Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

А. А. Мучник

Об $S5$-T-Y логиках

Москва

Аннотация. А.А.Мучник. ОБ $S5$-T-Y ЛОГИКАХ. Изучается наименьшая $S5$-T-Y логика L_∞. Язык этой логики получается добавлением к языку $S5$ связок T ("завтра") и Y ("вчера"). К аксиоматике $S5$ в логике L_∞ добавлены аксиомы T-Y— логики (см. [2] и аксиомы:
$\Box A \to TA \wedge YA$, $TA \vee YA \to \Diamond A$
$T\Box A \leftrightarrow \Box A$, $Y\Box A \leftrightarrow \Box A$
и правило подстановки. Доказывается, что точной шкалой Крипке для L_∞ является счетное объединение шкал с порядковым типом Z (множества целых чисел). Используется приведение формул к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).
Библ. 3 названия

A.A.Muchnik. ON $S5$-T-Y LOGIC. The least $S5$-T-Y logic is studied. The language of this logic is formed by addition of the connectives T ("tomorrow") and Y ("yesterday") to the language of $S5$. The T-Y logic axioms (cf. [2]) and the axioms
$\Box A \to TA \wedge YA$, $TA \vee YA \to \Diamond A$
$T\Box A \leftrightarrow \Box A$, $Y\Box A \leftrightarrow \Box A$
with the rule of the substitution are added to the axiomatic of $S5$. It is proved, that L_∞ is determined of the Kripke frame which is the union of the frames which has the order type Z (the set of the integers). It is used the reducing of the formulas to perfect disjunctive normal forms (PDNF).
Bibl. 3 names.

Известно, что классическая логика высказываний (КЛВ) имеет точную двузначную модель, тогда как точные модели неклассических логик высказываний (НЛВ) в большинстве случаев оказываются бесконечными, и к ним не применимы основные методы исследования конечнозначных логик. Однако, НЛВ моделируются с помощью КЛВ в реляционных моделях: истинностные оценки каждого высказывания в этих моделях зависят еще от одной переменной w, называемой ситуацией, состоянием или "миром". Этой переменной нет в синтаксисе логики, она фигурирует только в моделях. Классические операции (их называют также связками) $\wedge$, $\vee$, $^{-}$ действуют покомпонентно, т. е. в каждой ситуации независимо, а неклассические операции — в зависимости от отношения достижимости R на множество миров W. Пара (W, R) называется шкалой Крипке или реляционной шкалой. Простейшими бесконечнозначными НЛВ являются $S5$ (модальная) и T-Y логика (временная). Обе они предтабличны, т. е. добавление любой новой (т. е. не выводимой) аксиомы делает их конечнозначными [1, 2]. Точной шкалой для $S5$ является счетное множество — универсум W с универсальным отношением достижимости $R = W \times W$. Значение формулы $\Box F(\Diamond F)$ в каждом мире $w \in W$ равно 0 — "лжи"(равно 1 — "истине"), если $(\exists w)(V(F, w) = 0)$ (соответственно, $(\exists w)(V(F, w) = 1)$), где V — оценка. В T-Y логике кроме классических связок $\wedge$, $\vee$, $^{-}$ есть еще две: T — "завтра"и Y — "вчера". Точной шкалой T-Y логики является (Z, R^{+}, R^{-}), где универсум $Z = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2\dots\}$, $R^{+}(u, v)$ означает $v = u + 1$, $R^{-}(u, v)$ означает $v = u - 1$, $u, v \in Z$. Оценка задается так:

$$V(F, w) = V(F, w + 1), \quad V(YF, w) = V(F, w - 1),$$

где F — формула, а $w \in Z$.

Таким образом, если высказывания $\Box F$ и $\Diamond F$ характеризуют "поведеие"F глобально, т. е. по всему универсуму W, то оценки высказываний $f(p_1, \dots, p_n)$ T-Y логики в каждом мире w характеризует "поведение"оценок переменных $p_1, \dots, p_n$ в некоторой окрестности мира w, т. е. локальное. Тем самым, T-Y логика уже дает возможность описания (хотя и только локального) дискретных процессов, например, состояний вычисления. T-Y логика связана с детерминированной динамической логикой с обращением. Связке соответствует программа, а связке Y — ее обращение. Ранее рассматривались $S5$-подобные логики с "глобальными"связками, и другие "локальные"логики с несколькими связками типа "завтра".

Представляет интерес рассмотрение комбинации $S5$ с T-Y логикой, в которой должны сочетаться локальные и глобальные характеристики оценок высказываний. Если каждая формула $f(p_1, \ldots, p_n)$ КЛВ утверждает нечто о двузначной истинности $p_1, \ldots, p_n$, формула $S5$ логики — об истинности $p_1, \ldots, p_n$ во всем W, формула T-Y логики — об истинности $p_1, \ldots, p_n$ в окрестности каждого данного мира, то формула $S5$-T-Y логики характеризует поведение $p_1, \ldots, p_n$ в окрестностях данного мира w и длины, зависящей от формулы, но по всему универсуму W.

Формулы $f(\bar{p})$ характеризуют глобально-локальные свойства векторного высказывания $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ в универсуме. Аксиомы же характеризуют все возможные оценки $\bar{p}$ и сам универсум (например, его мощность или его связность и т.д.)

На самом деле существует бесконечное множество $S5$-T-Y логик, образующее решетку L (по включению множеств истинных формул). Опишем некоторые из них, начав с наименьшей (нормальной) L_∞, т. е. с $\inf L$.

Язык каждой $S5$-T-Y логики содержит связки $\vee, \wedge, ^-, \Box, \Diamond, , Y$. Формула $F \to G$ является сокращением для $\bar{F} \vee G$, а $F \leftrightarrow G$ — сокращением для $(F \to G) \wedge (G \to F)$. $\Diamond F$ — сокращение для $\overline{\Box \bar{F}}$.

Генценовская формулировка для L_∞ получается присоединением к исчислению G [3] правил:

$$(\to \Box)\frac{\Box\Gamma \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box A}, \quad (\Box \to)\frac{A, \Box A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}$$

Γ, Δ — списки, A — формула

$$(T)\frac{\Gamma_1, Y\Delta_1, \Box\Sigma_1 \to \Gamma_2, Y\Delta_2, \Box\Sigma_2}{T\Gamma_1, \Delta_1, \Box\Sigma_1 \to T\Gamma_2, \Delta_2, \Box\Sigma_2}$$
$$(Y)\frac{\Gamma_1, T\Delta_1, \Box\Sigma_1 \to \Gamma_2, T\Delta_2, \Box\Sigma_2}{Y\Gamma_1, \Delta_1, \Box\Sigma_1 \to Y\Gamma_2, \Delta_2, \Box\Sigma_2}$$

$Y\Delta$, $T\Delta$, $\Box\Delta$ суть списки формул Δ, перед которыми поставлены связки Y, T и $\Box$ соответственно.

Устранимость сечения доказывается.

Аксиоматика.

I. Схемы аксиом КЛВ с правилом $A, A \to B \vdash B$

II. Схемы аксиом $S5$ с правилом $A \vdash \Box A$ (см. [1])

III. Схемы аксиом T-Y логики (см. [2]). Приведем их здесь.

$$T(A \vee B) \leftrightarrow TA \vee TB, \quad T(A \wedge B) \leftrightarrow TA \wedge TB, \quad T\bar{A} \leftrightarrow \overline{TA},$$

$$Y(A \vee B) \leftrightarrow YA \vee YB, \quad Y(A \wedge B) \leftrightarrow YA \wedge YB, \quad Y\bar{A} \leftrightarrow \overline{YA},$$

$$TYA \leftrightarrow A, \quad YTA \leftrightarrow A.$$

IVa. $\Box A \to TA \wedge YA$ IVб. $TA \vee YA \to \Diamond A$ [1]

Va. $T\Box A \to \Box A$ Vб. $Y\Box A \to \Box A$

Теорема 1. *Точной шкалой Крипке для* L_∞ *является счетное объединение* W *шкал* $Z = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ *с отношением* $R = W \times W$ *для* $\Box$.

Теорема 2. *Логика* L_∞ *разрешима.*

Доказательство теорем 1 и 2 основано на приведении каждой формулы в $S5$-Y-T логике к совершенной дизъюнктивной нормальной форме(СДНФ), а именно, на последовательности синтаксически и семантически (в шкале (W, R, R^+, R^-)) эквивалентных преобразований, приводящих произвольную формулу $f(p_1, \ldots, p_n)$ к стандартной форме. Приведение проводится так. Сначала проносим внутрь связки T и Y, уничтожая их, когда они оказываются рядом друг с другом или с $\Box, \Diamond$, используя аксиомы групп III, IV, и V. Затем проводим приведение в $S5$, устраняя итерированные модальности, [1]. Так всякая формула $f(p_1, \ldots, p_n)$ в языке пропозициональной логики $S5$ приводится к СДНФ вида

$$\vee_{i \in I} K_h \cdot \wedge_{j=1}^{2^n} (\Diamond K_j)^{\sigma_{ij}},$$

где $K_j = \wedge_{k=1}^{n} p_k^{\tau_{jk}}$.

Всякая формула $f(p_1, \ldots, p_n)$ в языке пропозициональной $S5$-Y-T логики приводится к виду

[1] Аксиомы IVa и IVб избыточны и приводятся только для удобства рассмотрений.

$$\vee_{t\in I_l} T^{\phi(t)} B_{g(t)} \cdot \wedge_{j=1}^{2^{nl}} (\Diamond B_j)^{\sigma_{tj}}, \qquad (*)$$

где $B_j = \wedge_{m=1}^{l} T^m p_k^{\tau_{jkm}}$.

Здесь $F^1 = F$, $F^0 = \bar{F}$, $YF = T^{-1}F$, $T^k = TT^{k-1}F$, $T^0F = F$, все $\sigma, \tau \in \{0,1\}$, $-l \leqslant \phi(t) \leqslant 0$.

Число l должно быть не меньше чем T-глубина формулы f. Выводимость и общезначимость на W формулы $f(p_1, \ldots, p_n)$ равносильны выводимости и общезначимости на W формулы $\Box f(p_1, \ldots, p_n)$. Для последней СДНФ имеет более простой вид

$$\Box f(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \vee_{i\in I_l} \wedge_{j=1}^{2^{nl}} (\Diamond B_j)^{\sigma_{ij}} \qquad (**)$$

Эта СДНФ не единственна, хотя бы в силу того, что $\overline{\Diamond p} \cdot \overline{\Diamond \bar{p}}$ тождественно ложная формула (так называемая нулевая конъюнкция).

Определение 1. Конъюнкция $B_j = \wedge_{m=1}^{l} T^m p_k^{\tau_{jkm}}$ является T-продолжением конъюнкции $B_s = \wedge_{m=1}^{l} T^m p_k^{\tau_{skm}}$, если

$$(\forall k)(\forall m, 1 \leqslant m \leqslant l-1)(\tau_{jkm} = \tau_{sk(m+1)}).$$

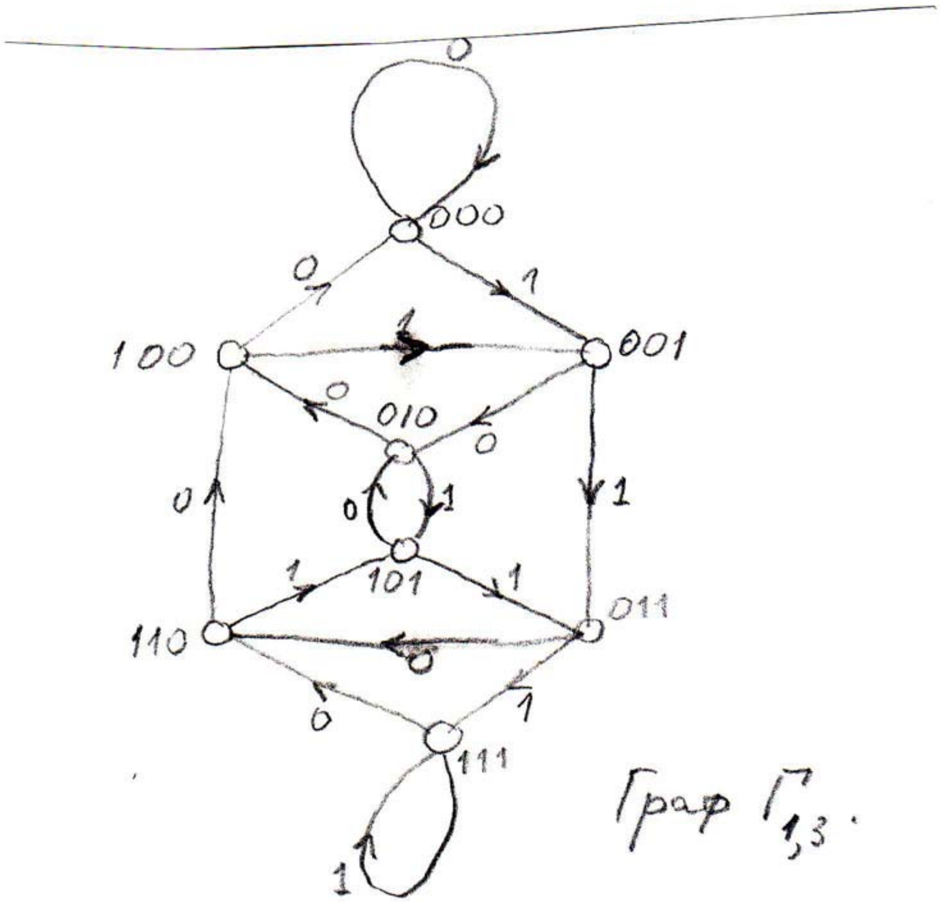
В этом случае говорим, что B_s является Y-продолжением конъюнкции B_j.

Определение 2. Множество $M_i = \{B_j | \sigma_{ij} = 1\}$ конъюнкций называется Y--продолжаемым, если

$$(\forall j | 1 \leqslant j \leqslant 2^{nl}, B_j \in M_i)(\exists s, t | 1 \leqslant s, t \leqslant 2^{nl})$$

($B_s \in M_i$ и $B_t \in M_i$ и B_s является Y-продолжением, а B_t является T-продолжением B_j).

Очевидно, что каждому $i \in I_l$ в формуле (**) соответствует некоторое множество конъюнкций M_i. Формулу (**) удобно проиллюстрировать на орграфе $\Gamma_{n,l}$. Вершины орграфа $\Gamma_{n,l}$ соответствуют конъюнкциям B_j и помечаются двоичными наборами $\tau_{j,k,m}$ ($k = 1, \ldots, n$; $m = 1, \ldots, l$). От B_s к B_j идет стрелка, помеченная двоичным набором длины n $\tau_{j,k,l}$ ($k = 1, \ldots, n$), если B_j является T-продолжением B_s. В графе $\Gamma_{n,l}$ каждому M_i соответствует множество G_i вершин $\{B_j | \sigma_{ij} = 1\}$.



Тем самым в графе $\Gamma_{n,l}$ выделяются множества подмножеств вершин G_i, $i \in I_l$. Особенно наглядно это для малых n и l, скажем, $n = 1$, $l = 3$ (см. рисунок).

Необходимым и достаточным условием выводимости формулы $\Box f$ (и общезначимости ее на W) является наличие в (**) справа всех Y-T-продолжаемых множеств M_i.

Из доказательства теоремы 2 легко выводится финитная аппроксимируемость логики $S5$-T-Y.

Список литературы

[1] Р. Фейс. Модальная логика, М.: Наука 1974, С. 425–427.

[2] Н. М. Ермолаева, А.А.Мучник. Предтабличная временная логика. В сб. "Исследования по неклассическим логикам и теории множеств". М.: Наука, 1979, С. 288–297.

[3] С.К. Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ.1957.