РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ВСЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2007 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Получены все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи всех трех его особых точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ при всех значениях его четырех комплексных параметров. Они образуют 111 семейств и включают разложения четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. В этих разложениях независимая переменная x может иметь комплексные показатели степени. Сначала методами степенной геометрии получены те асимптотические разложения решений всех четырех типов вблизи особой точки $x = 0$, у которых порядок первого члена меньше единицы. Эти разложения названы базовыми. Они образуют 19 семейств. Все другие асимптотические разложения решений вблизи трех особых точек уравнения вычисляются из базовых разложений с помощью симметрий уравнения. Подавляющее большинство этих разложений – новые. Приводятся примеры и сравнения с известными результатами.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. All asymptotic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

We obtain all asymptotic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation near all three its singular points $x = 0$, $x = 1$ and $x = \infty$ for all values of its four complex parameters. They form alltogether 111 families and include expansions of four types: power, power-logarithmic, complicated and exotic. In the expansions, the independent variable can have complex power exponents. First by methods of the power geometry, we obtain all such expansions near the singular point $x = 0$ with the order of the first term less than one. These expansions are called basic. They form 19 families. All other asymptotic expansions of the solutions near three singular points of the equation can be computed from basic by means of symmetries of the equation. Most of these expansions are new. We give examples and comparisons with known results.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

§1. Введение

В 1884-1885 годах Л. Фукс [35] и А. Пуанкаре [53–55] предложили искать нелинейные дифференциальные уравнения, решения которых не имеют критических подвижных особых точек и не выражаются через ранее известные функции. В 1889 году С. Ковалевская [25] показала, что отсутствие подвижных критических особых точек в решениях позволяет построить решения в аналитическом виде.

Особая точка $x = x_0$ функции $y(x)$ комплексной переменной x называется *критической особой точкой*, если при обходе этой точки значение функции $y(x)$ меняется. *Подвижной особой точкой* решения дифференциального уравнения называется такая особая точка, положение которой зависит от начальных данных задачи. Так, для решения $y = 1/\sqrt{x - x_0}$, где x_0 – произвольная постоянная, точка $x = x_0$ является подвижной критической особой точкой. *Мероморфной функцией* называют всякую однозначную функцию не имеющую в конечной части плоскости особых точек, кроме полюсов.

В 1887 году Э. Пикар [52] предложил исследовать класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

где F – рациональная функция от y и y' и мероморфная функция от x, и найти среди уравнений (1) те уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек. В начале XX века П. Пенлеве [49–51], его ученики: Б. Гамбье [37] и Р. Гарнье [38, 39], решили задачу, поставленную Фуксом и Пикаром. Они нашли 50 канонических уравнений вида (1) с решениями, не имеющими подвижных критических особых точек. При этом решения 44-х уравнений из этих 50-ти выражались через известные (элементарные или специальные) функции, а решения оставшихся шести уравнений определяли новые специальные функции, которые теперь называются *трасцендентами Пенлеве.*

Шестое уравнение Пенлеве впервые было опубликовано в работе Р. Фукса [36]. Оно имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{2}$$

где a, b, c, d – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Оно имеет три особые точки $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ и обозначается как P6. Э. Пикар [52] нашел его решения в явном виде при определенных значениях четырех параметров: $a = b = c = 0,\ d = 1/2$. Р. Гарнье [39] изучал его решения без ограничений на параметры.

Новая волна интереса к уравнениям Пенлеве возникла в 70-е годы XX века после обнаруженния М. Абловицем, А. Рамани и Х. Сегуром [1, 31] связи интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных с уравнениями Пенлеве (см. также [24], [26]). Так шестое уравнение Пенлеве является точной редукцией уравнения Эрнста, описывающего движение солитонов. В настоящее время для уравнений Пенлеве рассматриваются задачи: об асимптотическом поведении их решений вблизи особых точек; локальные и глобальные свойства решений; рациональные и алгебраические решения; дискретизация; приложения уравнений Пенлеве (в основном в физике).

Здесь изучаются асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве (2) в его особых точках $x = 0,\ 1,\ \infty$. Разложения в неособых точках описаны в [42, § 46] и с помощью степенной геометрии – в [12]. Подобные исследования проводились многими авторами. С. Шимомура [56 – 59], М. Жимбо [45], Х. Кимура [46], К. Окамото [48] доказали разными методами существование и сходимость двупараметрических семейств разложений решений шестого уравнения Пенлеве. В книге В. Громака, И. Лэйне, С. Шимомура [42, § 46] описаны асимптотические разложения его решений по целым степеням независимой переменной. При специальных значениях параметров шестого уравнения Пенлеве Б. Дубровин и М. Маззокко [34, 47] получили разложения решений по целым степеням независимой переменной и первые несколько членов нестепенных асимптотик, а Д. Гуззетти [43] – экзотические асимптотики.

При $x \to 0$ рассмотрим асимптотические разложения решений уравнения (2) вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{3}$$

где показатели степени r и s – комплексные числа, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$, $\operatorname{Re} s$ возрастают.

Будем различать четыре типа разложений (3); в первых трех из них конечно число показателей s с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s$.

Тип 1. c_r и c_s – постоянные (*степенные разложения*);

Тип 2. c_r – постоянный, c_s – многочлены от $\ln x$ (*степенно-логарифмические разложения*);

Тип 3. c_r и c_s – степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$ (*сложные разложения*).

Тип 4. Имеется бесконечно много показателей s с фиксированной $\operatorname{Re} s$

и на комплексной плоскости выпуклая оболочка точек r и s из (3) содержится в угле с вершиной в точке r, у которого один из граничных лучей параллелен мнимой оси и раствор угла меньше π (*экзотические разложения*).

Кроме того, предполагаем, что аргумент комплексной переменной x ограничен с одной стороны.

Аналогично определяются типы асимптотических разложений при $x \to 1$ и $x \to \infty$.

Цель работы – найти все асимптотические разложения (3) решений уравнения (2) вблизи его особых точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ при всех комплексных значениях его четырех параметров a, b, c, d.

Уравнение (2) имеет три симметрии, переводящие особые точки друг в друга. Поэтому сначала решается задача вблизи $x = 0$, а затем с помощью симметрий получаются асимптотические разложения решений вблизи $x = \infty$ и $x = 1$.

В [2–16, 32] излагаются методы и результаты плоской степенной геометрии, которые используются в этой работе. Первый член асимптотического разложения (3) вычисляется из укороченного уравнения, состоящего из тех членов исходного уравнения, которые являются ведущими для этого разложения (вносят больший вклад в окрестности рассматриваемой точки). Эти уравнения выделяются при помощи графиков. Показатели степени s дальнейших членов разложения $c_s x^s$ находятся алгоритмически. Для этого используется первая вариация укороченного уравнения. Коэффициенты c_s вычисляются последовательно.

§2. Случай $a \cdot b \neq 0$

Уравнение (2) запишем в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $2x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x)$ и перенесем правую часть влево. Получим уравнение

$$\begin{gathered}
f(x, y) \stackrel{def}{=} 2y'' x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x) - (y')^2 [\, x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\
x^2(x-1)^2 y(y-x) + x^2(x-1)^2 y(y-1)\,] + \\
2y' [\, x(x-1)^2 y(y-1)(y-x) + x^2(x-1) y(y-1)(y-x) + \\
x^2(x-1)^2 y(y-1)\,] - [\, 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\
2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\,] = 0. \qquad (4)
\end{gathered}$$

Затем исследуются основные свойства уравнения (4): многоугольник уравнения, симметрии и исключительные решения:

$\mathcal{I}_1 :\ y = 0$ при $b = 0$,

$\mathcal{I}_2: \; y = 1$ при $c = 0$,

$\mathcal{I}_3: \; y = x$ при $d = 1/2$,

$\mathcal{I}_4: \; y = \infty$ при $a = 0$.

Многоугольник уравнения (4) и обозначения семейств асимптотических разложений, соответствующих вершинам и ребрам многоугольника, показаны на рис. 1. Изучим асимптотические разложения (3) решений вблизи нуля, соответствующие вершинам многоугольника. Они имеются только для вершины с координатами $(q_1, q_2) = (0, 3)$. Основной результат:

Теорема 1. *При $x \to 0$ существуют пять семейств двупараметрических разложений решений с постоянными коэффициентами (по c_r и r), определенные формулой*

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{5}$$

где комплексные показатели степени таковы: r – произвольный, $s \in \{r + lr + m(1-r);\; l, m \geq 0;\; l+m > 0;\; l, m \in \mathbb{Z}\}$. А именно: семейство $\mathcal{A}_0$ степенных разложений с $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$, семейства экзотических разложений $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ с $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ и $\mathcal{A}_{01}^{\tau}$ с $\operatorname{Re} r = 1$, $r \neq 1, \tau = \pm 1$. Семейства $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ имеют вид

$$y = \frac{r^2}{\beta \cos^2[\ln(C_{11}\, x)^{\gamma}] + \alpha \sin^2[\ln(C_{11}\, x)^{\gamma}]} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s, \tag{6}$$

где r – произвольная чисто мнимая постоянная, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$, $\gamma = \operatorname{Im} r/2$, $\alpha + \beta = r^2 - 2c + 2a$, $\alpha \cdot \beta = 2a\, r^2$, C_{11} – ненулевая произвольная постоянная.

Разложения (5) сходятся для малых $|x|$. Семейство $\mathcal{A}_0$ и его сходимость были известны [44 – 46, 48, 56 – 61]. Семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ и $\mathcal{A}_{01}^{\tau}$ существуют при всех значениях параметров и исчерпывают все разложения, соответствующие вершине (0, 3). Изучим асимптотические разложения решений вблизи нуля, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1). Основной результ:

Теорема 2. (a) *При $a \neq c \neq 0$ и $x \to 0$ существуют однопараметрические семейства разложений $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{B}_i^{\tau}$, $i = 1, 2$, $\tau = \pm 1$, которые в зависимости от значений $\theta_1 = \sqrt{2c} - \sqrt{2a}$ и $\theta_2 = \sqrt{2c} + \sqrt{2a}$ определяются одной из формул* (7), (9), (10), *приведенных ниже.*

Если $\operatorname{Re} \theta_i = 0$, то семейства $\mathcal{B}_i^{\tau}$ определяются формулой

$$\mathcal{B}_i^{\tau}: \; y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s = \frac{c_{0i}}{1 - C_7\, x^{\tau\theta_i}} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_{si} x^s, \tag{7}$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_i;\ l, m \in \mathbb{Z};\ l,\ m \geq 0;\ l + m > 0\}$, *комплексные коэффициенты:*

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \tag{8}$$

C_7 *– произвольная постоянная, остальные* c_{si} *– постоянны и однозначно определены.*

Пусть $\operatorname{Re}\theta_i \neq 0$ *и* $k_i = \theta_i \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\theta_i)$.

Если $\operatorname{Re}\theta_i \neq 0$ *и* $\theta_i \notin \mathbb{Z}$, *то семейство* $\mathcal{B}_i$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_i:\ y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s, \tag{9}$$

где s *пробегает множество* $\{l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}$, *комплексные коэффициенты таковы:* c_{0i} *определен формулой* (8), $c_{k_i i}$ *– произвольный, остальные* c_{si} *постоянны и однозначно определены.*
Если $\theta_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *то семейство* $\mathcal{B}_i$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_i:\ y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln x)\, x^s, \tag{10}$$

где коэффициенты таковы: c_{0i} *определен формулой* (8), c_{si} *с* $s < k_i$ *– постоянны,* $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln x$, $\alpha_{k_i i}$ *– произвольная постоянная, коэффициент* $\beta_{k_i i}$ *постоянный и однозначно определенный, остальные* c_{si} *с* $s > k_i$ *– многочлены от* $\ln x$, *которые однозначно определяются.*

В случае $C_7 = 0$ *разложения* (7) *являются целыми, их семейство обозначается* $\mathcal{B}_i$.

Семейство $\mathcal{B}_2$ *существует также при* $a = c \neq 0$.

(b) *При* $a \cdot c \neq 0$ *и* $x \to 0$ *существуют три однопараметрических семейства сложных разложений.*
А именно, семейство $\mathcal{B}_3$, *которое существует при* $a \neq c$ *и определяется формулами*

$$\mathcal{B}_3:\ y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_\sigma x^\sigma, \tag{11}$$

где

$$\varphi_0 = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x} = \frac{2(c-a)}{(c-a)^2(\ln x + C_3)^2 - 2a}, \tag{12}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} *и* C_3 *– произвольные постоянные, остальные* c_{-s} *– постоянны и однозначно определены;* φ_σ *ряды по убывающим степеням логарифмов;*

семейства $\mathcal{B}_4$ и $\mathcal{B}_5$, которые существуют при $a = c \neq 0$ и определяются формулами

$$\mathcal{B}_{3+j}: \; y = \phi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \phi_{\sigma j} x^{\sigma}, \; j = 1, \, 2, \tag{13}$$

где

$$\phi_{0j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a}\, \ln x + C_3}, \; j = 1, \, 2, \tag{14}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} (т. е. C_3)– произвольная постоянная, остальные c_{-sj} – постоянны и однозначно определены; $\phi_{\sigma j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

(c) *При $c = 0$ и $x \to 0$ существуют однопараметрические семейства разложений $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$, $\tau = \pm 1$, которые определяются формулой*

$$y = 1 + c_{\rho} x^{\rho} + \sum_{s} c_s x^s, \tag{15}$$

где $\rho = \sqrt{2a}$ и удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\sqrt{2a} > 0$ (семейство степенных разложений $\mathcal{B}_6$) или $\operatorname{Re}\sqrt{2a} = 0$ (семейства экзотических разложений $\mathcal{B}_6^{\tau}$), s пробегает множество $\{\rho + l\rho + m; \; l, m \geq 0; \; l + m > 0; \; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_{ρ} – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Семейства B_6^{τ} имеют также вид

$$y = \frac{1}{1 - c_{\rho} x^{\rho}} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s. \tag{16}$$

Ряды (7), (9), (10) и (15) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейства $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$, где $\tau = \pm 1$, исчерпывают все разложения, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1). Для семейств $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ были известны только подсемейства с постоянными коэффициентами и целыми показателями степени [42]. Семейства $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$, $\mathcal{B}_3$ – $\mathcal{B}_6$ – новые. Семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$ являются *базовыми.* С помощью основных симметрий уравнения из них получаются другие семейства разложений. При $x \to 0$ из базовых семейств разложений $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$ $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$ с помощью симметрии уравнения получаются семейства $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}_1^{\tau}$, $\mathcal{H}_2^{\tau}$, $\mathcal{H}_6^{\tau}$, соответствующие нижнему наклонному ребру многоугольника (рис. 1). Из асимптотических разложений решений при $x \to 0$, образующих семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$, $\mathcal{A}_{01}^{\tau}$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$, $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{B}_1^{\tau}$, $\mathcal{B}_2^{\tau}$, $\mathcal{B}_6^{\tau}$, с помощью другой симметрии уравнения получаются семейства асимптотических разложений $\mathcal{A}_{\infty}$, $\mathcal{A}_{\infty 0}^{\tau}$, $\mathcal{A}_{\infty 1}^{\tau}$, $\mathcal{G}_1$ – $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_1^{\tau}$, $\mathcal{G}_2^{\tau}$, $\mathcal{G}_6^{\tau}$, $\mathcal{D}_1$ – $\mathcal{D}_6$, , $\mathcal{D}_1^{\tau}$, $\mathcal{D}_2^{\tau}$, $\mathcal{D}_6^{\tau}$ при $x \to \infty$.

§3. Случай $a = 0,\ b \neq 0$

При $a = 0, b \neq 0$ многоугольник уравнения (4) показан на рис. 2. Изучим асимптотические разложения решений вблизи нуля (отличные от разложений имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине (0, 4). Основной результат:

Теорема 3. (a) *При $x \to 0$ и $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ существуют однопараметрические семейства разложений решений $\mathcal{B}_7$ и $\mathcal{B}_7^\tau$, $\tau = \pm 1$, которые определяются формулой*

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{17}$$

где $r = \sqrt{2c}$ и удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\sqrt{2c} < 0$ (семейство степенных разложений $\mathcal{B}_7$) или $\operatorname{Re}\sqrt{2c} = 0$ (семейства экзотических разложений $\mathcal{B}_7^\tau$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$), s пробегает множество $\{r - lr + m;\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,\ m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Семейства $\mathcal{B}_7$ и $\mathcal{B}_7^\tau$ типов 1 и 4 исчерпывают все разложения, соответствующие вершине (0, 4) (рис. 2).

При $a = 0$, $b \neq 0$ отсутствуют асимптотические разложения решений вблизи нуля, соответствующие горизонтальному ребру (см. рис. 2). Теперь при $a = 0, b \neq 0$ изучим асимптотические разложения решений вблизи нуля, отличные от разложений, имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$, и соответствующие вертикальному ребру (см. рис. 2). Основной результат:

Теорема 3. (b) *При $x \to 0$ и $a = c = 0$, $b \neq 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами*

$$\mathcal{B}_8: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \tag{18}$$

где $c_0 \neq 0$, 1 – произвольная постоянная.

При $a = 0 \neq c$ имеется однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{B}_3$. Семейства $\mathcal{B}_3$ и $\mathcal{B}_8$ исчерпывают разложения, соответствующие левому вертикальному ребру рис. 2. Ряды (17) и (18) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейства $\mathcal{B}_8$ и $\mathcal{B}_7$ для целых r известны [42].

Семейства $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$ и $\mathcal{B}_8$ также являются *базовыми.* С помощью симметрий уравнения из 19 базовых семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ получаются все остальные семейства разложений решений в окрестностях всех трех особых точек. Вблизи каждой особой точки имеем $18 \cdot 2 + 1 = 37$ семейств разложений и всего $3 \cdot 37 = 111$ семейств. В табл. 1 показано существование базовых семейств $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ в зависимости от значений параметров уравнения. При $a = 0$, $b \neq 0$ с помощью симметрии из базовых семейств разложений $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$ и $\mathcal{B}_8$ получаются семейства асимптотических разложений решений $\mathcal{G}_7$, $\mathcal{G}_7^\tau$ и $\mathcal{G}_8$ вблизи бесконечности (отличные от семейств разложений имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине и наклонному ребру. Из случая $a = 0$, $b \neq 0$ с помощью одной из симметрий уравнения получаются разложения решений в случае $b = 0$, $a \neq 0$.

С помощью симметрий уравнения из асимптотических разложений решений в окрестности нуля получаются асимптотические разложения решений в окрестности единицы.

Таким образом, получены все асимптотические разложения решений уравнения (4), ибо каждое укороченное уравнение либо решается в явном виде, либо доказывается, что оно не имеет нужных решений; это дает нам все асимптотики решений. Каждая асимптотика продолжается всеми возможными разложениями.

Аннотации некоторых результатов этой работы опубликованы в статьях [11, 15, 20] и в тезисах докладов [18, 19, 21, 22, 29, 40, 41]. Подробные изложения основных результатов содержатся в препринтах [12 – 14, 16, 23].

§4. Примеры и сравнения с известными результатами

Пример 1. В случае

$$a = b = c = 0,\ d = 1/2 \tag{19}$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три двупараметрических семейства разложений $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ (семейства экзотических разложений) и $\mathcal{A}_0$ (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \tag{20}$$

где комплексные показатели степени: r – произвольный с $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$ для семейств $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ и с $0 < \operatorname{Re} r < 1$ для семейства $\mathcal{A}_0$, $s \in \{r + lr + m(1-r);\ \ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$, то асимптотики (6) имеют вид

$$y = \sin^{-2}\left[-\frac{\operatorname{Im} r}{2}\ \ln(C_{17}x)\right], \tag{21}$$

где $r=\sqrt{-C_2}$, C_2 – любое вещественное положительное число, C_{17} – ненулевая произвольная постоянная.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{B}_8$, определяемое формулой (18), где комплексные коффициенты: $c_0 \neq 0,\ 1$, c_0 произвольная постоянная, $c_1=(c_0-1)/2$, остальные c_s постоянны и однозначно определены.

Пример 2. В случае (19) Пикар [52] проинтегрировал уравнение (2) в явном виде. Некоторые асимптотики решений Пикара есть в лемме 2 [47]. При $x\to 0$ они имеют вид

$$y(x)\sim a_0x^r(1+O(x^\varepsilon)), \tag{22}$$

где $0<\operatorname{Re} r<1$, либо $r=0$, либо $r=1$, a_0 – ненулевая произвольная постоянная.

В случае $\operatorname{Re} r=0,\ r\neq 0$ асимптотики решений суть [43]

$$y(x)\sim(1+O(x))\sin^{-2}\left[\frac{-\operatorname{Im} r\log(x)}{2}+O(1)\right]. \tag{23}$$

Сравнивая формулу (22) с формулами (20), (18) и формулу (23) с формулой (21), видим, что формулы (22) и (23) суть асимптотики решений семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_8$ (для $r=0$) и $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ соответственно.

Пример 3. При

$$a=2,\ b=c=0,\ d=1/2 \tag{24}$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три двупараметрических семейства разложений $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ (семейство экзотических разложений) и $\mathcal{A}_0$ (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y=c_rx^r+\sum c_sx^s, \tag{25}$$

где комплексные показатели степени: r – произвольный с $\operatorname{Re} r=0$, $r\neq 0$ для семейств $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ и с $0<\operatorname{Re} r<1$ для семейства $\mathcal{A}_0$, $s\in\{r+lr+m(1-r);\ \ l,m\geq 0;\ l+m>0;\ l,m\in\mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r=0$, $r\neq 0$ асимптотики решений (6) суть

$$y=\frac{\beta}{\beta\cos^2[\sqrt{-\beta}\ \ln(C_{11}x)]+\sin^2[\sqrt{-\beta}\ \ln(C_{11}x)]}, \tag{26}$$

где β произвольное вещественное отрицательное число, C_{11} – ненулевая произвольная постоянная, ибо $\alpha=1$, $\beta=-C_2/4$, $\gamma=\sqrt{C_2}/2$, C_2 – вещественное положительное число.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{B}_6$ (см. (15))

$$y = 1 + c_2x^2 + \frac{c_2}{2}x^3 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s x^s, \tag{27}$$

где комплексные коэффициенты: c_2 – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

3. Однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{B}_3$ (см. (11), (12)), т. е. с асимптотикой

$$y = -\ln^{-2} x + c_{-3}\ln^{-3} x + \sum_{s=4}^{\infty} c_{-s}\ln^{-s} x, \tag{28}$$

где комплексные коэффициенты: c_{-3} – ненулевая произвольная постоянная, все c_{-s} постоянны и однозначно определены.

Пример 4. В случае (24) в работе [47] был найден класс решений (названный решениями Шази) в явном виде. Для решений этого класса в лемме 5 [47] при $x \to 0$ асимптотики имеют вид

$$y(x) \sim -\log^{-2} x + b_0 \log^{-3} x + O(\log^{-4} x), \tag{29}$$

где b_0 произвольная комплексная постоянная.

Формула (29) аналогична (28) в случае (24). Для других решений в случае (24) (за исключением решений Шази) асимптотики не выписаны.

Согласно лемме 6 из [47] существует преобразование, которое отображает решения в случае (24) в решения в случае (19). По лемме 7 [47] все решения Шази преобразуются в исключительное решение $\mathcal{I}_4:\ y = \infty$. По лемме 8 [47] решения типа Пикара не отображаются в это исключительное решение. Таким образом, можно предполагать, что асимптотики решений типа Пикара имеют вид асимптотик решений семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ и $\mathcal{B}_6$.

Рассмотрим преобразование из леммы 6 [47] для разложений решений семейства $\mathcal{B}_6$, т. е. для разложений вида (27). В результате этого преобразования разложения (27) переводятся в разложения вида

$$y = \frac{1}{1 - 64c_2} - \frac{32c_2}{1 - 64c_2}x + ..., \tag{30}$$

где c_2 – комплексная произвольная постоянная из (27).

Если $c_2 \neq 1/64$, то разложение (30) относится к семейству $\mathcal{B}_8$, т. е. имеет вид (18). Но в случае $c_2 = 1/64$ оно являются исключительным решением $y = \infty$. Следовательно, в случае (24) решение (27) семейства $\mathcal{B}_6$ с $c_2 = 1/64$ с помощью преобразования из леммы 6 [47] переводится в решение $y = \infty$. Поэтому и по лемме 8 [47] оно не является решением Пикара. Поскольку его асимптотика при $x \to 0$ отлична от асимптотик (28) решений Шази, то это решение не является решением Шази.

Таким образом, в случае (24) существует решение (27) с $c_2 = 1/64$, которое не является решением Шази и не является решением типа Пикара. Это противоречит теореме 4 (iii) из [47], утверждающей, что в случае (24) решения Шази и решения типа Пикара исчерпывают все возможные решения.

На самом деле в случае (24) имеются решения трех типов: 1) двупараметрическое семейство решений типа Пикара; 2) однопараметрическое семейство решений Шази и 3) единственное решение (27) с $c_2 = 1/64$. При этом разложения типа 2) являются предельными для типа 1), а решение типа 3) – предельно для решений типов 1) и 2). У решения типа 3) специфичны не только асимптотические, но и другие свойства.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

2. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

3. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

4. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. **380**. №2. 155–159.

5. *Брюно А.Д.* Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №3. 295–300.

6. *Брюно А.Д.* Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №4. 439–444.

7. *Брюно А.Д.* Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №5. 586–591.

8. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. 31–80.

9. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. **406**. №6. 730–733.

10. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №66.

11. *Брюно А.Д.* , *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004. **395**. №6. 733–737.

12. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в окрестности неособой точки. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. №4.

13. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №2.

14. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №13.

15. *Брюно А.Д. , Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. **410**. №3. 331–334.

16. *Брюно А.Д., Чухарева И.В.* Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №49.

17. *Брюно А.Д., Шадрина Т.В.,* Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО. 2007. **68**. 226–290.

18. *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в степенные ряды по вещественным степеням x // Дифференциальные уравнения. 2004. **406**. №6. 854.

19. *Горючкина И.В.* О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // XXVI конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Тезисы докладов. Москва. 2004. 39–40.

20. *Горючкина И.В.* О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Издательство МГУ. 2004. 63–68.

21. *Горючкина И.В.* Степенные и логарифмические асимптотические разложения шестого уравнения Пенлеве // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XV". Воронеж. ВГУ. 2004. 63–64.

22. *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особенностей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 10-15 июля 2006 г. Тезисы докладов. Владимир: Собор. 2006. 75–77.

23. *Горючкина И.В.,* Экзотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №3.

24. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.,* Трасценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2005.

25. *Ковалевская С.В.* Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta mathematica. 1889. **12**. 177–232. Русский перевод: Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Сборник "Движение твердого тела вокруг неподвижной точки" под редакцией С.А. Чаплыгина и Н.И. Мерцалова, М.– Л.: АН СССР. 1940. 11–49.

26. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004.

27. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. **4**. 233–234.

28. *Тихомиров В.М.* Фреше производная // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1985. **5**. 666.

29. *Чухарева И.В.* Характер особенностей решений VI уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Международной молодежной конференции "Гагаринские чтения XXX". Москва. 2003. 72–73.

30. *Ablovitz M.J.*, *Ramani A.*, *Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // J. Math. Phys. **21**. №4. 715–721.

31. *Ablovitz M.J.*, *Ramani A.*, *Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. **21**. №5. 1006–1015.

32. *Bruno A.D.* Power Geometry as a new calculus // Analysis and Applications (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Dordrecht: Kluwer. 2003. 51–71.

33. *Chang Y.F.*, *Greene J.M.*, *Tabor M.*, *Weiss J.* The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Physica D. 1983. **8**. 183–207.

34. *Dubrovin B.*, *Mazzocco M.* Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups // Invent. Math. 2000. **141**. 55–147.

35. *Fuchs L.* Über differentialgleichungen deren intégrale feste verzweigungspunkte besitzen // Sitz. Acad. Wiss. Berlin. 1884. 669–720.

36. *Fuchs R.* Sur quelques equations differencielles linearies du second ordres // C. r. Acad. sci. Paris. 1905. **141**. 555–558.

37. *Gambier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes // Acta Math. 1910. **33**. 1–55.

38. *Garnier R.* Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. De l'Ecole Normale Superieure. 1912. **29**. 1–126.

39. *Garnier R.* Etitude de l'intégrale générale de léquations VI de M. Painleve // Ann. Ec. Norm. (3). 1917. **34**. 243–353.

40. *Goruchkina I.V.* About power-logarithmic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 5-10 июля 2004 г. Тезисы докладов. Владимир. 2004. 259–260.

41. *Goruchkina I.V.* Asymptotical expansions of solutions to the sixth Painleve equation // ACA 2006. 12th. International Conference on Applications of Computer Algebra. Abstracts of Presentations. Sofia. 2006. 50.

42. *Gromak I.V.*, *Laine I.*, *Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.

43. *Guzzetti D.* On the critical behavior, the connection problem and elliptic representation of a Painlevé 6 equation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2001. **4**. 293-377.

44. *Iwasaki K.*, *Kimura H.*, *Shimomura S.*, *Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. A modern theory of spesial functions. Aspects of Mathematics E16. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig. 1991.

45. *Jimbo M.* Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé transcendents // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1982. **18**. 1137–1161.

46. *Kimura H.* The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1983. **134**. 363–392.

47. *Mazzocco M.* Picard and Chazy solutions to the Painleve VI equation // Math. Ann. 2001. **321**. 157–195.

48. *Okamoto K.* Studies on the Painleve equations I. The six Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. **146**. 337–381.

49. *Painlevé P.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées a Stokholm. Paris. 1897.

50. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bull. Soc. Math. France. 1900. **28**. 201–261.

51. *Painlevé P.* Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur, dont l'interable generale est uniforme // Acta Math. 1902. **25**. 1–86.

52. *Picard E.* Démonstration dún théoréme générale sur les founctions uniformes liées par une relation algébrique // Acta Math. 1887. **11**. 1–12.

53. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // C. r. Acad. sci. 1885. **101**. 939–941. Oeuvres. **IV**. 611–613.

54. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // C. r. Acad. sci. 1885. **101**. 990–991. Oeuvres. **IV**. 614–615.

55. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // Acta Math. 1886. **8**. 295–344. Oeuvres. **I**. 167–222.

56. *Shimomura S.* Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular points // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 163–184.

57. *Shimomura S.* Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 185–197.

58. *Shimomura S.* Supplement to "Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point"// Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 363–371.

59. *Shimomura S.* A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // J. Math. Soc. Japan. 1987. **39**. 649–662.

60. *Takano K.* Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind // Funkcial. Ekvac. 1986. **29**. 99–119.

61. *Watanabe H.* Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1999. **27**. 379–425.

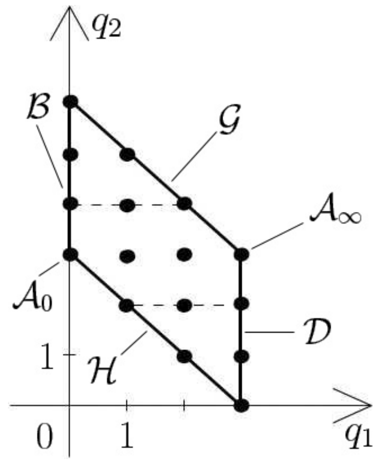

Рис. 1

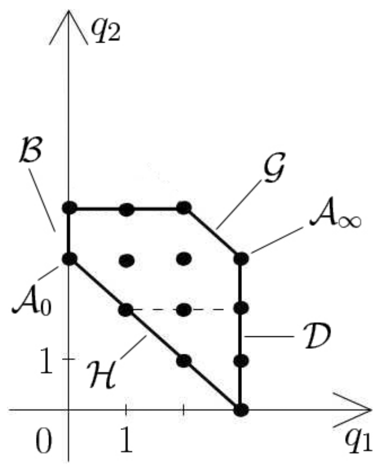

Рис. 2

$0 \neq a \neq c \neq 0$	$a = c \neq 0$	$a \neq 0 = c$	$a = 0 \neq c$	$a = c = 0$
$\mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_1^\tau$	$\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_4$	$\mathcal{I}_4$
$\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_6, \quad \mathcal{B}_6^\tau$	$\mathcal{B}_7, \quad \mathcal{B}_7^\tau$	$\mathcal{I}_2$
$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_5$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_8$

Табл. 1.