РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И.В. Горючкина

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2007 г.

УДК 517.925

И.В. Горючкина. Экзотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Для шестого уравнения Пенлеве вблизи трех его особых точек при различных значениях его четырех комплексных параметров изучаются асимптотические разложения решений в такие ряды по комплексным степеням независимой переменной с постоянными коэффициентами, которые содержат бесконечно много членов с фиксированной вещественной частью показателей степени (они называются экзотическими). Показано, что этим разложениям соответствуют решения с очень сложными особенностями. Сначала вычисляются базовые семейства экзотических разложений (всего 9 семейств), из которых 8 семейств найдены впервые, а затем с помощью симметрий шестого уравнения Пенлеве из базовых семейств получаются остальные семейства экзотических разложений решений шестого уравнения Пенлеве (всего вместе с базовыми 54 семейства).

I.V. Goruchkina. Exotic expansions of solutions to the sixth Painleve equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

To the sixth Painleve equation near three its singular points for various values of its four complex parameters, we study asymptotic expansions of its solutions in series of complex powers of the independent variable with constant coefficients, which contain infinitely many terms with fixed real part of the power exponent (they were named as exotic expansions). We show that the series can correspond to solutions with very complicated singularities. At first we compute basic families of exotic expansions (alltogether 9 families), among them 8 families found for the first time, and then by means of symmetries of the sixth Painleve equation, we obtain the rest of families of exotic expansions of the sixth Painleve equation (alltogether with basic families 54 families).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

e-mail: chukhareva@yandex.ru

§1. Постановка задачи

Согласно [1] степенное разложение

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \ s \in \mathbf{K} \tag{1.1}$$

с комплексными показателями степени r и s называются *экзотическими*, если

1. на комплексной плоскости выпуклая оболочка множества $\mathbf{K} \cup r$ содержит угол с вершиной некоторой точке, и одна из сторон этого угла параллельна мнимой оси;

2. комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая постоянная, c_s – многочлены от $\ln x$;

3. $\arg x$ ограничен с одной стороны.

Для шестого уравнения Пенлеве

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) +$$
$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{1.2}$$

где $a,\ b,\ c,\ d$ – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $' = d/dx$; при разных значениях его параметров, будем искать экзотические асимптотические разложения его решений [1] вида (1.1), где $|x| \to 0$ или $|x| \to \infty$.

В случае $\operatorname{Re} s \neq \operatorname{Re} r$ упорядочивание степеней s асимптотического разложения (1.1) идет по вещественным частям $\operatorname{Re} s$.

$$\text{При } |x| \to \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r \text{ и } \operatorname{Re} s \text{ возрастают;} \\ \infty, & \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r \text{ и } \operatorname{Re} \mathrm{s} \text{ убывают.} \end{cases}$$

В случае $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r$ упорядочивание степеней s асимптотического разложения (1.1) идет по мнимым частям $\operatorname{Im} s$.

$$\text{При } |x|^{-\operatorname{Re} r}|y| \to \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} s > \operatorname{Im} r \text{ и } \operatorname{Im} s \text{ возрастают;} \\ \infty, & \operatorname{Im} s < \operatorname{Im} r \text{ и } \operatorname{Im} \mathrm{s} \text{ убывают.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Если $|x|^{-\operatorname{Re} r}|y| \to \mathrm{const} \neq 0$ возможен любой из случаев (1.3).

Поскольку носитель уравнения (1.2) вещественный и степенные асимптотики $c_r x^r$ решений уравнения имеют не более одного критического числа, то в экзотических разложениях (1.1) решений уравнения (1.2) все коэффициенты постоянны.

§2. Общие свойства уравнения

Представим уравнение (1.2) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и перенесем в левую сторону правую часть уравнения. Получаем

$$f(x,\ y) \stackrel{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\ x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)+$$
$$x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\ ]+$$
$$2y'[\ x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x)+$$
$$x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] - [\ 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2+$$
$$2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\ ] = 0. \qquad (2.1)$$

Согласно [2], [3], [4] для уравнения (2.1) рассмотрим два случая: $a\cdot b \neq 0$ и $a = 0,\ b \neq 0$.

2.1. Случай $a \cdot b \neq 0$**.** Носитель левой части уравнения (2.1), то есть множество показателей степени ее мономов, есть

$$\mathbf{S}(f) = \{Q = (q_1,\ q_2):\ \ q_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ q_2 = 3 - q_1 + k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Носитель $\mathbf{S}(f)$ и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 1.

Здесь многоугольник $\Gamma(f)$ — это параллелограмм с вершинами $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$, где $Q_1 = (3,\ 0)$, $Q_2 = (3,\ 3)$, $Q_3 = (0,\ 6)$, $Q_4 = (0,\ 3)$ и ребрами $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_4^{(1)}$, показанными на рис. 1. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$ граней $\Gamma_j^{(d)}$ изображены на рис. 2.

Вершинам Q_1 и Q_3 соответствуют алгебраические укороченные уравнения, которые не дают подходящих решений.

Согласно [2, п. 1.4] в этом случае достаточно вычислить разложения решений соответствующие вершине Q_4 и ребру $\Gamma_4^{(1)}$ (базовые разложения). А остальные разложения соответсвующие вершине Q_2 и ребрам $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3$ получаются из базовых с помощью симметрий уравнения (1.2).

Отметим, что вершина Q_4 – левая нижняя, и ей согласно [1], соответствуют значения $\omega_4^{(0)} = -1$, $\tau = 1$. Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствует пара значений $\omega_4^{(1)} = -1$, $r_4 = 0$.

Для $\omega = -1$ разбиение комплексной плоскости $r \in \mathbb{C}$ на приведенные нормальные конусы $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ показано на рис. 3.

2.2. Случай $a = 0,\ b \neq 0$. Носитель левой части уравнения (2.1) есть

$$\mathbf{S}(f\,|_{a=0}) = \mathbf{S}(f) \setminus \{(0,\ 6),\ (0,\ 5),\ (1,\ 5)\}.$$

Носитель $\mathbf{S}(f\,|_{a=0})$, его выпуклая оболочка (многоугольник) $\mathbf{\Gamma}(f\,|_{a=0})$, грани $\tilde{\Gamma}_i^{(0)} = \tilde{Q}_i,\ i = 2,\,3,\ \Gamma_j^{(0)} = Q_j,\ j = 1,\,2,\,4,\ \tilde{\Gamma}_1^{(1)},\ \tilde{\Gamma}_2^{(1)},\ \tilde{\Gamma}_3^{(1)},\ \Gamma_1^{(1)},\ \Gamma_2^{(1)}$ изображены на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что грани $\Gamma_j^{(0)} = Q_j,\ j = 1,\,2,\,4$ и $\Gamma_1^{(1)},\ \Gamma_2^{(1)}$ сохранились из случая $a\cdot b\neq 0$. Следовательно, сохранились разложения решений, им соответствующие.

Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ граней $\Gamma_j^{(d)}$ и $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ изображены на рис. 5.

В [3] и [4] показано, что для горизонтального ребра отсутствуют соответствующие ему разложения решений.

Согласно [3, п. 2.1] здесь достаточно вычислить разложения решений, соответствующие вершине $\tilde{Q}_3$ и ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ (базовые разложения). А разложения, соответсвующие вершине $\tilde{Q}_2$ и ребру $\Gamma_1^{(1)}$, получаются из базовых с помощью симметрий уравнения (1.2).

Вершина $\tilde{Q}_3$ – левая верхняя, и ей согласно [1], соответствуют значения $\tilde{\omega}_3^{(0)} = -1$, $\tau = -1$. Ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ соответствует пара значений $\tilde{\omega}_3^{(1)} = -1$, $\tilde{r}_3 = 0$.

Для $\omega = -1$ разбиение комплексной плоскости $r\in\mathbb{C}$ на приведенные нормальные конусы $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ и $\check{\tilde{\mathbf{U}}}_j^{(d)}$ показано на рис. 6, которое аналогично разбиению на рис. 3.

§3. Базовые экзотические разложения в случае $a\cdot b\neq 0$

В этом параграфе мы вычислим базовые экзотические разложения, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$ и вершине Q_4 (см. рис. 1).

3.1. Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{gathered}\hat{f}_4^{(1)}(x,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2x^2y(y')^2 - 3x^2y^2(y')^2 - 2xy^2y' + 2xy^3y' - 2x^2y^2y'' \\ +2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Поскольку $r_4 = 0$, то ищем его степенные решения в виде $y = c_0\neq 0,\ c_0 =$ const. Определяющее уравнение есть

$$\tilde{\tilde{f}}\,(c_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_0^{-3}\hat{f}_4^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2ac_0(c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a) = 0. \tag{3.2}$$

Согласно [2] рассмотрим три случая: $a\neq c\neq 0$, $a = c\neq 0$ и $a\neq 0,\ c = 0$.

Вычислим степенные и степенно-логарифмические разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$.

Случай $a \neq c \neq 0$. Уравнение (3.2) имеет два ненулевых корня

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \quad i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. В качестве значения квадратного корня из комплексного числа z мы берем его главное значение. Таким образом, квадратный корень из комплексного числа z можно записать $\pm sqrtz$.

Найдем критические числа решения $y = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \quad i = 1, 2.$ Первая вариация

$$\begin{gathered} \frac{\delta \hat{f}_4^{(1)}(x,\, y)}{\delta y} = 2x^2(y')^2 + 4x^2yy'\frac{d}{dx} - 6x^2y(y')^2 - 6x^2y^2y'\frac{d}{dx} - 4xyy' \\ -2xy^2\frac{d}{dx} + 6xy^2y' + 2xy^3\frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2\frac{d^2}{dx^2} + 6x^2y^2y'' \\ +2x^2y^3\frac{d^2}{dx^2} - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(x) = -2xc_{0i}^2\frac{d}{dx} + 2xc_{0i}^3\frac{d}{dx} - 2x^2c_{0i}^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2c_{0i}^3\frac{d^2}{dx^2} - 8ac_{0i}^3 + \\ +8cc_{0i}^3 + 20ac_{0i}^4 - 12ac_{0i}^5. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2c_{0i}^2\left(k^2(c_{0i}-1) - 4c_{0i}(c-a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3\right) = 0, \tag{3.6}$$

с учетом c_{0i} из (3.3), имеет два корня

$$k_i = \tau(\sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{2a}),\ i = 1, 2,\ \tau = \pm 1. \tag{3.7}$$

Согласно [1, п. 3.3] для каждого значения $i = 1,\, 2$ здесь имеются два конуса задачи

$$\mathcal{K}_i^\tau = \left\{k:\ \mathrm{Re}\, k_i > 0 \text{ или } \mathrm{Re}\, k_i = 0,\ \tau \mathrm{Im}\, k_i > 0\right\}. \tag{3.8}$$

Положим $\theta_i = \sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{2a}$. Для фиксированного значения $i = 1,\, 2$ будем различать три случая.

Случай 1. $\mathrm{Re}\,\theta_i = 0$. В этом случае в каждом из конусов задачи $\mathcal{K}_i^\tau$ имеется по одному критическому числу. Пусть для определенности $\mathrm{Im}\,\theta_i > 0$, тогда $\theta_i \in \mathcal{K}_i^+$ и $-\theta_i \in \mathcal{K}_i^-$. Носитель разложений решений есть

$$\mathbf{K} = \left\{s = l,\ l \in \mathbb{N}\right\}. \tag{3.9}$$

С учетом критических чисел $k_i^{1,2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau\theta_i$ имеем два множества

$$\mathbf{K}(\tau\theta_i) = \{s = l + m\tau\theta_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}. \tag{3.10}$$

Поскольку критические числа $\tau\theta_i$ не лежат в $\mathbf{K}$, то по теореме 3.1 из [5] им соответствуют два семейства разложений

$$\mathcal{B}_i^\tau:\ y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s,\ i = 1, 2, \tag{3.11}$$

где $s \in \mathbf{K}(\tau\theta_i)$, комплексные коэффициенты: c_{0i} из (3.3), c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, остальные c_{si} – постоянны и однозначно определены. Носитель $\mathbf{K}(\tau\theta_i)$ каждого из разложений (3.11) располагается в четверти комплексной плоскости: $V_+^\tau = \{\mathrm{Re}\, s \geq 0,\ \tau \mathrm{Im}\, s \geq 0\}$.

Разложения (3.11) являются экзотическими, если c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – ненулевая произвольная постоянная.

В случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ разложения (3.11) являются разложениями по целым степеням x. Семейства таких разложений обозначим $\mathcal{B}_i,\ i = 1, 2$.

С л у ч а й 2. $\mathrm{Re}\,\theta_i \neq 0,\ \theta_i \notin \mathbb{Z}$. В этом случае оба конуса задачи $\mathcal{K}_i^\tau$ содержат одно и тоже критическое число θ_i или $-\theta_i$. Пусть для определенности $\mathrm{Re}\,\theta_i > 0$, тогда θ_i – единственное критическое число. Носитель разложений решений с учетом θ_i есть

$$\mathbf{K}(\theta_i) = \{s = l + m\theta_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}. \tag{3.12}$$

Поскольку критическое число θ_i не лежит в $\mathbf{K}$, то по теореме 3.1 из [5] ему соответствует семейство разложений

$$\mathcal{B}_i:\ y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s,\ i = 1, 2, \tag{3.13}$$

где $s \in \mathbf{K}(\theta_i)$, комплексные коэффициенты: c_{0i} из (3.3), c_{si} с $s = \theta_i$ – произвольная постоянная, остальные c_{si} – постоянны и однозначно определены. Его носитель $\mathbf{K}(\theta_i)$ на комплексной плоскости s расположен в угле с вершиной в нуле, который является выпуклой конической оболочкой точек $s = 1$ и $s = \theta_i$. Если $\mathrm{Im}\,\theta_i = 0$, то в разложении (3.13) все показатели степени вещественны.

С л у ч а й 3. $\theta_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. В этом случае оба конуса задачи $\mathcal{K}_i^\tau$ содержат одно и тоже критическое число θ_i или $-\theta_i$. Пусть для определенности $\theta_i > 0$, тогда θ_i – единственное критическое число. Поскольку число θ_i лежит в множестве $\mathbf{K}$, определенном формулой (3.9), то $\mathbf{K}(\theta_i) = \mathbf{K}$ и согласно § 3 [1] семейство разложений решений суть

$$\mathcal{B}_i:\quad y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln x) x^s,\ i = 1, 2, \tag{3.14}$$

где c_{0i} из (3.3), c_{si} – многочлены от $\ln x$, многочлен $c_{si}(\ln x)$ с $s = \theta_i$ содержит произвольный постоянный член, остальные $c_{si}(\ln x)$ однозначно определены.

Разложения (3.13) и (3.14) не являются экзотическими.

Случай $a = c \neq 0$. В этом случае определяющее уравнение (3.2) имеет одно ненулевое решение $c_{02} = 2$. Ему соответствуют два собственных значения $\pm 2\sqrt{2a}$ из (3.7). В качестве θ_2 берем $2\sqrt{2a}$.

Значению c_{02} в зависимости от значения θ_2 соответствуют два семейства разложений $\mathcal{B}_2^\tau$ или одно семейство разложений $\mathcal{B}_2$, для которых сохраняются формулы степенных и степенно-логарифмических разложений из случая $a \neq c \neq 0$.

Имеют место три случая: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2 = 0$, разложение решений определено формулой (3.11)); случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2 \neq 0$, $\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, разложение решений определено формулой (3.13)); случай 3 ($\theta_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, разложение решений определено формулой (3.14)).

Случай $a \neq 0$, $c = 0$. Уравнение (3.2) имеет двукратный корень $c_0 = 1$. Согласно (3.5) при $a \neq 0$, $c = 0$ для него линейный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$.

Для того чтобы исследовать уравнение (2. 1) в этом случае, сделаем замену $y = u + 1$. Получаем уравнение

$$
\begin{gathered}
g(x,\, u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u+1) \stackrel{\text{def}}{=} ((2u+1)u'^2 - 2(u+u^2)u'')x^5 \\
+((-3-8u-3u^2)u'^2 - 2(u+u^2)u' + 2(4u^2+u^3+3u)u'')x^4 \\
+((10u+6u^2+3)u'^2 + 2(5u^2+2u^3+3u)u' - 2(5u^2+3u+2u^3)u'' - 2bu^2)x^3 \\
+\big((-3u^2-4u-1)u'^2 - 6(2u^2+u+u^3)u' + 2(u^3+2u^2+u)u'' \\
-2(d+a)u^4 - 4(a+d-b)u^3 - 2(d+a-2b)u^2\big)\, x^2 \\
+\big(2(u^3+2u^2+u)u' + 4au^5 + 2(6a-b+d)u^4 \\
-4(b-3a-d)u^3 - 2(b-d-2a)u^2\big)\, x \\
-8au^3 - 12au^4 - 2au^2 - 8au^5 - 2au^6 = 0.
\end{gathered} \tag{3.15}
$$

Носитель $\mathbf{S}(g)$, его выпуклая оболочка $\Gamma(g)$, грани $G_j^{(d)}$, $d = 0,\, 1,\ j = 1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 7. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$, $d = 0,\, 1,\ j = 1, 2, 3, 4$ – на рис. 8.

Конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0,\ p_2 < 0\}$. Кроме того, $u(x) \neq \text{const}$. С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$.

Согласно [2] ребру $G_1^{(1)}$ не соответствует никакое разложение решений.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$
\hat{g}_1^{(0)}(x,\, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 = 0. \tag{3.16}
$$

Вещественный нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < 0\}$. Первое приближение решения имеет вид $u = c_\rho x^\rho$, где c_ρ – ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени ρ определим из характеристического уравнения

$$\chi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^2 - 2a = 0, \tag{3.17}$$

т. е. $\rho = \pm\sqrt{2a}$.

Согласно [1] и п. 4.1. [5] приведенный нормальный конус $\breve{\mathbf{U}}_1^{(0)} = -(1, \rho)$, где

$$\rho: \ \rho \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}\rho \geq 0, \ \rho \neq 0. \tag{3.18}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{g}_1^{(0)}(x,\,u)}{\partial u} = 2u''x^2 + 2\frac{d^2}{dx^2}ux^2 - 2u'\frac{d}{dx}x^2 + 2u'x + 2\frac{d}{dx}ux - 4au.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) = 2c_\rho x^\rho(\rho(\rho-1) + \frac{d^2}{dx^2}x^2 - \rho\frac{d}{dx}x + \rho + \frac{d}{dx}x - 2a).$$

Характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_\rho k(k-\rho) = 0$ имеет два корня $k_1 = 0, \ k_2 = \rho$. Согласно [1] конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > \operatorname{Re}\rho$ или $\operatorname{Re} k = \operatorname{Re}\rho, \ |\operatorname{Im} k| > |\operatorname{Im}\rho|, \ \operatorname{sign}(\operatorname{Im} k) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)\}$. Числа $k_{1,2} \notin \mathcal{K}$, т.е. критических чисел нет.

Носитель разложения решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = \rho + l\rho + m; \ l,\,m \geq 0; \ l + m > 0; \ l, m \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.19}$$

Разложение решений имеет вид

$$u = c_\rho x^\rho + \sum c_s x^s \text{ по } s \in \mathbf{K}. \tag{3.20}$$

Носитель разложения (3. 20) на комплексной плоскости s расположен в угле с вершиной в точке ρ, натянутый на точки $s = 2\rho$ и $s = \rho + 1$.

После обратной замены $y = u + 1$ разложения (3.20) образуют семейство

$$\mathcal{B}_6: \ y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{3.21}$$

где $\rho = \pm\sqrt{2a}$ и удовлетворяет (3.18), s пробегает множество (3.19), комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re}\rho = 0$ разложения (3.21) являются экзотическими. Обозначим их семейство $\mathcal{B}_6^\tau$, где $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$.

Вычислим нестепенные асимптотики решений, соответствующих ребру $\Gamma_4^{(1)}$. Для этого в уравнении (3.1) делаем логарифмическое преобразование $\xi = \ln x$. Производную по ξ обозначим точкой. Поскольку

$$y' = \dot{y}/x, \ y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2, \tag{3.22}$$

то уравнение (3.1) принимает вид

$$\varphi(\xi,\,y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}2\ddot{y}y^2(y-1)+\dot{y}^2y(2-3y)+2(c-a)y^4+4ay^5-2ay^6=0. \quad (3.23)$$

Методами степенной геометрии [5] в [2] были найдены решения уравнения (3. 23) (нестепенные асимптотики решений уравнения (1. 2), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$). Поэтому здесь приведем только формулы этих асимптотик из [2].

В случае $a\neq c\neq 0$ имеется семейство асимптотик

$$\mathcal{F}_0: \quad y=\frac{2}{c-a}\frac{1}{\ln^2 x}+\frac{c_{-3}}{\ln^3 x}+\sum_{s=4}^{\infty}\frac{c_{-s}}{\ln^s x}, \quad (3.24)$$

где комплексные коэффициенты: c_{-3} – произвольная постоянная, остальные c_{-s} – постоянны и однозначно определены. Ему соответствует семейство сложных разложений $\mathcal{B}_3$ из [2].

В случае $a=c\neq 0$ имеется два семейства асимптотик

$$\mathcal{F}_j:\ y=(-1)^j\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{\ln x}+\frac{c_{-2j}}{\ln^2 x}+\sum_{s=3}^{\infty}\frac{c_{-sj}}{\ln^s x},\ j=1,2, \quad (3.25)$$

где комплексные коэффициенты: c_{-2j} – произвольная постоянная, остальные c_{-sj} – постоянны и однозначно определены. Им соответствуют семейства сложных разложений $\mathcal{B}_{3+j}$ из [2].

Теперь решим уравнение (3.23) в явном виде. Для этого положим $\dot{y}=p$ и будем рассматривать p как функцию от y. Тогда $\ddot{y}=(dp/dy)p$ и уравнение (3.23) принимает вид

$$2\frac{dp}{dy}py(y-1)+p^2(2-3y)+2(c-a)y^3+4ay^4-2ay^5=0 \quad (3.26)$$

Полагая $p^2=q$, получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dq}{dy}y(y-1)+q(2-3y)+2(c-a)y^3+4ay^4-2ay^5=0 \quad (3.27)$$

Соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{dq}{dy}y(y-1)+q(2-3y)=0$$

имеет решение $q=C_1y^2(y-1)$, где C_1 — произвольная постоянная. Методом вариации этой постоянной получаем для нее из (3.27) уравнение

$$(y-1)^2C_1'+2(c-a)+4ay-2ay^2=0,$$

т.е. $C_1' = -\dfrac{2c}{(y-1)^2} + 2a$. Оно имеет решение

$$C_1 = \frac{2c}{y-1} + 2ay + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$q \stackrel{\text{def}}{=} C_1 y^2(y-1) = \left(\frac{2c}{y-1} + 2ay + C_2\right) y^2(y-1)$$

и

$$\frac{dy}{d\xi} \stackrel{\text{def}}{=} p \stackrel{\text{def}}{=} \pm\sqrt{q} = \pm\sqrt{(2c/(y-1) + 2ay + C_2)\, y^2(y-1)}. \qquad (3.28)$$

Интегрирование уравнения (3. 28) происходит по-разному в зависимости от значения C_2 и параметров a и c. Рассмотрим три случая значений постоянной C_2.

Случай $C_2 = 2c$. В этом случае уравнение (3.28) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a}\, y \sqrt{y^2 + (c/a - 1)\, y}. \qquad (3.29)$$

Если $a = c \neq 0$, то уравнение (3.29) имеет решение

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}\,\xi + C_3}, \qquad (3.30)$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Напоминаем, что $|x| \to 0$, т. е. $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x \to \infty$. Тогда (3.30) раскладывается в ряд Лорана по степеням ξ

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(C_4\xi)^k}, \qquad (3.31)$$

где $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \pm C_3/\sqrt{2a}$ – произвольная постоянная.

Учитывая $\xi = \ln x$, получаем явный вид разложения (3.25)

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\frac{1}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(C_4\ln x)^k} \stackrel{\text{def}}{=} \pm\frac{1}{\sqrt{2a}\,\ln x + C_3}. \qquad (3.32)$$

Рассмотрим теперь для уравнения (3.29) случай $a \neq c \neq 0$. Положим

$$t^2 = 1 + \left(\frac{c}{a} - 1\right)/y,$$

тогда

$$y = \left(\frac{c}{a} - 1\right)/(t^2 - 1) \qquad (3.33)$$

и уравнение (3.29) принимает вид

$$\frac{dt}{d\xi} = \pm\frac{\sqrt{2a}}{2}\left(\frac{c}{a} - 1\right).$$

Его решения суть

$$t = \pm\frac{\sqrt{2a}}{2}\left(\frac{c}{a} - 1\right)(\xi + C_5),$$

где C_5 — произвольная постоянная. Из (3.33) получаем

$$y = \frac{1}{\dfrac{c-a}{2}(\xi + C_5)^2 - \dfrac{a}{c-a}}. \tag{3.34}$$

При $\xi \to \infty$ из (3.34) получаем разложение в ряд Лорана по степеням ξ

$$y = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\xi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{C_6}{\xi} + \frac{C_7}{\xi^2}\right)^k, \tag{3.35}$$

где $C_6 \stackrel{\text{def}}{=} -2C_5$ — произвольная постоянная, $C_7 \stackrel{\text{def}}{=} -C_5 + \dfrac{2a}{(c-a)^2}$.

Учитывая $\xi = \ln x$, получаем явный вид (3.34) разложения (3.24).

Случай $C_2 = -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c}) + 2c$. В этом случае уравнение (3.28) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a}\,y\,(y - (1 \mp c/a)). \tag{3.36}$$

При $a \neq c \neq 0$ его интеграл есть

$$\frac{y - (1 + (-1)^i\sqrt{c/a})}{y} = \exp\left(\pm\sqrt{2}\,(\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{c})\xi + C_8\right), \tag{3.37}$$

где $i = 1, 2$, C_8 – произвольная постоянная.

Учитывая $\xi = \ln x$, из (3.37) получаем

$$y = \frac{1 + (-1)^i\sqrt{c/a}}{1 - C_9 x^{\pm\theta_i}}, \tag{3.38}$$

где $i = 1, 2$, $\theta_i = \sqrt{2}\,(\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{c})$, C_9 – произвольная постоянная.

Пусть для определенности $\operatorname{Re}\theta_i \geq 0$, $\theta_i \neq 0$, тогда при $|x| \to 0$ функция (3.38) раскладывается в ряд по степеням $C_9 x^{\theta_i}$

$$y = (1 + (-1)^i\sqrt{c/a})\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(C_9 x^{\theta_i})^k, \tag{3.39}$$

где $i = 1, 2$, C_9 – произвольная постоянная. В зависимости от значения θ_i ряд (3. 39) является явным видом разложений (3. 11), (3. 13), (3. 14), а функция (3.38) – их суммой.

В случае $a \neq 0,\ c = 0$ ряд (3.39) является явным видом разложения (3. 21), а (3.38) – его суммой.

Случай $C_2 \neq 2c,\ C_2 \neq -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c}) + 2c$. Запишем уравнение (3.28) в виде

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a}\sqrt{y^2\left(y^2 + \frac{C_2 - 2a}{2a}y + \frac{2c - C_2}{2a}\right)}. \tag{3.40}$$

Уравнение $y^2 + \dfrac{C_2 - 2a}{2a}y + \dfrac{2c - C_2}{2a} = 0$ имеет два различных ненулевых корня α и β. При этом

$$\alpha + \beta = -\frac{C_2 - 2a}{2a},\ \alpha \cdot \beta = \frac{2c - C_2}{2a}. \tag{3.41}$$

Подстановка Эйлера

$$t^2 = \frac{y - \beta}{y - \alpha};\quad y = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1} \tag{3.42}$$

приводит уравнение (3.28) к виду

$$\frac{\pm 2\, dt}{\sqrt{2a}\,(\alpha t^2 - \beta)} = d\xi.$$

Его интеграл есть

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2a\,\alpha\beta}}\,\ln\frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = \xi + C_{10}, \tag{3.43}$$

где C_{10} — произвольная постоянная. Учитывая (3.41) и (3.43) получаем

$$\frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = C_{11}\exp\left(\pm\sqrt{2c - C_2}\,\xi\right),$$

где C_{11} — произвольная постоянная; т. е.

$$t = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(1 - \frac{2}{1 - C_{11}\exp\left(\pm\sqrt{2c - C_2}\,\xi\right)}\right). \tag{3.44}$$

Положим

$$\varphi = C_{11}\exp\left(\pm\sqrt{2c - C_2}\,\xi\right). \tag{3.45}$$

Тогда из (3.42) и (3.44) получаем

$$y = \frac{4\alpha\beta}{\beta(\sqrt{1/\varphi} + \sqrt{\varphi})^2 - \alpha(\sqrt{1/\varphi} - \sqrt{\varphi})^2}. \tag{3.46}$$

Положим $2i\psi = \ln\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \pm\sqrt{2c - C_2}\,(\xi + C_{12})$, где C_{12} – произвольная постоянная. Учитывая $\xi = \ln x$ имеем

$$\psi = \pm i\frac{\sqrt{2c - C_2}}{2}\,(\ln x + C_{12}).$$

Тогда (3.46) принимает вид

$$y = \frac{\alpha\beta}{\beta\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi}. \tag{3.47}$$

Согласно (3.45) y разлагается в ряд по степеням $\varphi = (C_{13}x)^{\pm\sqrt{2c - C_2}}$, где C_{13} – произвольная постоянная.

Если $2c - C_2$ – вещественное отрицательное число, то число $i\sqrt{2c - C_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma$ – вещественно. В этом случае $\psi = \gamma\ln(C_{13}x)$ и согласно (3.41) и (3.47)

$$y = \frac{2c - C_2}{2a}\,\frac{1}{\beta\cos^2[\ln(C_{13}x)^\gamma] + \alpha\sin^2[\ln(C_{13}x)^\gamma]}. \tag{3.48}$$

Из (3. 47) видно, что y разлагается в ряд по целым степеням φ, т.е. по целым степеням $x^{2\gamma i}$, что дает ряд по чисто мнимым степеням x.

3.2. Вершине Q_4 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_4^{(0)}(x,\ y) \stackrel{def}{=} 2x^2y(y')^2 - 2xy^2y' - 2x^2y^2y'' = 0. \tag{3.49}$$

Его характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} 2(r^2 - r - r^2 + r) \equiv 0$ имеет произвольное решение. Поэтому решением уравнения (3.49) является выражение

$$y = c_r x^r \tag{3.50}$$

с произвольными комлексными постоянными c_r и r. В [3] было показано, что это двупараметрическое семейство исчерпывает все решения уравнения (3. 49). Согласно п. 4.1. [5] приведенный нормальный конус $\breve{\mathbf{U}}_4^{(0)} = -(1, r)$, где

$$r:\ r \in \mathbb{C},\ 0 \le \operatorname{Re} r \le 1,\ \operatorname{Im} r \ge 0,\ r \ne 0,\ r \ne 1. \tag{3.51}$$

Согласно [3] решению (3.50) укороченного уравнения (3.49) соответствуют разложения решений полного уравнения (2.1)

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \ \text{ по } s \in \mathbf{K}, \tag{3.52}$$

где r из (3.51),

$$\mathbf{K} = \{s = r + lr + m(1-r);\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}\,; \qquad (3.53)$$

c_r – ненулевая комплексная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены. Изучим разложения (3.52).

Носитель (3. 53) имеет две образующие r и $1 - r$ и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке r, стороны которого параллельны векторам $(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$ и $(\operatorname{Re}(1-r), \operatorname{Im}(1-r))$. При этом подсумма в (3.52), соответствующая $m = 0$ в (3.53), является разложением решений (3.47) укороченного уравнения (3.1), соответствующего ребру $\Gamma_4^{(1)}$. При этом $r = \pm\sqrt{2c - C_2}$.

Рассмотрим три случая, предполагая, что $\operatorname{Im} r > 0$.

Случай 1: $\operatorname{Re} r = 0$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 9. Разложения (3.52) являются базовыми экзотическими и могут быть записаны в виде функции (3.48). Обозначим их семейство $\mathcal{A}_0^0$.

Случай 2: $0 < \operatorname{Re} r < 1$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 10. Разложения (3.52) являются базовыми, но не являются экзотическими.

Случай 3: $\operatorname{Re} r = 1$. В этом случае угол V заштрихован на рис. 11. Значениям показателей s с $\operatorname{Re} s = 1$ из множества (3. 53) соответствует подсумма в (3.52), которая является решением укороченного уравнения, соответстующего ребру $\Gamma_1^{(1)}$ и получается с помощью симметрии уравнения (1. 2). В этом случае разложения (3. 52) являются экзотическими, но не базовыми. Обозначим их семейство $\mathcal{A}_0^1$.

3.3. Сводка результатов. Среди базовых семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0^0$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, существующих при $a \cdot b \neq 0$, семейства $\mathcal{A}_0^0$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$ – экзотические.

Двупараметрическое семейство $\mathcal{A}_0^0$ является экзотическим при $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ и определяется формулами (3. 51) – (3. 53). Однопараметрические семейства $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$ определяются формулами (3.11) и (3.10). Семейства $\mathcal{B}_6^\tau$ являются экзотическими при $\operatorname{Re}\sqrt{2a} = 0$ и определяются формулами (3. 18) – (3.21).

Замечание 3.2. Семейства $\mathcal{B}_j^+$ и $\mathcal{B}_j^-$ отличаются тем, что комплексные показатели степени их разложений комплексно сопряжены. При комплексном сопряжении разложений получаются разложения с сопряженными комплексными показателями степеней. Если разложение из $\mathcal{B}_j^+$ совпадает с комплексным сопряжением некоторого разложения из $\mathcal{B}_j^-$, то этим разложениям соответствует одна и таже вещественная функция. Следовательно, возможны случаи, когда разложению из $\mathcal{B}_j^+$ и разложению из

$\mathcal{B}_j^-$ соответствует одна и таже функция. Обычно это происходит, если все параметры a, b, c, d в уравнении (1.2) вещественные. Поскольку мы не предполагаем вещественности всех этих параметров, то семейства разложений $\mathcal{B}_j^+$ и $\mathcal{B}_j^-$ считаем разными семействами.

§4. Базовые экзотические разложения в случае $a = 0,\ b \neq 0$

Согласно [3] и [4] в этом параграфе мы вычислим базовые экзотические разложения, соответствующие ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ и вершине $\tilde{Q}_3$ (см. рис. 4).

4.1. Ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{gathered}\hat{f}_3^{(1)}(x,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2x^2y(y')^2 - 3x^2y^2(y')^2 - 2xy^2y' + 2xy^3y' - 2x^2y^2y'' \\ +2x^2y^3y'' + 2cy^4 = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Согласно [3, §7] в случае $a = c = 0$ это уравнение имеет решение $y = c_0$, $c_0 \neq 0,\, 1,\ c_0$ – произвольная постоянная. Этому решению соответствует семейство разложений решений полного уравнения (2.1)

$$\mathcal{B}_8: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \tag{4.2}$$

где все c_s – постоянны и однозначно определены.

В случае $a = 0,\ c \neq 0$ уравнение (4.1) имеет решение (3.24), сохранившееся из случая $a \neq c \neq 0$.

А теперь решим уравнение (4.1) в явном виде. Очевидно, что уравнение (4.1) и уравнение (3.1) при $a = 0$ это одно и тоже. Поэтому мы воспользуемся результатами предыдущего параграфа и сразу рассмотрим уравнение (3.28).

В случае $a = 0$ уравнение (3.28) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y\sqrt{(2c - C_2 + C_2 y)}. \tag{4.3}$$

Интегрирование уравнения (4.3) зависит от значения C_2 и параметра c. Рассмотрим три случая значений постоянной C_2.

Случай $C_2 = 2c$. Если $a = 0,\ c \neq 0$, то уравнение (3.28) имеет решение (3.34), сохранившееся из случая $a \neq c \neq 0$. Ему соответствует разложение (3.35).

В случае $a = c = 0$ уравнение (4.3) есть $dy/d\xi = 0$. Оно имеет решение $y = C_{14}$, C_{14} – произвольная постоянная. Этому решению соответствует семейство разложений решений (4.2) полного уравнения.

Случай $C_2 = 0$. Уравнение (4.3) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y\sqrt{2c}. \tag{4.4}$$

Если $a = 0, c \neq 0$, то уравнение (4.4) имеет решение

$$y = C_{15} x^{\pm\sqrt{2c}}, \tag{4.5}$$

где C_{15} – произвольная постоянная.

Функция (4.5) является решением укороченного уравнения (4.1), соответствующего ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$. Более того, она является решением каждого из укороченных уравнений, соответствующих вершинам Q_4 и $\tilde{Q}_3$ (рис. 4).

Пусть $r = \pm\sqrt{2c}$. Если $\operatorname{Re} r \geq 0,\ \operatorname{Im} r \geq 0,\ r \neq 0$, то r попадает в приведенный нормальный конус $\check{\mathbf{U}}_4^{(0)}$, соответствующий нижней вершине Q_4. Если $\operatorname{Re} r \leq 0,\ \operatorname{Im} r \leq 0,\ r \neq 0$, то r попадает в приведенный нормальный конус $\check{\tilde{\mathbf{U}}}_3^{(0)}$, соответствующий верхней вершине $\tilde{Q}_3$.

Случай $0 \neq C_2 \neq 2c$. Пусть

$$t^2 = 2c - C_2 + C_2\, y, \tag{4.6}$$

тогда уравнение (4.3) принимает вид

$$\frac{dt}{d\xi} = \pm(t^2 - 2c + C_2)/2. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) имеет интеграл

$$\ln\frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \pm\sqrt{2c - C_2}\,(\xi + C_{16}),$$

где C_{16} – произвольная постоянная. Отсюда получаем

$$\frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \exp\left(\pm\sqrt{2c - C_2}\,(\xi + C_{16})\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma. \tag{4.8}$$

Учитывая (4.6) и (4.8) получаем

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2}\,\frac{4\sigma}{(1-\sigma)^2}. \tag{4.9}$$

Правую часть (4.9) можно записать в виде

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2}\,\left(\frac{2}{1/\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma}}\right)^2. \tag{4.10}$$

Положим $2i\eta = \ln\sigma \overset{\text{def}}{=} \pm\sqrt{2c - C_2}\,(\xi + C_{16})$. Учитывая равенство $\xi = \ln x$, имеем

$$\eta = \pm i\frac{\sqrt{2c - C_2}}{2}\,(\ln x + C_{16}).$$

Тогда (4.10) принимает вид

$$y = \frac{C_2 - 2c}{C_2}\,\frac{1}{\sin^2\eta}. \tag{4.11}$$

Согласно (4.8) y разлагается в ряд по степеням $\sigma = \big(C_{17}x\big)^{\pm\sqrt{2c - C_2}}$, где C_{17} – произвольная постоянная.

Если $2c - C_2$ – вещественное отрицательное число, то число $i\sqrt{2c - C_2} \overset{\text{def}}{=} 2\gamma$ – вещественно. В этом случае $\eta = \gamma\ln(C_{17}x)$ Из (4.11) видно, что y разлагается в ряд по целым степеням σ, т.е. по целым степеням $x^{2\gamma i}$, что дает ряд по чисто мнимым степеням x, который при $a = 0$ соответсвует семейству $\mathcal{A}_0^0$ экзотических разложений (3.52) с $\operatorname{Re} r = 0$.

4.2. Вершине $\tilde{Q}_3$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(0)}(x,\ y) \overset{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'xy^3 + 2cy^4 = 0. \tag{4.12}$$

Его характеристическое уравнение $\chi(r) \overset{\text{def}}{=} -r^2 + 2c = 0$ имеет два корня

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2c}. \tag{4.13}$$

Согласно п. 4.1. [5] приведенный нормальный конус $\breve{\tilde{\mathbf{U}}}_3^{(0)} = -(1, r)$, где

$$r:\ r \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} r \le 0,\ r \ne 0. \tag{4.14}$$

Поэтому решением уравнения (4.12) является выражение $y = c_r x^r$, где c_r – ненулевая произвольная постоянная, r определено формулами (4.13) и (4.14).

Согласно [3, § 4] характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2c_r^3(k^2 - 3rk + 2r^2) \tag{4.15}$$

имеет два корня $k_1 = 2r$ и $k_2 = r$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > \operatorname{Re} r$ или $\operatorname{Re} k = \operatorname{Re} r,\ |\operatorname{Im} k| < |\operatorname{Im} r|,\ \operatorname{sign}(\operatorname{Im} k) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)\}$. Числа $k_{1,2}$ не лежат в $\mathcal{K}$, следовательно, критических чисел нет. Носитель разложений решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = r - lr + m;\ l,\ m \ge 0;\ l + m > 0;\ l,\ m \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.16}$$

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{B}_7:\ y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{4.17}$$

где показатели степени таковы: r из (4.14), s из (4.16), c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r = 0$ разложения (4.17) являются экзотическими. Обозначим их семейство $\mathcal{B}_7^\tau$, где $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$.

Носитель (4.16) имеет две образующие $-r$ и 1 и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке r, стороны которого параллельны векторам $-(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$ и $(1, 0)$. При этом подсумма в (4.17), соответствующая $m = 0$ в (4.16), является разложением решений, соответствующим ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$, с первым членом (4.5).

4.3. Сводка результатов. Среди базовых семейств $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$ $\mathcal{B}_8$, существующих при $a = 0$, $b \neq 0$, и отличных от семейств, существующих при $a \cdot b \neq 0$, семейство $\mathcal{B}_7^\tau$ является экзотическим при $\operatorname{Re}\sqrt{2c} = 0$, $c \neq 0$ и определяется формулами (4.14), (4.16), (4.17).

Согласно п. 3.3 при всех значениях параметра a всего получается 9 семейств базовых экзотических разложений. Из них 1 семейство $\mathcal{A}_0^0$ соответсвует вершине Q_4 и 8 семейств соответсвуют левому вертикальному ребру (рис. 1 и 4).

§5. Экзотические разложения, вычисленные симметриями из базовых

В [2] и [3] приводится вывод формул семейств разложений, получаемых из базовых с помощью симметрий уравнения (1.2). Здесь мы не будем этого делать, поскольку эти формулы аналогичны тем, что получены в [2] и [3]. Поэтому приведем только результаты этих вычислений.

5.1. Семейства экзотических разложений, полученные симметриями из $\mathcal{A}_0^0$.

Двупараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{A}_0^1:\ y = c_r x^r + \sum c_s x^s \ \text{ по } s \in \mathbf{K}, \tag{5.1}$$

где $|x| \to 0$, комплексные показатели степени таковы: r – произвольный комплексный с $\operatorname{Re} r = 1$, $r \neq 1, s \in \{r + lr + m(1-r);\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Двупараметрические семейства степенных разложений

$$\mathcal{A}_{\infty}^{0,1}: \ y = c_r x^r + \sum_s c_s\, x^s, \tag{5.2}$$

где $|x| \to \infty$, комплексные показатели степени таковы: r – произвольный и удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re} r = 0, \ r \neq 0 \ (\mathcal{A}_{\infty}^{0}) \text{ или } \operatorname{Re} r = 1, \ r \neq 1 \ (\mathcal{A}_{\infty}^{1}), \tag{5.3}$$

$s \in \{r - lr + m(r-1), \ l, m \geq 0, \ l + m > 0, \ l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Двупараметрические семейства степенных разложений

$$\mathcal{A}_{1}^{0,1}: \quad y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \tag{5.4}$$

где $|x| \to 1$, комплексные показатели степени таковы: r – произвольный и удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re} r = 0, \ r \neq 0 \ (\mathcal{A}_{1}^{0}) \text{ или } \operatorname{Re} r = 1, \ r \neq 1 \ (\mathcal{A}_{1}^{1}), \tag{5.5}$$

$s \in \{r + lr + m(1-r); \ l,m \geq 0; \ l + m > 0; \ l,m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Эти семейства существуют при всех значениях параметров $a, \ b, \ c, \ d$ уравнения (1.2).

5.2. Семейства экзотических разложений, полученные симметриями из $\mathcal{B}_i^{\tau}, \ i = 1, 2, \ \tau = \pm 1$. Для фиксированного значения $i = 1, 2$ при $\theta_i = \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, где $b \neq d - 1/2 \neq 0$ и $\operatorname{Re}\theta_i = 0$; существуют два однопараметрических семейства степенных разложений

$$\mathcal{H}_i^{\tau}: \quad y = c_{1i}x + \sum_s c_{si}x^s, \ \tau = \pm 1, \tag{5.6}$$

где $|x| \to 0$, $s \in \{1 + l + m\tau\theta_i; \ l,m \geq 0; \ l + m > 0; \ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{1i} и c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Для фиксированного значения $i = 1, 2$ при $\theta_i = \sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, где $-b \neq c \neq 0$ и $\operatorname{Re}\theta_i = 0$; существуют два однопараметрических семейства степенных разложений

$$\mathcal{D}_i^{\tau}: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si}x^s, \ \tau = \pm 1, \tag{5.7}$$

где $|x| \to \infty$, $s \in \{-l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{0i} и c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Для фиксированного значения $i = 1,\,2$ при $\theta_i = \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{2a}$, где $-a \neq d - 1/2 \neq 0$ и $\operatorname{Re}\theta_i = 0$; существуют два однопараметрических семейства степенных разложений

$$\mathcal{G}_i^\tau: \quad y = c_{1i}x + \sum_s c_{si}x^s,\ \tau = \pm 1, \tag{5.8}$$

где $|x| \to \infty$, $s \in \{1 - l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{1i} и c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Для фиксированного значения $i = 1,\,2$ при $\theta_i = \sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, где $a \neq -b \neq 0$ и $\operatorname{Re}\theta_i = 0$; существуют два однопараметрических семейства степенных разложений

$$\mathcal{E}_i^\tau: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si}(1-x)^s,\ \tau = \pm 1, \tag{5.9}$$

где $|x| \to 1$, $s \in \{l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{0i} и c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Для фиксированного значения $i = 1,\,2$ при $\theta_i = \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{2c}$, где $1/2 - d \neq c \neq 0$ и $\operatorname{Re}\theta_i = 0$; существуют два однопараметрических семейства степенных разложений

$$\mathcal{J}_i^\tau: \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_s c_{si}(1-x)^s,\ \tau = \pm 1, \tag{5.10}$$

где $|x| \to 1$, $s \in \{1 + l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{1i} и c_{si} – постоянны и однозначно определены.

5.3. Семейства экзотических разложений, полученные симметриями из $\mathcal{B}_6^\tau$.

При $d = 1/2,\ b \neq 0$ существует однопараметрическое семейство

$$\mathcal{H}_6^\tau: \ y = x + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{5.11}$$

где $|x| \to 0$, $\rho = 1 \pm \sqrt{-2b}$, $\operatorname{Re}\rho = 1$, s пробегает множество $\{\rho + l(\rho - 1) + m;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $b \neq 0,\ c = 0$ существует однопараметрическое семейство

$$\mathcal{D}_6^\tau:\ y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{5.12}$$

где $|x| \to \infty,\ \rho = \pm\sqrt{-2b},\quad \operatorname{Re}\rho = 0,\ s$ пробегает множество $\{\rho + l\rho - m;\ l,\, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,\, m \in \mathbb{Z}\},\ \tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $d = 1/2,\ a \neq 0$ существует однопараметрическое семейство

$$\mathcal{G}_6^\tau:\ y = x + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{5.13}$$

где $|x| \to \infty,\ \rho = 1 \pm \sqrt{2a},\ \operatorname{Re}\rho = 1,\ \ s$ пробегает множество $\{\rho + l(\rho - 1) - m;\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\},\ \tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $a \neq 0,\ b = 0$ существует однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{E}_6^\tau:\quad y = c_\rho (1 - x)^\rho + \sum_s c_s (1 - x)^s, \tag{5.14}$$

где $|x| \to 1,\ \rho = \pm\sqrt{2a},\ \operatorname{Re}\rho = 0,\ \ s$ пробегает множество $\{\rho + l\rho + m;\ \ l,\, m \geq 0;\ \ l + m > 0;\ \ l, m \in \mathbb{Z}\},\ \tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $c \neq 0,\ d = 1/2$ существует однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{J}_6^\tau:\quad y = x + c_\rho (1 - x)^\rho + \sum_s c_s (1 - x)^s, \tag{5.15}$$

где $|x| \to 1,\ \rho = 1 \pm \sqrt{2c},\ \operatorname{Re}\rho = 1,\ \ s$ пробегает множество $\{\rho + l(\rho - 1) + m;\ \ l,\, m \geq 0;\ \ l + m > 0;\ \ l, m \in \mathbb{Z}\},\ \tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

5.4. Семейства экзотических разложений, полученные симметриями из $\mathcal{B}_7^\tau$.

При $a = 0,\ b \neq 0,\ d \neq 1/2$ существует однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{H}_7^\tau:\ y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{5.16}$$

где $|x| \to 0$, $r = 1 \pm \sqrt{1-2d}$, $\operatorname{Re} r = 1$, $s \in \{r + l(r-1) + m;\ l, m \geq 0;\ l+m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$, комплексные коэфициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ существует однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{D}_7^\tau :\ y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{5.17}$$

где $|x| \to \infty$, $r = \pm\sqrt{2c}$, $\operatorname{Re} r = 0$, $s \in \{r + lr - m;\ l, m \geq 0;\ l+m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$, комплексные коэфициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0$, $b \neq 0$, $d \neq 1/2$ существует однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{G}_7^\tau :\ y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{5.18}$$

где $|x| \to \infty$, $r = 1 \pm \sqrt{1-2d}$, $\operatorname{Re} r = 1$, $s \in \{r + l(1-r) - m;\ l, m \geq 0;\ l+m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$, комплексные коэфициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ существует однопараметрическое семейство разложений решений

$$\mathcal{E}_7^\tau :\ y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s (1-x)^s, \tag{5.19}$$

где $|x| \to 1$, $r = \pm\sqrt{-2b}$, $\operatorname{Re} r = 0$, $s \in \{r - lr + m,\ l, m \geq 0,\ l+m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянные и однозначно определенные.

При $a \neq 0$, $c = 0$, $d \neq 1/2$ существует однопараметрическое семейство разложений решений

$$\mathcal{J}_7^\tau :\ y = x + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s (1-x)^s, \tag{5.20}$$

где $|x| \to 1$, $r = 1 \pm \sqrt{1-2d}$, $\operatorname{Re} r = 1$, $s \in \{r + l(r-1) + m,\ l, m \geq 0,\ l+m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} r)$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянные и однозначно определенные.

§6. Сравнение результатов с известными

Пример 6.1. При

$$a = b = c = 0,\ d = 1/2 \tag{6.1}$$

получены следующие семейства базовых разложений:

1. Два двупараметрических семейства разложений $\mathcal{A}_0^0$ и $\mathcal{A}_0$, определяемые формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \tag{6.2}$$

где комплексные показатели степени таковы: r – произвольный комплексный с $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ для семейства $\mathcal{A}_0^0$ и с $0 < \operatorname{Re} r < 1$ для семейства $\mathcal{A}_0$, $s \in \{r + lr + m(1-r);\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ \ l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ подсумма ряда (6.2) при $m = 0$ есть функция (4.11), т. е. асимптотика решений имеет вид

$$y = \frac{1}{\sin^2\left((\operatorname{Im} r \ln x)/2\right)} \tag{6.3}$$

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{B}_8$, определяемое формулой

$$y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \tag{6.4}$$

где комплексные коэффициенты: $c_0 \neq 0,\ 1$, c_0 – произвольная постоянная, $c_1 = (c_0 - 1)/2$ из [3], c_s постоянны и однозначно определены.

Пример 6.2. В случае (6. 1) уравнение (1. 2) явно проинтегрировал Пикар [6]. Некоторые асимптотики решений Пикара выписаны в лемме 2 [7]. При $x \to 0$ они имеют вид

$$y(x) \sim a_0 x^r (1 + O(x^\varepsilon)), \tag{6.5}$$

где $0 \leq \operatorname{Re} r \leq 1,\ r \neq 0,\ r \neq 1,\ a_0$ – ненулевая комплексная произвольная постоянная.

В случае $\operatorname{Re} r = 0,\ r \neq 0$

$$y(x) \sim \frac{1 + O(x)}{\sin^2\left[\dfrac{-\operatorname{Im} r \log(x)}{2} + O(1)\right]}. \tag{6.6}$$

Сравнивая (6. 5) с (6. 2) и (6. 6) с (6. 3), видно, что (6. 5) и (6. 6) суть асимптотики решений семейств $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_0^0$ соответственно.

Асимптотики решений семейства $\mathcal{B}_8$, т. е. для $r=0$, в [7] не выписаны.

Пример 6.3. При

$$a = 2,\ b = c = 0,\ d = 1/2 \tag{6.7}$$

получены следующие семейства базовых разложений:

1. Два двупараметрических семейства разложений $\mathcal{A}_0^0$ и $\mathcal{A}_0$, определяемые формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \tag{6.8}$$

где комплексные показатели степени таковы: r – произвольный комплексный с $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ для семейства $\mathcal{A}_0^0$ и с $0 < \operatorname{Re} r < 1$ для семейства $\mathcal{A}_0$, $s \in \{r + lr + m(1-r);\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ \ l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ подсумма ряда (6.8) при $m = 0$ есть функция (3.48), где число C_2 – вещественное положительное, $\alpha = 1$, $\beta = -C_2/4$, $\gamma = \sqrt{C_2}/2$. Следовательно, асимптотики имеют вид

$$y = \frac{\beta}{\beta \cos^2[\sqrt{-\beta}\ln(C_{13}x)] + \sin^2[\sqrt{-\beta}\ln(C_{13}x)]}, \tag{6.9}$$

где число β – произвольное вещественное отрицательное.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{B}_6$, определяемое формулой

$$y = 1 + c_2 x^2 + \frac{c_2}{2} x^3 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s x^s, \tag{6.10}$$

где c_2 – ненулевая произвольная постоянная, все c_s – постоянны и однозначно определены.

3. Однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{B}_3$ с асимптотикой

$$y = -\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x}, \tag{6.11}$$

где комплексные коэффициенты: c_{-3} – произвольная постоянная, остальные c_{-s} – постоянны и однозначно определены.

Пример 6.4. Для случая (6. 7) в работе [7] найден класс решений (названных решениями Шази) в явном виде. Для решений этого класса в лемме 5 [7] при $x \to 0$ выписана асимптотика

$$y(x) \sim -\log^{-2} x + b_0 \log^{-3} x + O(\log^{-4} x), \tag{6.12}$$

где b_0 – произвольная постоянная.

Формула (6.12) совпадает с (6.11) при (6.7). Для остальных решений в случае (6.7) (кроме Шази) асимптотики не выписаны.

По лемме 6 из [7] существует преобразование, которое отображает решения в случае (6.7) в решения в случае (6.1). По лемме 7 [7] все решения Шази отображаются в исключительное решение $y = \infty$ (в [2] это решение $\mathcal{I}_2$). По лемме 8 [7] решения типа Пикара не отбражаются в это исключительное решение. Поэтому для решений типа Пикара можно предполагать, что асимптотики будут иметь вид аналогичный асимптотикам семейств $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_0^0$.

Рассмотрим преобразование из леммы 6 [7] для семейства $\mathcal{B}_6$, т.е. для разложения (6.10). В результате этого преобразования разложение (6.10) переводится в разложение вида

$$y = \frac{1}{1-64c_2} - \frac{32c_2}{1-64c_2}x + ..., \tag{6.13}$$

где произвольная постоянная c_2 из (6.10).

При $c_2 \neq \dfrac{1}{64}$ разложение (6.13) относится к семейству $\mathcal{B}_8$, т. е. имеет вид (6.4). А при $c_2 = \dfrac{1}{64}$ оно является исключительным решением $y = \infty$. Следовательно, решение (6.10) из семейства $\mathcal{B}_6$ в случае (6.7) с $c_2 = \dfrac{1}{64}$ преобразованием из леммы 6 [7] переводится в решение $y = \infty$. Поэтому и по лемме 8 [7] оно не является решением типа Пикара. Поскольку его асимптотики при $x \to 0$ отличны от асимптотик (6.11) решений Шази, то это решение не является решением Шази.

Таким образом, в случае (6.7) существует решение (6.10) с $c_2 = 1/64$, которое не является как решением Шази, так и решением типа Пикара, что противоречит теореме 4 (iii) из [7], утверждающей, что в случае (6.7) решения Шази и типа Пикара исчерпывают все решения.

Автор благодарит своего научного руководителя А.Д. Брюно за существенные советы, замечания, обсуждения и помощь в подготовке текста препринта.

Литература

1. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Препринт № 66. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 26 с.

2. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$ // Препринт №13. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 32 с.

3. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // Препринт №2. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 30 с.

4. *Брюно А.Д. , Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. Т. 410. №3. С. 331-334.

5. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

6. *Picard E.* Mémoire sur la théorie des functions algébriques de deux varables // Journal de Liouville. 1889. Vol. 5, p. 135-319.

7. *Mazzocco M.* Picard and Chazy solutions to the Painleve VI equation // Math. Ann., 2001. Vol. 321, p. 157–195.

8. *Gromak I.V., Laine I., Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002. 303 p.

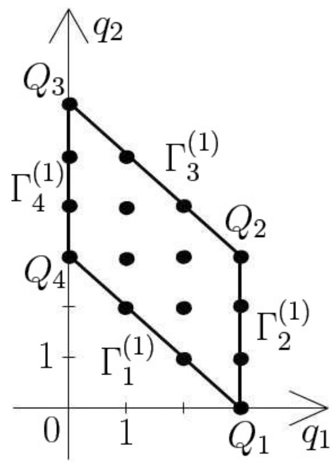

Рис. 1

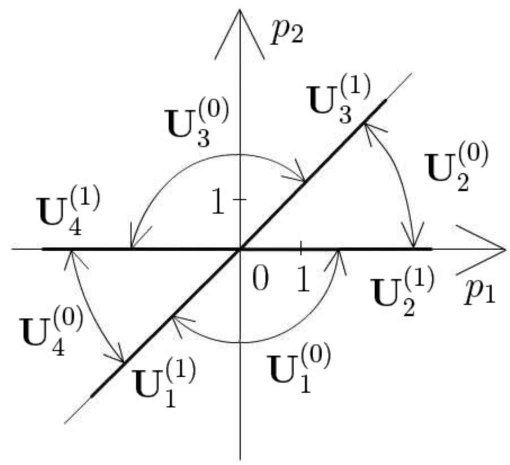

Рис. 2

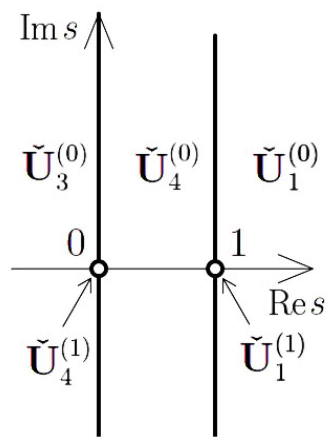

Рис. 3

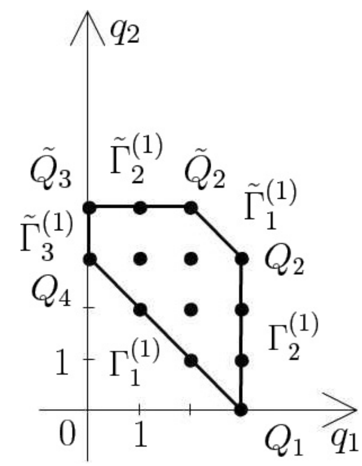

Рис. 4

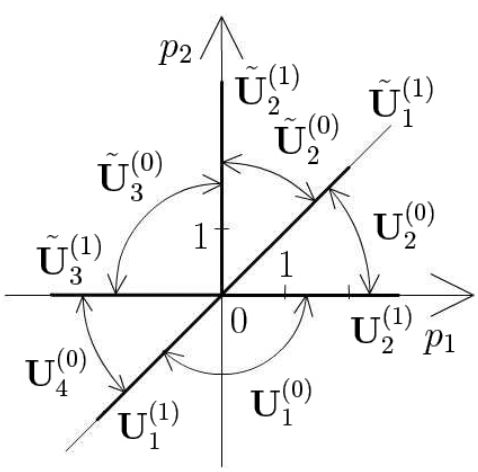

Рис. 5

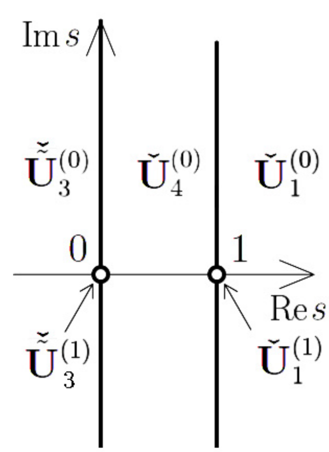

Рис. 6

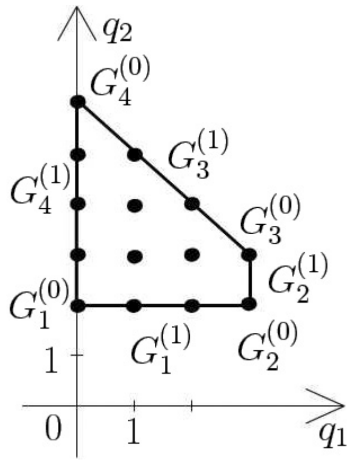

Рис. 7

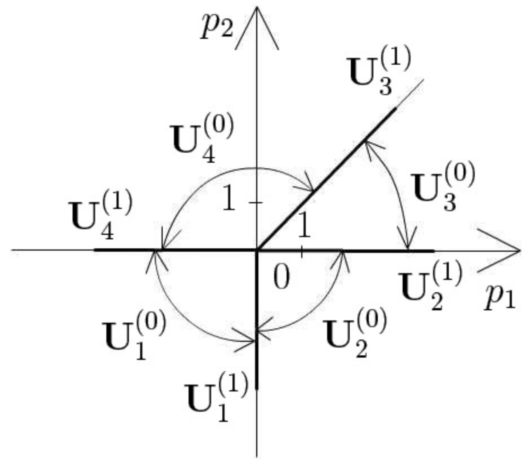

Рис. 8

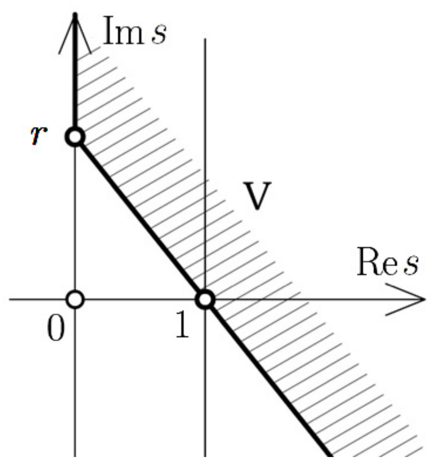

Рис. 9

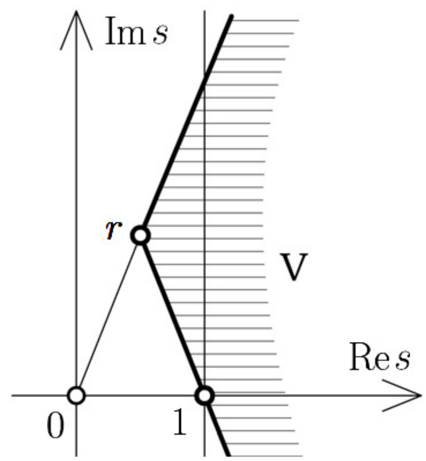

Рис. 10

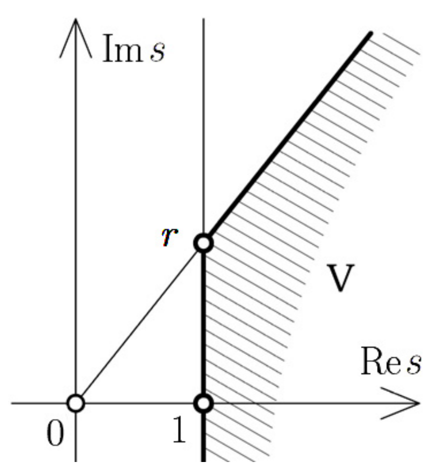

Рис. 11