АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2007, том 41, № 1, с. 1–20

УДК 523. 33

О ВЛИЯНИИ СПИРАЛЬНОСТИ НА ЭВОЛЮЦИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СОЛНЕЧНОМ ПРОТОПЛАНЕТНОМ ОБЛАКЕ

© 2007 г. А. В. Колесниченко, М. Я. Маров
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Поступила в редакцию 26.04.2006 г.

В рамках проблемы реконструирования эволюции протопланетного облака, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, исследован вопрос о возможном влиянии гидродинамической спиральности, возникающей во вращающемся диске, на синергетическое структурирование космического вещества, а также на появление эффекта отрицательной турбулентной вязкости в нем. Показано, что сравнительно длительное затухание турбулентности в диске может быть частично связано с отсутствием отражательной симметрии относительно его экваториальной плоскости анизотропного поля турбулентных скоростей. Сформулирована общая концепция возникновения энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности. Вследствие энерговыделения обратный каскад порождает иерархическую систему уплотнений вещества с фрактальным распределением плотности, инициирующих, в конечном счете, механизмы триггерного кластерообразования. В случае двухмасштабного гидродинамического описания предельно развитой дисковой турбулентности методами неравновесной термодинамики доказана возможность появления эффекта отрицательной вязкости в трехмерном случае. Отрицательная вязкость во вращающейся дисковой системе является, по-видимому, проявлением каскадных процессов в спиральной турбулентности, когда осуществляется инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным. В рамках асимметричной механики турбулизованных сред физически обосновано феноменологическое выражение для тензора турбулентных напряжений Wasiutynski, широко используемое в астрофизической литературе при объяснении дифференциального вращения разнообразных космических объектов “анизотропной вязкостью”. Предпринятое исследование нацелено, в конечном итоге, на совершенствование ряда репрезентативных гидродинамических моделей космических природных турбулизованных сред, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, образование аккреционных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, а также формирование газовых оболочек планет – атмосфер и т.п. Оно является продолжением стохастико-термодинамического подхода к синергетическому описанию структурированной турбулентности астро-геофизических систем, развиваемого авторами в серии работ (Колесниченко, 2004; 2005; Колесниченко, Маров, 2006; Marov, Kolesnichenko, 2002;2006).

PACS numbers: 95.30.Lz

ВВЕДЕНИЕ

Понимание эволюции солнечного протопланетного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании Земли и планет – вопроса, глубинно связанного с основополагающей проблемой космогонии, решение которой является на сегодняшний день крупнейшей задачей науки (Шмидт, 1957; Сафронов, 1982; Галимов, 2001). По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылегазовым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой компоненты к экваториальной плоскости диска[1)], перпендикулярной оси вращения z (см., например, Toomre, 1964; Сафронов, 1969, 1982, 1987; Goldreich, Ward, 1973; Nakagawa и др., 1986; Youdin, Shu, 2002). Именно из вещества субдиска, как теперь стало ясно, и образовались планеты Солнечной системы путем возникновения отдельных дискретных центров уплотнения и последующего их роста. Важно подчеркнуть, что одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно возникновения и эволюции околозвездных газопылевых дисков любого рода является их турбулентная природа (Zel’dovich, 1981; Фридман, 1989; Dubrulle, 1993; Balbus, Hawley, 1998; Richard, Zahn,

[1)] Сплющивание вращающегося допланетного облака является в основном, следствием противоборства двух основных динамических сил – гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, самогравитация диска и электромагнитные явления.

1999). В частности, для вращающегося с угловой скоростью Ω солнечного протопланетного диска радиуса R число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\text{glob}} \equiv \Omega R^2/\nu$ оказалось больше 10^{10} (здесь ν – кинематическая вязкость, предполагаемая далее постоянной).

По современным представлениям наиболее вероятными причинами генерации турбулентности в астрофизических дисках являются крупномасштабное сдвиговое течение дифференциально вращающегося космического вещества (Горькавый, Фридман, 1994; Fridman и др., 2003), а также хаотические магнитные поля (см. Armitage и др., 2001), причем энергия последних часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности[2)]. В связи с этим аккреционные диски обладают значительной турбулентной вязкостью, что приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного внутреннего источника тепловой энергии в них.

Таким образом, синергетические процессы самоорганизации (приводящие, в конечном счете, к структурированию любых астрофизических дисков) в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса (см. Колесниченко, 2003; 2004) на фоне осредненного крупномасштабного сдвигового течения космического вещества[3)], связанного с его дифференциальным вращением, являются важнейшими механизмами, формирующими свойства протопланетного облака на разных стадиях его эволюции, включая создание вязкого аккреционного диска вокруг молодого Солнца, проходившего стадию Т Тельца, формирование пылегазового субдиска, разрушение последнего в результате гравитационной неустойчивости и возникновение дискретных центров уплотнения с последующим образованием и ростом планетезималей, из которых и образовалась планетная система. Это относится также и к возникновению на начальном этапе эволюции турбулизованного дискового вещества разнообразных мезомасштабных относительно устойчивых когерентных вихревых структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. Barge, Sommeria, 1995; Tanga и др., 1996; Chavanis, 1999; Колесниченко, 2005), в результате чего происходит интенсификация фазовых переходов и процессов тепло- и массообмена между различными областями дисковой многофазной системы, самопроизвольное возникновение и рост конденсированных пылевых кластеров[4)], существенная модификация спектра колебаний и т.п. На более поздних стадиях эволюции допланетного облака, по мере охлаждения диска, конденсации твердых частиц и увеличения их в размерах (в основном в результате процессов коагуляции), а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой составляющей существенно возрастает. В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газовзвеси, что приводит, в конечном счете, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости (z = 0) диска. Таким образом, турбулентность дисковой среды, вопреки мнению многих исследователей, так или иначе способствует формированию пылегазового субдиска, гравитационная неустойчивость которого приводит в конечном итоге к образованию планетезималей (см. Колесниченко, Маров, 2006). В связи со сказанным, особо важное значение приобретает проблема длительного поддержания турбулентности (неупорядоченных хаотических движений) в протопланетном облаке[5)], поскольку от интенсивности турбулизации космического вещества на разных этапах эволюции диска в значительной степени зависят и возможные механизмы формирования планет (Сафронов, 1969). К тому же, с эволюцией структурированной крупномасштабной турбулентности, производящей перераспределение начального углового момента и вещества облака (внешних частей – наружу, внутренних к Солнцу) по радиусу диска, связана проблема современного распределения массы и углового момента между Солнцем и планетами[6)]. Для реализа-

[2)]Хаотические магнитные поля, тянущиеся вместе с аккрецируемой плазмой, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению диска и испытывающие пересоединение на границах между хаотическими ячейками, также должны вносить значительный вклад в вязкость во внутренней области диска и во внешних слоях его атмосферы, где достигается достаточная степень ионизации вещества. Важную роль в физике аккреции могут играть также и крупномасштабные магнитные поля (см. Eardley, Lightman, 1975).

[3)]Как правило турбулентность в диске рассматривается как существенно стохастическое явление, описываемое осредненными гидродинамическими уравнениями с тензором рейнольдсовых напряжений, учитывающим влияние фонового мелкомасштабного поля флуктуаций скорости.

[4)]Один из возможных сценариев образования и роста пылевых частиц в плазме состоит из следующих этапов: сначала образуются первичные кластеры; после прохождения критического размера начинается этап гетерогенной конденсации; на следующем этапе на первый план выходят процессы коагуляции и агломерации (слипания); наконец, на последнем этапе становится наиболее важной поверхностная рекомбинация ионов, приводящая к постоянному осаждению материала на поверхности изолированных многозарядных частиц.

[5)]Согласно ранним оценкам Von Weizsacker, (1948) величина средней турбулентной скорости порядка одной десятой орбитальной скорости ведет ко времени распада облака порядка 10^3 лет, тогда как 10^8 лет нужны для формирования планет согласно томуже автору.

[6)]Напомним, что на долю Солнца приходится 99, 87% массы и лишь 2% углового момента системы; такой диспаритет массы и углового момента трудно объяснить в рамках моделирования процесса коллапса протозвезды и образования диска.

ции современного распределения этих величин необходимо, чтобы на протяжении всей стадии Т Тельца во всем диске или значительной его части происходило перетекание вещества и в направлении звезды[7)]. Известно, что для дифференциально вращающегося кеплеровского диска (каким в первом приближении можно считать солнечный протопланетный диск) угловая скорость среднего вращения $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ растет по закону $|\mathbf{r}|^{-3/2}$, т.е. при приближении к центральному телу каждый слой вещества вращается быстрее. Таким образом, существование направленного во внутренние слои диска турбулентного потока импульса (вещества) является, вообще говоря, проявлением эффекта отрицательной турбулентной вязкости[8)], поскольку поток переносит осредненное количество движения от более медленно вращающихся внешних частей диска к более быстро вращающимся его внутренним частям (см. Старр, 1971; IX. Приложение к околосолнечной туманности). Хотя в литературе и предложены различные источники генерации турбулентности на разных этапах эволюции околосолнечного протопланетного облака (либо его отдельных областей) и механизмы переноса массы и углового момента в дисках (см., например, обстоятельный обзор Макалкина (2003) и обширную библиографию к нему), эти результаты все еще требуют дальнейшего подтверждения и развития.

Важно отметить, что проведенные различными авторами исследования дисковой турбулентности в рамках данной проблематики базируются, в основном, на классическом представлении о ее статистической однородности и локальной изотропности (см. Колмогоров, 1941; 1962). Локальная изотропия мелкомасштабной турбулентности подразумевает инвариантность пульсационного поля скоростей $\mathbf{u}$ как относительно поворотов системы отсчета, так и при зеркальном отражении в произвольной плоскости. Вместе с тем, по современным воззрениям, в свободных сдвиговых слоях дифференциально вращающегося дискового вещества картина турбулентного течения представляет собой до известной степени “двойную”[9)] анизотропную систему, состоящую из совокупности движущихся и взаимодействующих макро- и мезомасштабных спиральных вихревых образований, наложенных на фон мелкомасштабных пульсационных скоростей (турбулентный хаос); причем сами мелкомасштабные вихревые движения могут быть частично высокоорганизованными. Подобное явление связано с еще недостаточно изученной тенденцией турбулентного течения самоорганизовываться при больших числах Рейнольдса в разнообразные когерентные структуры (см., например, Хлопков и др., 2002). Кроме этого, в турбулизованном протопланетном облаке, как в любом вращающемся газовом объекте (имеющем внутренние источники тепла), генерируется, по-видимому, так называемая плотность спиральности $\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ (псевдоскаляр, меняющий знак при зеркальном отражении), также приводящая к анизотропии мелкомасштабной турбулентности, которая в этом случае имеет гиротропный характер (см. Вайнштейн и др. 1980; Краузе, Рэдлер, 1984). Последнее означает, что в мелкомасштабном вихревом движении левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Итак, от величины и направления вектора угловой скорости вращения протопланетного облака $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ зависят многие важные гидродинамические параметры космического вещества, среди которых и такая лишенная отражательной симметрии статистическая характеристика поля пульсационной скорости, как средняя спиральность[10)] H (величина, лишенная отражательной симметрии), влиянием которой на каскадные процессы энергии в трехмерной гиротропной турбулентности можно, как будет показано ниже, объяснить возможный эффект отрицательной вязкости в диске[11)]. Следует отметить что, для объяснения этого феномена обычно используют теорию двумерной турбулентности, в рамках которой обеспечивает-

[7)]Вещество внутренних областей диска благодаря вязкостным силам трения (возникающим вследствие относительного сдвига элементов газовзвеси при их орбитальном движении) дрейфует к прото-Солнцу по очень пологой спиральной траектории в то время, как его момент количества движения передается наружу – из внутренних областей диска во внешние области.

[8)]Отрицательная вязкость является характеристикой статистического ансамбля хаотических вихревых движений вращающегося газового вещества, описывающей его способность переносить статистически осредненное количество движения из областей пространства, где его плотность меньше, в область, где она больше; при этом осредненное течение получает кинетическую энергию от нерегулярных вихревых движений, а сами хаотические движения либо постепенно ослабевают, либо же поддерживаются некоторыми внутренними процессами, например систематическим преобразованием тепла в кинетическую энергию в рамках отдельных возмущений (Старр, 1971). Поскольку осредненное течение имеет большие, а пульсационное – меньшие масштабы движения, то с отрицательной вязкостью связан перенос энергии по спектру от меньших масштабов к большим.

[9)]Таунсенд (1959) называл когерентные вихревые образования и мелкомасштабную турбулентность проявлением “двойной” структуры турбулентности, подчеркивая тем самым влияние организованных вихревых движений на процессы турбулентного переноса в сдвиговых слоях.

[10)]Сохранение средней спиральности в течениях невязкой жидкости было открыто относительно недавно Moreau, (1961).

[11)]Это явление представляет собой гидродинамический аналог альфа-эффекта в магнитной гидродинамике (Steenbeck и др., 1966), объясняющего рост крупномасштабного магнитного поля (динамо-эффекта) при турбулентном движении проводящей сплошной среды, происходящем с нарушением инвариантности относительно изменения четности.

ся инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным (см., например, Монин, Яглом, 1996). Как известно, в Солнечной системе отрицательная вязкость проявляется, в частности, в глобальных циркуляциях вещества на Солнце, Юпитере, Сатурне, Венере (вероятно, также на Уране и Нептуне), в циркуляциях земной атмосферы и океана (см. Монин и др., 1989). Крупномасштабные движения на сферической поверхности этих космических тел можно исследовать в рамках двумерной гидродинамики, поскольку горизонтальные размеры течения значительно превосходят локальную шкалу высот по плотности (см. Старр, 1971; Sivashinsky, Frenkel, 1992; Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994). По-видимому, подобный подход возможно частично реализовать и в рассматриваемом нами случае дисковой турбулентности, поскольку сдвиговым движениям вещества в тонких астрофизических дисках, у которых отношение толщины h_{disk} к радиусу R гораздо меньше единицы ($h_{\text{disk}}/R \ll 1$), также должны быть присущи некоторые черты двумерной[12)] турбулентности (см., например, Bodenheimer, 1995; Klahr, Bodenheimer, 2003).

К сожалению, при использовании в моделях эволюции тонкого астрофизического диска теории двумерной турбулентности возникает чисто формальная проблема: следует ожидать конденсации энергии на некотором максимально доступном масштабе, лежащем между масштабом накачки и характерным размером системы. В задачах геофизической гидродинамики подобные трудности разрешаются наличием приповерхностного трения, орографии, радиационного выхолаживания энергии и т.п., которые приводят к стоку энергии и определяют, в конечном счете, квазиравновесное состояние турбулентного поля. В частности, проявлением подобного рода факторов является существование некоторых внешних масштабов (например, радиуса Россби–Обухова), ограничивающих распространение энергии в сторону все более и более крупномасштабных движений и определяющих, таким образом, типичные размеры наблюдаемых когерентных вихревых образований. Однако, при использовании двумерной турбулентности в эволюционных моделях аккреционного диска (системы без четко выраженных твердых границ) избежать подобных затруднений будет не легко, поскольку для этого понадобится либо вводить некую виртуальную длинноволновую диссипацию (при этом мы вступаем на чисто спекулятивный путь), либо согласиться с наличием быстро затухающей турбулентности, что не отвечает относительно долговременному (вплоть до момента образования планетезималей) поддержанию хаотического поля скоростей в диске. Таким образом, в отношении дисковой проблематики теория двумерной турбулентности представляет, по-видимому, лишь ограниченный интерес.

Вместе с тем, как уже было отмечено выше, реальная турбулентность в астрофизическом диске имеет гиротропный характер, поскольку пульсационное поле скоростей $\mathbf{u}$ при сильном вращении дискового вещества и неоднородности интенсивности турбулентных пульсаций не обладает, в общем случае, отражательной симметрией относительно преобразования $z \longrightarrow -z$. Впервые на важность спиральности локализованных возмущений вихрей для трехмерной гидродинамики турбулизованной жидкости указал Moffat, (1969). Он же обнаружил связанный с ней интегральный инвариант $H \equiv \langle(\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{u})/2\rangle$, характеризующий степень связности вихревых образований в потоке (см, например, Сэффмэн, 2000; Алексеенко и др., 2005) и сохраняющийся вдоль траектории движения любой жидкой частицы невязкой среды[13)]. Существование этого дополнительного невязкого инварианта для трехмерной турбулентности сразу же предполагает некоторую степень свободы для энергетического каскадного процесса, поскольку теперь две величины (средняя энергия $E \equiv \langle|\mathbf{u}|^2/2\rangle$ и средняя спиральность H), сохраняющиеся при нелинейных взаимодействиях в инерциальном интервале энергетического спектра, одновременно участвуют в каскадном турбулентном процессе. По аналогии с двумерными течениями несжимаемой невязкой жидкости (когда также существует каскадный перенос двух квадратичных по скоростям интегралов – энергии E и энстрофии $\Omega \equiv \langle(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})^2/2\rangle$), возможен, вообще говоря, такой режим турбулентного движения, при котором реализуется каскад этих сохраняемых величин к противоположным концам спектра, причем прямой каскад спиральности к мелким масштабам будет сопровождаться обратным каскадом энергии к более крупным масштабам.

Из всего сказанного следует, что без учета законов симметрии вращающейся турбулентности затруднительно, по-видимому, построить адекватную математическую модель процессов эволюции реального анизотропного пульсационного поля скоростей в протопланетном облаке. Поскольку вопрос о влиянии флуктуаций фоновой спиральности на появление в диске отрицательной вязкости, а также на структурирование дифференциально вращающегося дискового веще-

[12)] Более точно следует говорить о квазидвумерной турбулентности, в которой движения являются приближенно двумерными, т.е. описываются двумерными уравнениями гидродинамики, содержащими, однако, специальные дополнительные слагаемые.

[13)] Напомним, что согласно теореме Кельвина, при, $\nu = 0$, $p = p(\rho)$ и консервативности внешних сил на единицу массы, вихревые линии являются вмороженными в жидкость и вследствие этого неизбежно сохраняются узлы и зацепления на вихревых нитях (см. Алексеенко и др., 2005) ства до настоящего времени детально не обсуждался в литературе, нами в данной работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

ДВУХУРОВНЕВОЕ ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ДИСКЕ

Далее мы будем исходить из концепции двухуровневого[14)] макроскопического описания турбулизованной среды протопланетного облака с помощью двух взаимодействующих континуумов (взаимно открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса[15)]. Континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, предназначен для исследования эволюции осредненных гидродинамических полей, включая крупные вихревые образования в диске. Подсистема турбулентного хаоса (в общем случае вихревой анизотропный континуум с внутренней структурой[16)] представляет собой собственно турбулентное поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, связанное со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной[17)] жидкости (для которой $\omega \equiv \equiv \mathrm{rot}\mathbf{u} \neq 0$). Подобное деление реального турбулентного течения на воображаемые – осредненное и пульсационное, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области осреднения (при выполнении условий эргодичности), для которой установлены средние значения локальных гидродинамических переменных, являющихся непрерывными функциями координат $\mathbf{r} =(x, y, z)$ и времени t, т.е. имеет до некоторой степени условный характер.

Для составления полной системы уравнений движения турбулизованной жидкости, характеризуемой двумя линейными масштабами движений L (внешним) и l_0 (внутренним), удобно ввести две координатные системы: микромасштаба x'_j ($\delta x'_j \sim l$) и макромасштаба x_j($dx_j \sim \Lambda \gg l$). Эти системы координат подразделяют пространство на элементарные объемы[18)] $\delta\mathbf{r}'$ и $d\mathbf{r}$ соответственно. Будем далее считать, что $L \gg \Lambda \geq l_0$ и $l_0 \gg l \gg l_\nu$. Здесь величина L есть интегральный масштаб турбулентности (характерный масштаб движения системы), величина l_0 (размер турбулентного “моля”) есть масштаб внутреннего движения или состояния среды, а величина l_ν есть молекулярный почти нулевой микромасштаб. Можно поставить задачу нахождения гидродинамических уравнений движения в макромасштабе x_j по известным уравнениям Навье–Стокса в микромасштабе x'_j. Связанная с этой задачей проблема осреднения является одной из центральных в механике сплошных сред, а в случае такой сложной системы, как турбулизованная жидкость, часто именно от способа осреднения зависит само построение макроскопической модели[19)]. Гидродинамический масштаб осредненного движения Λ (например, шаг разрешения разностной сетки) предполагается далее таким, что подсистема турбулентного хаоса в области осреднения $d\mathbf{r} \sim \Lambda^3$ содержит всю совокупность мезомасштабных когерентных структур, размер которых меньше области осреднения[20)]. В этом случае воздействие турбулентного хаоса на осредненное движение проявляется в дополнительном турбулентном переносе импульса и энергии мелкомасштабными вихревыми образованиями, что требует построения полуэмпирических моделей замыкания (определяющих соотношений) для осредненных гидродинамических уравнений, а также моделирования эффективных коэффициентов турбулентного обмена, учитывающих, в частности, анизотропию хаоса, связанную с наличием мезомасштабных когерентных структур (Колесниченко, 2002).

Уравнения турбулентного хаоса при наличии среднего течения. Итак, пусть случайная составляющая $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ обладает характеристической длиной l_0[21)], которая мала по

14)Подобный подход является, по-существу, приложением многомасштабных методов к турбулентности (см., например, Dubrulle, Frisch, 1991; Fannjiang, Papanicolaou, 1994).

15)Именно этот способ описания развитой гидродинамической турбулентности явился той отправной точкой, который позволил авторам начать разработку моделей структурированной мезомасштабной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных флуктуирующих средах (см. Колесниченко, 2002; 2003; 2005; Marov, Kolesnichenko, 2006).

16)Как показано в работе (Колесниченко, 2005), в процессе временной эволюции квазиравновесной подсистемы турбулентного хаоса, возможно генерирование мезомасштабных когерентных структур, связанное с эффектом взаимной фазовой синхронизации (когерентности) некоторой совокупности мелкомасштабных колебательных мод с близкими частотами.

17)Завихренность играет в механике турбулентности определяющую роль, создавая возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными.

18)Важно иметь в виду, что здесь речь не идет об абсолютных размерах. К примеру, если рассматривается гидродинамическая модель дисковой среды, то физически бесконечно малый объем в этом случае может быть значительно большим объема отдельно взятой планеты.

19)Современные методы пространственного осреднения турбулизованной жидкости, соответствующие переходу от уравнений движения малых элементов сплошной среды к описанию тех же движений в макромасштабе, наиболее отчетливо представлены в недавно опубликованной работе (Nikolaevskiy, 2003).

20)Согласно существующим оценкам, чтобы осредненному потоку содержать основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в десять-двадцать раз меньше интегрального масштаба L.

сравнению с гидродинамическим масштабом осреднения Λ. Далее будем полагать, что в любом промежуточном масштабе l, удовлетворяющем неравенству $l_\nu \ll l \ll l_0 \ll \Lambda$, осредненная скорость $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\rangle$ изменяется слабо, и потому на таких промежуточных масштабах возможно применение методов теории однородной турбулентности (см. Монин, Яглом, 1996). В данной работе будем предполагать также, что на дисковую среду не действуют электромагнитные силы, диск вращается вокруг оси z с кеплеровской угловой скоростью $\Omega(r)$, и примем центр масс системы за начало отсчета. Кроме этого, будем для простоты полагать, что крупномасштабное (осредненное) течение сводится лишь к дифференциальному вращению. Тогда в цилиндрических координатах (r, φ, z) компоненты вектора осредненной скорости $\langle \mathbf{U}\rangle$ будут иметь вид: $\langle U\rangle_r = 0$, $\langle U\rangle_\varphi = \Omega(r)r$, $\langle U\rangle_z = 0$. Таким образом, в нашем анализе дисковой трехмерной турбулентности будем исходить из следующей системы мгновенных уравнений движения для несжимаемой[22)] однородной жидкости, включающей уравнение Навье– Стокса, уравнение неразрывности и уравнение состояния

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\rho^{-1}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{U} + \mathbf{g}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \quad p = p(\rho). \tag{1}$$

Здесь $P(\mathbf{r}, t)$ – истинное (мгновенное) давление дискового вещества, $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Psi$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – ньютоновский гравитационный потенциал. Когда масса протопланетного облака составляет несколько процентов от массы центрального тела (или точнее, когда $\mathcal{M}_{\mathrm{disk}}/\mathcal{M}_\odot \le h_{\mathrm{disk}}/R$, где h_{disk} и R полутолщина и радиус диска соответственно, можно пренебречь самогравитацией частиц диска[23)]; в этом случае будем иметь $\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\mathbf{r}|$, $\mathbf{g} = -\nabla\Psi = G\mathcal{M}_\odot\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ (где $\mathcal{M}_\odot$ – масса звезды, G – гравитационная постоянная, $|\mathbf{r}|$ – центральный радиус-вектор).

Осредняя[24)] уравнения (1) по ансамблю одинаковых гидродинамических систем, получим уравнение Рейнольдса

$$\partial_t\langle \mathbf{U}\rangle + (\langle \mathbf{U}\rangle\cdot\nabla)\langle \mathbf{U}\rangle = -\rho^{-1}\nabla\cdot(\mathbf{I}\langle P\rangle - \mathbf{R}) + \nu\nabla^2\langle \mathbf{U}\rangle - \nabla\langle\Psi\rangle, \qquad \mathrm{div}\langle \mathbf{U}\rangle = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = -\rho\langle \mathbf{uu}\rangle$ – тензор напряжений Рейнольдса; $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Уравнения для пульсационной скорости $\mathbf{u}$ получаются вычитанием соответствующих уравнений (2) из (1). Если ограничиться далее, так называемым, корреляционным приближением второго порядка (см. Краузе и др., 1984), когда можно пренебречь членами, квадратичными по флуктуациям скорости, и воспользоваться сделанным выше предположением о неизменности осредненной скорости $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\rangle$ на любом промежуточном микромасштабе l внутри инерционного интервала $l_\nu \ll l \ll l_0$, то необходимо будет рассмотреть уравнения

$$\partial_t\mathbf{u} + ((\langle \mathbf{U}\rangle + \mathbf{u})\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} - \nabla\psi, \qquad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

которые для элементарного объема $d\mathbf{r}'$, движущегося со средней скоростью турбулизованного потока $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\rangle$ принимают (при соответствующем переопределении скорости $\mathbf{u}$ в этой системе координат) вид[25)]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u} \equiv \partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

Здесь $p \equiv P - \langle P\rangle$ – пульсация давления; $\psi \equiv \Psi_{\mathrm{cr}} - \langle\Psi_{\mathrm{cr}}\rangle$ (далее предполагается, что ψ некоторым образом, который мы не конкретизируем, возбуждает $\mathbf{u}$). Разумеется, уравнения (4) должны быть дополнены периодическими граничными условиями по пространственной переменной: $\mathbf{u}(x + nl, y + ml, z + ql) = \mathbf{u}(x, y, z)$ для всех x, y, z и любых целых n, m, q.

Законы сохранения в локально изотропной турбулентности. Рассмотрим теперь интегральные законы сохранения, связанные с однородностью, изотропностью и зеркальной симметрией турбулентного поля $\mathbf{u}$. Используя тождества, приведенные в сноске[24)], из уравнений (4) при интегрировании по ячейке пространственной периодичности (кубиче-

---

[21)] В случае мелкомасштабной турбулентности размер может совпадать с размером энергосодержащих вихрей.

[22)] Далее для удобства изложения мы ограничимся несжимаемой жидкостью $\langle\rho\rangle = \rho = \mathrm{const}$; рассмотрение турбулетности в сжимаемой среде потребовало бы б(льших математических усилий

[23)] В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны, $\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\mathbf{r}| + \Psi_{\mathrm{cr}}$ и потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона.

[24)] Угловые скобки в данной работе обозначают осреднение $\langle\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)\rangle \equiv \frac{1}{l^3}\int_{|\xi|<l}\mathcal{A}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t)\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}$ какого-либо периодического по l параметра $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ по некоторой кубической пространственной области с ребром l (на гранях которой выполняются периодические граничные условия), в предположении, что это осреднение не зависит от точного значения масштаба; с чисто математической точки зрения это определение можно отождествить с осреднением по ансамблю одинаковых гидродинамических систем в асимптотическом пределе $l/\Lambda \longrightarrow \infty$. Далее мы будем использовать следующие, доказываемые интегрированием по частям, тождества для периодических функций: $\langle\partial_i\mathcal{A}\rangle = 0$; $\langle(\partial_i\mathcal{A})\mathcal{B}\rangle = -\langle\mathcal{B}\partial_i\mathcal{A}\rangle$; $\langle(\nabla^2\mathcal{A})\mathcal{B}\rangle = -\langle(\partial_i\mathcal{B})(\partial_i\mathcal{A})\rangle$; $\langle\mathbf{u}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{v})\rangle = \langle(\mathrm{rot}\mathbf{u})\cdot\mathbf{v})\rangle$; $\langle\mathbf{u}\cdot\nabla^2\mathbf{v}\rangle = -\langle(\mathrm{rot}\mathbf{u})\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{v})\rangle$, если $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$.

[25)] Это означает, что подсистема турбулентного хаоса не имеет гидродинамической скорости относительно подсистемы осредненного движения.

ской пространственной области с ребром l, на гранях которой выполняются периодические граничные условия), можно получить (см., например, Фриш, 1998) следующие законы сохранения для осредненных кинетической энергии $E = \langle|\mathbf{u}|^2/2\rangle$, энстрофии[26] $\Omega = \langle|\boldsymbol{\omega}|^2/2\rangle$ и полной спиральности $H = \langle\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}/2\rangle$:

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon = -2\nu\Omega, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\varepsilon_\Omega, \quad \frac{dH}{dt} = -\varepsilon_H, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon \equiv \frac{\nu}{2}\left\langle\sum_{i,j}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2\right\rangle, \quad \varepsilon_\Omega \equiv \nu\langle|\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega}|^2\rangle,$$
$$\varepsilon_H \equiv \nu\langle\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega}\rangle. \quad (6)$$

Здесь величины ε, ε_Ω, ε_H обозначают соответственно скорость диссипации осредненной кинетической энергии, скорость диссипации энстрофии и скорость диссипации спиральности на единицу массы. Из уравнений (5) видно, что в невязком пределе $\nu \longrightarrow 0$ (в частности, во всем инерционном интервале) в отсутствии диссипации и накачки движения величины E, Ω и H остаются постоянными.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КАСКАД В ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Прежде чем проанализировать возможное влияние спиральности на динамику дисковой турбулентности, напомним некоторые используемые далее понятия и количественные спектральные характеристики мелкомасштабной турбулентности (см. Бэтчелор, 1955; Монин, Яглом, 1996).

Динамика завихренности и каскад энергии. Как уже было отмечено выше, большинство проведенных исследований турбулентного движения в диске в рамках рассматриваемой проблематики базировались, в основном, на концепции Колмогорова (1941, 1962), согласно которой в пределе больших чисел Рейнольдса (соответствующих крупномасштабным движениям в потоке космического вещества), несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что стохастический режим турбулентных флуктуаций в границах пространственно-временной области осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, является почти локально изотропным[27]. В этом случае энергетическая структура трехмерного мелкомасштабного поля пульсационных скоростей является статистически подобной для больших значений числа Рейнольдса $\mathbf{Re} \equiv u_0 l_0/\nu$ (где $u_0 = \sqrt{\langle|\mathbf{u}|^2\rangle}$ характеристическая скорость пульсационного поля скорости, l_0 – характеристический масштаб энергосодержащих вихрей) и инерционный интервал волновых чисел $k_0 \ll k \ll k_\nu$, разделяющий зоны диссипации и генерации турбулентной энергии $E = u_0^2/2$ в пространстве волновых чисел k, тем больше, чем больше число Рейнольдса $\mathbf{Re}$. Скорость диссипации осредненной кинетической энергии на единицу массы ε, определяемая формулой (6) в первоначальной теории Колмогорова (K41), считается универсальной константой для рассматриваемого турбулентного течения. Величина ω характеризует также поток кинетической энергии, который каскадным образом без потерь переносится вдоль последовательно возрастающих волновых чисел $k_n \gg k_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) (уменьшающихся масштабов длины, $l_n = 1/k_n$) внутри инерционного интервала до тех пор пока поток не достигает диссипативного масштаба $l_\nu = 1/k_\nu \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, для которого скорость диссипации энергии благодаря кинематической вязкости будет равна ε.

В предположении однородности и стационарности поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ важнейшими характеристиками турбулентности являются корреляционный[28] (двухточечный и двухвременной) тензор поля скоростей $\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t, \tau) \equiv \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r}+\mathbf{x}, t+\tau)\rangle$ и спектральный тензор энергии (см. Бэтчелор, 1955)

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint \tilde{R}_{ij}(\mathbf{x}, \tau)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega\tau)]d\mathbf{x}d\tau, \quad (7)$$

являющейся, по существу, фурье-образом корреляционного тензора $\tilde{R}_{ij}$. Заметим, что для несжимаемой жидкости ($\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$) комплексный тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ обладает следующими (используемыми ниже) свойствами[29]

$$k_j\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = k_i\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (8)$$

Энергетическая спектральная функция (плотность) $E(k, \omega)$, являющаяся в проблеме однород-

[26] Заметим, что уравнение баланса (5) для энстрофии справедливо только в двумерном случае.

[27] Напомним, что локально изотропная турбулентность обладает тем свойством, что любая характеризующая ее средняя величина инвариантна относительно любых параллельных переносов, вращений и зеркальных отражений.

[28] Заметим, что компоненты тензора турбулентных напряжений Рейнольдса могут быть представлены в виде $R_{ij}(\mathbf{r}, t) = -\rho\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r}, 0, t, 0)$, а полная спиральность в виде $H = \varepsilon_{ijk}(\partial\tilde{R}_{ik}/\partial x_j)|_{x=0,\tau=0}$.

[29] По повторяющимся индексам здесь и всюду далее, если не оговорено противное, предполагается суммирование.

ной турбулентности наиболее важной величиной, определяется интегралом

$$E(k, \omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_k} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega)\mathrm{d}S, \quad (9)$$

где интегрирование проводится в **k**-пространстве по сфере S_k радиуса $k \equiv |\mathbf{k}|$. Тогда, передаваемую по каскаду полную кинетическую энергию E единицы массы можно представить в виде[30)]

$$E \equiv \frac{1}{2}\langle|\mathbf{u}|^2\rangle = \frac{1}{2}\tilde{R}_{ii}(0, 0) = \frac{1}{2}\iint \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega)\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega = \iint E(k, \omega)\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega, \quad (10)$$

причем $\Phi_{ii} \geq 0$ для всех **k** и ω, так как эти диагональные элементы представляют в волновом пространстве плотность составляющих кинетической энергии.

Поскольку в интервале волновых чисел $k_0 \ll k \ll k_\nu$ спектральный энергетический тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, являющийся изотропным тензором второго ранга, статистически не связан с источником энергии, ограниченным волновым числом k_0, то можно предположить, что он будет определяться только скоростью диссипации энергии ε

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4}(k^2\delta_{ij} - k_i k_j), \quad (11)$$

причем, как это следует из соображений размерности, энергетическая спектральная плотность описывается формулой Колмогорова

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \; (k_0 \ll k \ll k_\nu), \quad (12)$$

где C – безразмерная постоянная порядка единицы.

Двумерная турбулентность. В случае развитой двумерной турбулентности[31)] в несжимаемой жидкости, в теории колмогоровского типа существуют две положительно-определенные сохраняющиеся в невязком пределе величины. Это осредненные кинетическая энергия $E = \langle|\mathbf{u}|^2/2\rangle$ и энстрофия $\Omega \equiv \langle|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|^2/2\rangle$, которые, при их генерации в однородном потоке на некоторых промежуточных масштабах энергетической накачки k_l, далеких от диссипативного масштаба k_ν, обе вовлекаются в каскадный процесс. При конечной вязкости в двумерном потоке энстрофия, как видно из формулы (5), может только монотонно убывать со временем вместе с величиной $\varepsilon = 2\nu\Omega$. Это связано с тем, что в двумерном потоке блокирован механизм растяжения вихревых трубок, который обеспечивает рост энстрофии в трехмерном течении.

В общем трехмерном случае преобразование Фурье вихревого поля $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$, компоненты которого имеют вид $\omega_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j u_k$, очевидно, равно $\hat{\boldsymbol{\omega}} \equiv i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$, а его спектральный тензор имеет вид $\Omega_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}k_m k_p \Phi_{nq}(\mathbf{k}, \omega)$, где ε_{jpq} – антисимметричный тензор Леви–Чивиты[32)]. В частности, при учете (8), отсюда имеем

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = k^2\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^2}(k^2\delta_{ij} - k_i k_j). \quad (13)$$

Заметим, что из формулы $\Omega = \varepsilon/2\nu$ следует, что спектр среднего квадратичного вихря Ω скорости совпадает со спектром вязкой диссипации кинетической энергии ε. Непосредственным следствием (13) является соотношение

$$\Omega \equiv \langle|\boldsymbol{\omega}|^2/2\rangle = \int\Omega(k)\mathrm{d}k = \iint k^2 E(k, \omega)\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega, \quad (14)$$

где соответствующая спектральная плотность для среднего квадратичного вихря скорости имеет вид

$$\Omega(k) = k^2 E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{1/3}. \quad (15)$$

В теории двумерной турбулентности показано (см., например, Монин, Яглом, 1996; Глава 26), что как раз связь (15) между спектральными плотностями энергии $E(k)$ и энстрофии $\Omega(k)$ запрещает одновременный перенос этих величин к мелким масштабам[33)]. Энергия в двумерном случае переносится к большим, а не к малым (как в трехмерном случае) масштабам, а к малым масштабам направлен поток энстрофии. Причем, в развитой двумерной турбулентности имеется два инерционных интервала. Для малых волновых чисел $k_0 < k < k_l$, каскадный процесс определяется скоростью диссипации энергии, и анализ размерности приводит к классической формуле (12) для спектральной плотности, с тем существенным отличием от трехмерного случая, что поток энергии в инерционном интервале со спектром (12) направлен от малых масштабов к большим. Для больших волновых чисел ($k_\nu > k > k_l$) дополнительной определяющей величиной является скорость диссипации энстрофии $\varepsilon_\Omega \equiv \nu\langle|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}|^2\rangle$, и размерный анализ приводит к другому спектральному

30) Отсюда величину $E(k, \omega)\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega$можно интерпретировать как кинетическую энергию (от всех волновыъх чисел с фиксированным модулем), заключенную в интервале волновых чисел $(k, k + dk)$ и интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

31) Строго двумерная турбулентность представляет собой всего лишь математическую идеализацию и никогда не реализуется в природе.

32) ε_{ijk} – тензор, имеющий значение $\varepsilon_{ijk} = 0$, если i, j и k не все различны, и $\varepsilon_{ijk} = 1$ или –1, если i, j и k все различны и расположены в циклическом или ациклическом порядке.

33) Впервые гипотезу о возможности обратного каскада энергии в двумерной турбулентности высказал Крайчнан (Kraichnan, 1967) и он же в работе (Kraichnan, 1976b) дал интерпретацию обратного каскада в терминах отрицательной турбулентной вязкости. По некоторым оценкам обратный каскад, который неоднократно подтверждался в численных экспериментах, является одним из важнейших результатов в теории развитой турбулентности после работ Колмогорова (см. Gama и др., 1994; Фриш, 1998).

распределению кинетической энергии по модулю волнового числа

$$E(k) = C_\Omega \varepsilon_\Omega^{2/3} k^{-3}, \tag{16}$$

которое и описывает инерционный интервал переноса энстрофии. Заметим, что в двумерном случае именно каскад энстрофии – это прямой каскад, т.е. энстрофия переносится от больших масштабов к меньшим. Формула $k_\nu \sim (\varepsilon_\Omega/\nu^3)^{1/6}$ определяет границу инерционного интервала переноса энстрофии.

Таким образом, в случае двумерной турбулентности имеет место обратный каскад кинетической энергии E, при котором энергия мелкомасштабного хаотического движения затрачивается на энергетическую накачку мезомасштабных вихревых структур. Этот эффект, получивший название отрицательной вязкости (см. Старр, 1971; Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994), свойствен, как отмечалось выше, многим космическим квазидвумерным объектам. Перейдем теперь к рассмотрению реальной трехмерной гидродинамической турбулентности в природных средах.

О КАСКАДАХ ЭНЕРГИИ И СПИРАЛЬНОСТИ В ДИСКОВОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНО-НЕИНВАРИАНТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Нарушение зеркальной симметрии в протопланетном диске. Итак, рассмотрение полей турбулентности, удовлетворяющих в статистическом отношении определенным условиям симметрии (как в случае локально изотропной турбулентности) приводит, как видим, к ряду существенных математических упрощений. Хотя зеркальная симметрия и является фундаментальным свойством уравнений гидродинамики, тем не менее в определение некоторых важных гидродинамических параметров включена правосторонность (левосторонность). Такой величиной является, в частности, завихренность поля пульсаций скорости, $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\mathbf{u}$. Для дискового дифференциально вращающегося вещества, как уже было отмечено, может представлять значительный интерес, такая лишенная зеркальной симметрии статистическая характеристика мелкомасштабной турбулентности, как полная спиральность (псевдоскаляр[34]) поля скорости, определяемая средним (см. сноску[24])

$$H \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2l^3} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| < l} \mathbf{u}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathrm{d}^3\boldsymbol{\xi}. \tag{17}$$

Поле пульсационных скоростей $\mathbf{u}$ с отличной от нуля средней спиральностью представляет из себя анизотропный континуум[35], образованный совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных винтовых вихрей, в котором, например, правовращательные движения (вихревые структуры) более вероятны, чем левовращательные. Таким образом, величина H, связанная с топологической структурой сложного поля завихренности, является фундаментальной мерой “отсутствия отражательной симметрии” в турбулентном течении.

Согласно Moffatt, (1981), спиральность поля турбулентности, “будучи квадратичным инвариантом некоторого локализованного движения жидкости (при условиях, определенных в выше), имеет статус, сравнимый со статусом кинетической энергии возмущения”[36]. Заметим, что только благодаря введению в рассмотрение анизотропной фоновой турбулентности с магнитным полем, не обладающей отражательной симметрией (простейшей мерой которой служит, в частности, и гидродинамическая[37] спиральность H), удалось продвинуться в понимании турбулентного магнитного динамо в астрофизике (так называемого α-эффекта) (см., например Вайнштейн и др., 1980; Паркер, 1982; Краузе, Рэдлер, 1984). Вместе с тем, величину H, как будет показано ниже, можно рассматривать, по-видимому, и как ту статистическую характеристику анизотропного поля пульсационных скоростей, которая способна обеспечить появление эффекта отрицательной вязкости во вращающейся среде (в частности, в протопланетном диске). Известно, что спиральность поля скорости может эффективно генерироваться в зеркально-несимметричном (не инвариантном относительно изменения четности) поле мелкомасштабных случайных скоростей $\mathbf{u}$, например в быстро вращающейся вокруг фиксированной оси турбулентности (см., например,

[34] Напомним, что векторы $\mathbf{A}$, которые ведут себя как величины $\mathbf{A}^{\mathrm{ref}}(-\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(-\mathbf{r}, t)$, называются полярными, а те, для которых справедливо соотношение $\mathbf{A}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(-\mathbf{r}, t)$ – аксиальными или псевдовекторами (здесь индекс “ref” обозначает оператор отражения в произвольной плоскости или в произвольной точке). Скаляр $V^{\mathrm{ref}} \equiv (\mathbf{A}^{\mathrm{ref}} \times \mathbf{B}^{\mathrm{ref}}) \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{ref}} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C} = -V$, зависящий от использования правосторонности, является псевдоскаляром; последнее означает, что он меняет знак при замене правосторонней системы отсчета на левостороннюю.

[35] Напомним также, что в своих исследованиях мелкомасштабных свойств течения (модель случайного каскада) Колмогоров (1941;1962) отказался от учета любых пространственных структур, которыми мог бы обладать турбулентный поток. Однако, как было подчеркнуто выше, по современным представлениям на малых масштабах в турбулентном течении почти всегда присутствуют вихревые структуры (нити), которые могут влиять на свойства течения также и в инерционном интервале.

[36] Вопрос о существовании других возможных интегральных инвариантов (см. Edwards, 1967; 1968), кроме классических (энергии, импульса и момента количества движения), характеризующих в той или иной степени сохраняемую топологическую конфигурацию вихревых нитей, остается на сегодняшний день все еще открытым.

[37] Величину H часто называют “гидродинамической” спиральностью, чтобы отличить ее от магнитной спиральности.

Steenbeck и др., 1966). В частности, спиральность в протопланетном облаке может возникать естественным образом вследствие его вращения и неоднородности плотности (стратификации по плотности) или интенсивности турбулентных пульсаций в зонах с развитой конвекцией. Приведем здесь некоторые предварительные соображения в пользу того, что на некоторых расстояниях от Солнца тепловая турбулентная конвекция в вертикальном направлении диска (на определенных этапах его эволюции) в областях между его экваториальной плоскостью и "верхней” поверхностью с больш(й вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям. Действительно, поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. Опускающееся вещество будет сжимаеться и под действием сил Кориолиса вынуждено вращаться в противоположном направлении, опять таки совершая левовинтовое движение. Очевидно, что в “нижней” части диска будут преобладать правовинтовые спиральные движения. Баланс левовинтовых и правовинтовых винтовых движений может установиться в окрестности экваториальной плоскости диска только при отсутствии градиентов интенсивности турбулентности, т.е. на самых поздних этапах эволюции дифференциально-вращающегося протопланетного облака.

Влияние спиральности на энергетический каскад. Итак, можно представить себе такую ситуацию, когда, источник кинетической энергии (например, в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил (см. ниже) в дифференциально вращающемся дисковом веществе) на волновых числах k_0 генерирует отличную от нуля полную спиральность H. Как было показано, полная спиральность пульсационного поля скоростей в инерционном интервале (подобно полной энергии) является сохраняющейся величиной $d\langle\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\rangle/dt = 0$. Заметим, что с генерированием спиральности связано появление крупномасштабных зацеплений[38] вихревых линий течения (см., например, Алексеенко и др., 2005), которые сохраняются в каскадном (не невязком) процессе в инерционной области, но уничтожаются вязкостью в масштабах $l_\nu = k_\nu^{-1}$.

[38]Спиральность, как уже нами было отмечено, характеризует степень связности вихревых линий в потоке. Число витков одной нити вокруг другой характеризуется величиной зацепления $H = \pm 2n\Gamma_1\Gamma_2$, где Γ_k – интенсивность нити, причем знаки показывает на правое или левое зацепление соответственно. Если отдельная вихревая трубка, прежде чем замкнуться, обвивается вокру себя, то на ней имеется узел; сохранение спиральности означает также, что сохраняется структура “узловатости” вихревого поля. Было показано, что инвариант спиральности H связан с боле общей топологической характеристикой – так называемым инвариантом Хопфа (см. Moffatt, 1984).

По аналогии с определением величины $E(k)$ (9) можно определить спектральную плотность спиральности

$$F(k,\tau) \equiv i\int\limits_{S_k}\varepsilon_{jkl}k_k\Phi_{jl}(\mathbf{k},\tau)\mathrm{d}S, \qquad (18)$$

где интегрирование проводится в **k**-пространстве по сфере S_k радиуса $k \equiv |\mathbf{k}|$. Таким образом , для полной спиральности H имеем

$$H = i\varepsilon_{jkl}\iint k_k\Phi_{jl}(\mathbf{k},\tau)\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\tau = \iint F(k,\tau)\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau. \qquad (19)$$

Функция $F(k, \tau)$, в силу (18), действительна и является псевдоскаляром; если поле пульсационных скоростей **u** статистически инвариантно относительно преобразования отражения (например, преобразования четности вида $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$, описывающего зеркальное отражение в плоскости $z = 0$), то она обращается в нуль. Для изотропной отражательно-несимметричной турбулентности для полного определения спектрального тензора $\Phi_{il}(\mathbf{k}, \tau)$ достаточно функций $E(k, \tau)$ и $F(k, \tau)$. В этом случае, наиболее общая форма однородного поля **r** (стационарного по t) мелкомасштабной турбулентности, удовлетворяющая равенствам (8), (9) и (18), имеет вид (см. Моффат, 1980)

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k},\tau) = \frac{E(k,\tau)}{4\pi k^4}(k^2\delta_{ij} - k_ik_j) + \frac{iF(k,\tau)}{8\pi k^4}\varepsilon_{ijk}k_k. \qquad (20)$$

В отличие от спектральной плотности кинетической энергии $E(k, \tau)$ спектральная плотность спиральности $F(k, \tau)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Именно с этим обстоятельством связана неоднозначная роль спиральности в каскадных трехмерных процессах, поскольку простые аргументы, приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов (как в случае двумерной турбулентности) в этом случае не работают. Если в двумерном случае спектральные плотности энергии и энстрофии связаны соотношением (15), то для функции $F(k)$ можно получить только ограничение сверху (так называемое условие “реализуемости”)

$$|F(k)| \le 2kE(k), \qquad (21)$$

которое следует, например, из неравенства Коши–Буняковского–Шварца, записанного в виде

$$\left|\int\limits_{S_k}\langle\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}^* + \hat{\mathbf{u}}^*\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}\rangle\mathrm{d}S\right|^2 \le 4\int\limits_{S_k}\langle|\hat{\mathbf{u}}|^2\rangle\mathrm{d}S\int\limits_{S_k}\langle|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2\rangle\mathrm{d}S$$

и равенств (10), (13) и (19). Здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение, а значок “$\wedge$” сверху какого-либо символа обозначает Фурье-преобразование.

Неравенство (21) позволяет реализоваться, вообще говоря, двум сценариям поведения спиральности в турбулентном потоке (Brissaund и др., 1973). Во-первых, в некоторых случаях, по аналогии с двумерной турбулентностью, имеет место каскад сохраняемых величин к противоположным концам инерционного интервала спектра, причем прямой каскад спиральности H к мелким масштабам сопровождается синхронным обратным каскадом энергии E к крупным масштабам. Во-вторых, существует возможность одновременного прямого каскада обеих величин к малым масштабам. Какой процесс будет иметь место в некоторый данный момент времени, зависит от интегральных свойств рассматриваемой системы, а также от граничных и начальных условий.

В первом случае используется гипотеза о том, что спектр энергии $E(k)$ может зависеть только от волнового числа k и скорости диссипации спектральности ε_H; тогда соображения размерности приводят к спектральному закону вида

$$E(k) \sim \varepsilon_H^{2/3} k^{-7/3}. \tag{22}$$

Спектральная функция спиральности $F(k)$ определяется процессом переноса спиральности от источника, действующего на волновых числах k_0, к вязкому стоку на волновых числах k_ν и далее. При генерировании спиральности появляются крупномасштабные зацепления вихревых линий рассматриваемого течения, которые выживают в каскадном процессе в инерционной области, но уничтожаются вязкостью в масштабах $l_\nu = k_\nu^{-1}$.

Второй сценарий предполагает пассивное поведение спиральности в турбулентном потоке. Это означат, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии $E(k)$ к малым масштабам с законом (12). Пусть скорость генерирования спиральности на волновых числах ~k_0 равна ε_H (см. формулу (6)). Поскольку спиральность генерируется одновременно с энергией, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $|\varepsilon_H| \le k_0\varepsilon$ (Brissaund и др., 1973). Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то

$$|\varepsilon_H| \sim k_0\varepsilon \sim u_0^3/l_0^2. \tag{23}$$

Спектр спиральности $F(k)$ должен быть пропорционален ε_H (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), и единственными дополнительными параметрами, определяющими $F(k)$ в инерционной области $k_0 \ll k \ll k_\nu$, могут быть ε и k. Следовательно, из соображений размерности

$$F(k) = C_H \varepsilon_H \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \ (k_0 \ll k \ll k_\nu). \tag{24}$$

где C_H – универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C. Отметим, что из равенств (23), (12) и (24) также вытекает неравенство $|F(k)| \le 2kE(k)$, в полном согласии с формулой (21).

Из всего сказанного следует, что присутствие спиральности оказывает в этом случае слабое влияние на каскадный перенос энергии, поскольку независимо от величины спиральности, инжектированной в поток на волновых числах ~k_0, относительная величина спиральности, определяемая безразмерным отношением $F(k)/2kE(k)$, с увеличением k последовательно уменьшается. Можно полагать, что при достаточно большом k/k_0 влияние спиральности на динамику будет незначительно, и она будет переноситься и диффундировать так же, как динамически пассивная скалярная примесь (Монин, Яглом, 1996). Вместе с тем, как было показано в работах (Kraichnan, 1973; Andre, Lesieur, 1977), если в рассматриваемом потоке жидкости реализуется режим генерирования почти максимальной спиральности для каждого значения волного числа, то суммарный перенос кинетической энергии к более высоким волновым числам будет ослаблен и потому процесс затухания турбулентности будет растянут во времени. Для наших целей отсюда можно сделать важный вывод о том, что относительно длительное существование турбулентности во вращающемся протопланетном облаке может быть частично связано с отсутствием отражательной симметрии относительно экваториальной плоскости поля вихревых скоростей в диске.

Итак, гиротропная турбулентность ведет себя качественно иным образом, чем неспиральная, что позволяет в случае возможной реализации обратного каскада кинетической энергии не только объяснить появление эффекта отрицательной вязкости в дифференциально-вращающемся (трехмерном) протопланетном облаке, но и прогнозировать зарождение относительно устойчивых и энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур, запускающих (инициирующих) механизмы триггерного кластерообразования в диске.

ГЕНЕРАЦИЯ СПИРАЛЬНОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Отсутствие симметрии относительно плоскости $z = 0$, перпендикулярной вектору угловой скорости $\mathbf{\Omega}$, с необходимостью приводит к нарушению отражательной симметрии случайных движений, играющей главную роль в генерации спиральности (см. Steenbeck и др., 1966). Покажем, что такая симметрия отсутствует и в случае вращающегося стратифицированного по z протопланетного диска, когда на жидкие элементы, плотность которых отличается на величину ρ' от локальной плотности ρ_0 окружающей среды, действуют архимедовы силы $\rho'\mathbf{g}$ (с $\mathbf{g} \cdot \mathbf{\Omega} \ne 0$). Другими словами, рассмотрим роль взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в генерации средней спиральности в диске. В связи с этим следует отметить, что отсутствие инвариантности относительно преобразования четности является более общим свойством, чем наличие спиральности, хотя и следует из последнего (см. Gilbert и др., 1988).

Примем здесь ту точку зрения, что мелкомасштабная завихренность в диске порождается конвекцией. Для нахождения псевдоскалярной функции $\langle \mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u} \rangle$ необходимо, в общем случае, решить гидродинамическую задачу в приближении Буссинеска для пульсирующего поля скорости $\mathbf{u}$ при наличии неустойчивой стратификации плотности и с выделенным направлением Ω преимущественного закручивания вихрей (см., например, Eltayeb, 1972). В рамках этого подхода будем описывать движение вещества в системе отсчета, вращающейся со средней угловой скоростью вращения диска $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда уравнение движения (1) приобретает вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} + 2\Omega \times \mathbf{U} = -\rho^{-1}\nabla P + \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{U} \quad (25)$$

где $2\Omega \times \mathbf{U}$ и $1/2|\Omega \times \mathbf{r}|^2$ – соответственно ускорение Кориолиса и потенциал центробежной силы; $\mathbf{g} = -\nabla(\psi - 1/2|\Omega \times \mathbf{r}|^2)$. Задача характеризуется двумя безразмерными числами: числом Россби $\mathbf{Ro} = U_0/\Omega L$ и числом Экмана $\mathbf{Ek} = \nu/\Omega L^2$, где $L = O(R)$ – масштаб изменения характерной скорости U_0. Для диска числа Экмана и Россби много меньше единицы, поэтому для простоты мы ограничимся рассмотрением геострофического движения, когда в (25) можно пренебречь переносным ускорением и вязким членом. Тогда в приближении Буссинеска[39)] уравнение для турбулентной составляющей поля скорости $\mathbf{U}$ принимает вид : $2\rho_0\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p' + \rho'\mathbf{g}$. Применив к этому уравнению операцию ротора и учитывая, что $\mathrm{rot}(\rho'\mathbf{g}) = \nabla\rho' \times \mathbf{g}$, получим

$$2\rho_0 \mathrm{rot}(\Omega \times \mathbf{u}) = -\mathbf{g} \times \nabla\rho' \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 2\rho_0(\Omega \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{rot}(\Omega \times \mathbf{u}) &= -(\Omega \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{g} \times \nabla\rho') = \\ &= -\Omega \cdot [\mathbf{u} \times (\mathbf{g} \times \nabla\rho')] = \\ &= -(\Omega \cdot \mathbf{g})(\mathbf{u} \cdot \nabla\rho') + (\Omega \cdot \nabla\rho')(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (27)$$

Если положить теперь $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel$ (где $\mathbf{u}_\parallel = u_z\mathbf{i}_z$ – составляющая турбулентной скорости $\mathbf{u}$ параллельная вектору угловой скорости Ω; $\mathbf{i}_z = \Omega/|\Omega|$; $u_z = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z$; $\mathbf{u}_\perp = u_x\mathbf{i}_x + u_y\mathbf{i}_y$ – проекция скорости $\mathbf{u}$ на экваториальную плоскость диска, предполагаемая далее однородной относительно x и y, $u_x = u_y = u_\perp$) и усреднить (26) по горизонтальным плоскостям $z = \mathrm{const}$, то в результате получим

$$\begin{aligned} 2\rho_0|\Omega|^2\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle &= -(\Omega \cdot \mathbf{g})\langle \mathbf{u} \cdot \nabla\rho' \rangle + \\ &+ \mathbf{g} \cdot \langle \mathbf{u}\nabla\rho' \rangle \cdot \Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

В частном случае, когда вектор ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ параллелен вектору углового вращения Ω и величина ρ_0 однородна в горизонтальных плоскостях, из (28) следует, что при использовании уравнения неразрывности $\nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u}) = \rho_0\nabla_\perp\mathbf{u}_\perp + \partial(\rho_0 u_z)/\partial z = 0$, соотношение (Hide, 1976)

$$\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp/2 \rangle \cong -\frac{\langle \rho'\partial u_z/\partial z \rangle}{4\rho_0|\Omega|^2}(\Omega \cdot \mathbf{g}), \quad (29)$$

устанавливающее прямую связь между частью $\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp/2 \rangle$ средней спиральности H и псевдоскаляром $\Omega \cdot \mathbf{g}$. Используя оценку (Моффат, 1980)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle + \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\parallel \rangle + \\ + \langle \mathbf{u}_\parallel \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle &= \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle \left(1 + \frac{\langle \mathbf{u}_\parallel \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle}{\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle}\right) = \\ &= \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle \left(1 + O\left(\frac{U_\parallel/L_\perp}{U_\perp/L_\parallel}\right)\right) = \\ &= \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle (1 + O(L_\parallel^2/L_\perp^2)) \cong \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

можно считать, что для протопланетного диска величина спиральности приближенно равна $H \cong \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}_\perp/2 \rangle$, поскольку отношение $L_\parallel/L_\perp$ в нем достаточно мало. Здесь $U_\parallel$, $U_\perp$, $L_\parallel$ и $L_\perp$ – характеристические скорости и пространственные масштабы, параллельные и перпендикулярные вектору угловой скорости Ω, которые (в силу уравнения неразрывности) связаны соотношением $U_\parallel/L_\parallel = 0(U_\perp/L_\perp)$.

Заметим, что корреляция $(g/\rho_0)\langle \rho' u_z \rangle$ фигурирует также и в определении коэффициентов турбулентных переноса по вертикали, в частности, коэффициента турбулентного теплообмена по вертикали (см., например, Ван Мигем, 1977; Marov, Kolesnichenko, 2002), характеризуя величину скорости перехода турбулентной энергии во внутреннюю энергию среды (или наоборот, в зависимости от устойчивости или неустойчивости распределения плотности и температуры в системе) и тем самым степень затухания или генерации турбулентности. Таким образом, соотношение (29) еще раз доказывает, что не равная нулю спиральность в диске, генерируемая благодаря взаимодействию архимедовых и кориолисовых сил, действительно влияет на время поддержания турбулентности в нем.

Итак, корреляция между плотностью и вертикальной скоростью $\langle \rho'\partial u_z/\partial z \rangle$ играет важную роль

[39)] Напомним, что в приближении Буссинеска, с точностью до величин первого порядка малости и с учетом соотношения $\nabla p_0 = \rho_0 g$, можно положить $\rho^{-1}\nabla P + \mathbf{g} \approx \rho_0^{-1}(\nabla p' + \rho'\mathbf{g})$ с одновременной заменой уравнения неразрывности условием бездивергентности, $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$; здесь p' и ρ' – отклонения давления и плотности от основного состояния P_0 и ρ_0, обусловленные существованием ветров и течений.

в определении величины и знака средней спиральности в диске. Найти явный вид этой корреляции, а вместе с ним и функции H, можно будет лишь в рамках адекватной гидродинамической модели турбулентного течения в диске, когда известны пространственные распределения всех гидродинамических параметров в нем. Здесь мы этого делать не будем, а рассмотрим качественную картину появления спиральности в некоторой дисковой конвективной зоне. Пусть вихрь со скоростью u_z смещается на расстояние ζ в конвективной зоне верхней части диска ($0 < z < h_{\text{disk}}$), средняя плотность ρ_0 которого убывает от экваториальной плоскости к поверхности диска [$(-\partial\rho_0/\partial z) > 0$], тогда имеют место положительные флуктуации плотности $\rho' \cong -\zeta\partial\rho_0/\partial z > 0$. Вследствие градиента средней плотности, он будет согласно уравнению неразрывности $\nabla_\perp \mathbf{u}_\perp \longrightarrow -\rho_0^{-1}\,\partial(u_z\rho_0)/\partial z$ (в приближении Буссинеска), расширяться, т.е. приобретать горизонтальные составляющие скорости. Возникающие при этом моменты кориолисовых сил приводят к левовинтовому спиральному вращению. Опускающееся вещество в верхней части диска будет сжиматься и под действием сил Кориолиса вынуждено вращаться в противоположном направлении, т.е. опять таки совершая левовинтовое спиральное движение[40)]. Таким образом, конвекция в верхней половине диска с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, чем к правовинтовым. Очевидно, что в нижней половине диска ($-h_{\text{disk}} < z < 0$) будут преобладать правовинтовые спиральные движения. Таким образом отсутствие зеркальной симметрии относительно преобразования $z \longrightarrow -z$ приводит к усилению вихревых структур одного знака. Баланс левовинтовых и правовинтовых винтовых движений может установиться в области экваториальной плоскости диска только при отсутствии градиента интенсивности турбулентности в ней (т.к. однородная турбулентность способствует установлению равномерного распределения разноориентированных вихрей), поскольку один из типов спиральных движений приходит снизу, а другой – сверху, т.е. только на самых поздних этапах эволюции дифференциально вращающегося протопланетного облака.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВЯЗКОСТЬ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ДИСКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ, КАК ПРОЯВЛЕНИЕ КАСКАДА СПИРАЛЬНОСТИ

Перейдем теперь к интерпретации обратного каскада энергии пульсационной скорости $\mathbf{u}$, возможного в спиральной трехмерной турбулентности, в терминах отрицательной вязкости.

Затруднения теории переноса количества движения. Начнем с того, что в последнее время в громадном большинстве астрофизической литературы в моделях эволюции вращающегося турбулентного облака используются обычные уравнения гидродинамики, в которых, однако, молекулярная вязкость заменяется на турбулентную. В этом случае авторы естественно используют линейную связь

$$R_{ij} - \frac{1}{3}R_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} = \rho K_{ijmn}(\partial_m\langle U\rangle_n + \partial_n\langle U\rangle_m) = \rho K_{ijmn}e_{mn} \qquad (31)$$

между симметричным тензором напряжений Рейнольдса R_{ij} и симметричным тензором скоростей деформации $e_{mn} \equiv \partial_m\langle U\rangle_n + \partial_n\langle U\rangle_m$ (т.е. обобщенную теорию Прандтля переноса количества движения). Величины K_{ijmn} (компоненты некоторого тензора четвертого ранга, симметричного по i, j и m, n) этой линейной функции имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости и определяются статистическими характеристиками мелкомасштабной турбулентности. По самому определению изотропной крупномасштабной турбулентности все связанные с ней средние величины остаются неизменными при вращениях (но не обязательно относительно отражений); тензоры, обладающие этим свойством, являются изотропными[41)] тензорами. Предположим далее изотропность (но не зеркальную симметричность) тензора турбулентной вязкости K_{ijmn}. В этом случае справедливо разложение $K_{ijmn} = a\delta_{ij}\delta_{mn} + b\delta_{im}\delta_{jn} + c\delta_{in}\delta_{jm}$ (см., например, Коренев, 1996), подставляя которое в (31), будем иметь

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ij} + \rho\nu^{\text{turb}}e_{mn} \; (\nu^{\text{turb}} \equiv b + c), \qquad (32)$$

Заметим, что в (32) коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, определяемый мелкомасштабным полем пульсационной скорости $\mathbf{u}$, обычно считается положительным. Однако, не исключена также и экзотическая возможность $\nu^{\text{turb}} < 0$[42)], кото-

[40)] В приведенных рассуждениях не принималось во внимание интенсивность турбулентных пульсаций в конвективной области диска, которая может быть, вообще говоря, не везде одинакова. Анизотропная интенсивность мелкомасштабной турбулентности может в принципе изменить направление вращения отдельного вихря в конвективной зоне. Но все-таки основной вклад в полную спиральность носит H градиент плотности.

[41)] Тензоры Кронекера δ_{ij} и Леви–Чивиты ε_{ijk} являются примерами изотропных тензоров соответственно второго и третьего ранга, а произведение тензоров $\delta_{ij}\delta_{mn}$ является изотропным тензором четвертого ранга. Эти тензоры имеют одинаковые компоненты во всех координатных системах, а значит имеют неизменные компоненты при произвольном вращении.

рая согласно (Kraichnan, 1976a) может реализовываться благодаря флуктуациям спиральности турбулентного поля **u**. Используя общую формулу (32) для анализируемой нами частной модели дискового осредненного движения, получим, что касательные напряжения $R_{r\varphi}$ зависят от градиента угловой скорости

$$R_{r\varphi} = \rho\nu^{\text{turb}} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\langle U\rangle_\varphi}{r}\right) = \rho\nu^{\text{turb}} r \frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}. \qquad (33)$$

Поскольку угловая скорость в кеплеровском диске убывает с расстоянием от Солнца, то и направление переноса количества движения (вещества) будет в этом случае также от Солнца. Таким образом, прандтлевская теория переноса количества движения (или теория турбулентного напряжения), примененная ко всему облаку[43], приводит, вооще говоря, к заключению (явно ошибочному) о повсеместном переносе во вращающемся турбулентном облаке вещества наружу.

В связи с подобного рода затруднениями теории переноса количества движения в общем случае криволинейных потоков, еще создатели полуэмпирической теории турбулентности (Taylor, 1915), а вслед за ним и Карман, (1936), предложили такое логическое обобщение выражения (33), когда касательные напряжения принимаются зависящими от градиента момента количества движения

$$R_{r\varphi} = \rho\nu_s^{\text{turb}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\Omega(r)]. \qquad (34)$$

Для модели эволюции протопланетного облака различие в формулах (33) и (34) оказалось очень важным, поскольку в диске угловая скорость убывает с расстоянием от Солнца, а момент количества движения увеличивается, а значит направление переноса, согласно этим двум точкам зрения, оказывается противоположным. По этой причине, формулы (33) и (34), взятые в отдельности, не могут объяснить всех особенностей турбулентного вращательного движения вещества во всех частях диска, когда имеется эффективный перенос внешних частей вещества облака – наружу, а внутренних – к Солнцу (см. Сафронов, 1969). В связи с этим, Wasiutynski, (1946) предложил более общее выражение для касательных напряжений $R_{r\varphi}$ во вращающейся среде

$$R_{r\varphi} = \rho K_r^r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\Omega(r)] - 2\rho K_\varphi^\varphi \Omega(r), \qquad (35)$$

охватывающее оба рассмотренных выше случая и связанное с действием анизотропной вязкости. Это соотношение при чисто радиальном течении ($K_\varphi^\varphi = 0$) приводит к формуле (34), а в изотропной среде ($K_\varphi^\varphi = K_r^r$) – к обычному гидродинамическому выражению (33). Следует, однако, отметить, что вид тензора напряжений[44] Wasiutynski (частным случаем которого является выражение (35)), широко используемый в астрофизической литературе (см., например, Тассуль, 1982) при объяснении дифференциального вращения разнообразных космических объектов "анизотропной вязкостью", до настоящего времени не аргументирован физически, т.е. остается неясным, является ли это обобщение лишь формальным или характеризует турбулентное течение более точно. Возможный вариант обоснования формулы (35) в рамках несимметричной гидродинамики турбулизованных сред будет предложен нами ниже. Но сначала покажем, что даже в случае использования классической теории турбулентного напряжения Прандтля (т.е. формулы (33)) возможно проявление эффекта отрицательной вязкости в трехмерной дисковой турбулентности.

Отрицательная вязкость (термодинамический подход). При феноменологическом описании квазиравновесной[45] подсистемы структурированного турбулентного хаоса будем исходить из формализма обобщенной статистической термодинамики, предполагающего исследование ансамбля макроскопически одинаковых систем турбулентного хаоса с одними и теми же обобщенными термодинамическими параметрами состояния (такими как внутренняя энергия хаоса $U_{\text{turb}}(\mathbf{r}, t)$[45], обобщенная "температура турбулизации" $T_{\text{turb}}(\mathbf{r}, t)$[46], удельный объем $1/\rho(\mathbf{r}, t)$ и т.п.) и требующего вероятностного подхода (Колесниченко, 2002; Marov, Kolesnichenko, 2006). Причиной последнего являются крупномасштабные турбулентные флуктуации некоторых дополнительных параметров состояния хаоса[47] $q_k(\mathbf{r}, t)$ ($k = \overline{1, n}$) (так называемых внутренних

[42] Следует подчеркнуть, что для турбулентного течения жидкости положительность коэффициентов турбулентного обмена (в, частности, коэффициента ν^{turb}) в общем случае не доказана (в отличие от молекулярных коэффициентов переноса, положительность которых имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов); в случае двумерного течения турбулентная вязкость может быть меньше нуля (см., например, Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994).

[43] Без учета влияния сильного гравитационного поля Солнца на внутренние части протопланетного облака.

[44] Заметим, что на самом деле выражение (35) не является компонентной какого-либо тензора; оно применимо только в конкретной системе координат.

[45] Турбулентный хаос далек от полного хаоса термодинамического равновесия, поскольку он обладает некоторой упорядоченностью: даже развитая локально-изотропная турбулентность в инерционном интервале масштабов имеет далекий от равномерного ($E(K) = \text{const}$) колмогоровский спектр $E(k) \sim k^{-5/3}$ распределения кинетической энергии (пульсационного движения) по пространству волновых чисел k.

[46] Заметим, что обобщенная температура подсистемы турбулентного хаоса, не сводится в общем случае к абсолютной температуре.

координат), которые и служат мерой различий в любом множестве подобных термодинамически одинаковых систем. К числу внутренних координат, описывающих термодинамическое состояние хаоса, можно отнести такие флуктуирующие положительно- определенные параметры, которые адекватно характеризуют завихренную жидкость (включая и мезомасштабные когерентные образования) внутри физически бесконечно малого элементарного объема d**r**. В частности, в качестве стохастических величин q_k могут быть выбраны[48]: скорость диссипации турбулентной энергии ε, обобщенные угловые скорости (характеризующие мезомасштабные когерентные вихревые образования), энстрофия Ω (в случае плоского течения) и т.п. Методами неравновесной термодинамики в работе (Колесниченко, 2002) было показано, что в случае принятого нами здесь двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды протопланетного облака с помощью двух взаимодействующих континуумов, в вихревом континууме, отвечающем мелкомасштабным составляющим пульсирующих термогидродинамических параметров, устанавливается такой квазистационарный режим между отбором энергии у "внешнего источника" (связанного, в частности, с осредненным дифференциальным вращением дискового турбулизованного вещества) и диссипацией энергии из-за внутренних диссипативных процессов в подсистеме хаоса, при котором производство энтропии турбулизации $S_{\rm turb}(\mathbf{r}, t)$ компенсируется ее оттоком в подсистему осредненного движения, так что суммарное возникновение энтропии хаоса будет минимально[49]. Из этого следует, что подсистема турбулентного хаоса экспортирует энтропию во "внешнюю среду", т.е. отдает ее подсистеме осредненного движения. Другими словами для поддержания стационарного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от "внешней среды" (подсистемы осредненного движения); эта поступающая в подсистему хаоса негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование ее внутренней структуры. Как известно (см. Пригожин, Стенгерс, 1994), условие такого рода является достаточным для возникновения диссипативных когерентных (мезомасштабных) структур в самом вихревом континууме. В работе (Колесниченко, 2002) было показано, что в этом квазистационарном случае суммарное возникновение турбулентной энтропии (рассеяние энергии) будет иметь структуру билинейной формы $T_{\rm turb}\sigma_{\rm turb}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \Im_\alpha(\mathbf{r}, t)X_\alpha(\mathbf{r}, t)$, явный вид которой определяется конкретной моделью турбулизованной среды, т.е. набором учитываемых в модели гидродинамических процессов. Согласно основному постулату неравновесной термодинамики (см., например, де Гроот, Мазур, 1964) эта форма позволяет найти определяющие (замыкающие) соотношения между термодинамическими потоками $\Im_\alpha$ и силами X_α в виде линейных соотношений $\Im_{\alpha i} = \sum_\beta L^{ij}_{\alpha\beta} X_{\beta j}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$). Своеобразием турбулизованной континуума является то, что матрица онзагеровских коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ зависит не только от осредненных термодинамических параметров состояния среды (как в ламинарном случае), но также и от статистических характеристик подсистемы турбулентного хаоса, в частности, от величины ε – потока энергии по каскаду турбулентных вихрей (являющегося, таким образом, одним из термодинамических потоков системы) или от потока гидродинамической спиральности, эффективно генерирующейся в случае гиротропной мелкомасштабной турбулентности. Подобная ситуация, типичная для любых самоорганизующихся (синергетических) систем приводит, вообще говоря, к тому, что отдельные слагаемые $\Im_\alpha(\mathbf{r}, t)X_\alpha(\mathbf{r}, t)$ в сумме $T_{\rm turb}\sigma_{\rm turb}(\mathbf{r}, t)$ не будут положительно- определенными величинами, хотя вся сумма в целом положительна, $\sigma_{\rm turb} \geq 0$. Известно (см., например, Хакен, 1985), что в этом случае наложение различных термодинамических потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы $L_{\alpha\beta}$, и тем самым к отрицательности отдельных коэффициентов турбулентного обмена.

Таким образом, при эволюции турбулизованного протопланетного облака нельзя исключить возникновения такой ситуации, когда в некоторых его областях возможно появление таких режимов турбулентного движения вещества, при которых коэффициенты турбулентного обмена будут принимать отрицательные значения (например, коэффициент вязкости $\nu^{\rm turb}$ в выражении (33)) (см., например, Sivashinsky, Frenkel, 1992; Vergassola и др., 1993; Gama и др., 1994). Из вышеприведенного анализа гиротропной дисковой турбулентности следует, что статистической характеристикой турбулентного поля, которая могла бы обеспечить инверсный каскад кинетической энергии и тем самым появление эффекта отрицательной вязкости в трехмерном диске, может явиться гидродинамическая спиральность H.

[47] Крупномасштабные турбулентные флуктуации следует отличать от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой системы.

[48] Заметим, что часть внутренних координат q_k может относиться к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть – характеризовать мезомасштабные индивидуальные когерентные структуры.

[49] Согласно Колмогорову (1941) характерным параметром в подсистеме мелкомасштабной турбулентности является поток энергии η по иерархии турбулентных вихрей вплоть до молекулярного уровня, который в стационарном случае совпадает со скоростью диссипации энергии ε.

Вращательная вязкость. Вернемся теперь к тому затруднению прандтлевской теории переноса количества движения в турбулизованной среде, с которым столкнулись астрофизики при попытке объяснения дифференциальных вращений газовых астрофизических объектов. Используемый в астрофизике стандартный подход к выводу осредненных гидродинамических уравнений (основанный на постулатах Рейнольдса) предназначенных, в частности, для моделирования протопланетного облака нельзя, по-видимому, считать вполне адекватным, поскольку действительная картина турбулентного переноса в диске, как уже упоминалось, существенно отличается от классической (см., например, Сафронов, 1969). Хотя в литературе, начиная с основателя феноменологической теории турбулентности О. Рейнольдса, а затем итальянского ученого Г. Маттиоли[50)] (Mattioli G.D.), и обсуждались подходы, связанные с несимметричностью тензора турбулентных напряжений ($R_{ij} \neq R_{ji}$) и привлечением к рассмотрению таких дополнительных внутренних характеристик состояния турбулентного поля, как вихрь, момент инерции и момент внутренних сил, к сожалению, это направление в последующем не было по достоинству оценено и развито.

Вместе с тем, в последнее время вновь возродился интерес к асимметричной (моментной) гидродинамике[51)] турбулизованных сред, обусловленный определенными достижениями в области проблемы пространственного осреднения различных уравнений движения в механике сплошных сред, включая, например, течения жидкости в пористых средах, течение взвесенесущих потоков, деформирование композитных материалов и т.п. В частности, было показано (см., например, Ferrari, 1972; Nikolaevskiy, 2003), что при более аккуратном пространственном осреднении (исключающем традиционный рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования) гидродинамических уравнений для малых элементов сплошной среды, с целью описания тех же движений в макромасштабе, получаются обобщенные уравнения Рейнольдса. Эти осредненные уравнения содержат, в частности, член с вращательной вязкостью, связанный с антисимметричной частью турбулентного тензора напряжений.

Для асимметричного турбулентного течения в работе (Nikolaevskiy, 2003) методами моментной гидромеханики получено следующее, связанное с вязкостными процессами, выражение для рассеяния энергии

$$T_{\text{turb}}\sigma'_{\text{turb}} = \left(\mathbf{R}^s + \frac{2}{3}\rho E\mathbf{I}\right): \mathbf{e} - \mathbf{R}^a \cdot \boldsymbol{\varpi} + \\ + \mathbf{T}: \nabla(\text{rot}\langle\mathbf{U}\rangle + \boldsymbol{\varpi}) \geq 0, \tag{36}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\mathbf{e} = 1/2(\nabla\langle\mathbf{U}\rangle + \nabla\langle\mathbf{U}\rangle^{\text{transp}})$ – тензор осредненных деформаций; $\mathbf{R}^s$, $\mathbf{R}^a$ – соответственно симметричная и антисимметричная части тензора напряжений Рейнольдса; $\boldsymbol{\varpi}$ ($\equiv\langle\text{rot}\mathbf{u}\rangle$) – так называемый вектор внутренней угловой скорости, обусловленный собственной завихренностью поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}$ и характеризующий вихревую "анизотропию" течения на микромасштабе l[52)]; $\mathbf{T}$ – тензор турбулентных моментных напряжений, связанный с пульсационным переносом флуктуаций момента количества движения мелкомасштабных вихрей[53)]. В общем случае анизотропной жидкости потоки и термодинамические силы, входящие в (36), связаны следующей простой системой определяющих соотношений

$$R^s_{ij} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ij} + \rho K_{ijmn}e_{mn}, \tag{37}$$

$$R^a_{ij} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -\rho K^*_{ijmn}\varepsilon_{mnk}\varpi_k, \tag{38}$$

$$T_{ij} = \rho K^{**}_{ijmn}\partial_n(\varepsilon_{mlk}\partial_l\langle U_k\rangle + \varpi_m), \tag{39}$$

характерной для асимметричной гидродинамики Коссера. Здесь феноменологические турбулентные коэффициенты K_{ijmn}, K^*_{ijmn} и K^{**}_{ijmn} являются сильно меняющимися функциями осредненных параметров состояния среды и зависят от статистических характеристик турбулентного поля скорости $\mathbf{u}$.

В данной работе мы остановимся только на самых простых выводах, следующих из изотропной (но не зеркально-симметричной) структуры турбулентных коэффициентов переноса[54)]. Заметим, что для большей части жидкости после очень

[50)] Смотри работы Г. Маттиоли 1933 года.

[51)] Заметим, что асимметричная гидромеханика Коссера (см., например, де Гроот, Мазур, 1964) давно получила широкое признание, например, в теории жидких кристаллов и теории жидкого гелия.

[52)] Напомним, что в "элементарном" объеме масштаба l в случае диска может находиться значительное количество вращающихся вихревых образований (кластеров). Это, кстати, является серьезным аргументом в пользу использования моментной турбулентной гидромеханики и концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды при моделировании протопланетного облака.

[53)] В асимметричной турбулентной гидромеханике этот тензор фигурирует в дополнительном эволюционном уравнении баланса внутреннего момента количества движения (в уравнении для $\boldsymbol{\varpi}$) (см. де Гроот, Мазур, 1964; Nikolaevskiy, 2003).

[54)] В случае анизотропного мелкомасштабного турбулентного поля ситуация оказывается значительно сложнее и в выражении (40) появляется целый ряд дополнительных членов, связанных с тем векторным полем (например, с полем градиента интенсивности турбулентности, полем градиента плотности или с угловой скоростью вращения системы), которым обусловлена анизотропия (см. например, Краузе, Рэдлер, 1984).

короткого времени релаксации ротор осредненной скорости $\mathrm{rot}\langle\mathbf{U}\rangle$ становится равным угловой скорости ϖ, определяющей внутреннее вращение элементов массы континуума, $-\varepsilon_{mlk}\partial_l\langle U_k\rangle = \varpi_m$. При этом обращается в нуль и термодинамическая сила в линейных конститутивных соотношениях (39) и соответствующие плотности потока момента количества движения мелкомасштабных вихрей, т.е. исчезает взаимодействие между вихрями макроскопического поля скоростей и внутренним вращательным движением частиц (см., например, де Гроот, Мазур, 1964). Тем не менее, в случае турбулизованного континуума закон парности $R_{ij} = R_{ji}$ касательных напряжений на макроуровне нарушается (в отличие от ламинарного течения) и соотношение (32) должно быть заменено на

$$R_{ik} = R^s_{ik} + R^a_{ik} = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ik} + \rho\nu^{\mathrm{turb}}e_{ik} + \\ + \rho\nu_r^{\mathrm{turb}}\varepsilon_{ikp}(\mathrm{rot}\langle\mathbf{U}\rangle)_p. \quad (40)$$

Коэффициенты ν^{turb} и ν_r^{turb} являются величинами, определяемыми полем турбулентной скорости $\mathbf{u}$, причем коэффициент ν^{turb} является скаляром, в то время как коэффициент ν_r^{turb} – псевдоскаляр, поскольку тензор $\varepsilon_{ikp}(\mathrm{rot}\langle\mathbf{U}\rangle)_p$ является псевдотензором второго порядка.

Проанализируем турбулентность с отражательной симметрией. В этом случае, с одной стороны, коэффициенты ν^{turb} и ν_r^{turb} не должны изменяться, при выполнении преобразования отражения, но, с другой стороны, коэффициент ν_r^{turb} должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром. Поэтому для изотропной и зеркально-симметричной мелкомасштабной турбулентности коэффициент $\nu_r^{\mathrm{turb}} = 0$. Итак, вращательная вязкость ν_r^{turb}, может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле турбулентных скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования четности, в частности, когда спиральность $H \neq 0$.

Для рассматриваемой нами модели дисковой турбулентности, соотношение (40) для напряжения сдвига принимает простой вид

$$R_{r\varphi} = \rho\nu^{\mathrm{turb}}r\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r} + \rho\nu_r^{\mathrm{turb}}\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} = \\ = \rho\nu^{\mathrm{turb}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} + 2\Omega\right) + \rho\nu_r^{\mathrm{turb}}\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} = \\ = \rho(\nu^{\mathrm{turb}} + \nu_r^{\mathrm{turb}})\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - 2\rho\nu^{\mathrm{turb}}\Omega \quad (41)$$

(сравни с формулой (32)). Таким образом выражение для касательных напряжений во вращающейся среде, предложенное Wasiutyuski, может быть физически обосновано в рамках асимметричной механики турбулизованных сред с несимметричным тензором напряжений Рейнольдса. Существенным следствием формулы (41) является вывод о взаимодополняемости теорий переноса импульса Прандтля и переноса вихря Тейлора во вращающейся среде. Из-за появления дополнительной степени свободы ϖ в асимметричной гидродинамике оба подхода оказываются необходимыми для решения тех или иных задач. В частности, для вращающегося протопланетного облака будет преобладать тот или другой из конкурирующих механизмов в зависимости от численного значения коэффициентов сдвиговой и вращательной вязкости в соответствующих областях диска.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко суммируем основные результаты предпринятого исследования.

Один из конкретных механизмов формирования мезомасштабных когерентных образований в подсистеме турбулентного хаоса, связанный с явлением фазово-частотной синхронизации автоколебаний стохастических внутренних координат (относящихся к когерентной составляющей хаоса), был рассмотрен ранее в работе (Колесниченко, 2004). В работе (Колесниченко, 2005) была продемонстрирована принципиальная возможность самоорганизации потока, когда в процессе временной эволюции квазиравновесной вихревой подсистемы вероятно генерирование когерентных образований, связанное с эффектом “фазовых переходов”, индуцированных естественным шумом мелкозернистого флуктуационного поля хаоса. В настоящей работе сформулирована общая концепция энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности.

Вследствие энерговыделения обратный каскад порождает соответствующую иерархическую систему сгущений газа (с фрактальным распределением плотности), приводящую, в конечном счете, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами вещества, в результате чего происходит самопроизвольное возникновение и рост пылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями дисковой гетерогенной системы, существенная модификация спектра колебаний и т.п. При этом на заключительной фазе процесса возникновения крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет[55)] решающая роль принадлежит силе собственного тяготения.

В случае двухуровневого описания предельно развитой дисковой турбулентности, методами неравновесной термодинамики показана возможность появления эффекта отрицательной вязкости в трехмерном случае. Высказано предположение, что статистической характеристикой изотропной зеркально-неинвариантной мелкомасштабной турбулентности, которая могла бы обеспечить появление этого явления, может служить гидродинамическая спиральность, возникающая благодаря быстрому вращению неустойчиво стратифицированной дисковой среды. Тогда появление отрицательной вязкости в диске может быть связано с каскадным переносом энергии от малых вихрей к более крупным в спиральной турбулентности.

В рамках асимметричной гидромеханики турбулизованных сред получено выражение для тензора турбулентных напряжений в форме Wasiutynski, широко используемое в астрофизической литературе при объяснении дифференциального вращения разнообразных космических объектов "анизотропной вязкостью". Это феноменологическое соотношение, используемое в астрофизике в связи с известными затруднениям прандтлевской теории переноса количества движения во вращающейся турбулизованной среде, до последнего времени не было физически обосновано. В работе выявлена взаимодополняемость теорий переноса импульса Прандтля и переноса момента количества движения Тейлора для вращающегося протопланетного облака, когда тот или другой из конкурирующих механизмов преобладает (в зависимости от численного значения коэффициентов сдвиговой и вращательной вязкости) на некотором расстоянии от Солнца.

Конечной целью развиваемого нами здесь подхода является разработка макроскопической модели турбулентного движения жидкости, максимально приближенной к реальности и отвечающей различным динамическим условиям в природных средах, в частности в протопланетном облаке. На этом пути предстоит еще преодолеть немало трудностей, поскольку создание универсальной модели турбулентности представляется проблематичным. Наш интерес к гидродинамической спиральности в применении к дисковой структурированной турбулентности заключается в том, что существование этого дополнительного невязкого инварианта подразумевает, вообще говоря, некоторую степень видоизменения классического энергетического каскадного процесса в инерционной области спектра, когда возможен инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным. Это позволяет не только объяснить появление феномена отрицательной вязкости в дифференциально вращающемся протопланетном облаке, но и прогнозировать зарождение энергетически активных когерентных вихревых структур, инициирующих, в конечном счете, механизмы образования газопылевых кластеров в диске. К сожалению, необходимо отметить, что пока в литературе нет надежного подтверждения в численном эксперименте, эффекта обратного каскада энергии для трехмерной гиротропной турбулентности. Таким образом, однозначного и убедительного ответа на ключевую проблему рассмотренного подхода о критериях реализации подобного каскада в дифференциально вращающемся диске придется, по-видимому, ожидать еще несколько лет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00114 и № 05-02-16288) и Федерального агенства по науке и инновациям (грант НШ-4285.2006.1).

[55)]Не исключена возможность, что в области внутренних планет гравитационной неустойчивости в субдиске не было (см., например, Сафронов, 1960).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2005. 504 с.

Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ. 1955. 197 с.

Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динами в астрофизике.М.: Наука, 1980. 352 с.

Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1977. 327 с.

Галимов Э.М. Феномен жизни. Между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. М.: 2001, УРСС. 254 с.

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности. В сб.: "Проблемы турбулентности". М.: Онти. НКТП СССР. 1936. С. 35–74.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности // Астрон. Вестник. 2002. Т. 36. № 2. С. 121–139.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // В сб. "Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова". М.: Физматлит, 2003. С. 123–162.

Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. Вестник. 2004. Т. 38. № 2. С. 144–170.

Колесниченко А.В. О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности // Мат. мод. 2005. Т. 17. № 10. С. 47–79.

Колесниченко А.В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности // Астрон. вестн. 2005. Т. 39. №. 3. С. 243–262.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске // Астрон. вестн. 2006. Т. 40. №. 1. С 2–62.

Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.

Колмогоров А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961 / На рус. и фр. яз. Paris. 1962. P. 447–458.

Коренев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Из-во МФТИ. 1996. 239 с.

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.:Мир. 1984. 315 с.

Макалкин А.Б. Проблемы эволюции протопланетных дисков // В сб. “Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова”. М.: Физматлит, 2003. С. 402–446.

Монин А.С., Полубаринова-Кочина П.Я., Хлебников В.И. Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. 326 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеоиздат. Т. 2. 1996. 742 с.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 339 с.

Паркер Е. Космические магнитные поля: их образование и проявления. Ч.2. М.: Мир. 1982. 479 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 310 с.

Сафронов В.С. К вопросу об образовании и эволюции протопланетных пылевых сгущений // Вопр. космогонии. 1960. Т. 7 С. 121–141.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Сафронов В.С. Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5–24.

Сафронов В.С. Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска // Астрон. вестн. 1987. Т. 21. № 3. С. 216–220.

Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир. 1971. 259 с.

Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный Мир. 2000. 375 с.

Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир. 1982. 472 с.

Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Ин. лит. 1959. 399 с.

Шмидт О.Ю. Четыре лекции о происхождении Земли. Изд. 3, доп. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 140 с.

Фридман Ф.М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122–1130.

Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998. 343 с.

Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.

Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ. 2002. 267 с.

Andre J.D., Lesieur M. Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity // J. Fluid Mech., 1977. V. 81. P. 187–208.

Armitage P.J., Livio M., Pringle J. E. Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2001. V. 324. P. 705–711.

Balbus S.A., Hawley J.F. Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1–53.

Barge P., Sommeria J. Did planet formtion begin inside persistent gaseous vortices? // Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1-L4.

Bodenheimer P. Angular momentum evolution of young stars and disks // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. V. 33. P. 199–238.

Brissaund A., Frisch U., Leorat J., Lessieur M., Mazure A. Helicity cascade in fully developed turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1366–1367.

Chavanis P.-H. Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph / 9912087. 1999. V. 16. P. 1–54.

Dubrulle B., Frisch U. The eddy viscosity of parity-invariant flow // Phys. Rev. 1991. V. A 43. P. 5355–5364.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59–76.

Eardley D.M., Lightman A.P. Magnetic viscosity in relativistic accretion discs // Astrophys. J. 1975. V. 200. P. 187–198.

Edwards S.F. Statistical mechanics with topological constraints:I // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 91. P. 513.

Edwards S.F. Statistical mechanics with topological constraints: II // J. Phys. A (Proc. Phys. Soc.) 1968. ser. 2. V. 1. P. 15.

Fannjiang A., Papanicolaou G. Convection enhanced diffusion for periodic flows // SIAM J. Appl. Math. V. 54. P. 333–408.

Ferrari C. On the differential equations of turbulent flow // В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука. 1972. 336 с.

Eltayeb I.A. Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer // Proc. Roy. Soc., 1972. V. A326. P. 229–254.

Fridman A.M., Boyarchuck F.F., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Khoruzhii O.V., Torgashin Yu. M., Kilpio A.A. The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // Physics Letters A. 2003. V. 317. P. 181–198.

Gama S., Vergassola M., Frisch U. Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics // J. Fluid. Mech. 1994. V. 260. P. 95–126.

Gilbert A., Frisch U., Pouquet A. Helicity is unnecessary for alpha-effect dynamos, but it helps // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 1988. V. 42. P. 151–161.

Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. № 3. P. 1051–1061.

Hide R. A note on helicity // Geophys. Fluid Dyn. 1976. V. 7. P. 157–161.

Klahr H.H., Bodenheimer P. Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global daroclinic instability // Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869–892.

Kraichnan R.H.Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys.Fluids. 1967. V. 10. 1417–1423.

Kraichnan R.H. Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. P. 745–752.

Kraichnan R.H. Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence // J. Fluid. Mech. 1976a. V. 77. P. 753–774.

Kraichnan R.H.Eddy viscosity in two and three dimensions // J. Atmos. Sci. 1976b. V. 33. P. 1521–1536.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers, 2002. 375 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Chaotic and ordered structures in the developed turbulence. In: “Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena” (eds.: A.M. Fridman, M.Ya. Marov). Springer. Printed in the Netherlands. 2006. P. 23–54.

Moffatt H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117–129.

Moffatt H.K. Some development in the theory of turbulence // J. Fluid Mech. 1981. V. 106. P. 35. (пер. в сб.: Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир. 1984. 501 с.)

Moffatt H.K. Simple topological aspects of turbulent vorticity dynamics // Proc. IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids / Ed. T. Tatsume.-Elseviere. 1984. P. 223–230.

Moreau J.J. Constantes d’un ilot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope. C.R. Acad. Sci. Paris. V. 252. P. 2810–2812.

Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // Icarus. 1986. V. 67. P. 375–390.

Nikolaevskiy V.N. Angular Momentum in Geophysical Turbulence. Published by Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.2003. 243 p.

Richard D., Zahn J.-P. Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734–738.

Sivashinsky G.I., Frenkel A.L. On negative eddy viscosity under conditions of isotropy // Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1608–1610.

Steenbeck M., Krause F., Radler K.-H. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces // Z. Naturforsch. 1966. V. 21a. P. 369–376.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Forming planetosimals in vortices // Icarus. 1996. V. 121. P.158–170.

Taylor G.I. Eddy motion in atmospheree // Philos. Trans. Roy. Soc. London, A. 1915. V. 215. P. 1–26.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217–1238.

Vergassola M., Gama S., Frisch U. Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity. P. 321–327. In.: NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos. Eds. M.R.E. Proctor, P.C. Mathews, A.M. Rucklidge. Cambridge University Press. Cambridge. 1993.

Von Weizsacker C. F. Rotation kosmischer Gasmassen // Z. Naturforch. 1948. Band. 3a. S.524.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494–505.

Wasiutynski J. Studies in hydrodynamics and structure of stars and planets // Astrophys. Norv. 1946. V. 4. P. 86.

Zel’dovich Ya. B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299–312.

English