

Методы вариационной задачи Римана
в вычислительной газодинамике

И. С. Меньшов

Институт прикладной математики им М. В. Келдыша РАН
Москва, Миусская пл., 4

Methods of the Variational Riemann Problem
in Computational Gasdynamics

I. S. Menshov

the Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS
Miusskaya sq., 4, Moscow, Russia

Аннотация

Рассматривается вариационная задача Римана, которая состоит в нахождении первой вариации решения римановской начальной задачи, известной также как задача о распаде разрыва в газе, когда начальные данные подвержены малым возмущениям. Показывается, что решение этой задачи единственно, находится аналитически и представляется в явной компактной форме, если решение базовой задачи Римана известно. Полученное решение затем используется в двух численных приложениях. Первое - это точная линейаризация функции годуновского численного потока при решении уравнений неявной схемы Годунова. Другое относится к аппроксимации акустического потока в одной численной методике для моделирования распространения малых возмущений на фоне неоднородных базовых течений.

Abstract

The variational Riemann problem is considered, which is to determine the first variation of the solution to Riemann's initial-value problem, also known as the problem of breakup of a discontinuity in a gas, when the initial data undergo small variations. It is shown that the solution to this problem is unique, analytically obtained, and written in a compact explicit form, provided that the baseline Riemann problem solution is available. The obtained solution is then utilized in two numerical applications. The first is the exact linearization of Godunov's numerical flux-function to solve the equations of the Godunov implicit method. Another relates to the approximation of the acoustic numerical flux in a numerical approach for simulating the propagation of small disturbances on the background of non-uniform basic flows.

1. Введение

Будучи предложенным С. К. Годуновым еще в конце пятидесятых годов, так называемый "метод Годунова" за последние несколько десятилетий стал одним из наиболее распространенных в мире методов вычислительной гидродинамики. На его основе были созданы мощные вычислительные технологии для решения прикладных и фундаментальных задач, связанных с расчетами сложных течений сжимаемой жидкости, в том числе: задач прикладной аэродинамики, взрывных процессов, термоядерного синтеза и многих других.

В основе метода Годунова лежит точное решение задачи Римана, более известной в газодинамике как задача о распаде произвольного разрыва. С математической точки зрения эта задача представляет собой начальную задачу Коши для законов сохранения, определяющих движение сжимаемой жидкости, где начальное распределение параметров жидкости представляется кусочно-постоянными функциями. С точки зрения механики движения жидкости задача Римана описывает взаимодействие двух сжимаемых потоков. Замечательной особенностью задачи является тот факт, что она, в силу автомодельности, допускает точное аналитическое решение, представляемое в компактной явной форме.

Задача Римана, имея несомненно большой теоретический интерес как одна из фундаментальных задач газовой динамики, оказалась также весьма эффективным инструментом в теории численных методов. С. К. Годунов был первым, кто предложил использовать ее точное решение в расчетных схемах для течений сжимаемой жидкости. Согласно его оригинальной идее, мгновенное состояние движущейся среды сперва аппроксимируется кусочно-постоянным распределением определяющих параметров (постоянным в пределах каждой расчетной ячейки). Другими словами, искомое течение заменяется на приближенное, состоящее из множества элементарных однородных потоков. Тогда последующее развитие во времени такового приближенного течения должно в точности определяться решениями множества задач Римана, возникающих на гранях счетных ячеек. Иными словами, последующая эволюция аппроксимирующего течения полностью определяется взаимодействием элементарных потоков на гранях, которые через решение задачи Римана представляются конечными аналитическими формулами.

Численный метод, построенный на основе такого рассмотрения, суть стандартный метод конечного объема, где потоки на гранях счетных ячеек рассчитываются на точном решении соответствующей задачи Римана. Первоначально метод был разработан для модели одномерных течений газа (1; 2), затем обобщен на многомерный случай (3; 4). В дальнейшем идеи С. К. Годунова получили очень широкое распространение во всем мире, и в настоящее время мы имеем уже устоявшийся термин в вычислительной гидродинамике - методы годуновского типа (5).

Настоящая работа относится к области численных методов годуновского типа. В ней мы впервые формулируем и исследуем решение так называемой вариационной задачи Римана. Математически она определяется как задача о нахождении первой вариации решения автомодельной задачи по отношению к малым вариациям начальных данных. С точки зрения динамики движущейся среды эта задача описывает в линейном приближении взаимодействие двух однородных полей малых возмущений на фоне течения, возникающего при распаде автомодельного разрыва. Другими словами, решение вариационной задачи Римана дает фактически результирующее поле,

образующееся при взаимодействии однородных полей возмущений.

Актуальность этой задачи в вычислительной гидродинамике и математическом моделировании обуславливается двумя обстоятельствами. Первое, наличие ее точного решения в явном виде дает выход на неявный метод Годунова. Метод Годунова традиционно использовался с явными временными схемами. Решение неявных уравнений сопряжено с решением нелинейных систем, которое реализуется, как правило, итерационным методом Ньютона. При этом возникает необходимость линеаризации невязки разностных уравнений, что сводится практически к линеаризации функции численного потока. Последняя в методе Годунова представляется весьма сложным нелинейным выражением, линеаризация которого до настоящей работы считалась проблематичной. Решение же вариационной задачи Римана фактически предоставляет возможность такой линеаризации.

Второе обстоятельство, обуславливающее актуальность вариационной задачи Римана, состоит в том, что она описывает основной элемент эволюции полей малых возмущений на фоне неоднородных течений, что, в свою очередь, имеет непосредственное отношение к задачам аэроакустики. Этот элемент - взаимодействие двух однородных полей возмущений. Поскольку эволюция поля малых возмущений может быть представлена как последовательное взаимодействие многочисленных однородных элементарных полей, вариационная задача Римана по сути является основополагающей в области аэроакустики.

В работе мы сначала показываем, что вариационная задача Римана допускает точное решение, которое является единственным при любых начальных данных и может быть представлено в компактной форме в виде явных аналитических выражений. Во второй части работы обсуждаются два возможных приложения полученного решения. Это - реализация неявного метода Годунова и численное моделирование задач аэроакустики.

2. Вариационная задача Римана

Задача Римана для одномерных уравнений газодинамики

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{F} обозначают соответственно вектор консервативных переменных и вектор потока, формулируется как эволюционная задача Коши с кусочно-постоянным распределением начальных данных при $t = 0$ вида:

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{Q}_l & \text{for } x < 0 \\ \mathbf{Q}_r & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Векторы \mathbf{Q}_l и \mathbf{Q}_r суть постоянные, не зависящие от пространственной координаты x .

Эта задача имеет единственное решение при любых, но физически допустимых, начальных данных, которое представляется кусочно-гладкой функцией автомодельного параметра $\lambda = x/t$ и начальных векторов \mathbf{Q}_l и \mathbf{Q}_r . Оно впервые было описано в работах Н. Е. Кочина (6).

Введя \mathbf{Q}^R для обозначения вышеупомянутой кусочно-гладкой функции, решение задачи Римана можно записать так:

$$\mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{Q}^R(\lambda, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r) \quad (3)$$

Детальный анализ решения и вид функции \mathbf{Q}^R даны в монографии (3). Области гладкости функции определяются набором сильных и слабых разрывов, возникающих в точке начального разрыва и распространяющихся с постоянными скоростями ($\lambda = \text{const}$). Эти разрывы при любых начальных данных обладают определенной строгой структурой. Среди них один - всегда контактный разрыв, разделяющий среды, находящиеся в начальный момент слева ($x < 0$) и справа ($x > 0$) от разрыва. С обеих сторон к контактному разрыву примыкают области однородного (константного) течения, так называемые контактные зоны (КЗ), которые отделяются от соответствующих областей невозмущенного течения в зависимости от значений начальных параметров либо одной ударной волной, либо одним слабым разрывом, либо одним веером центрированной волны разрежения (ЦВР). Таким образом, общее число разрывов, возникающих в задаче Римана может находиться в диапазоне от 3 до 5. Они разбивают всю область течения на ряд подобластей, в которых реализуется либо однородный поток ($\mathbf{Q}(\lambda) = \text{const}$), либо переменное течение ЦВР, определяемое соотношениями

$$u \pm a - \lambda = 0; \quad cu' \mp p' = 0; \quad v' = w' = s' = 0 \quad (4)$$

где u, v, w - компоненты вектора скорости, ρ, p, s, a - плотность, давление, энтропия и скорость звука, $c = \rho a$, штрих обозначает производную по λ . Верхний знак в этих соотношениях берется для случая ЦВР справа от контактного разрыва, а нижний - слева от него. Если не будет оговорено особо, этому правилу двойного знака мы будем следовать и в дальнейшем.

На границах областей гладкости параметры течения должны удовлетворять определенным условиям, которые суть условие непрерывности, если разрыв слабый (окаймляющие характеристики ЦВР), условия Рэнкина-Гюгонио на ударной волне и непрерывность давления и u -компоненты скорости на контактном разрыве. Этих соотношений оказывается достаточно, чтобы определить возникающую волновую структуру и параметры в областях гладкости.

Вариационная задача Римана (ВЗР), о которой пойдет речь в настоящей работе, формулируется следующим образом. Пусть известно решение задачи Римана $\mathbf{Q}^R(\lambda, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)$ при начальных данных \mathbf{Q}_l и \mathbf{Q}_r . Требуется найти как изменится это решение, если подвергнуть начальные значения малым возмущениям

$$\mathbf{Q}_l \rightarrow \mathbf{Q}_l + \delta\mathbf{Q}_l, \quad \mathbf{Q}_r \rightarrow \mathbf{Q}_r + \delta\mathbf{Q}_r \quad (5)$$

Другими словами, требуется найти первую вариацию решения при малых возмущениях начальных данных. Очевидно, она представляется следующей линейной формой:

$$\delta\mathbf{Q}^R = M_l\delta\mathbf{Q}_l + M_r\delta\mathbf{Q}_r \quad (6)$$

где матрицы M_l and M_r , которые мы будем в дальнейшем называть вариационными, являются по сути якобианами функции решения задачи Римана по векторам начальных данных, т. е.

$$M_i = M_i(\lambda, \mathbf{Q}^R) = \frac{\partial\mathbf{Q}^R}{\partial\mathbf{Q}_i}, \quad i = l, r \quad (7)$$

Таким образом, ВЗР сводится к нахождению вариационных матриц. Отметим, что подобно тому, как задача Римана является первокирпичиком в газодинамике, определяя взаимодействие элементарных потоков, ВЗР является тем же в динамике полей малых возмущений, так как определяет взаимодействие элементарных возмущений. В этом смысле эта задача имеет основополагающее значение, и можно ожидать, что она сможет найти широкое применение в области численного моделирования задач аэроакустики.

Построение решение ВЗР проводится следующим образом. Прежде всего отметим, что матрицы M_l and M_r являются кусочно-гладкими функциями λ , причем области гладкости те же, что и в базовой задаче Римана, и определяются ее волновой структурой. И кроме того, матрицы - константы по отношению к λ в тех подобластях, где в базовой задаче реализуется однородный поток, т. е., в невозмущенных областях и контактных зонах.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ обозначают скорости разрывов: λ_3 соответствует контактному разрыву, λ_1 и λ_2 - волне слева от него (передняя и замыкающая характеристики ЦВР, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, или ударная волна или слабый разрыв, если $\lambda_1 = \lambda_2$), а λ_5 и λ_4 - волне справа. В невозмущенных областях вариационные матрицы тривиальны

$$\begin{aligned} M_l = I \quad \text{и} \quad M_r = O \quad \text{если} \quad -\infty < \lambda < \lambda_1 \\ M_l = O \quad \text{и} \quad M_r = I \quad \text{если} \quad \lambda_5 < \lambda < +\infty \end{aligned} \quad (8)$$

где I и O - единичная и нулевая матрицы. В контактных зонах матрицы должны определяться на основе сопрягающих соотношений для возмущений на контактном разрыве с одной стороны, и замыкающей характеристике ЦВР или ударной волне с другой стороны.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести вектор примитивных переменных $\mathbf{U} = (u, p, s, v, w)^T$ и вариационные матрицы μ_l and μ_r , ассоциированные с этим вектором

$$\delta \mathbf{U}^R = \mu_l \delta \mathbf{U}_l + \mu_r \delta \mathbf{U}_r \quad (9)$$

Матрицы M и μ связаны между собой через якобиан вектора консервативных переменных по примитивному вектору $B(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{U}$:

$$M_i = B(\mathbf{U}^R) \mu_i B(\mathbf{U}_i)^{-1} \quad i = l, r \quad (10)$$

2.1. Решение в области ЦВР.

Система уравнений, определяющих решение ВЗР в области ЦВР ($\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ или $\lambda_4 \leq \lambda \leq \lambda_5$), получается путем варьирования соотношений (4). Она представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Граничным условием для нее служит условие сращивания на передней характеристике волны

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U} + \mathbf{U}' \delta \lambda_1 &= \mathbf{U}_l \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_1 \\ \text{или} \\ \delta \mathbf{U} + \mathbf{U}' \delta \lambda_5 &= \mathbf{U}_r \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_5 \end{aligned} \quad (11)$$

При интегрировании этой системы удобно перейти к новым зависимым переменным $\delta I^\pm = s \delta u \pm \delta p$, которые можно рассматривать как линейные аналоги римановских инвариантов. Решение в этом случае легко определяется и записывается

следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta I^\mp &= \frac{c}{c_i} \delta I_i^\mp \mp c \int_{p_i}^p \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)_p dp \cdot \delta s_i \\
\delta u \pm \delta a &= 0 \\
\delta v &= \delta v_i \\
\delta w &= \delta w_i \\
\delta s &= \delta s_i
\end{aligned} \tag{12}$$

где верхний знак берется вместе с $i = l$ для случая левосторонней волны, а нижний знак и $i = r$ - для правосторонней.

Полученное решение можно также представить в матричном виде

$$\delta \mathbf{U} = \mu_i^{\text{BP}} \delta \mathbf{U}_i \tag{13}$$

введя матрицы

$$\mu_i^{\text{BP}} = \begin{vmatrix} 1 - \Gamma & \mp(1 - \Gamma)/c_i & \mp \left[\omega(1 - \Gamma) + \Gamma(\partial a/\partial s)_p \right] & 0 & 0 \\ \mp \Gamma c & c\Gamma/c_i & c\Gamma \left[\omega - (\partial a/\partial s)_p \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{2}{\gamma + 1} \\
\gamma &= 1 + \rho \left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s \\
\omega &= \int_{p_i}^p \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)_p dp
\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, в области ЦВР вариационные матрицы равны

$$\begin{aligned}
\mu_l &= \mu_l^{\text{BP}}, & \mu_r &= O & \text{для } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\
\mu_l &= O, & \mu_r &= \mu_r^{\text{BP}} & \text{для } \lambda_4 \leq \lambda \leq \lambda_5
\end{aligned} \tag{16}$$

В случае идеального совершенного газа γ в (15) сводится к показателю адиабаты (отношению удельных теплоемкостей), а ω и $(\partial a/\partial s)_p$ принимают вид

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{a - a_i}{(\gamma - 1)s_i} \\
\left(\frac{\partial a}{\partial s} \right)_p &= -\frac{a}{2s_i}
\end{aligned} \tag{17}$$

2.2. Решение в контактной зоне

В пределах контактных зон $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3$ и $\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4$ вариации параметров течения постоянны и должны определяться на основе соответствующих линеаризованных соотношений на разрывах, ограничивающих эти зоны. Эти условия определяются типом разрыва, который в зависимости от конкретных начальных данных может быть либо слабым, либо ударной волной.

В первом случае (контактная зона отделена от невозмущенного течения волной разрежения) мы имеем непрерывность следующих параметров на разрыве:

$$[\delta I^\mp] = [\delta s] = [\delta v] = [\delta w] = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_i \quad (18)$$

Здесь $[\cdot]$ обозначает величину скачка, $i = 2$ и нижний знак берутся для левосторонней волны, а $i = 4$ и верхний знак - для правосторонней по отношению к контактному разрыву.

Уравнений (18) на единицу меньше, чем число неизвестных. Поэтому вариации в контактной зоне могут быть определены с точностью до одной произвольной постоянной. Их удобно представить через вектора начальных вариаций $\delta \mathbf{U}_{l,r}$

$$\delta \mathbf{U}_3^i = N^i \delta \mathbf{U}_i + \mathbf{m}^i C_i, \quad i = l, r \quad (19)$$

где N - матрица и \mathbf{m} - вектор, которые мы будем в дальнейшем называть контактными матрицей и вектором, а C - произвольная постоянная. Здесь и далее нижний индекс 3 используется для обозначения параметров контактной зоны.

Выбирая в качестве C вариацию скорости δu_3 и используя соотношения (13) и (14), нетрудно получить выражения для контактных матрицы и вектора в случае ЦВР:

$$N^i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp c_3 & c_3/c_i & c_3(\omega_3 - \omega_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{m}^i = \begin{vmatrix} 1 \\ \pm c_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

Вариация скорости замыкающей характеристики ЦВР связана с константой C соотношением

$$\delta \lambda_i = \left. \frac{C_i - \delta u^{\text{ВР}}}{u'} \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad (21)$$

В случае, когда контактная и невозмущенные зоны разделяются ударной волной, соотношения для вариаций вытекают из линеаризации соотношений Рэнкина-Гюгонио

$$[(A - \lambda_i I) B \delta \mathbf{U}] = \delta \lambda_i [\mathbf{Q}] \quad (22)$$

где A - якобиан функции потока \mathbf{F} ($A = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$), $[\cdot] = (\cdot)_3 - (\cdot)_i$ и $i = l$ или r в зависимости от случая $\lambda_i = \lambda_1 = \lambda_2$ или $\lambda_i = \lambda_4 = \lambda_5$, соответственно.

Как и в случае ЦВР, соотношений на ударной волне недостаточно, чтобы определить вариации параметров течения в контактной зоне. Они могут быть найдены

лишь с точностью до одной произвольной константы и представлены также в форме уравнений (19). В качестве этой константы удобно выбрать комбинацию

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ -\rho \end{bmatrix} \delta m_i + \frac{\delta \rho_i}{\rho_i^2} m_i \quad (23)$$

где m_i обозначает поток массы через ударную волну, $m_i = \rho_i(u_i - \lambda_i) = \rho_3(u_3 - \lambda_i)$.

При таком выборе произвольной константы путем несложных, но достаточно громоздких выкладок, которые мы здесь не приводим, контактные матрицу и вектор можно найти в следующем виде:

$$N^i = \begin{vmatrix} 1 & (1 + M_i^2)/m_i + \chi_2 & -m_i \sigma_i T_i - \chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -m_i \chi_2 & m_i \chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_i/(m_i T_3) & T_i/T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{m}^i = \begin{vmatrix} -1 - \chi_1 \\ \chi_1 m_i \\ \Delta_i/T_3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

где $\Delta_i = u_3 - u_i$, $M_i = m_i/c_i$ - число Маха перед фронтом волны, T - температура и $\sigma = (\partial T/\partial p)_s/T$. Параметры χ_1 , χ_2 , χ_3 в уравнениях (24) равны:

$$\chi_1 = \frac{2 + m_i \Delta_i \sigma_3}{M_3^2 - 1}, \quad \chi_2 = \frac{1 + M_i^2 + m_i \Delta_i \sigma_3}{m_i (M_3^2 - 1)}, \quad \chi_3 = m_i T_i \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{M_3^2 - 1} \quad (25)$$

с $M_3 = m_i/c_3$, обозначающим относительное число Маха за волной. Вариация скорости волны при выборе константы в виде (23) дается уравнением

$$\delta \lambda_i = \delta u_i + \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_i} \left[C_i - \frac{\delta \rho_i}{\rho_3} (u_i - \lambda_i) \right] \quad (26)$$

Таким образом, вариации в контактных зонах находятся в виде (19) с соотношениями (20) и (24), определяющими контактные матрицу и вектор в случае ЦВР и ударной волны. Чтобы завершить построение решения, необходимо определить две константы C_l и C_r , соответственно слева и справа от контактного разрыва. Для этого имеется ровно два условия, выражающие непрерывность вариаций давления и скорости на контактном разрыве:

$$[\delta u] = 0, \quad [\delta p] = 0 \quad (27)$$

Окончательный результат можно сформулировать в элегантном и компактном виде, если ввести понятие собственной и сопряженной величины. Величина называется собственной или сопряженной в зависимости от значения автомодельного параметра λ . Если, например, значение λ таково, что оно соответствует положению слева от контактного разрыва, то всем величинам, относящимся к областям слева от контактного разрыва приписывается атрибутика "собственный", а величинам, относящимся к правосторонним областям - "сопряженный". Вводя верхний индекс "звездочка" для обозначения сопряженных величин, вариацию задачи Римана можно записать в следующем виде:

$$\delta \mathbf{U} = \mu \delta \mathbf{U}_0 + \mu^* \delta \mathbf{U}_0^* \quad (28)$$

с собственными и сопряженными вариационными матрицами

$$\begin{aligned} \mu &= I, & \mu^* &= 0 & \text{в невозмущенной зоне} \\ \mu &= \mu^{\text{BP}}, & \mu^* &= 0 & \text{в области ЦВР} \\ \mu &= N + \mathbf{m} \times \mathbf{k}^*, & \mu^* &= \mathbf{m} \times \mathbf{n}^* & \text{в контактной зоне} \end{aligned} \quad (29)$$

где μ^{BP} - вариационная матрица ЦВР (14), N и \mathbf{m} определяются уравнениями (20) в случае, когда невозмущенная и контактная зоны в базовой задаче Римана разделены веером ЦВР, и уравнениями (24) и (25), когда они разделены ударной волной. Векторы \mathbf{n} и \mathbf{k} в этих выражениях определяются через компоненты контактных матрицы и вектора

$$\mathbf{n} = \frac{m_2 \mathbf{N}_1 - m_1 \mathbf{N}_2}{m_2 m_1^* - m_1 m_2^*}, \quad \mathbf{k} = \frac{m_1 \mathbf{N}_2^* - m_2 \mathbf{N}_1^*}{m_2 m_1^* - m_1 m_2^*} \quad (30)$$

где \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 обозначают первую и вторую строки матрицы N , а m_1 and m_2 - первый и второй элементы вектора \mathbf{m} .

Константа C , через которую определяются вариации скоростей разрывов (21), (23) и (26), выражается через вариации начальных данных

$$C = (\mathbf{k}^*, \delta \mathbf{U}_0) + (\mathbf{n}^*, \delta \mathbf{U}_0^*) \quad (31)$$

Как частный случай построенного выше решения, рассмотрим вариационную задачу Римана для одиночного контактного разрыва. В этом случае волновая картина базовой задачи Римана состоит из трех волн: контактного разрыва $\lambda = \lambda_3$ и двух слабых разрывов $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_4 = \lambda_5$, расположенных слева и справа от него. Собственные и сопряженные матрицы контактных зон тогда определяются уравнениями (20), (29) и (30) и имеют вид

$$\mu = \begin{vmatrix} c_0/\bar{c} & \mp 1/\bar{c} & 0 & 0 & 0 \\ \mp c_0 \pm c_0^*/\bar{c} & 1 - c_0/\bar{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mu^* = \begin{vmatrix} c_0^*/\bar{c} & \pm 1/\bar{c} & 0 & 0 & 0 \\ \pm c_0 c_0^*/\bar{c} & c_0/\bar{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (32)$$

где $\bar{c} = c_0 + c_0^* = c_l + c_r$ и верхний знак надо брать для $\lambda > \lambda_3$, а нижний - для $\lambda < \lambda_3$. Отсюда, в частности, получаются вариации давления и скорости в области взаимодействия $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_5$

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{c_l \delta u_l + c_r \delta u_r - (\delta p_r - \delta p_l)}{\bar{c}} \\ \delta p &= \frac{c_r \delta p_l + c_l \delta p_r - c_l c_r (\delta u_r - \delta u_l)}{\bar{c}} \end{aligned} \quad (33)$$

что в точности совпадает с решением линеаризованной задачи Римана, описанной в монографии (4).

3. Неявный метод Годунова

В этом разделе мы используем полученное выше решение вариационной задачи Римана для реализации неявного метода Годунова. Рассмотрим систему уравнений

Навье-Стокса для течений сжимаемой жидкости, записанную в консервативной форме

$$\partial_t \mathbf{q} + \partial_k \mathbf{f}_k = \partial_k \mathbf{g}_k \quad (34)$$

где \mathbf{q} - вектор консервативных переменных, элементами которого являются плотность, 3 декартовы компоненты момента количества движения и удельная полная энергия, а \mathbf{f}_k и \mathbf{g}_k - векторы невязких и вязких потоков, соответственно.

Эти уравнения дискретизируются по времени неявным методом и по пространству методом конечных объемов. Полученная таким образом система дискретных уравнений решается затем методом установления по псевдо-временной переменной с использованием неявной дискретизации и ньютоновских итераций (7). Результатом такого подхода является линейная система уравнений для определения итерационного инкремента $\Delta^s \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1,s+1} - \mathbf{q}^{n+1,s}$:

$$\left[V_i \left(\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta t} \right) + D_i^{n+1,s} \right] \Delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - \sum_{\sigma} \mathbf{G}(\Delta^s \mathbf{q}_{\sigma}) \quad (35)$$

где верхние индексы n and s указывают на временной слой и номер внутренней ньютоновской итерации, соответственно, $\Delta\tau$ - шаг дискретизации по псевдо-времени, Δt - шаг по физическому времени и суммирование по σ в правой части уравнений означает суммирование по всем граням, составляющим боковую поверхность рассматриваемой счетной ячейки i .

Первое слагаемое в правой части уравнений (35), \mathbf{R} , представляет собой итерационную невязку

$$\mathbf{R}_i^{n+1,s} = \sum_{\sigma} (-\mathbf{f}^{n+1,s} + \mathbf{g}^{n+1,s}) - V_i (\mathbf{q}_i^{n+1,s} - \mathbf{q}_i^n) / \Delta t \quad (36)$$

которая вычисляется методом Годунова на основе точного решения задачи Римана: $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^R)$, $\mathbf{Q}^R = \mathbf{Q}^R(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{\sigma})$. Здесь \mathbf{Q} обозначает вектор контравариантных компонент вектора \mathbf{q} в локальном базисе боковой грани ячейки.

Матрица D и вектор \mathbf{G} появляются в уравнении (35) в результате линеаризации численного потока. Обычной практикой у вычислителей является аппроксимация якобиана вязкого потока с помощью диагональной матрицы, элементы которой равны некоторой мажорантной оценке спектрального радиуса. Мы также будем придерживаться здесь этого подхода. Тогда упомянутые выше матрица и вектор запишутся так:

$$\begin{aligned} D_i^{n+1,s} &= \sum_{\sigma} (M_1^{n+1,s} + \rho_{dis}^{n+1,s}) \\ \mathbf{G}(\Delta^s \mathbf{q}_{\sigma}) &= (M_2^{n+1,s} - \rho_{dis}^{n+1,s} I) \Delta^s \mathbf{q}_{\sigma} \end{aligned} \quad (37)$$

где матрицы M_1 и M_2 определяют линеаризацию невязкого потока

$$\delta \mathbf{f} = M_1 \delta \mathbf{q}_i + M_2 \delta \mathbf{q}_{\sigma} \quad (38)$$

и ρ_{dis} - мажоранта спектрального радиуса вязкого якобиана.

Очевидно, что точной линеаризации функции годуновского потока соответствуют матрицы $M_{1,2}$, которые вычисляются с помощью вариационных матриц, полученных в предыдущем параграфе,

$$M_{1/2} = A(\mathbf{Q}^R) \frac{\partial \mathbf{Q}^R}{\partial \mathbf{Q}_{i/\sigma}} \quad (39)$$

где A - якобиан невязкого потока.

Наряду с этим мы также будем рассматривать приближенную линеаризацию, которая была предложена Туркелом и Джеймисоном (8) и широко используется вычислителями во всем мире. В этом подходе матрицы M_1 и M_2 представляются посредством невязкого якобиана A и его спектрального радиуса ρ_{inv} :

$$M_1 = 0.5[A(\mathbf{Q}_i) + \rho_{inv}I]; \quad M_2 = 0.5[A(\mathbf{Q}_i) - \rho_{inv}I] \quad (40)$$

Получающиеся таким образом две расчетные схемы мы будем именовать в дальнейшем как EL-схема (exact linearization) и AL-схема (approximate linearization), соответственно.

Система уравнений (35) решается на каждой итерации s методом LU-SGS, предложенном в работе (9) для регулярных декартовых сеток и обобщенном в работе (10) на случай произвольных сеток. Детальное описание этого метода приводится в работе (11).

3.1. Численные результаты

Ниже мы рассматриваем результаты нескольких численных экспериментов, в которых анализировалась скорость сходимости неявного метода Годунова с точной линеаризацией потока (EL-схема) и приближенной линеаризацией (AL-схема).

Невязкое стационарное течение. Первые из представленных экспериментов касаются расчета стационарного течения сжимаемой жидкости в рамках модели уравнений Эйлера. Рассматривается профиль Жуковского под углом атаки 5° при различных режимах набегающего потока.

Расчеты проводились на C -образной сетке из 272×100 счетных ячеек (128 ячеек на поверхности профиля и 100 ячеек между профилем и внешней границей, отстоящей от поверхности тела на расстоянии 15 его хорд). Так как конечной целью было получение стационарного решения, расчеты проводились только с одной внутренней итерацией на каждом временном шаге. Шаг по времени определялся числом Куранта, которое полагалось равным 1 в начале расчета, а затем постепенно увеличивалось до значения 10^4 к 50-ому шагу.

В качестве оценки скорости сходимости численных решений выбирается относительная L_∞ -норма невязки, $res_n = \max_k |\Delta^n \mathbf{q}_k|$. На рис. 1 она показана в зависимости от числа шагов для различных значений числа Маха набегающего потока. Графики, пронумерованные от 1 до 5, отвечают числам Маха 0.085, 0.25, 0.85, 1.1 и 8.5, соответственно.

Из этих графиков видно, что EL-схема обеспечивает гораздо более быструю сходимость, чем AL-схема, во всех рассмотренных вариантах. Однако, квадратичная сходимость в EL-схеме не достигается, несмотря на точную линеаризацию, так как

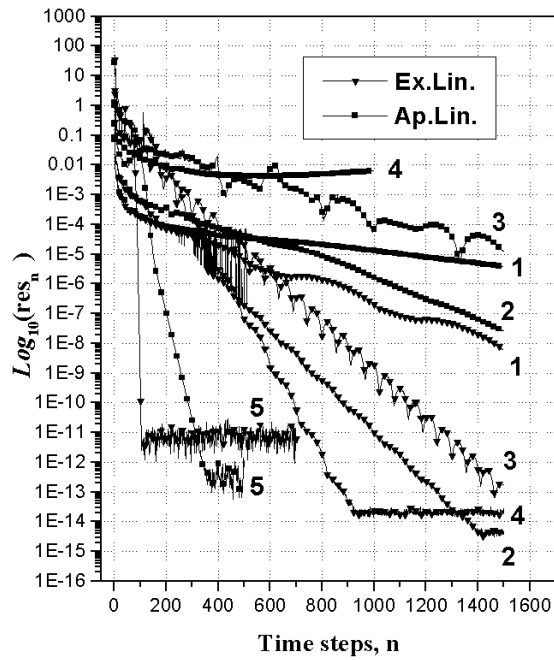


Рис. 1. Невязка численного решения в зависимости от количества временных шагов в EL- и AL-схемах; профиль Жуковского под углом атаки 5° : 1 – $M_{inf} = 0.085$, 2 – $M_{inf} = 0.25$, 3 – $M_{inf} = 0.85$, 4 – $M_{inf} = 1.1$, 5 – $M_{inf} = 8.5$.

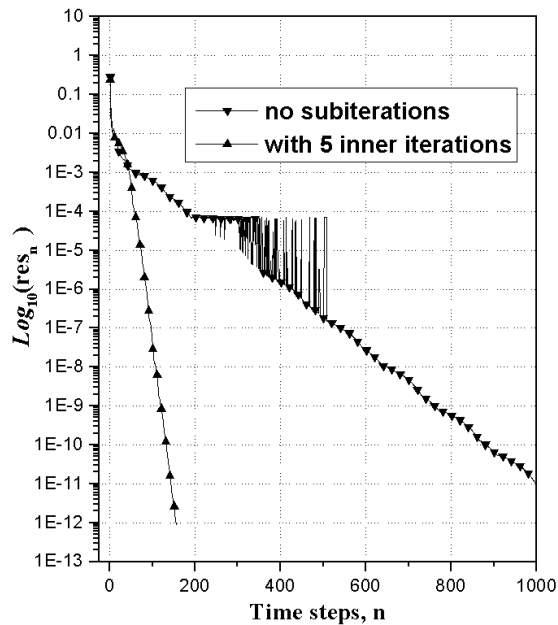


Рис. 2. Влияние внутренних итераций на скорость сходимости в EL-схеме. Профиль Жуковского под углом атаки 5° , $M_{inf} = 0.25$.

система линеаризованных уравнений не решается точно (выполняется только одна внутренняя итерация), а потому ньютоновский итерационный процесс, на самом деле, не реализуется.

Можно ожидать, что скорость сходимости существенно возрастет, если увеличить число внутренних итераций при решении линейной системы. В пределе, если выполнять внутренние итерации до полной сходимости на каждом временном шаге, сходимость должна приближаться к квадратичному закону.

Это факт находит подтверждение в соответствующих расчетах. На рис. 2 мы показываем для сравнения сходимость в EL-схеме для двух случаев, когда при решении линейной системы делается 1 и 5 итераций. Как видно, скорость сходимости заметно возрастает при более точном решении линеаризованной системы.

Вязкое стационарное течение. Следующие две задачи касаются расчета стационарных решений уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости. Первая задача - это пограничный слой на плоской пластине (задача Блазиуса). Расчеты проводились при следующих параметрах: число Маха набегающего потока $M_\infty = 0.17$ и число Рейнольдса $Re = 2.3 \cdot 10^5$. При этом использовалась достаточно грубая сетка из 20×20 ячеек.

Вторая задача - это стационарное сверхзвуковое обтекание цилиндра. Расчет проводился только в передней (наветренной) области. Параметры задачи определялись $M_\infty = 6$ и $Re = 1.3 \cdot 10^6$. Расчетная сетка состояла из 120 ячеек вдоль поверхности тела и 80 ячеек в радиальном направлении, сгущающихся к цилиндру так, что размер пристеночной ячейки составлял $10^{-5} \times R_{cyl}$. В качестве начальных данных использовались результаты расчета аналогичной задачи в рамках невязкой модели. На выходной границе использовались характеристические граничные условия с предписанным значением давления, равным соответствующему значению невязкой задачи.

Сходимость численных решений в схемах EL и AL для этих двух задач приведены на рис. 3 и 4, соответственно. Превосходство скорости сходимости в EL-расчетах очевидно, хотя следует отметить, что эти расчеты выполнялись лишь с одной внутренней итерацией, и ожидать выхода на квадратичную ньютоновскую сходимость в них, вообще говоря, нельзя.

Вязкое нестационарное течение. При расчете нестационарных задач неявной схемой Годунова внутренние итерации в уравнении (36) должны выполняться, в идеальном случае, до полной сходимости. В реальных ситуациях число внутренних итераций ограничивают (обычно не более 10-20). Поэтому точность расчета нестационарных задач зависит не только от порядка аппроксимации временной схемы, но и от скорости сходимости внутреннего итерационного процесса, обеспечивающего решение соответствующих дискретных уравнений на каждом временном слое.

Для оценки скорости сходимости внутренних итераций были проведены расчеты дозвукового обтекания профиля Жуковского (угол атаки 5° , $M_\infty = 0.5$), рассмотренного выше, в модели вязких уравнений. В силу отрыва погранслоя и схода вихревой пелены в следе за телом, эта задача существенно нестационарна.

Сетка была аналогична той, что использовалась в невязких расчетах, с той лишь разницей, что ячейки в поперечном направлении были перераспределены - они были сгущены к поверхности тела, обеспечивая минимальный размер ячейки $10^{-3} \times L_{chord}$.

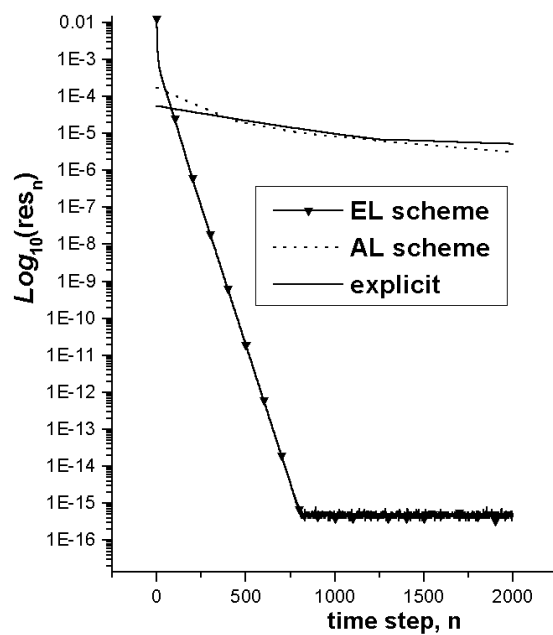


Рис. 3. Невязка численного решения в зависимости от числа шагов по времени в задаче о пограничном слое на плоской пластине.

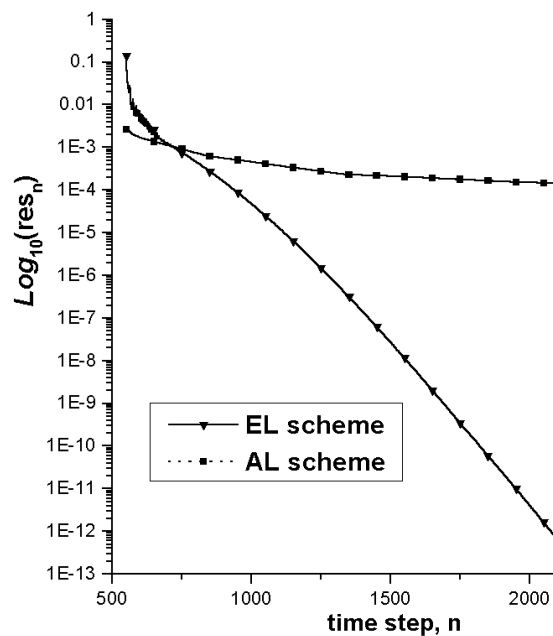


Рис. 4. Невязка численного решения в зависимости от числа шагов по времени в задаче о сверхзвуковом обтекании цилиндра.

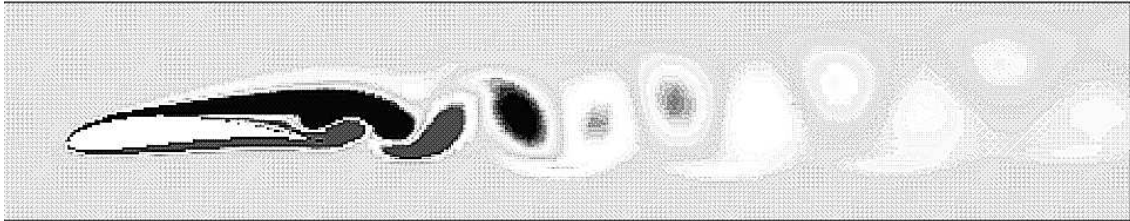
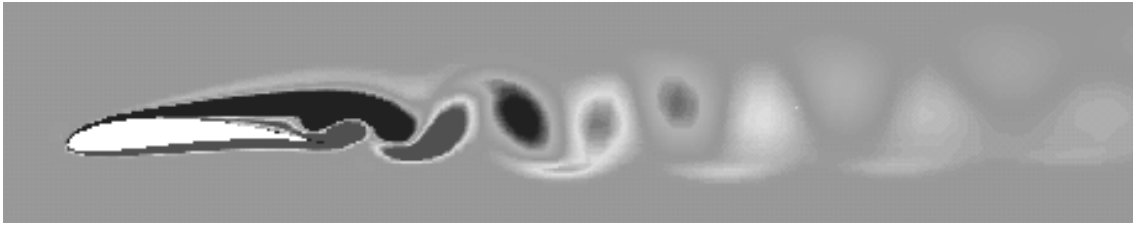


Рис. 5. Поле завихренности в задаче о вязком течении около профиля Жуковского; $M_{\text{inf}} = 0.5$, угол атаки 5° .

Число Рейнольдса в расчетах равнялось $Re = 2.3 \cdot 10^4$.

Внутренние итерации выполнялись на каждом временном слое до момента, когда начальная итерационная невязка падает более чем на два порядка. На рис. 5 изображены изоконтурные завихренности численного решения EL-схемы, которые подтверждают нестационарность задачи - хорошо виден отрыв погранслоя с образованием цепочки движущихся вниз по потоку вихрей.

Рис. 6 иллюстрирует сходимость внутренних итераций в схемах EL и AL. Здесь показана итерационная невязка в зависимости от числа итераций. Превосходство EL-схемы очевидно: лишь 5 итераций требуется, чтобы уменьшить невязку на 2 порядка, в то время как в AL-схеме таковых требуется более, чем 20.

4. Метод Годунова для задач аэроакустики.

В настоящем параграфе решение вариационной задачи Римана используется для численного моделирования эволюции полей малых возмущений на фоне неоднородного базового течения. Расчетная модель основывается на линеаризованных уравнениях Эйлера, в которой полное поле течения раскладывается на сумму базового (осредненного), известного из других численных, аналитических или экспериментальных исследований, и поля малых возмущений, определяемого в результате интегрирования соответствующих линеаризованных уравнений.

Вводя верхнюю черту и "крышку" для обозначения базовых величин и малых возмущений, соответственно, вектор консервативных переменных представим в виде $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}$. Интегрируя уравнения Эйлера методом конечных объемов на некоторой заданной сетке и подставляя в полученные дискретные уравнения указанное выше разложение, можно прийти к следующей линейной модели, которая описывает

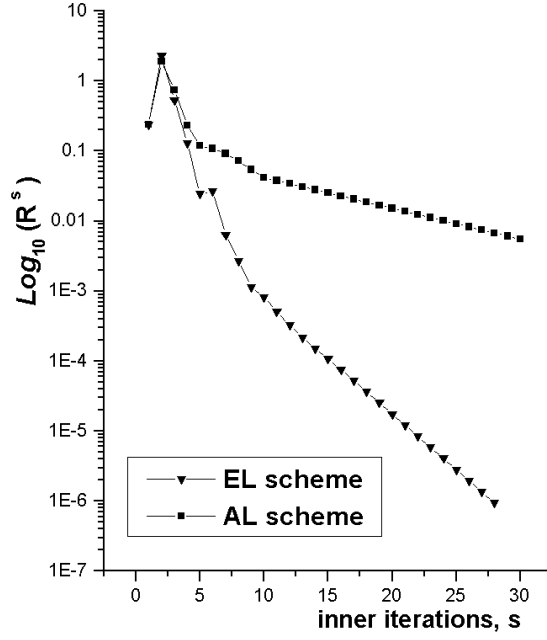


Рис. 6. Сходимость внутренних итераций для нестационарного течения около профиля Жуковского.

распространение малых возмущений по заданному, вообще говоря, неоднородному, базовому полю:

$$\frac{d\hat{\mathbf{Q}}_i}{dt} + \frac{1}{\omega_i} \sum_{\sigma} s_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{\sigma} = S_i \quad (41)$$

В правой части этих уравнений S - это все нелинейные члены. Они отвечают, главным образом, за генерацию малых возмущений и обычно моделируются специальным объемным источниковым членом, который строится на основе экспериментальных данных или других расчетов (например, DNS - прямое численное моделирование, LES - моделирование крупных вихрей (12)).

Главным моментом в рассматриваемом подходе является аппроксимация акустического потока $\hat{\mathbf{F}}_{\sigma}$ на ребрах ячеек, который зависит как от параметров базового течения вблизи ребра, так и от величин малых возмущений. Мы решаем эту задачу годуновским подходом, рассматривая акустический поток как результат взаимодействия полей малых возмущений в прилегающих к ребру ячейках. Тогда искомый поток вычисляется через решение вариационной задачи Римана

$$\hat{\mathbf{F}}_{\sigma} = A \left(\overline{\mathbf{Q}}_{\sigma}^R \right) \hat{\mathbf{Q}}_{\sigma}^R \quad (42)$$

где $A(\mathbf{Q}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$ - якобиан невязкого потока, а $\overline{\mathbf{Q}}_{\sigma}^R = \overline{\mathbf{Q}}_{\sigma}^R(0, \overline{\mathbf{Q}}_i^{\sigma}, \overline{\mathbf{Q}}_{\sigma(i)}^{\sigma})$ - решение базовой задачи Римана на ребре с векторами $\overline{\mathbf{Q}}_i^{\sigma}$ и $\overline{\mathbf{Q}}_{\sigma(i)}^{\sigma}$, представляющими базовое течение на ребре со стороны текущей i и соседней $\sigma(i)$ ячейки, соответственно.

Вектор $\hat{\mathbf{Q}}_\sigma^R$ in (42) представляет собой решение вариационной задачи Римана и записывается через вариационные матрицы, выражения для которых были найдены выше,

$$\hat{\mathbf{Q}}_\sigma^R = M_i(0, \overline{\mathbf{Q}}_i^\sigma, \overline{\mathbf{Q}}_{\sigma(i)}^\sigma) \hat{\mathbf{Q}}_i^\sigma + M_{\sigma(i)}(0, \overline{\mathbf{Q}}_i^\sigma, \overline{\mathbf{Q}}_{\sigma(i)}^\sigma) \hat{\mathbf{Q}}_{\sigma(i)}^\sigma \quad (43)$$

Здесь верхний индекс σ указывает, что соответствующие значения берутся в центре грани. Для получения этих значений мы используем линейное восполнение примитивных величин в пределах каждой счетной ячейки.

Интегрирование по времени получающейся в результате системы дифференциальных уравнений (41) проводится по 3-х уровневой схеме Рунге-Кутты, требующей минимального хранения данных и обеспечивающей при этом третий порядок аппроксимации (13).

4.1. Результаты численных экспериментов.

Численный метод на основе решения вариационной задачи Римана применяется в настоящем разделе к расчету четырех задач. Первые три являются в вычислительной аэроакустике тестовыми, имеют аналитические решения и служат для верификации метода. Четвертая задача - рассеивание звуковой волны на вихре - выбрана для изучения возможностей метода при исследованиях вторичных акустических эффектов.

Монопольный источник звука. Монопольный источник звуковых волн моделируется непроницаемой сферой радиуса R , поверхность которой подвержена пульсационному движению. Радиальная скорость поверхности меняется во времени в соответствии с законом $U_r = U_0 \cos(\omega t)$. Окружающий газ находится в состоянии покоя и характеризуется давлением p_0 и плотностью ρ_0 .

Расчет возникающего около сферы звукового поля проводится в области, ограниченной с одной стороны поверхностью сферы, а с другой - внешней границей, отнесенной на расстояние 5 радиусов. Расчетная сетка состоит из 150 равномерно распределенных ячеек вдоль поверхности источника и 80 ячеек в радиальном направлении.

Результаты расчета мы представляем с помощью интегральной интенсивности излучаемого поля I , которая определяется выражением

$$I = \oint \overline{\hat{p}\hat{v}_n} ds \quad (44)$$

где \hat{v}_n - нормальная компонента скорости звукового поля, верхняя черта обозначает осреднение по времени и интегрирование выполняется по некоторой замкнутой поверхности, окружающей источник звука.

Согласно теории акустики (14), нормализованная интенсивность зависит от числа Струхала $Str = \omega R/c_0$, где c_0 - скорость звука, согласно следующему соотношению:

$$\frac{I}{I^*} = \frac{Str^2}{1 + Str^2} \quad (45)$$

где $I^* = 2\pi R^2 c_0 \rho_0 U_0^2$.

В расчетах интенсивность определялась интегрированием численных значений потока звуковой энергии $\hat{p}\hat{v}_n$ на внешней границе счетной области с последующим

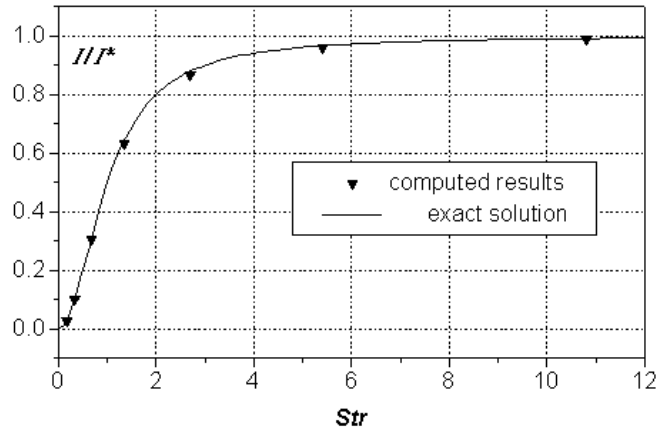


Рис. 7. Интенсивность излучаемого звукового поля в зависимости от числа Струхалия для монополюсного источника звука.

осреднением по периоду пульсаций источника. Расчеты проводились при различных значениях числа Str , соответствующих достаточно широкому спектру частот. На рис. 7 приведено сравнение численных значений (маркеры) с теоретическим соотношением (45), изображенным сплошной линией, которое демонстрирует отличное совпадение результатов во всем диапазоне частот.

Дипольный источник звука. Дипольный источник звуковых волн моделируется также с помощью жесткой сферы с той лишь разницей, что теперь акустическое поле генерируется в результате поступательных осцилляционных движений поверхности. Выбирая ось x в направлении движения сферы, скорость поверхности задается соотношениями $U_x = U_0 \cos(\omega t)$, $U_y = U_z = 0$. Условия расчетов полностью аналогичны тем, что были в случае монополюсного источника.

Акустическая теория дает в этом случае зависимость интегральной интенсивности от числа Струхалия вида

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1}{3} \frac{Str^4}{4 + Str^4} \quad (46)$$

которая изображена на рис. 8 вместе с расчетными значениями. Опять же, налицо полное совпадение с теорией, как в низкочастотной области спектра, так и в его высокочастотной области.

Взаимодействие звука с ударной волной. Следующая тестовая задача имеет отношение к ситуации, когда базовое течение разрывно. Это - задача о прохождении плоской монохроматической звуковой волны через ударную волну. Базовое течение здесь соответствует стационарной плоской волне и представляется двумя однородными потоками, соответственно перед и за ее фронтом, параметры которых связаны соотношениями Рэнкина-Гюгонио. Звуковая волна генерируется в области перед волной. Прохождение через ударный фронт сопровождается преломлением падаю-

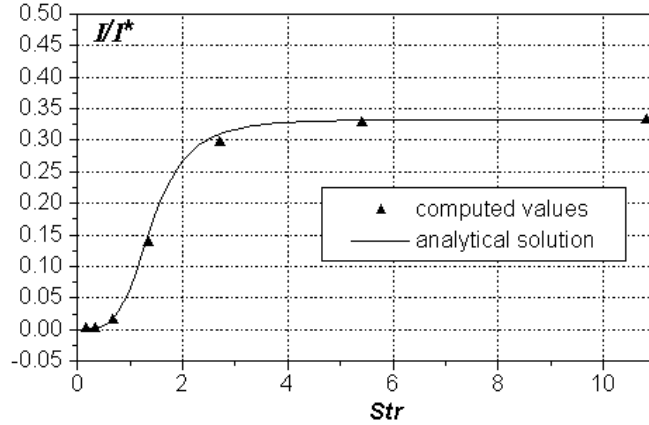


Рис. 8. Интенсивность излучаемого звукового поля в зависимости от числа Струхалия для дипольного источника звука.

щей звуковой волны и генерацией энтропийной волны. Задача имеет аналитическое решение, дающее угол преломления и амплитуды звуковой и энтропийной волн за ударной волной в зависимости от ее интенсивности и угла падения звука (15).

Численное моделирование этой задачи проводится в прямоугольной области на равномерной сетке. Звуковая волна генерируется на границах области заданием возмущений параметров течения в форме плоской монохроматической волны

$$\hat{U} = \hat{U}_0 \cos [(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - (\omega + (\mathbf{k}, \mathbf{V}_i)) t]$$

где $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n} / c_i$ - волновой вектор, \mathbf{V}_i - вектор скорости перед фронтом ударной волны.

Сначала мы рассматриваем простейший случай нормального падения звука на нормальную волну. Хотя эта задача одномерная, расчет проводится в двумерной области. Ударная волна помещается вертикально посередине области, базовое течение имеет направление слева направо и звук генерируется соответственно на левой границе.

Результаты этого расчета изображены на рис. 9, где приведены численные значения акустического давления вдоль основного течения для волны с числом Маха 1.5. Видно, что волна при переходе через скачок усиливается по амплитуде примерно в 2 раза, а также меняется ее длина волны в силу доплеровского эффекта. Отметим еще, что как в падающей волне, так и в проходящей отсутствует эффект численного затухания. Их амплитуды практически не меняются по мере движения волны вниз по потоку, хотя расчетная сетка была относительно крупной - 20 и 15 ячеек на одну волну, соответственно в падающем и проходящем звуке.

При переходе через скачок амплитуда звуковой волны увеличивается. Как видно из приведенных результатов, это увеличение, по крайней мере качественно, правильно улавливается предложенным методом, без искусственных "всплесков" или "провалов" в распределениях вблизи фронта волны. Количественно точность расчетов иллюстрируется рис. 10, где сравниваются расчетные и теоретические данные

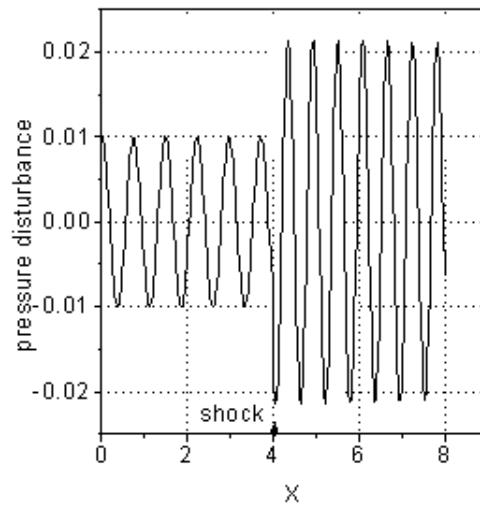


Рис. 9. Распределение звукового давления в задаче о нормальном падении звука на ударную волну.

по коэффициенту усиления (отношение амплитуд проходящей и падающей волн) для ударных волн различной интенсивности. Видно, что расчетные значения хорошо ложатся на теоретическую кривую во всем диапазоне от волн слабой интенсивности до сильных скачков.

Следующий случай - падение под некоторым углом звука на косую ударную волну. Расчеты проводятся на прямоугольной области, которая выбирается таким образом, чтобы скачок располагался строго по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Таким образом, положение ударной волны, в отличие от предыдущего случая, не совпадает с линией сетки. Звуковая волна теперь генерируется на левой и верхней границах области.

Базовое течение соответствует косому скачку, характеризующемуся числом Маха перед фронтом волны $M_i = 6$ и углом наклона $\varphi = 74.32^\circ$. При этих значениях угол отклонения потока за скачком $\chi = 40^\circ$.

Угол падения звуковой волны выбирается равным 48.45° . При таком выборе теория акустики дает значение угла преломления для проходящей звуковой волны, равное 34.32° , что соответствует в рассматриваемой конфигурации случаю, когда преломленная волна будет двигаться в области за ударной волной строго вертикально вниз. Другими словами, фронт проходящей волны должен быть строго параллелен верхней и нижней границам расчетной области.

Анализируя изоконтуры акустических параметров, можно легко судить в этом случае, правильно ли метод вариационной задачи Римана предсказывает преломление акустических полей на сильных скачках. На рис. 11 приведены изоконтуры расчетных данных для акустического давления. Как нетрудно убедиться, фронт преломленной волны за скачком действительно оказывается строго параллельным горизонтальным границам области. Это служит еще одним верификационным фак-

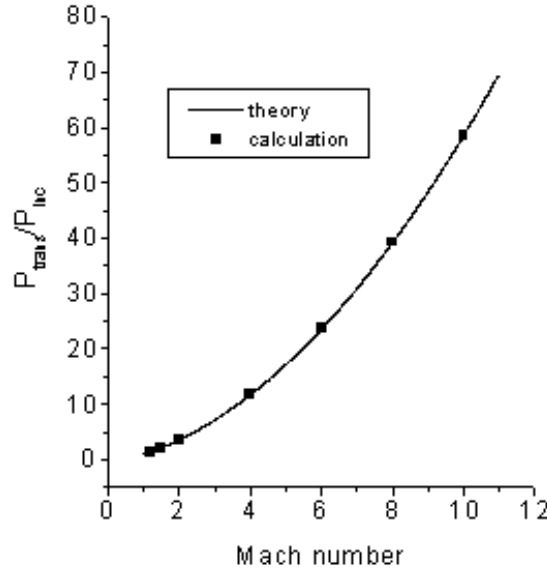


Рис. 10. Коэффициент усиления звука при нормальном падении в зависимости от числа Маха ударной волны.

том в пользу предлагаемого метода.

Рассеивание звука на вихре. Эта задача является одной из ряда общепринятых эталонных задач для оценки численных методик в аэроакустике. Она интенсивно исследовалась в последние два десятилетия (см., например, работу (16) и ссылки к ней), и к настоящему времени накоплен богатый материал теоретических, численных и экспериментальных результатов, которые могут быть использованы для верификации новых подходов.

Численное моделирование рассеивания звука на вихре проводится методом вариационной задачи Римана в квадратной области со стороной $2L$. Плоская звуковая монохроматическая волна генерируется на левой границе области и распространяется в направлении двумерного вихря характерного радиуса a , расположенного в центре расчетной области.

Базовое течение представляет собой невязкий сжимаемый изоэнтропический вихрь нулевой полной циркуляции, в котором азимутальная компонента скорости экспоненциально затухает на бесконечности

$$u_\varphi = 2\frac{r}{a}\mu \exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

где μ - параметр, характеризующий интенсивность вихря. Такая модель вихря использовалась, например, в (17). При этих условиях давление определяется следую-

щим выражением:

$$p = p_\infty \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} \mu^2 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\}$$

Расчеты проводятся на равномерной 271×271 сетке. Внешние границы расчетной области отнесены от вихря так, что $L/a = 20$. В начальный момент поле возмущений в расчетной области отсутствует.

Рассеянное звуковое поле возникает как результат взаимодействия падающего звука и вихря. Оно определяется путем вычитания звукового поля в отсутствии вихря ($\mu = 0$) из соответствующего поля, рассчитанного при наличии вихря.

Картина рассеянного поля зависит от двух безразмерных параметров: числа Маха M_v , определяемого по максимальной скорости $u_{\varphi, max}$ и скорости звука на бесконечности c_∞ , и $\delta = \lambda/a$, где λ - длина волны падающего звука.

На рис. 12 мы приводим мгновенные контуры давления рассеянного поля для расчета с параметрами $M_v = 0.125$ и $\delta = 4$. Рассеивание в этом случае, как видно из рисунка, происходит главным образом в направлении падения звука (прямое рассеивание). Обратное рассеивание практически отсутствует. Кроме этого прослеживаются два направления доминантного рассеивания, которые составляют примерно 30° с направлением падающей волны.

Средне-квадратичное значение амплитуды давления рассеянной волны p_{rms} как функция полярного угла φ показано на рис. 13 при нескольких значениях полярного радиуса r . Эти значения нормализованы посредством амплитуды падающей волны и фактора $\sqrt{\lambda/r}$. Источником рассеиваемых волн является ядро вихря. Поэтому амплитуда рассеянной волны должна затухать при удалении от вихря как $1/\sqrt{r}$. А это, в свою очередь, означает, что нормализованные указанным выше способом амплитуды должны иметь конечный предел при $r \rightarrow \infty$. Другими словами, графики должны сваливаться на одну предельную кривую по мере увеличения отношения λ/r , что и происходит, как это видно из рис. 13.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами работы (17), где аналогичная задача исследовалась методами прямого численного моделирования уравнений Навье-Стокса. Там также было показано, что рассеивание звука идет преимущественно в прямом направлении, достигая максимальных значений на двух углах $\varphi = \pm 30^\circ$. Кроме этого отмечалось наличие слабой асимметричности рассеянного поля по отношению к направлению падающей волны. Точно такая же асимметричность наблюдается в настоящих расчетах (рис. 13).

С увеличением длины волны λ волновая картина рассеиваемого поля качественно меняется. Угловой сектор рассеивания увеличивается. Возникает обратное рассеивание (противоположное направлению падающей волны), которое усиливается и становится сопоставимым с прямым рассеиванием. Для вихря слабой интенсивности (малые числа Маха) существует аналитическая асимптотика дальнего поля для рассеиваемого на вихре звука в пределе, когда длина волны много больше размера вихря (так называемое приближение Борна) (18). Согласно этой теории, рассеивание звука в приближении Борна происходит как в прямом, так и в обратном направлении, причем волновая картина рассеянного поля имеет типичную структуру квадрупольного источника.

С целью получения эффекта обратного рассеивания мы провели расчеты рассмотренной выше задачи о рассеивании звука при тех же самых численных услови-

ях, той же интенсивности вихря $M_v = 0.125$, но при большем значении длины волны $\delta = 10$. Результаты расчета представлены на рис. 14 изоконтурными мгновенными распределениями давления в рассеянном звуке. Очевидно, что присутствует как прямое, так и обратное рассеяние, и волновая картина имеет действительно квадрупольную структуру.

Нормализованные значения средне-квадратичной амплитуды для этого случая изображены на рис. 15. Как видно из рисунка, пик рассеивания достигается теперь на четырех направлениях, составляющих углы $\pm 40^\circ$ и $\pm 130^\circ$ с направлением падающей волны. В целом, обратное рассеивание оказывается примерно в 2 раза слабее, чем прямое, что полностью согласуется с теорией дальнего поля борновского приближения (18). Также находит свое подтверждение и $1/\sqrt{r}$ -автомодельность; все кривые на рис. 15, соответствующие $r = 2\lambda$ и больше, практически совпадают.

5. Заключение

Суммируя все вышесказанное, приведем основные результаты.

1) Сформулирована вариационная задача Римана. Она состоит в нахождении первой вариации решения классической (автомодельной) задачи Римана о распаде произвольного разрыва в газе при малых вариациях начальных данных.

2) Показано, что эта задача имеет единственное решение, которое может быть получено в виде компактных явных аналитических выражений при любых начальных данных.

3) С помощью полученного решения выполнена точная линеаризация функции численного потока в методе Годунова, которая затем применена для решения уравнений соответствующей неявной схемы. Вычислительные эксперименты проведены, которые убедительно показали преимущество точной линеаризации по сравнению с широко используемым в мире подходом приближенной линеаризации Туркелла-Джеймсона в скорости сходимости численных решений.

4) На основе решения вариационной задачи Римана предложена численная методика, которая по сути является обобщением метода Годунова на задачи аэроакустики. Она позволяет рассчитывать эволюцию полей малых возмущений на фоне неоднородного базового течения. Приведенные результаты вычислительных экспериментов показали работоспособность методики в широком классе задач, включающем в том числе и разрывные базовые потоки.

Список литературы

- [1] С. К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959, т. 47, № 3, с. 271-306.
- [2] Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов, И. Л. Киреева, Л. А. Плинер. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках.- М.: Наука, 1970, 120 с.
- [3] С. К. Годунов , А.В. Забродин, Г.Г. Прокопов. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВМ и МФ. 1961, № 6, с. 1020-1050.
- [4] С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.В. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: 1976.
- [5] Godunov methods. Theory and Applications. / Ред. Е. F. Toro. - Kluwer Academic/Plenum Publishers, Manchester, UK. 2001, с. 1077.
- [6] Н. Е. Кочин. Избранные труды. т. 2.- М.: Изд. АН СССР, 1949, с. 5-42.
- [7] A. Jameson. Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows past airfoils and wings // Technical report AIAA 91-1596, 1991, 19 с.
- [8] A. Jameson and E. Turkel. Implicit Schemes and LU Decompositions // Mathematics of Computation. 1981, т. 37, с. 385-397.
- [9] S. Yoon and A. Jameson. Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations // AIAA Journal. 1988, т. 26, с. 1025-1026.
- [10] I. Men'shov and Y. Nakamura. Implementation of the LU-SGS Method for an Arbitrary Finite Volume Discretization // Proc. of 9th Conference on CFD. 1995, Tokyo, pp 123-124.
- [11] I. Men'shov and Y. Nakamura. Numerical simulations and experimental comparisons for high-speed nonequilibrium air flows // Fluid Dynamics Research. 2000, т. 27, с. 305-334.
- [12] R. Ewert, M. Meinke, and W. Schroder. Aeroacoustic source terms for the linearized Euler equations // Technical Paper 2000-2046. 2000, AIAA Press, Washington, DC, p. 36
- [13] C. W. Shuu. Total-Variation-Diminishing time discretizations // SIAM Jour. Sci. Stat. Comput. 1988, т. 9, pp. 1073-1084.
- [14] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Гидродинамика. - М: 1988.
- [15] В. М. Конторович. Отражение и преломление звука ударной волной // ЖЭТФ. 1957, т. 33, с. 1527-1528.
- [16] R. Ford and S. G. Llewellyn Smith. Scattering of acoustic waves by a vortex // Jour. of Fluid Mech. 1999, т. 386, с. 305-328.

- [17] T. Colonius, S. K. Lele, and P. Moin. The scattering of sound waves by a vortex: Numerical simulations and analytical solutions // Jour. of Fluid Mech. 1994, т. 260, с. 271-298.
- [18] А. Л. Фабрикант. Рассеивание звука вихревым потоком // Физ. акустика. 1983, т. 29, с. 2-9.

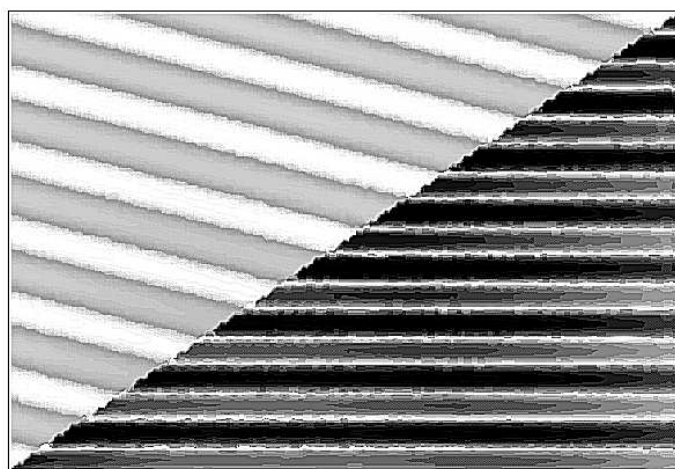
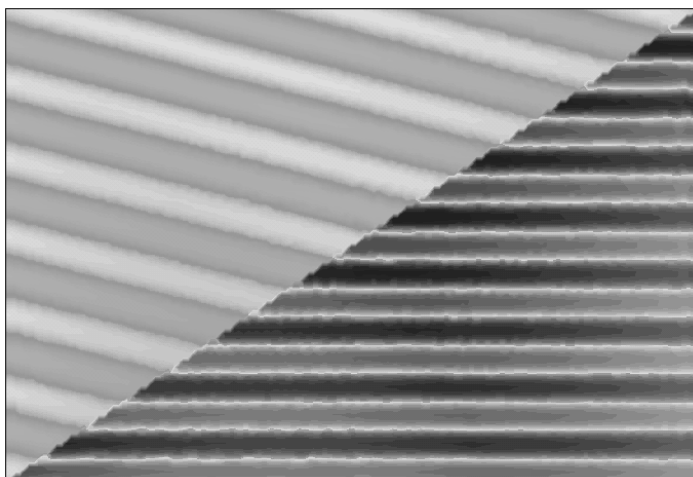


Рис. 11. Изоконтурные поля звукового давления в задаче о падении звука на косую ударную волну.

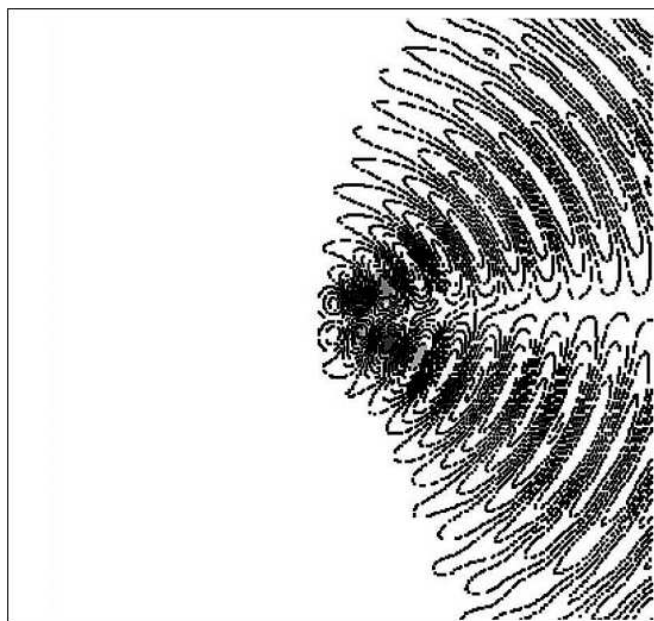
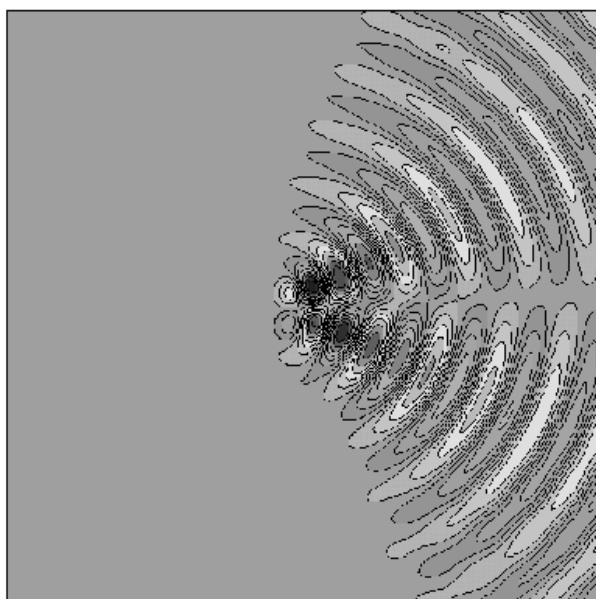


Рис. 12. Изоконтуры мгновенного распределения давления рассеянного поля для $M_v = 0.125$ и $\delta = 4$.

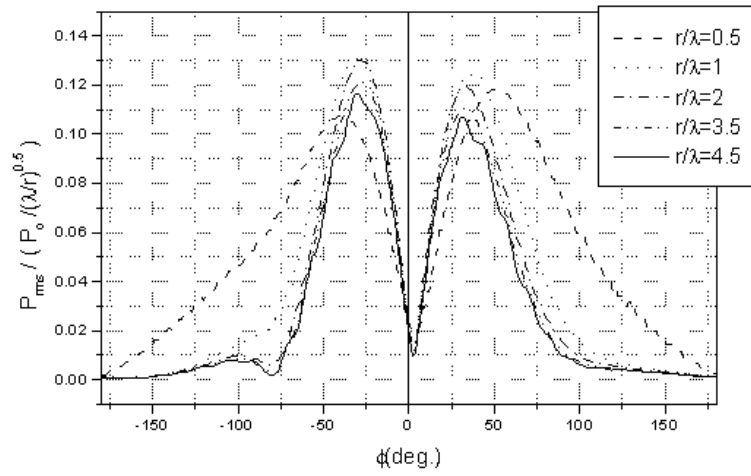


Рис. 13. Средне-квадратичная амплитуда давления по полярному углу для $M_v = 0.125$ и $\delta = 4$.

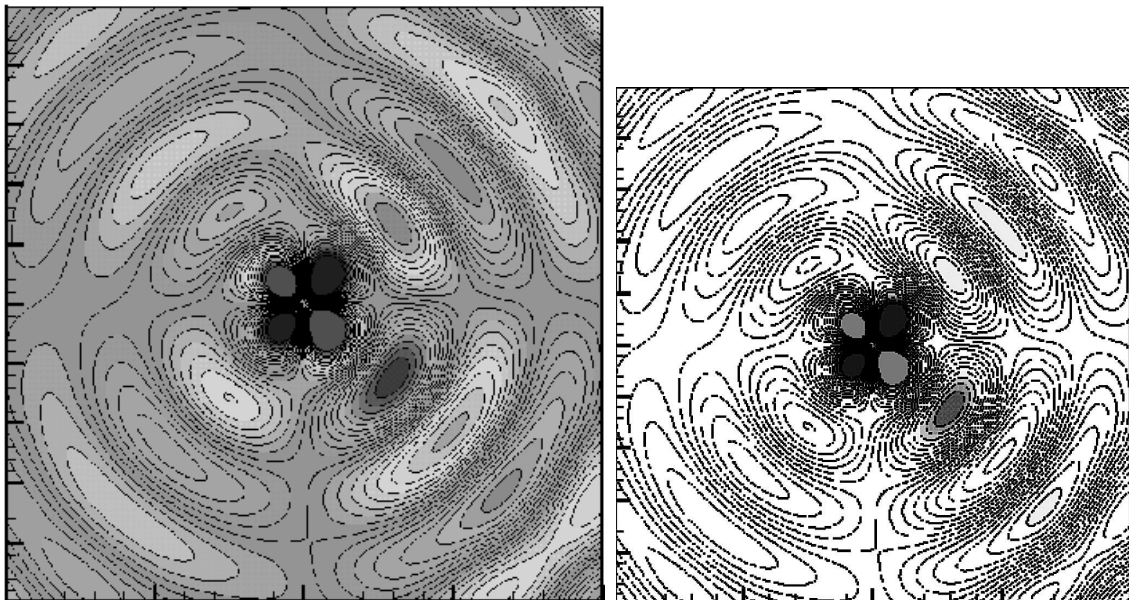


Рис. 14. Изоконтурные мгновенные распределения давления рассеянного поля для $M_v = 0.125$ и $\delta = 10$.

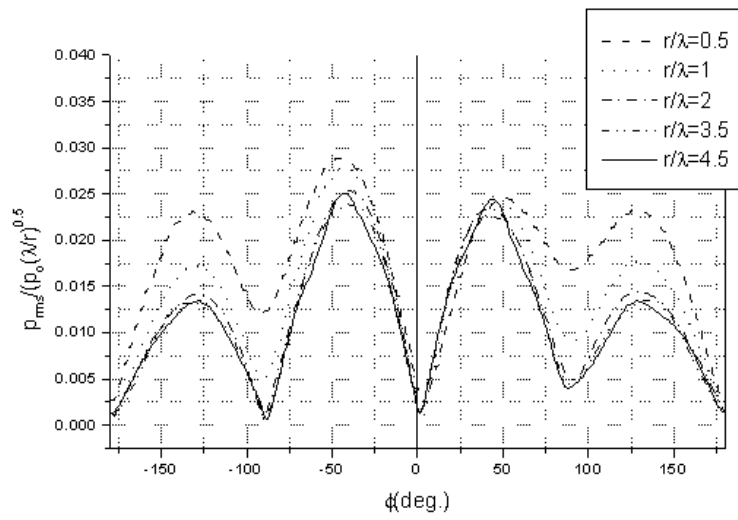


Рис. 15. Средне-квадратичная амплитуда давления по полярному углу для $M_v = 0.125$ и $\delta = 10$.