ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНЫХ НЕОТРАЖАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© *О.В. Подгорнова*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00567).

Получено дальнейшее развитие метода [1] построения неотражающих граничных условий для задачи с азимутальной зависимостью скорости звука. Предложенные модификации вычисления вспомогательных дискретных функций Грина с использованием сплайнов Рябенького второго порядка гладкости позволили существенно улучшить точность расчетов при тех же вычислительных затратах. В работе приводится описание метода, численной реализации и результатов тестирования.

GENERATION OF DISCRETE NON-REFLECTING BOUNDARY CONDITIONS FOR WAVE SIMULATIONS IN THE MOVING MEDIA

O.V. Podgornova

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow

1. Введение

Рассматривается двумерное волновое уравнение в движущейся среде получающееся заменой переменной $x' = x + at$ в волновом уравнении $u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$. Здесь a заданная постоянная скорость, c скорость звука, $0 \le a < c$,

$$u_{tt} + 2au_{tx'} + a^2 u_{x'x'} - c^2(u_{x'x'} + u_{yy}) = 0. \tag{1.1}$$

Через x обозначена ось в неподвижной системе координат направленная вправо, а через x' – ось в локальной системе координат равномерно движущейся влево. Последняя система может быть ассоциирована с движущимся телом, например крылом.

Для численного моделирования в неограниченных областях с помощью конечно-разностных методов или методов конечных объемов требуются специальные неотражающие условия на открытых границах.

Существует подход построения точных или *прозрачных* граничных условий (TBC), описанный в [2],[3],[4],[5],[6]. Подход работает, в частности, для 2D/3D волнового уравнения при $a = 0$ в случае сферической границы и при $a \ge 0$ в случае плоской границы в канале.

В указанных случаях для получения граничных условий используется метод разделения переменных. Однако при $a > 0$ уравнение (1.1) не допускает разделение переменных в полярной системе координат из-за того что коэффициенты уравнения непостоянны относительно азимутального угла и построить аналитические ПГУ для сферической границы не удается.

В [1] предложен способ построения граничных условий для такого случая. Идея состоит в получении соответствующего граничного оператора для заранее дискретизированной задачи, и в последующем его сжатии. Подчеркнем, что идея использования дискретной постановки для получения точных граничных условий была впервые предложена В.С. Рябеньким 1990 году и реализована для 3D волнового уравнения в [8]. Принципиальная разница в подходах заключается в способе аппроксимации граничного оператора, изначально сильно дорогого с точки зрения вычислительных ресурсов. Метод [8] базируется на наличии лакун для 3D волнового уравнения, наш же подход использует аппроксимацию временно́й составляющей оператора посредством сумм экспонент и может быть применен при отсутствии лакун.

Работа организована следующим образом. В параграфе 2 приведена формулировка задачи. В параграфе 3 описываются основные шаги алгоритма построения оператора дискретных ПГУ и его аппроксимации ("сжатия"). Численные примеры, демонстрирующие точность даваемую подходом, рассмотрены в параграфе 4. В последнем параграфе 5 приводятся некоторые заключения.

2. Постановка задачи

Для простоты обозначений мы опускаем $'$ в уравнении (1.1). Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} + 2au_{tx} - \left(c^2 - a^2\right) u_{xx} - c^2 u_{yy} = f, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$
$$u\left|_{t=0}\right. = u_0,$$
$$u_t\left|_{t=0}\right. = u_1.$$

Предполагаем, что все возмущения и начальные данные находятся внутри ограниченной области D: $supp\ f(t,x,y) \subset D\ \forall t$, $supp\ u_0(x,y) \subset D$, $supp\ u_1(x,y) \subset D$.

Задача состоит в построении неотражающих граничных условий на ∂D, где D – это круг $D = \{(r,\theta), r \le R_0\}$.

Замечание: Для постановки граничных условий необходимо знать лишь уравнения вне области D и никакой конкретизации уравнений внутри области D не требуется. Это естественно, так как граничные условия подменяют собой необходимость рассмотрения задачи во всем пространстве, т.е. решения внешней задачи.

В полярной системе координат, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$u_{tt} + 2a\left(\cos\theta u_{tr} - \frac{\sin\theta}{r}u_{t\theta}\right) - \left(c^2 - a^2\cos^2\theta\right)u_{rr} \tag{2.2}$$
$$- \left(c^2 - a^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_r}{r}\right) - a^2\sin 2\theta\left(\frac{u_{r\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) = 0.$$

Также нам понадобится простое локальное граничное условие для (2.2) на ∂D. Для его получения в известном локальном условии для волнового уравнения

$u_t/c + u_r + u/(2r) = 0$ сделаем замену переменных $x \to x'$ и подставим $t = 0$ в коэффициенты зависящие от времени. Получим

$$u_t + (-a\cos\theta + c)\, u_r + a\frac{\sin\theta}{r} u_\theta + \frac{c}{2r} u = 0. \tag{2.3}$$

3. Построение оператора прозрачных граничных условий

3.1. Вспомогательные функции Грина

Будем численно конструировать решение внешней начально-краевой задачи с произвольными данными Дирихле $f(t,\theta)$ на внутренней границе $r = R_0$:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta_{c,a} u = 0 \quad \text{в} \quad (R_0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ u\,|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u\,|_{t=0} = 0 \\ u\,|_{r=R_0} = f(t,\theta) \\ u\,|_{r\to+\infty} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\partial_{tt} - \Delta_{c,a}$ – волновой оператор из (2.2).

Перейдем к сеточным уравнениям. Мы вводим полярную сетку Ω_h на $\mathbb{R}^2 \backslash D$: равномерную по радиусу и углу, $R_0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_I$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{M-1} < \theta_M = 2\pi$. Также вводим равномерную по времени сетку Υ_τ с шагом τ, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < \ldots$. Будем использовать индексы h и τ для обозначения сеточных аналогов операторов и функций.

Обозначим через $\varphi^m(\theta)$, $m = 0, \ldots, \infty$ — функции образующие базис на границе $(\sin(m\theta), \cos(m\theta))$, а через φ_h^m, $m = 0, \ldots, M-1$, дискретный базис.

Рассмотрим дискретизацию (3.1) на сетке $\Omega_h \times \Upsilon_\tau$:

$$\begin{cases} D_{tt}^\tau u_{\tau,h} - \Delta_{c,a}^h u_{\tau,h} = 0 \text{ в } \quad \Omega_h \times \Upsilon_\tau, \\ u_{\tau,h}\,|_{t=0} = 0, \quad D_t^\tau u_{\tau,h}\,|_{t=0} = 0, \\ u_{\tau,h}\,|_{r=R_0} = f_{\tau,h}, \\ u_{\tau,h}\,|_{r=r_I} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь $D_{tt}^\tau - \Delta_{c,a}^h$ – центрально-разностный аналог волнового оператора из (2.2).

Обозначим через $G^m(t,r)$ функции Грина задачи (3.1), то есть решения задач вида (3.1) со специальной функцией $f(t,\theta) = \delta(t)\varphi^m(\theta)$ на границе $r = R_0$.

Построим приближение $f(t,\theta)$ из (3.1), использующее только дискретные значения $f_{\tau,h}$. Для этого рассмотрим гладкую функцию $\delta_\tau(t)$, моделирующую дельта-функцию Дирака $\delta(t)$ на сетке Υ_τ, а именно $\delta_\tau(t_0) = 1$ и $\delta_\tau(t_p) = 0$ при $p \neq 0$. Конкретный вид $\delta_\tau(t)$ будет уточнен позже. Нужно отметить, что так как *supp* $\delta_\tau(t)$ может захватывать точки временной сетки с отрицательными значениями, то расчет вспомогательных задач проводится с момента более раннего чем $t = 0$, конкретное значение определяется видом $\delta_\tau(t)$. Итак приближение есть

$$\tilde{f}_{\tau,h}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \left(\hat{f}_\tau^m\right)^p \delta_\tau(t - t_p) \right) \varphi^m(\theta), \tag{3.3}$$

где $\hat{f}_\tau^m$ коэффициенты Фурье функции $f_{\tau,h}$ в базисе $\{\varphi_h^m\}_{m=0}^{M-1}$.

Тогда решение $\tilde{u}_{\tau,h}$ задачи (3.1) для граничной функции $\tilde{f}_{\tau,h}(t)$ есть $\tilde{u}_{\tau,h}(t,r,\theta) = \sum\limits_{m=0}^{M-1} \sum\limits_{p} \left(G^m * \delta_\tau\right)(t - t_p) \left(\hat{f}_\tau^m\right)^p \cdot \varphi^m(\theta)$. Заметим, что внутренняя сумма есть дискретная свертка по индексу p, а именно $\sum\limits_{p} \left(G^m * \delta_\tau\right)(t - t_p) \left(\hat{f}_\tau^m\right)^p = \left(G^m * \delta_\tau\right) * \hat{f}_\tau^m$. При проекции на сетку получаем

$$u_{\tau,h} \approx \left(\tilde{u}_{\tau,h}(t,r,\theta)\right)|_{\Upsilon_\tau \times \Omega_h} = \sum_{m=0}^{M-1} \left(G^m * \delta_\tau\right)|_{\Upsilon_\tau \times \Omega_h} * \hat{f}_\tau^m \varphi_h^m. \tag{3.4}$$

Мы будем численно находить именно $G^m * \delta_\tau$, которые являются не чем иным как решениями задач вида (3.1) для $f(t,\theta) = \delta_\tau \cdot \varphi^m(\theta)$.

Для этого, наряду с основной сеткой $\Upsilon_\tau \times \Omega_h$ с шагом τ, рассмотрим также подсетки $\Upsilon_\tau^{(s)} \times \Omega_h^{(s)}$ с кратными шагами $\tau_s := \tau/s$, $h_s := h/s$, $s = 1, 2, 4, 8, \ldots$. Обозначим через $\delta_\tau^{(s)}$ проекцию функции $\delta_\tau(t)$ на подсетку $\Upsilon_\tau^{(s)}$.

Рассматриваем следующие вспомогательные разностные начально-краевые задачи на подсетке с шагами (τ_s, h_s):

$$\begin{cases} D_{tt}^{\tau_s} \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m - \Delta_{c,a}^{h_s} \mathcal{E}_{\tau_k,h_s}^m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_h^{(s)} \times \Upsilon_\tau^{(s)}, \\[2ex] \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m|_{t=0} = 0, \quad D_t^{\tau_s} \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m|_{t=0} = 0, \\[2ex] \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m|_{r=r_0} = \delta_\tau^{(s)} \varphi_{h_s}^m, \\[2ex] \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m|_{r=r_I} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Эти M дискретных задач (3.5) определяют приближения

$$\mathcal{E}_{\tau,h}^m := \mathcal{E}_{\tau_s,h_s}^m|_{\Omega_h \times \Upsilon_\tau} \approx \left(G^m * \delta_\tau\right)|_{\Upsilon_\tau \times \Omega_h}. \tag{3.6}$$

Замечание: Функции $\mathcal{E}_{\tau,h}^m$ можно трактовать как приближения дискретных функции Грина задачи (3.2).

Затем мы вводим матрицу $\mathcal{E}_{\tau,h}$ с элементами $\left(\mathcal{E}_{\tau,h}^{m,k}\right)_i^p$, которые являются коэффициентами Фурье $\left(\mathcal{E}_{\tau,h}^m\right)_{i,j}^p$, где i, j и p индексы по переменным r, θ и t соответственно. Следующее матричное обозначение более наглядно

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\tau,h}^0 \\ \mathcal{E}_{\tau,h}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{\tau,h}^{M-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\tau,h}^{0,0} & \mathcal{E}_{\tau,h}^{0,1} & \ldots & \mathcal{E}_{\tau,h}^{0,M-1} \\ \mathcal{E}_{\tau,h}^{1,-1} & \mathcal{E}_{\tau,h}^{1,0} & \ldots & \mathcal{E}_{\tau,h}^{1,M-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{E}_{\tau,h}^{M-1,-(M-1)} & \mathcal{E}_{\tau,h}^{M-1,-(M-2)} & \ldots & \mathcal{E}_{\tau,h}^{M-1,0} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_h^0 \\ \varphi_h^1 \\ \vdots \\ \varphi_h^{M-1} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Замечание: В случае $a = 0$ из-за разделения переменных матрица (3.7) диагональна, то есть $\mathcal{E}_{\tau,h}^{m,k} = 0$ при $k \neq 0$.

Из (3.4) и (3.6) получаем оператор дискретных неотражающих граничных условий

$$(u_{\tau,h})_{i,j}^{p} = \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \sum_{k=-m}^{M-1-m} \left(\mathcal{E}_{\tau,h}^{m,k}\right)_{i}^{p} * (\hat{f}_{\tau}^{m})^{p} \left(\varphi_{h}^{k+m}\right)_{j} \right\}. \tag{3.8}$$

Вернемся к выбору функции $\delta_\tau(t)$. Для того чтобы размер подсетки s был не слишком большим, точность удовлетворительной, а решение неосциллирующим, функция $\delta_\tau(t)$ должна быть достаточно гладкой. Также имеет смысл брать аппроксимации (3.3) не меньшего порядка чем порядок аппроксимации схемы.

Мы используем $\delta_\tau(t)$ построенные на основе сплайна Рябенького [9] с непрерывной второй производной. Этот сплайн, см. Рис. 1, имеет локальный носитель и определяется полиномом 5-ой степени по следующей таблице значений в точках сетки Υ_τ: $S^5(t_{-2}) = 0,\ S^5(t_{-1}) = 0,\ S^5(t_0) = 1,\ S^5(t_1) = 0,\ S^5(t_2) = 0.$

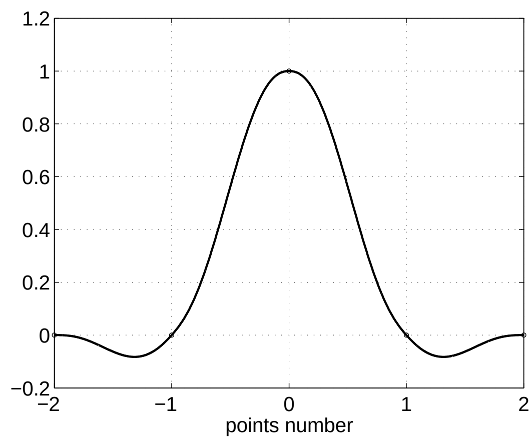


Рис. 1. Дважды непрерывно–дифференцируемая базисная функция $S^{(5)}$ локального сплайна Рябенького

3.2. Численные аспекты алгоритма

Рассмотрим внутреннюю задачу на сетке $\Upsilon_\tau \times \Omega_h$ и пусть точки $\ldots < r_{-2} < r_{-1} < r_0 = R_0$ принадлежат внутренней области, также привлечем дополнительную граничную точку r_1 для дискретизации граничных условий. При переходе с временного слоя t_n на t_{n+1} значения во внутренних точках обновляются по внутренней схеме, а в граничной — по формуле (3.8), где в качестве $(\hat{f}_\tau^m)^p$ используются коэффициенты Фурье $(\hat{u}_{\tau,h}^m)_0^p$ функции $(u_{\tau,h})_{0,j}^p$.

Для применения (3.8) необходимо знать величины $\left(\mathcal{E}_{\tau,h}^{m}\right)_{i}^{p}$ для $i = 1$ и для всех временных шагов p таких, что $t_p < T$, где T интересуемое время расчета. Однако в таком виде оператор граничных условий является очень дорогим: большие ресурсы требуются для хранения матрицы $\mathcal{E}_{\tau,h}$ и вычисления временных сверток.

Модифицируем формулу (3.8) следующим образом. Во-первых разделим приходящие волны на низкочастотные и высокочастотные согласно используемой пространственной сетке. Будем обрабатывать нелокальными граничными условиями только низкочастотные гармоники с $m = 0, \dots, M' < M$, а для высокочастотных будем использовать локальные граничные условия (3.8). Такой шаг приводит к обрезанию матрицы $\mathcal{E}_{\tau,h}$, то есть, вместо $M \times M$ матрицы мы рассматриваем $M' \times M$ матрицу. Во-вторых, введем ограничения по индексу суммирования k, будем рассматривать $k = -K', \dots, K'$. Второй шаг приводит к использованию из матрицы $\mathcal{E}_{\tau,h}$ только ленты ширины $2K' + 1$.

Наконец, самый важный шаг для уменьшения стоимости граничных условий состоит в использовании техники разработанной в [7], – приближении каждого элемента матрицы $\mathcal{E}_{\tau,h}$ суммой экспонент:

$$\left(\mathcal{E}^{m,k}_{\tau,h}\right)^p_1 \approx \left(\tilde{\mathcal{E}}^{m,k}_{\tau,h}\right)^p_1 = \sum_{l=1}^{L_{m,k}} a_l^{m,k} \left(q_l^{m,k}\right)^p, \text{ с } \left|q_l^{m,k}\right| \leq 1, \tag{3.9}$$

где p в последнем множителе есть степень.

Такое представление позволяет вычислять свертку в (3.8) по рекуррентным формулам.

Затраты на хранение матрицы граничных условий оцениваются $O(LM'K')$ числом действительных значений, а вычислительные затраты $O(LM'K')$ операций на временной шаг, $L = max(L_{m,k})$. На практике мы используем $L_{m,k} \sim 30$ для достаточно больших времен вычислений.

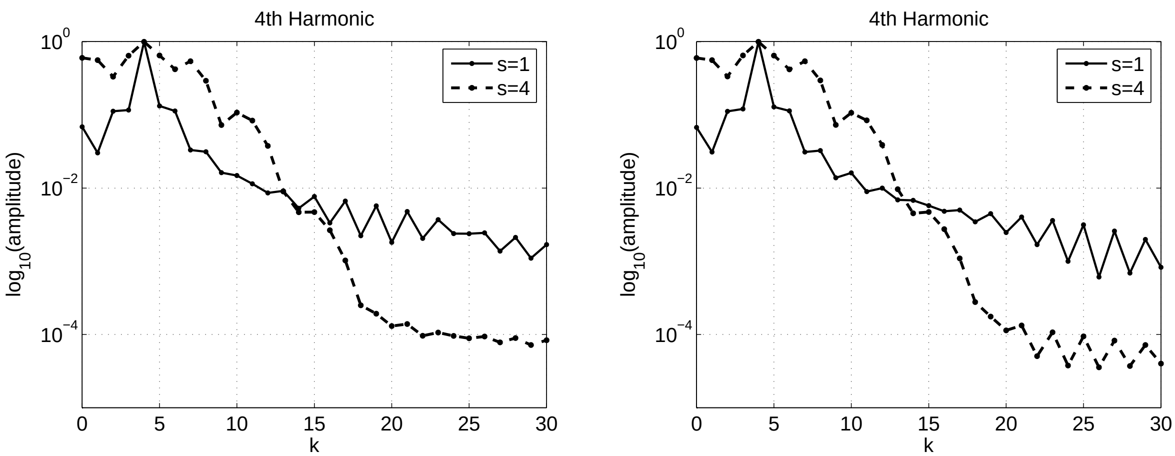
Согласно алгоритму [7], аппроксимации (3.9) получаются из $\left(\mathcal{E}^{m,k}_{\tau,h}\right)^p_1$ при использовании только $p = 0, 1, \dots, 2L$. Таким образом, вспомогательную задачу (3.5) нужно решать лишь на небольшом числе временных шагов.

4. Численные примеры

Для избежания особенностей в нуле мы рассматриваем кольцевую область $1 \leq r \leq 2$. На $r = 1$ ставим однородные условия Дирихле, а на $r = 2$ предлагаемые неотражающие нелокальные условия. Скорость $a = 0.7$ и $c = 1$. Начальные данные полагаются равными нулю, возмущение вводится через правую часть уравнения (1.1), а именно $f(r, \theta, t) = h(t) g(|r - r_s|) p(\theta)$. Временное возмущение $h(t)$ задается импульсом Риккера $h(t) = \left(2\pi(f_0 t - 1)^2 - 1\right) \exp(-\pi^2 (f_0 t - 1)^2)$ с центральной частотой $f_0 = 2$. Пространственное распределение есть $g(r) = \exp(-r^2/(d^2 - r^2))$ при $|r| \leq d,\ d = 0.4$ и $g(r) = 0$ при $|r| > d$. Частотная зависимость описывается как $p(\theta) = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta$.

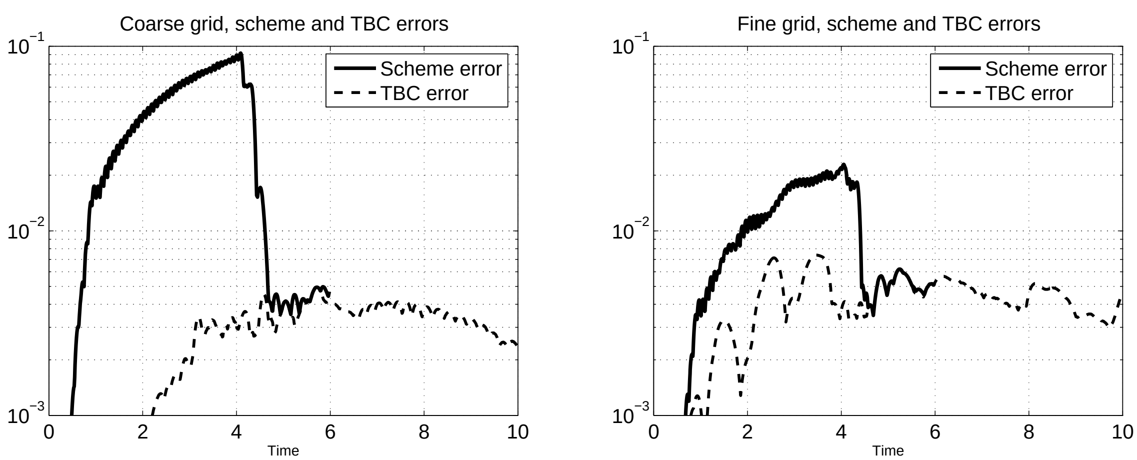
Точность расчета проверяется на двух равномерных вложенных сетках: грубой с $hr = 0.0125$, $h\theta = 2\pi/256$, $ht = 0.01$ и мелкой с $hr = 0.00625$, $h\theta = 2\pi/256$, $ht = 0.005$. Эталонное решение рассчитывается на очень мелкой сетке в расширенной области по r, $1 \leq r \leq 11$, так что для рассматриваемых времен отражение от внешней границы $r = 10$ не достигнет интересуемой области $1 \leq r \leq 2$.

На рисунке 2 приведена L_2-норма коэффициентов $\left(\mathcal{E}^{m,k}_{\tau,h}\right)^p_1$ по временному интервалу соответствующему времени $T = 1$. Пик амплитуд приходится на диагональ, $k = 0$, и происходит резкое убывание коэффициентов при удалении от диагонали.



а) б)

Рис. 2. (а) L_2-норма $\left(\mathcal{E}_{\tau,h}^{m,k}\right)_1^p$ относительно расстояния k, для подсеток $s = 1$ и $s = 4$, грубая сетка; (б) L_2-норма $\left(\mathcal{E}_{\tau,h}^{m,k}\right)_1^p$ относительно расстояния k, для подсеток $s = 1$ и $s = 4$, мелкая сетка.



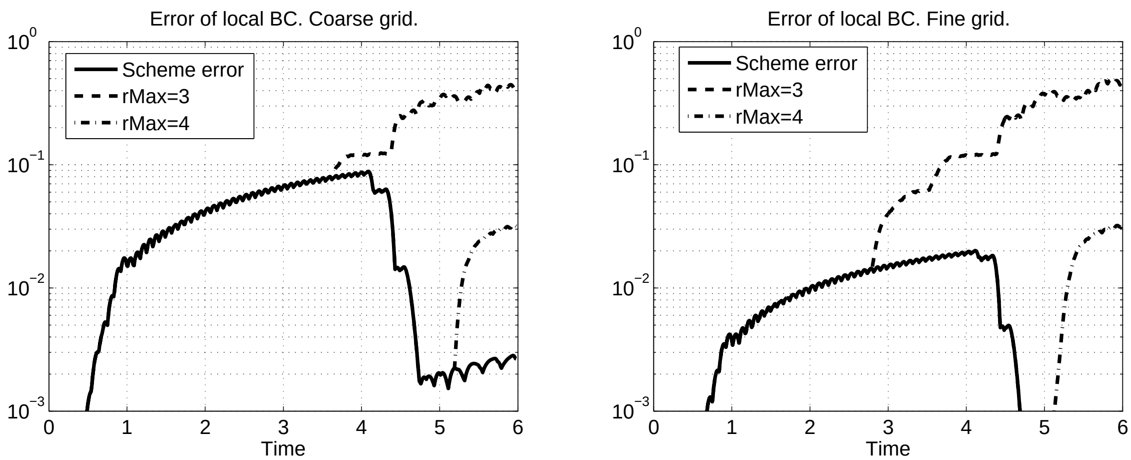
а) б)

Рис. 3. (а) Ошибка неотражающих граничных условий и относительная погрешность решения на $1 < r < 2$, грубая сетка, L_2-норма, использовались $M' = 48$, $K' = 4$, подсетка $s = 1$; (б) Ошибка неотражающих граничных условий и относительная погрешность решения на $1 < r < 2$, мелкая сетка, L_2-норма, использовались $M' = 48$, $K' = 4$, подсетка $s = 1$.

За *ошибку граничных условий* мы берем относительную погрешность между решениями на малом и расширенном интервалах *при одних и тех же шагах сетки*. Погрешность решений на малом интервале по сравнению с эталонным складывается из ошибки граничных условий и *ошибки аппроксимации разностной схемы*.

На рисунках 3(а),(б) представлены ошибки граничных условий и ошибки аппроксимаций разностной схемы. Можно сделать следующие выводы: во-первых, погрешность граничных условий много меньше погрешности аппроксимации схемы; во-вторых, наблюдается сходимость со вторым порядком.

Ошибки локальных граничных условий для различных положений внешней



а) б)

Рис. 4. (а) Ошибка локальных граничных условий для различных положений внешней границы и относительная погрешность решения на $1 < r < 2$, грубая сетка, L_2-норма; (б) Ошибка локальных граничных условий для различных положений внешней границы и относительная погрешность решения на $1 < r < 2$, мелкая сетка, L_2-норма.

границы, $r = 3$ и $r = 4$, изображены на рисунках 4(а),(б). Согласно результатам: во-первых, даже для грубой сетки необходимо увеличить втрое расчетную область для того, чтобы не потерять в точности; во-вторых, измельчение сетки требует дополнительный перенос границы.

5. Заключение

В работе представлен метод численного конструирования оператора граничных условий для волнового уравнения в движущейся среде. Приводятся численные примеры, на которых метод демонстрирует точность, удовлетворительную для вычислительных задач. Заметим, что идея конструкции оператора носит общий характер, не связанный с рассматриваемым в данной работе уравнением, и может быть применена к другим постановкам.

Автор признателен И.Л.Софронову за идею метода, многочисленные дискуссии и советы.

Список литературы

1. *Sofronov I.L., Podgornova O.V.* A spectral approach for generating non-local boundary conditions for external wave problems in anisotropic media // Journal of Scientific Computing, V. 27, No 3, 2006, pp. 419-430.
2. Софронов И.Л.: Условия полной прозрачности на сфере для трехмерного волнового уравнения. // Доклады РАН. Т.326. No.6 , с.453–457 (1992)
3. *M.J.Grote and J.B.Keller* Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equation // SIAM J.Appl.Math. 55 (1995), 280-297.
4. *Sofronov, I. L.* Artificial boundary conditions of absolute transparency for two- and three-dimensional external time-dependent scattering problems // Euro. J. Appl. Math., V.9, No.6 (1998) 561-588.
5. *I.L. Sofronov* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // . Math. Anal. Appl., V. 221, (1998) 92-115.

6. *B.Alpert, L.Greengard, T.Hagstrom.* Nonreflecting Boundary Conditions for the Time-Dependent Wave Equation //Journal of Computation Physics 180, 270-296(2002).
7. *Arnold A; Ehrhardt M.; Sofronov I.* Discrete transparent boundary conditions for the Schroedinger equation: Fast calculation, approximation, and stability // Comm. Math. Sci. 1 (2003), 501 556.
8. *V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, V. I. Turchaninov* Global Discrete Artificial Boundary Conditions for Time-Dependent Wave Propagation // J. Comput. Phys., 174 (2001) pp. 712 758.
9. *В.С. Рябенький* Введение в вычислительную математику (1994).