\frac{C_{021}}{C_{132}} \cdot \frac{(x_3 - x_2)}{C_{032}}}{\frac{(-x_0 \cdot y_2 + y_0 \cdot x_2)}{C_{032}} + \left[\frac{(-y_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot y_1)}{C_{013}} + \frac{(-x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)}{C_{132}} \right]} \cdot Q$$

Решение той же системы уравнений (но уже - с известными коэффициентами $a, b, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$)

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = p \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = q \cdot (a \cdot x + b \cdot y + 1)$$

для получения перспективного *обратного* отображения точки $\{p, q\}$ плоскости кадра на точку $\{x, y\}$ плоскости сцены имеет простой вид:

$$(a_1 - a \cdot p) \cdot x + (b_1 - b \cdot p) \cdot y = p - c_1$$

$$(a_2 - a \cdot q) \cdot x + (b_2 - b \cdot q) \cdot y = q - c_2$$

Тогда:

$$x = \frac{(b_2 - b \cdot q) \cdot (p - c_1) - (b_1 - b \cdot p) \cdot (q - c_2)}{(b_2 - b \cdot q) \cdot (a_1 - a \cdot p) - (b_1 - b \cdot p) \cdot (a_2 - a \cdot q)}$$

или

$$x = \frac{b \cdot (c_1 \cdot q - c_2 \cdot p) + b_2(p - c_1) - b_1 \cdot (q - c_2)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$$

Это выражение интересно в следующей форме:

$$x = \frac{p - c_1}{a_1 - a \cdot p} + \frac{(b_1 - b \cdot p)[(q - c_2) - \frac{(a_2 - a \cdot q)(p - c_1)}{a_1 - a \cdot p}]}{(a_1 - a \cdot p)(b_2 - b \cdot q) + (a_2 - a \cdot q)(b_1 - b \cdot p)},$$

где первое слагаемое соответствует одномерному преобразованию. Соответственно

$$y = -\frac{(a_2 - a \cdot q) \cdot (p - c_1) - (a_1 - a \cdot p) \cdot (q - c_2)}{(b_2 - b \cdot q) \cdot (a_1 - a \cdot p) - (b_1 - b \cdot p) \cdot (a_2 - a \cdot q)}$$

или

$$y = -\frac{a \cdot (c_1 \cdot q - c_2 \cdot p) + a_2(p - c_1) - a_1 \cdot (q - c_2)}{(b \cdot a_2 - b_2 \cdot a) \cdot p + (b_1 \cdot a - b \cdot a_1) \cdot q + (b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2)}$$

Напомним, что эти выражения получены для отображения на любую прямоугольную область с границами, *параллельными границам кадра*