



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 7 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**В. В. Колмычков, О. С. Мажорова,**  
**Ю.П. Попов, Е.Э. Федосеев**

О численном моделировании  
конвекции Рэля-Бенара

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** О численном моделировании конвекции Рэля-Бенара / В. В. Колмычков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 7. 24 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-7>

## **Аннотация**

### **О численном моделировании конвекции Рэлея-Бенара**

В.В.Колмычков, О.С.Мажорова, Ю.П.Попов, Е.Э. Федосеев

Целью работы является численное исследование конвективной устойчивости положения механического равновесия находящегося в поле силы тяжести ограниченного плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости, с линейным вертикальным профилем температуры. В широком диапазоне параметров изучено влияние параметров дискретной модели на значение критического числа Рэлея, проанализирована зависимость интегральных характеристик стационарного течения (средней кинетической энергии и среднего значения потока тепла на границе области) от величины надкритичности.

## **Abstract**

### **On numerical simulation of Rayleigh-Benard convection**

V.V.Kolmychkov, O.S.Mazhorova, Yu.P.Popov, E.E. Fedoseev

The paper deals with numerical simulation of convective instability in a liquid with linear vertical initial temperature profile. Liquid is considered in a square box subjected to the gravity field. Action of mesh parameters on critical Rayleigh number of discrete model is studied. In the wide range of parameters dependence of integral flow characteristics (average kinetic energy, Nusselt number) on Rayleigh number is investigated. Results are compared with theoretical data.

## Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	5
3	Предварительные замечания	6
4	Результаты расчетов	9
5	Заключение	14

# 1 Введение

Развитие методов численного решения многомерных задач динамики жидкости привело к широкому использованию методов математического моделирования при изучении процессов конвективной устойчивости. Прямой расчет трехмерных нестационарных уравнений конвективного теплопереноса позволяет исследовать широкий круг явлений, находящийся вне компетенции линейной и слабо нелинейной теории устойчивости, например, эволюцию структуры течения в надкритической области, проблему отбора волновых чисел. Однако достоверность численных результатов требует тщательного анализа. При исследовании гидродинамической устойчивости свойства используемых алгоритмов и параметры сетки могут оказывать существенное влияние на наблюдаемую в расчетах структуру течения, значения критических параметров системы и т.д. Поэтому необходимым этапом в исследовании гидродинамической устойчивости методами математического моделирования является сопоставление результатов численного анализа с известными данными классической линейной теории устойчивости.

Целью данной работы является численное исследование процесса возникновения и развития тепловой конвекции в ограниченном плоском слое несжимаемой жидкости. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии механического равновесия, температура линейно зависит от вертикальной координаты. Для значений числа Рэля, изменяющихся в диапазоне  $Ra \approx 1700 \div 40000$ , проанализирована зависимость структуры течения, кинетической энергии, среднего теплового потока от степени надкритичности; изучена связь между параметрами дискретной модели и границей устойчивости. Полученные результаты сравниваются с данными линейной теории конвективной устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 06-01-00182.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим область  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq H\}$ , заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta V + g \beta T e_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \nabla T = \chi \Delta T \quad (2)$$

$$\operatorname{div} V = 0 \quad (3)$$

где  $p$  и  $T$  - соответственно давление и температура, которые отсчитываются от некоторых средних равновесных значений  $\hat{p}, \hat{T}$ ;  $V$  - скорость,  $\rho_0 = \rho(\hat{p}, \hat{T})$  - средняя плотность,  $t$  - время,  $g$  - модуль ускорения свободного падения,  $e_z$  - единичный вектор в направлении вертикальной оси  $z$ ,  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=\tilde{p}}$  - коэффициент теплового расширения,  $\chi, \nu$  - коэффициенты температуропроводности и динамической вязкости соответственно, которые считаются постоянными.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) жидкость покоится  $V = 0$ , и температура линейно зависит от  $z$ :  $T = T_0(z)$ .

На границе области:

$$\begin{aligned} T|_{z=0} &= T_{bot}, \quad T|_{z=H} = T_{top} \\ \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x=0, x=L_x, y=0, y=L_y} &= 0 \\ V \Big|_{\partial \Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Перепишем систему уравнений (1)-(3) в безразмерной форме. Выберем в качестве масштаба измерения длины высоту области  $H$ , времени -  $\frac{H^2}{\nu}$ , скорости -  $\frac{\nu}{H}$ , давления -  $\frac{\rho_0 \nu^2}{H^2}$ , температуры -  $\delta T = |T_{top} - T_{bot}|$ . Для безразмерных величин сохраним старые обозначения. Тогда система (1)-

(3) примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V = -\nabla p + \Delta V + \frac{Ra}{Pr}Te_z \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\nabla T = \frac{1}{Pr}\Delta T \quad (5)$$

$$divV = 0 \quad (6)$$

Здесь  $Ra = \frac{g\beta\delta TH^3}{\nu\chi}$  – число Рэлея,  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  – число Прандтля [1]- [3].

### 3 Предварительные замечания

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой жидкости  $\Omega_\infty = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq 1\}$ . Верхнюю и нижнюю границы будем считать либо жёсткими, тогда  $V=0$ , либо свободными:  $V_z = 0, \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$ .

Температура на нижней и верхней границах фиксирована:  $T|_{z=0} = 0, T|_{z=1} = 1$ .

Система уравнений (4) -(6) с указанными граничными условиями представляет собой задачу Рэлея-Бенара [1], [2].

Если  $V = 0$ , то из уравнений (4)-(6) можно получить  $\nabla T = sign(T_{top} - T_{bot})e_z$  [1], [2]. Таким образом, для механического равновесия жидкости необходимо, чтобы температура была линейно распределена по  $z$ , и не зависела от  $x, y$ .

Приведем основные результаты линейного анализа устойчивости состояния механического равновесия в данной системе. Решение линеаризованной задачи ищется в виде нормальных мод:

$$V_z = f(z) \cdot e^{-\lambda t} w(x, y), \quad (7)$$

где  $\lambda$  - декремент возмущений,  $w(x, y)$  - функция планформы, удовлетворяющая двумерному уравнению Гельмгольца  $\Delta_{x,y} w + k^2 w = 0$ . Частное решение уравнения Гельмгольца имеет вид:  $w(x, y) = e^{i(k_1 x + k_2 y)}$ , где  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  - волновое число,  $\{k_1, k_2\}$  - волновой вектор [1].

В случае двух свободных границ не представляет труда решить соответствующую задачу на собственные значения:

$$\lambda_n = \frac{(\pi^2 n^2 + k^2)(Pr + 1)}{2Pr} \pm \sqrt{\left(\frac{Pr + 1}{2Pr}(\pi^2 n^2 + k^2)\right)^2 + \frac{Ra \cdot k^2 - (\pi^2 n^2 + k^2)^3}{Pr(\pi^2 n^2 + k^2)}} \quad (8)$$

Из соотношения (8) видно, что значение числа Прандтля не влияет на знак декрементов возмущений, а следовательно и на устойчивость. При  $Ra \geq 0$  выражение под корнем положительно, поэтому  $\lambda_n$  вещественно.  $\lambda_n$ , отвечающее знаку минус в выражении (8), с ростом значения числа Рэлея убывает и при  $Ra > Ra_n(k) = \frac{(\pi^2 n^2 + k^2)^3}{k^2}$  становится отрицательным, порождая неустойчивость. Линия  $Ra_1(k) = \min_{n \in \mathbb{N}} Ra_n(k)$  называется нейтральной кривой. Её вид изображён на рис. 1. Движения жидкости, соответствующие точкам, лежащим на плоскости  $(k, Ra)$  внутри нейтральной кривой, являются неустойчивыми. Величина  $Ra_{cr}^\infty = \min_{k \in \mathbb{R}} Ra_1(k) = Ra_1(k_{cr})$  называется критическим числом Рэлея, а  $k_{cr}$  - критическим волновым числом.

Для свободных границ  $Ra_{cr}^\infty = \frac{27}{4}\pi^4 = 657.511$ ,  $k_{cr} = 2.221$ .

В случае жёстких границ характер зависимости  $\lambda$  от  $Ra$ ,  $Pr$  и  $k$  сохраняется,  $Ra_{cr}^\infty = 1707.762$ ,  $k_{cr} = 3.117$  [2].

Как видно из выражения (8), линейная теория позволяет определить только модуль критического волнового вектора  $k_{cr}$ , направление вектора остается произвольным. Собственной функцией линеаризованной задачи является любая линейная комбинация критических нормальных мод, т.е. имеет место вырождение, которое не снимается и при переходе к стационарной нелинейной задаче. Наличие боковых стенок также не снимает вырождения [1], [2].

В ограниченной области вязкое взаимодействие боковых стенок с жидкостью способствует ее стабилизации, и, следовательно, увеличению значения критического числа Рэлея. В работах [6], [7] показано, что кри-

тическое значение числа Рэлея неограниченно возрастает при  $\Gamma \rightarrow 0$  ( $\Gamma = \frac{L_x}{H}$ ) и асимптотически приближается к  $Ra_{cr}^\infty$  при  $\Gamma \rightarrow \infty$ . Для  $\Gamma > 5$  критическое значение числа Рэлея отличается от  $Ra_{cr}^\infty$  не более чем на 5% [7].

При значениях числа Рэлея близких к критическому скорость  $V \sim \xi = \sqrt{Ra - Ra_{cr}}$  [1]- [3], следовательно кинетическая энергия течения линейно зависит от величины надкритичности:

$$E_{kin} \sim V^2 \sim \xi^2 = Ra - Ra_{cr} \quad (9)$$

Так же известно, что:

$$Nu - 1 \sim \xi, \quad Nu = - \int \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \quad (10)$$

$$\bar{T} - T_0 \sim \xi, \quad \bar{T}(z) = \int T dx dy, \quad (11)$$

где  $Nu$  – число Нуссельта [3]. Соотношения (9)-(11) дают возможность оценить критическое значение числа Рэлея.

В области небольшой надкритичности конвективное движение обладает также следующими свойствами:  $V_z$  симметрична относительно середины слоя ( $z = 0.5$ );  $V_x, V_y, \bar{T}(z) - T_0(z)$  - антисимметричны [2].

В настоящее время теоретические и экспериментальные данные не позволяют однозначно предсказать планформу течения, реализующуюся в эксперименте, выявлены лишь некоторые закономерности: в случае вытянутой области течение, как правило, представляет собой систему валов, параллельных короткой стороне [6]- [8]; валиковые структуры образуют с боковыми стенками углы, близкие к прямым [2]; в квадратной области обычно развиваются симметричные структуры из пересекающихся валов. В работе [7] показано, что в прямоугольной области значение критического числа Рэлея для валов, параллельных короткой стороне, меньше, чем для валов параллельных длинной стороне. Однако наблюдаемые в экспериментах структуры течения зависят от вносимых



возмущений, поэтому часто наблюдаются валы параллельные длинной стороне и другие структуры течения.

## 4 Результаты расчетов

Для исследования конвекции Рэлея-Бенара была проведена серия расчётов трёхмерной нестационарной задачи (4)-(6) в области с  $L_x = L_y = 25$ ,  $H = 1$ . Значение числа Рэлея изменялось в диапазоне  $1700 < Ra < 40000$ , значение числа Прандтля  $Pr=1$ . Алгоритм расчетов описан в [10–12]. Отношение  $L_x/H$  составляет 25, что позволяет пренебречь влиянием боковых стенок на критическое значение числа  $Ra$  (см. п. 3).

Расчёты проводились на равномерной прямоугольной сетке с числом узлов  $51 \times 51 \times 16$  по осям  $x, y, z$  соответственно. Шаг по времени выбирался равным 0.1.

В начальный момент времени в поле температуры вносилось возмущение:

$$\tilde{T}(i, j, 8) = (-1)^{i+j} \cdot 0.02 \cdot T_0(i, j, 8) \quad i, j = \overline{0, 50}, \quad (12)$$

здесь  $\tilde{T}, T_0$  - сеточные функции,  $(i, j, 8)$ - номер соответствующего пространственного узла. Таким образом, возмущение задавалось около середины слоя и составляло 2% от начального распределения поля температур.

В расчётах с числом  $Ra \leq 2100$  конвекция не развивалась. При точности сходимости итерационных процессов  $\sim 10^{-5}$ , скорость имела порядок  $10^{-7}$ .

Конвекция была зарегистрирована при  $Ra \approx 2200$ . На рис.2 изображено поле температуры в плоскости  $z = 0.5$  на последовательные моменты времени (светлые участки имеют более высокую температуру чем темные). К моменту времени  $t = 45$  течение преимущественно имеет форму квадратных ячеек, которые впоследствии преобразуются в систему валов, ориентированных по диагонали. Такая эволюция течения согла-

суется с известным фактом: в области малой надкритичности устойчивой структурой течения является система валов [2]. Ориентация валов соответствует результатам работы [7] - в квадратной области предпочтительными являются симметричные конвективные структуры. Из рис.2 видно, что валы подходят перпендикулярно к границе области, что также является известным фактом (см. п. 3).

Таким образом критическое значение числа Рэлея разностной задачи ( $Ra_{cr}^h$ ) на сетке  $51 \times 51 \times 16$  лежит между 2100 и 2200 и превышает теоретическое значение  $Ra_{cr}^\infty$ , равное 1707. Причина такого несовпадения - малое количество узлов сетки, приходящееся на характерную для критического течения конвективную структуру, размер которой определяется числом  $k_{cr}$  (здесь 3 узла на вал), и как следствие – высокая сеточная вязкость. Однако решения, полученные на грубых сетках, все равно должны удовлетворять основным интегральным зависимостям, полученным из дифференциальных уравнений (п. 3), с той лишь разницей, что критическое значение числа Рэлея разностной задачи имеет значение, отличное от дифференциального ( $Ra_{cr}^\infty$ ).

На рис. 3 приведен график зависимости средней кинетической энергии от времени для  $Ra = 2200$ :

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{L_x \cdot L_y \cdot H} \int_{\Omega} \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{2} dx dy dz .$$

До момента времени  $t = 40$  движение жидкости практически отсутствует, при  $40 < t < 50$ , в результате потери устойчивости, скорости быстро нарастают, а затем течение постепенно выходит на стационар ( $t \approx 100$ ).

Рис. 4 иллюстрирует развитие структуры течения в расчёте с числом  $Ra = 2500$ . Ячейки в этом случае также неустойчивы и сменяются валами. Стационарная структура течения более симметрична, чем в предыдущем случае. Как видно из рис.2, рис.4, движение начинает развиваться из углов области. Этот факт является общим для всех проведённых расчётов с начальным возмущением (12). На рис.5 представлен график

зависимости средней кинетической энергии от времени (сплошная линия). Характер этой зависимости аналогичен предыдущему случаю, но уменьшается время начала роста кинетической энергии и сокращается время выхода на стационар; значение кинетической энергии на стационаре увеличилось по сравнению с  $Ra = 2200$ .

На рис.6-8 представлены картины течения для  $Ra=4000, 5000, 10000$  соответственно. Как видно из рисунков, с ростом надкритичности характерный размер конвективных структур увеличивается, что соответствует экспериментальным данным. Также с увеличением значения числа Рэлея происходит усложнение пространственной структуры течения. Графики зависимостей средней кинетической энергии от времени для  $Ra = 4000$  и  $5000$  аналогичны рис.3, рис.5. На рис.9 приведён график зависимости средней кинетической энергии от времени для  $Ra=10000$  (сплошная линия). В этом случае кинетическая энергия на развитой стадии конвекции колеблется около некоторого среднего значения, что характерно для большой надкритичности. Согласно [2, стр.102] при  $Ra > 10000$  конвективное движение становится нестационарным.

На рис.10 изображены картины течения для  $Ra = 20000$  на последовательные моменты времени. Как видно из рисунков, характер конвекции приобрёл качественно иной вид. В работе [5] экспериментально получено, что изменение структуры течения для  $Pr = 6$  происходит при значении числа Рэлея  $Ra_2 \sim 10Ra_{cr}$ . В нашем случае  $Pr = 1$ ,  $Ra_{cr}^h \sim 2000$ , следовательно  $Ra_2^h \sim 20000$ . Зависимость средней кинетической энергии от времени аналогична  $Ra = 10000$ , однако амплитуда колебаний на развитой стадии конвекции увеличилась.

На рис.11 приведен график зависимости средней кинетической энергии от значения числа Рэлея на развитой стадии конвекции (кривая 3). Как видно из графика, кинетическая энергия линейно зависит от  $Ra$ . Точка пересечения этого графика с горизонтальной осью даёт оценку критического значения числа Рэлея. В данном случае  $Ra_{cr}^{h1} = 2062$ . На-

помним, что конвекция в расчётах наблюдалась для  $Ra = 2200$ , при  $Ra = 2100$  движения не возникало.

Построим зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея (рис.12). В выражении (10) будем использовать разностную аппроксимацию производной по  $z$  с первым и вторым порядком точности. И в том и в другом случае  $Nu - 1 \sim \sqrt{Ra - Ra_{cr}}$ . Оценка критического значения числа Рэлея, полученная по данным зависимостям, для аппроксимации первого порядка -  $Ra_{cr}^{h2} = 1742$ , для аппроксимации второго порядка -  $Ra_{cr}^{h3} = 1756$ .

На рис.13 штрихованной линией изображён начальный линейный профиль температуры, сплошной линией - профиль среднего значения температуры в плоскости  $(x, y)$  при наличии конвекции ( $\bar{T}(z)$ ) для  $Ra=2200, 4000, 10000, 40000$  соответственно. Для всех значений числа  $Ra$  график зависимости  $\bar{T}(z)$  симметричен относительно начального профиля температуры, и  $\bar{T}(0.5)=T_0(0.5)$ , что свидетельствует о симметрии теплопереноса относительно плоскости  $z=0.5$ . Зависимость площади фигуры, ограниченной кривыми  $\bar{T}(z)$  и  $T_0(z)$  от  $Ra$  (рис. 14), близка к корню квадратному, что согласуется с отмеченным ранее фактом  $\bar{T} - T_0 \sim \sqrt{Ra - Ra_{cr}}$ . Оценка критического числа Рэлея по этой зависимости дает значение  $Ra_{cr}^{h4} = 1937.5$ .

На рис.15-17 приведены результаты расчётов на сетке  $51 \times 51 \times 16$  без возмущения начального профиля температуры для  $Ra=2500, 4000$  и  $10000$  соответственно. Сравнение рис.4 и рис.15 показывает, что наличие начального возмущения не изменяет структуру течения, изменяется только пространственная ориентация валов. С ростом надкритичности роль начальных возмущений в развитии конвекции уменьшается (рис.4-8, рис.15-17). На рис.5, 9 для  $Ra = 2500$  и  $Ra = 10000$  соответственно приведены графики зависимости средней кинетической энергии от времени в расчётах с возмущением начального линейного профиля температуры (сплошная линия) и без возмущений (штрихованная линия).

Для значения  $Ra = 2500$  наличие возмущения приводит к более быст-

рому развитию конвективного движения и уменьшению кинетической энергии на стационаре. С увеличением числа Рэлея влияние начального возмущения становится менее заметно. Начальное возмущение не влияет на характер зависимости кинетической энергии числа Нуссельта от  $Ra$ . Полученные оценки критического значения сеточного числа Рэлея также близки.

Проанализируем влияние параметров сетки на значение критического числа Рэлея разностной задачи. Рассмотрим область  $L_x = L_y = 8, H = 1$ . Отношение  $L_x/H$  составляет 8, что снова позволяет пренебречь влиянием боковых стенок на критическое значение числа  $Ra$ .

Расчёты проводились на равномерных прямоугольных сетках с числом узлов  $64 \times 64 \times 16$  и  $128 \times 128 \times 16$ . Шаг по времени выбирался равным 0.5. Для развития конвективного движения задавалось возмущение начального профиля температуры в виде:

$$\tilde{T}(i, j, 8) = 0.02 \sin(k_{cr} \frac{iL_x}{N_x}) \cdot T_0(i, j, 8), \quad (13)$$

где  $k_{cr} = 3.117$  - значение критического волнового числа,  $N_x$  - число узлов сетки на оси  $x$ .

На рис. 11 приведены графики зависимости  $E_{kin}(Ra)$  на сетках  $64 \times 64 \times 16$  и  $128 \times 128 \times 16$ . Число узлов на характерный размер конвективной структуры 8 ( $h_x=1/8$ ) и 16 ( $h_x=1/16$ ) соответственно. Критическое значение сеточного числа Рэлея на сетке  $64 \times 64 \times 16$  равно  $Ra_{cr}^h = 1778$ , на сетке  $128 \times 128 \times 16$   $Ra_{cr}^h = 1732$ . Размер конвективных структур критических движений при этом также практически совпадает с теоретическими данными. Эволюция характерной структуры течения с увеличением значения числа Рэлея аналогична описанной для сетки  $51 \times 51 \times 16$ . Таким образом, измельчение сетки позволяет уточнить значение критического числа Рэлея, наблюдаемые же структуры течения зависят от собственной надкритичности разностной задачи, т.е. от величины  $Ra - Ra_{cr}^h$ . Следует также отметить, что при увеличении значения числа Рэлея размер

характерной конвективной структуры растёт, что позволяет в области средней надкритичности моделировать конвективную неустойчивость на менее подробных сетках.

## 5 Заключение

Проведены расчёты трёхмерной нестационарной задачи конвективной устойчивости Рэля-Бенара в прямоугольной области для широкого диапазона значений числа Рэля и  $Pr = 1$ . Сравнение результатов расчётов на различных сетках показало, что размеры шагов по пространству существенно влияют на критическое значение числа Рэля разностной задачи. Это связано с тем, что для воспроизведения в расчете характерной для критического движения платформы (системы валов), необходимо достаточное количество узлов, приходящихся на один вал. С ростом значения числа Рэля размеры конвективных структур увеличиваются, и величина допустимого шага сетки также может быть увеличена.

При этом, даже на грубых сетках, когда значение сеточного числа Рэля отличается от критического примерно на 30%, выполняются следующие закономерности: кинетическая энергия линейно зависит от надкритичности  $Ra - Ra_{cr}^h$ ;  $Nu - 1 \sim \sqrt{Ra - Ra_{cr}^h}$  и  $T - T_0 \sim \sqrt{Ra - Ra_{cr}^h}$ . Изменение режимов конвекции с ростом числа Рэля, наблюдавшееся в ходе расчётов, соответствует известным экспериментальным данным [2]. Результаты расчётов подтвердили тот факт, что в квадратной области в случае стационарного режима конвекции предпочтительными являются симметричные структуры течения.

Исследование влияния возмущений начального распределения температуры на структуру течения показало, что при большой величине надкритичности влияние начального возмущения на структуру течения несущественно.

## Список литературы

- [1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости М.: Наука, 1972.- 392 с.
- [2] Гетлинг А.В. Конвекция Рэля-Бенара М.: Эдиториал УРСС, 1999.- 248 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика т.6 М.: Наука, 1986.-736 с.
- [4] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Математическое моделирование конвективного массопереноса в пространственно трёхмерном случае. Часть 1. Подкритическая конвекция.// Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2003. №92. 28 с.
- [5] Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow// J. Fluid Mech.- 1970, vol. 42, part 2, pp. 295-307.
- [6] Stork K., Müller U. Convection in boxes: experiments.// J. Fluid Mech.- 1972, 54(4). pp. 599-611.
- [7] Bühler K., Kirchartz K.R., Oertel H. Steady convection in a horizontal fluid layer.// Acta Mechanica.- 1979. №31. pp. 155-171.
- [8] Watanabe Tadashi Flow pattern and heat transfer rate in three-dimensional Rayleigh-Benard convection.// Euro PVM/MPI 2003, LNCS 2840. pp. 495-502.
- [9] Huke B., Lucke M. Roll, square and cross-roll convection in ferrofluids.// J. of Magnetism and Magnetic Materials.- 2005, №289. pp. 264-267.
- [10] Kolmychkov V.V., Mazhorova O.S., Popov Yu.P. Computer simulation for subcritical convection in multi-component alloys. // J. of Mathematical Modelling and Analysys.- 2006, v.1, №1. pp. 57-73.

- [11] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. К расчету уравнений Навье-Стокса в естественных переменных, препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, – Москва., 2001, № 60, 39 стр.
- [12] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Анализ алгоритмов решения трехмерных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных.// Дифференциальные уравнения.- 2006, т.42, №7, стр. 932-942



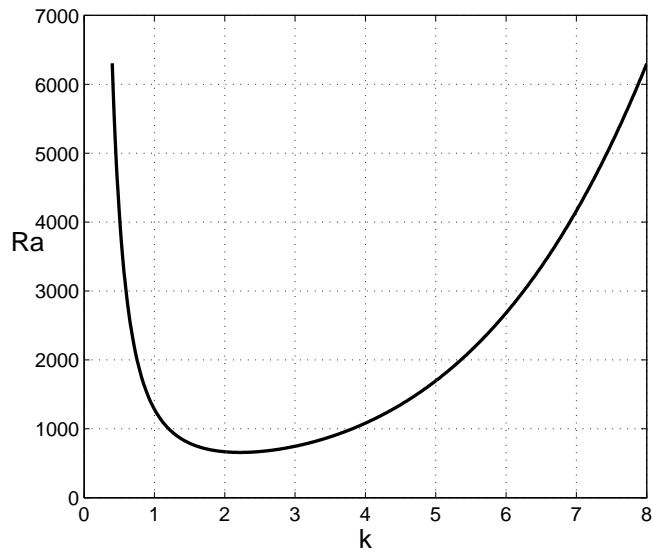


Рис. 1: Нейтральная кривая

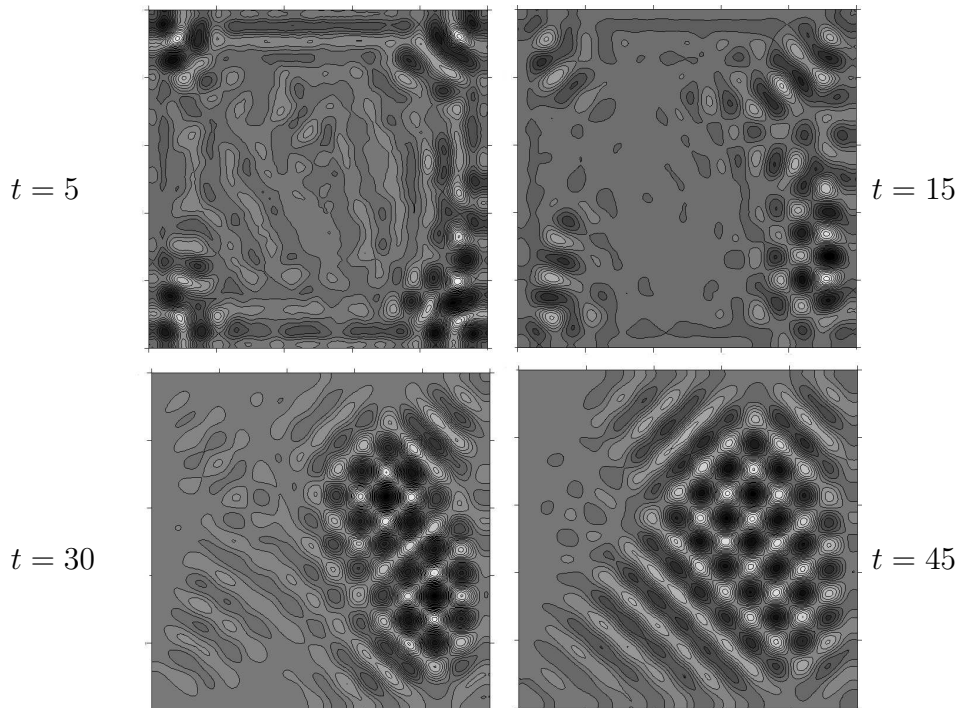


Рис. 2: Структура течения для  $Ra = 2200$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 15, 30, 45$

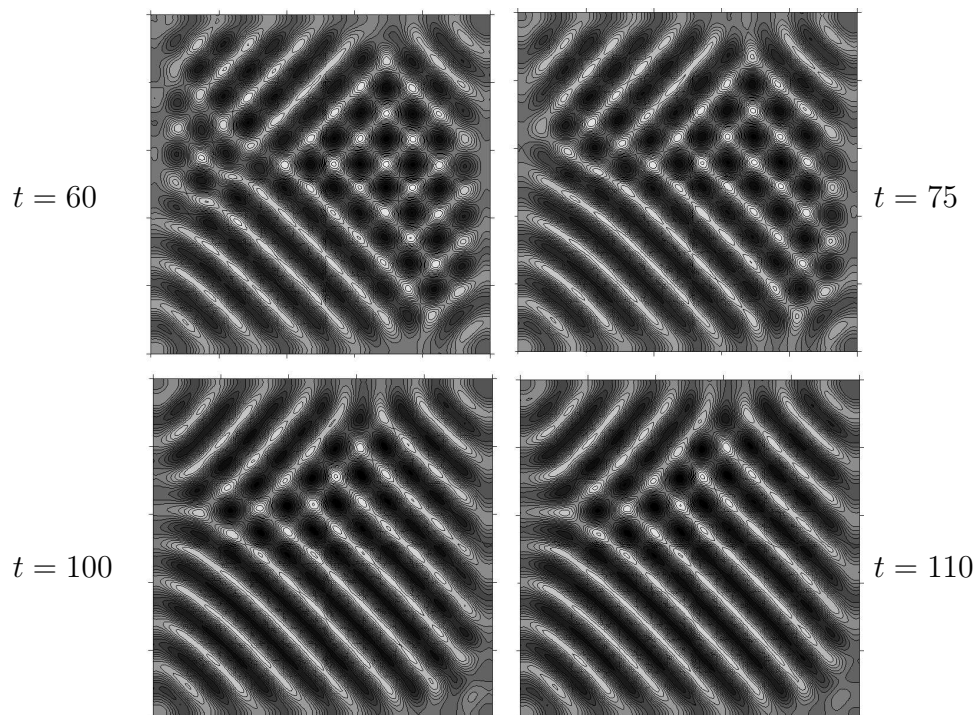


Рис. 2: (продолжение). Структура течения для  $Ra = 2200$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t = 60, 75, 100, 110$

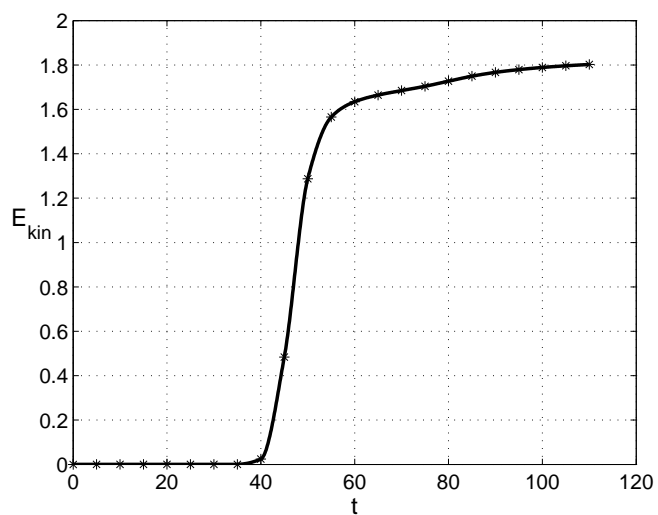


Рис. 3: Средняя кинетическая энергия течения для  $Ra = 2200$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ .

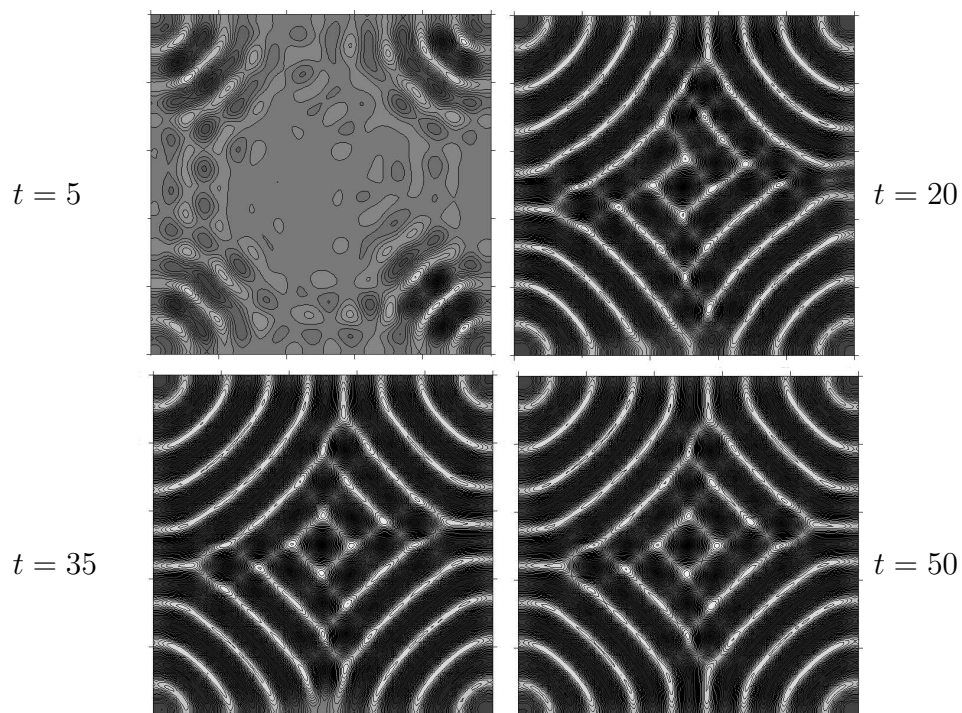


Рис. 4: Структура течения для  $Ra = 2500$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 20, 35, 50$

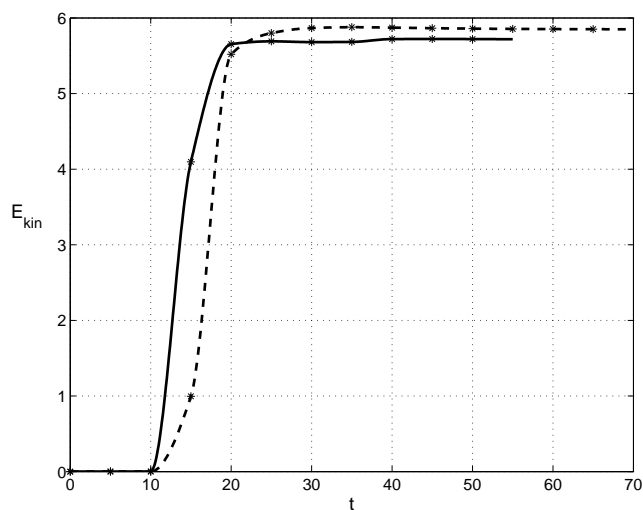


Рис. 5: Средняя кинетическая энергия течения для  $Ra = 2500$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Сплошная линия - расчет с возмущением, штрихованная линия - расчет без возмущения.

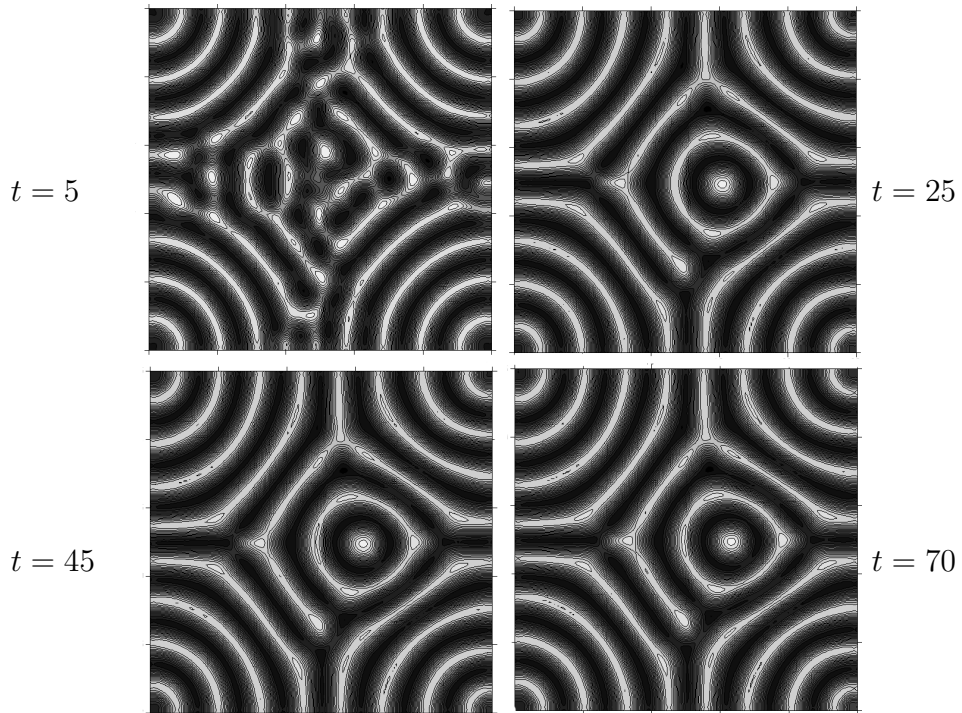


Рис. 6: Структура течения для  $Ra = 4000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 25, 45, 70$

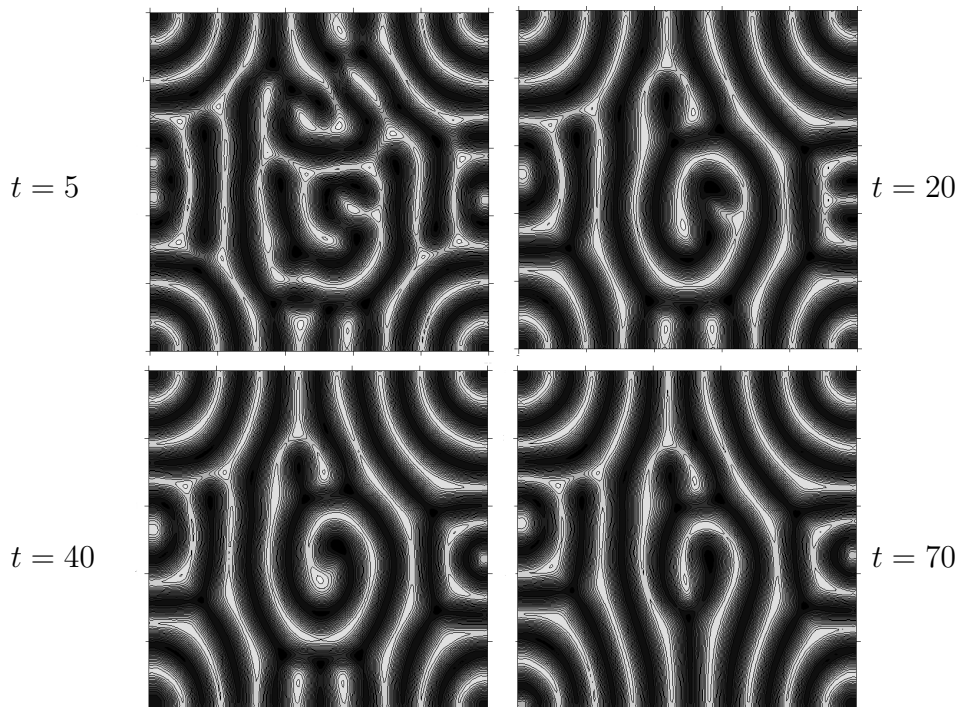


Рис. 7: Структура течения для  $Ra = 5000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 20, 40, 70$

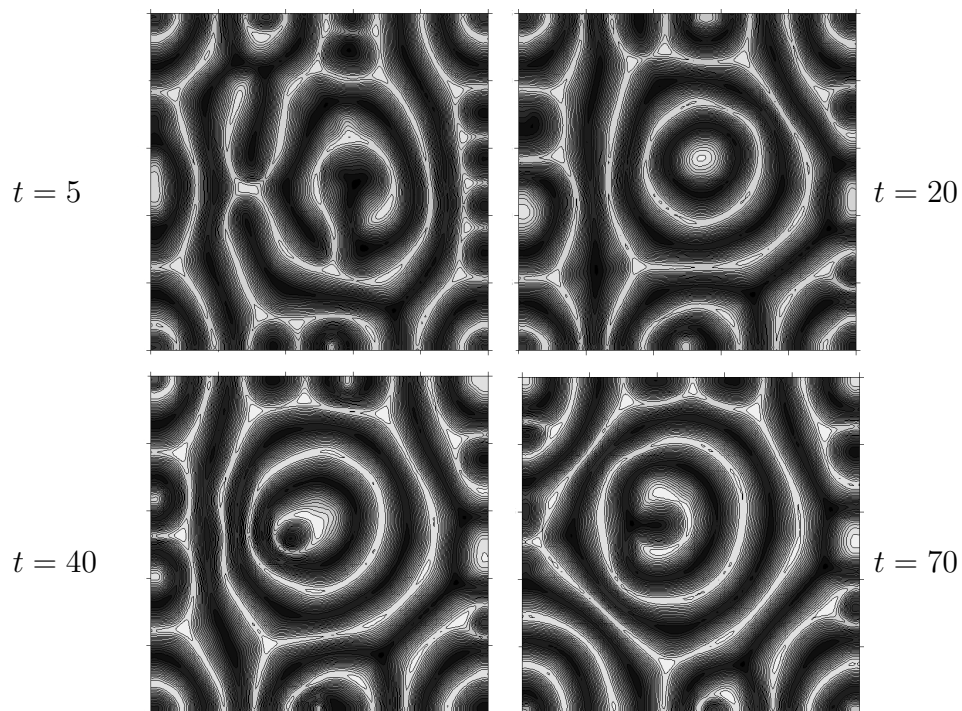


Рис. 8: Структура течения для  $Ra = 10000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 20, 40, 70$

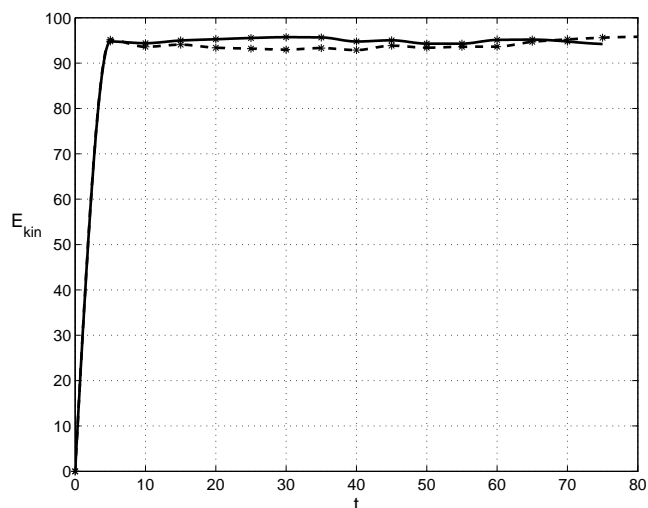


Рис. 9: Средняя кинетическая энергия течения для  $Ra = 10000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Сплошная линия - расчет с возмущением, штрихованная линия - расчет без возмущения.

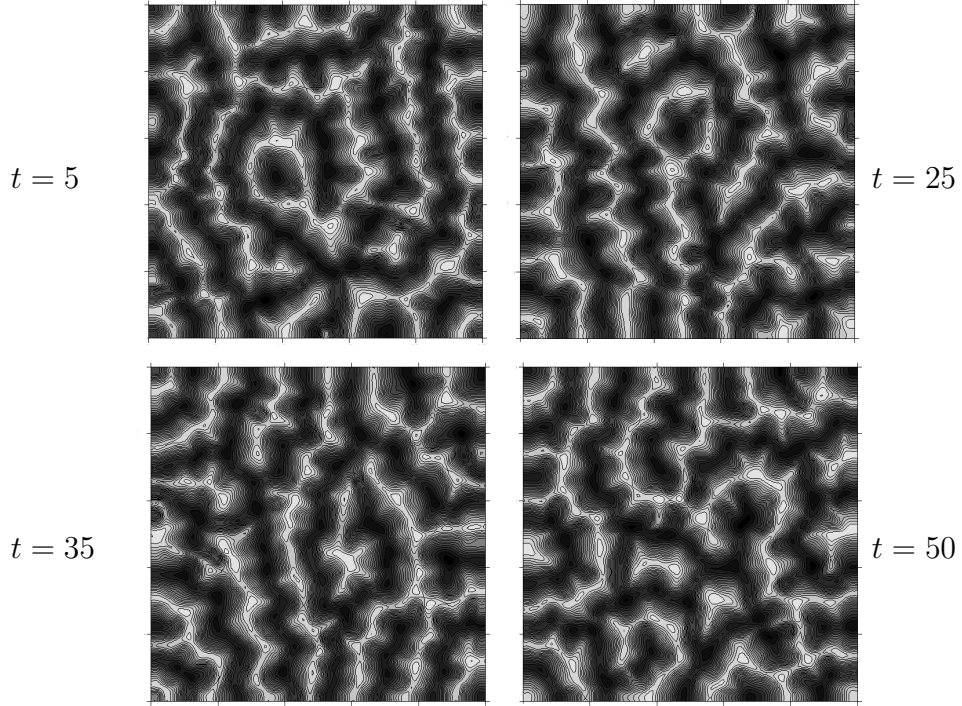


Рис. 10: Структура течения для  $Ra = 20000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 25, 35, 50$

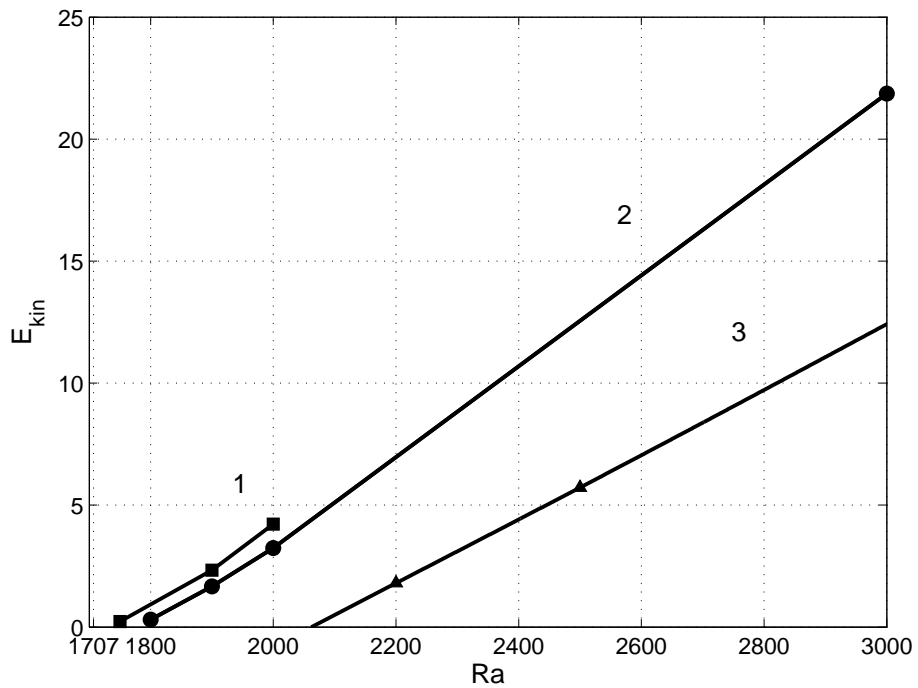


Рис. 11: График зависимости средней кинетической энергии от числа Рэля. 1 -  $L = 8$ , сетка  $128 \times 128 \times 16$ , 2 -  $L = 8$ , сетка  $64 \times 64 \times 16$ , 3 -  $L = 25$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ .

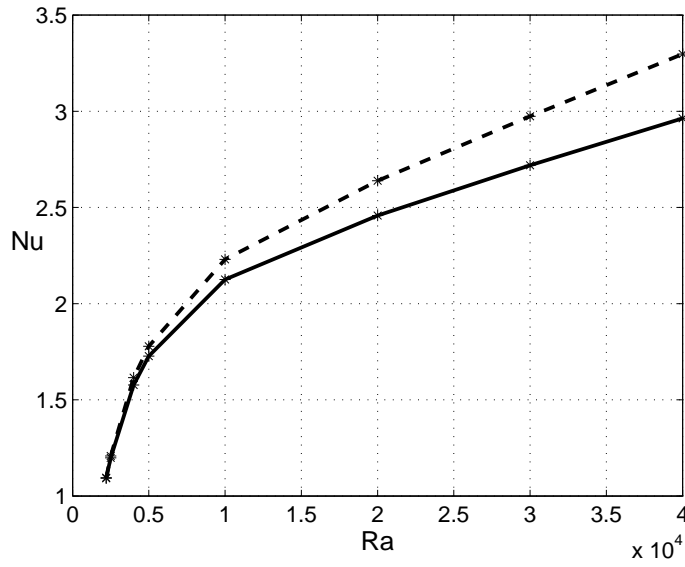
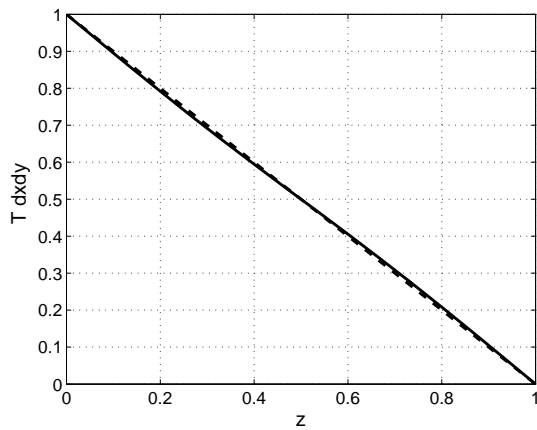
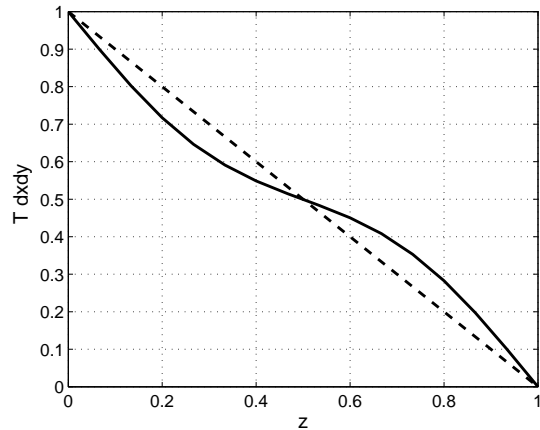


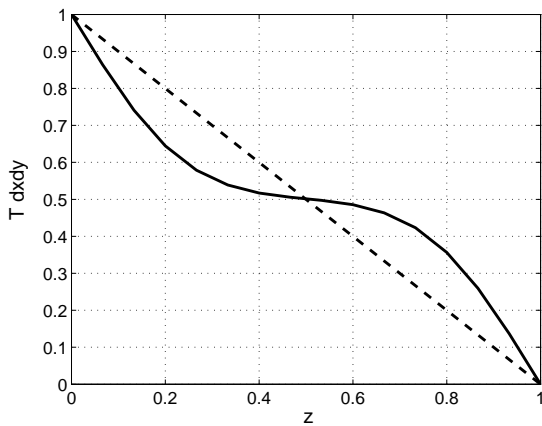
Рис. 12: График зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея. Сплошная линия - аппроксимация первого порядка, штрихованная линия - второго.



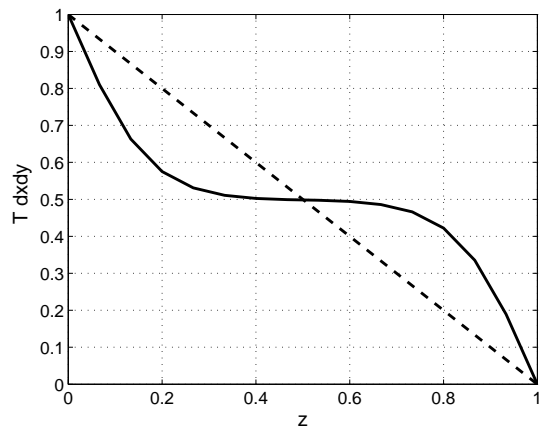
$Ra = 2200$



$Ra = 4000$



$Ra = 10000$



$Ra = 40000$

Рис. 13: График зависимости средней температуры в плоскости  $z = const$  от  $z$ , для значения числа Рэлея 2200, 4000, 10000, 40000 соответственно

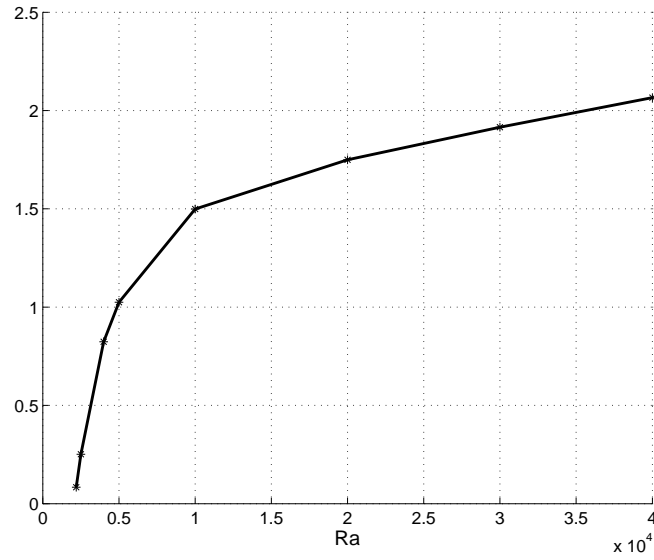


Рис. 14: Величина площади отклонения профиля средней температуры от линейного в зависимости от  $Ra$

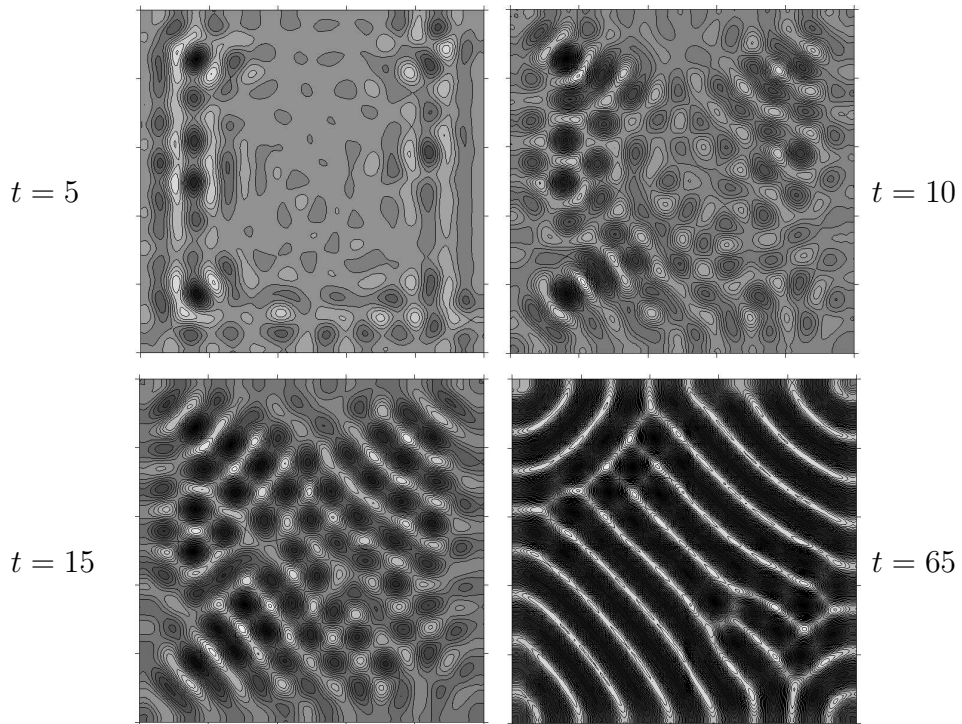


Рис. 15: Структура течения для  $Ra = 2500$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 10, 15, 65$



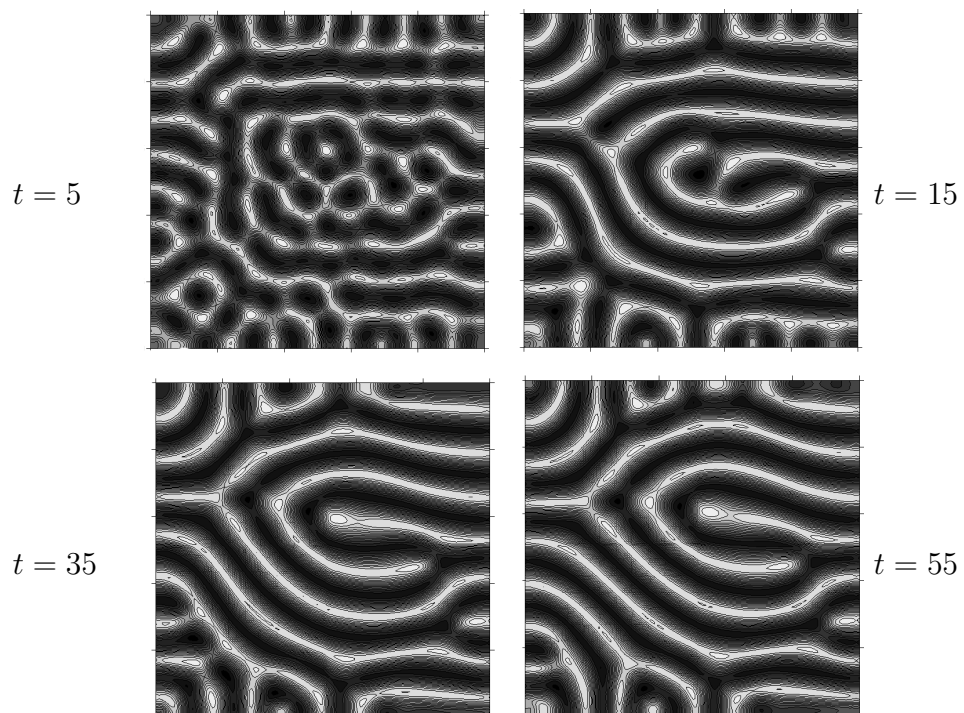


Рис. 16: Структура течения для  $Ra = 4000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 15, 35, 55$

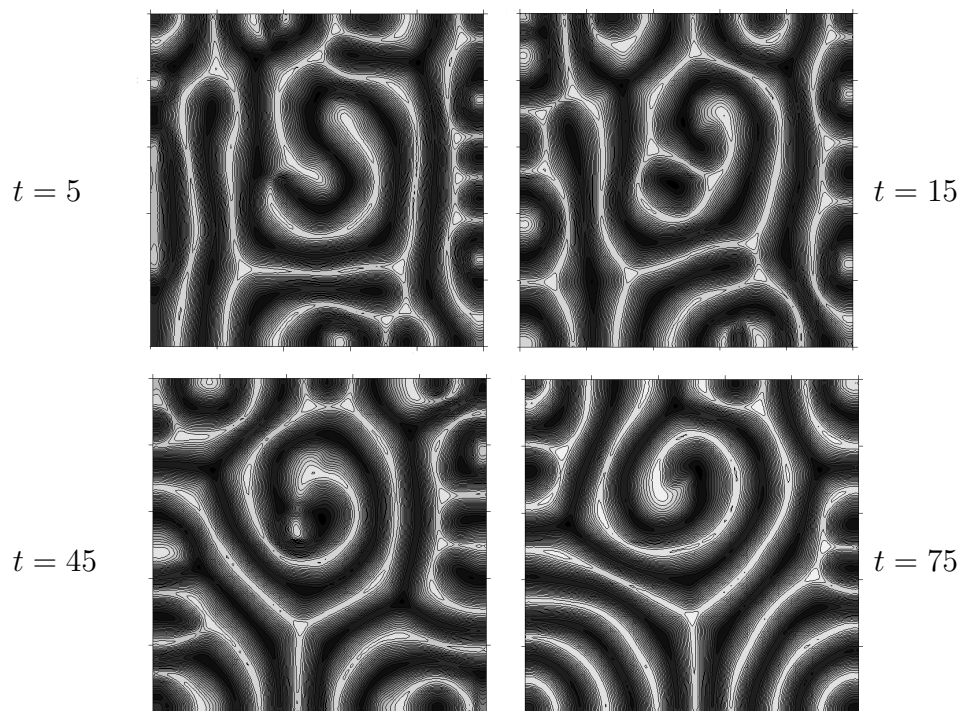


Рис. 17: Структура течения для  $Ra = 10000$ , сетка  $51 \times 51 \times 16$ . Моменты времени  $t=5, 15, 45, 75$