РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников и Т.В. Локоть

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА
ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ТЕЙЛОРА

Москва, 2007 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников и Т.В. Локоть. Асимптотическая формула для производных функции Тейлора. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

В работе выводится асимптотическая формула для производных функции Тейлора, связанной с дзета-функцией Римана, для которой справедлива гипотеза Римана. Доказательство основано на методе предыдущих работ первого автора, в которых аналогичный результат получен для дзета-функции Римана.

L.D. Pustyl′nikov and T.V. Lokot. An asymptotic formula for the derivatives of a function Taylor. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2007.

An asymptotic formula for the derivatives of a function Taylor associated with the Riemann zeta-function, for which the Riemann Hypothesis holds, is derived. The proof is based on the method of previous works of the first author in which the analogous result is obtained for the Riemann zeta-function.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00050 и 06-01-00085).

E-mail: lpustyln@spp.keldysh.ru
Сайт: www.keldysh.ru/электронная библиотека/
Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

1. Основной результат

Для любого вещественного числа $s \neq -1/2, 1/2, 3/2$ мы выводим асимптотическую формулу для производных функции П.Р. Тейлора

$$G(s) = \xi_1(s + \frac{1}{2}) - \xi_1(s - \frac{1}{2})$$

в точке $s = c$ при условии, что порядок производной стремится к бесконечности. Здесь $\xi_1(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция, а $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. В работе [1] доказано, что для функции $G(s)$ справедлива гипотеза Римана о нулях, т.е. все комплексные нули функции $G(s)$ расположены на критической прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. С другой стороны, в работах [2] и [3] для функции Римана

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\xi_1(s) \tag{1}$$

также выведена асимптотическая формула для производных в точке $s = 1/2$ при условии, что порядок производной стремится к бесконечности. Поэтому в связи с гипотезой Римана о нулях интересно сравнить эти два асимптотические выражения. С этой целью мы находим асимптотические выражения для производных функций

$$G_1(s) = \xi_1(s + \frac{1}{2}) \ \text{ и } \ G_2(s) = \xi_1(s - \frac{1}{2}) \tag{2}$$

при условии, что порядок производной стремится к бесконечности. В силу определения функции $G(s)$ и (2) сумма функций $G_1(s)$ и $G_2(s)$ равна функции $G(s)$. Поэтому асимптотика производных функции $G(s)$ получается в результате сложения асимптотических выражений для функций $G_1(s)$ и $G_2(s)$.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Производные функции $G(s)$ порядка r в любой точке $s = c \neq 1/2, 3/2, -1/2$ имеют следующий вид:*

$$\frac{d^rG}{ds^r}(c) = (-1)^r r! \left(\frac{2}{(c-1/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c+1/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c-3/2)^{r+1}} \right) +$$
$$+h_{r,1}(c) - h_{r,2}(c),$$

где $h_{r,1}(c)$ и $h_{r,2}(c)$ — функции, производные которых допускают асимптотические выражения (4) и (11), если $r \to \infty$.

Доказательство теоремы легко следует из определения функции $G(s)$, теоремы 1 и теоремы 2, в которых найдены асимптотические выражения для функций $G_1(s)$ и $G_2(s)$. Мы используем обозначение $a(r) \sim b(r)$, если $\lim\limits_{r\to\infty} a(r)/b(r) = 1$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на теореме 3 из секции 4.

Следствие 1. *Производные функции $G(s)$ порядка r в любой точке $s = c \neq 1/2, 3/2, -1/2$ допускают при $r \to \infty$ следующие асимптотические выражения*:

$$\frac{d^r G}{ds^r}(c) \sim (-1)^r r! \left(\frac{2}{(c-1/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c+1/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c-3/2)^{r+1}} \right).$$

2. Асимптотическая формула для производных функции $G_1(s)$

Следующая теорема 1 основана на теореме 3, доказанной в секции 4.

Теорема 1. *Производная порядка r функции $G_1(s)$ в любой точке $s = c \neq 1/2, 3/2, -1/2$ удовлетворяет при $r \to \infty$ следующему асимптотическому выражению*:

$$\frac{d^r G_1}{ds^r}(c) = (-1)^r r! \left(\frac{2}{(c-1/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c+1/2)^{r+1}} \right) + h_{r,1}(c), \tag{3}$$

в котором функция $h_{r,1}(c)$ при $r \to \infty$ удовлетворяет асимптотическому выражению:

$$h_{r,1}(c) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi})^2} + \dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)}} \left(\frac{\pi}{r}\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1/4-c/2} \times$$

$$\times \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + \beta_1\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\exp(\beta_1)\right) + \left(\frac{\pi}{r}\ln\frac{r}{\pi}\right)^{c/2-1/4} \times$$

$$\times (-1)^r \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + \tilde{\beta}_1\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\exp(\tilde{\beta}_1)\right), \tag{4}$$

где β_1 и $\tilde{\beta}_1$ — функции, которые стремятся к нулю при $r \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим известное соотношение

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + f(s) + g(s), \tag{5}$$

где $s \neq 0, 1$, и

$$f(s) = \int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\,dx, \quad g(s) = \int_1^\infty x^{-s/2-1/2}\omega(x)\,dx, \tag{6}$$

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

и выполняется равенство

$$f(s) = g(1-s). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что для любого четного натурального числа r справедливо равенство

$$\begin{gathered}\frac{d^r f}{ds^r}\left(c+\frac{1}{2}\right)+\frac{d^r g}{ds^r}\left(c+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^r\int\limits_1^\infty(\ln^r x)x^{c/2-3/4}\omega(x)\,dx+\\+\left(-\frac{1}{2}\right)^r\int\limits_1^\infty(\ln^r x)x^{-c/2-3/4}\omega(x)\,dx.\end{gathered} \tag{8}$$

Кроме того, легко видеть, что для каждого натурального числа r справедливо равенство

$$\left.\frac{d^r}{ds^r}\frac{1}{s(s-1)}\right|_{s=c+1/2} = (-1)^r r!\left(\frac{2}{(c-1/2)^{r+1}}-\frac{1}{(c+1/2)^{r+1}}\right). \tag{9}$$

Теперь теорема 1 легко следует из определения функции $G_1(s)$, неравенств (2), (8), (9) и следствия 2 теоремы 3, доказанного ниже. Теорема 1 доказана.

3. Асимптотическая формула для производных функции $G_2(s)$

Теорема 2. *Производная порядка r функции $G_2(s)$ в любой точке $s = c$ имеет следующий вид*:

$$\frac{d^r G_2}{ds^r}(c) = (-1)^r r!\left(\frac{1}{(c-3/2)^{r+1}}-\frac{1}{(c-1/2)^{r+1}}\right)+h_{r,2}(c), \tag{10}$$

где $h_{r,2}(c)$ — функции, имеющие следующие асимптотические выражения при $r\to\infty$:

$$\begin{gathered}h_{r,2}(c)\sim\left(\frac{1}{2}\right)^r\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi})^2}+\dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)^2}}\left(\frac{\pi}{r}\ln\frac{r}{\pi}\right)^{1/4-c/2}\times\\ \times\left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+\beta_2\right)^r\exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\exp(\beta_2)\right)+\left(\frac{\pi}{r}\ln\frac{r}{\pi}\right)^{c/2-3/4}\times\\ \times(-1)^r\left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+\tilde{\beta}_2\right)^r\exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\exp(\tilde{\beta}_2)\right),\end{gathered} \tag{11}$$

где β_2 и $\tilde{\beta}_2$ — функции, которые стремятся к нулю при $r \to \infty$.

Доказательство. В силу (5)–(7) имеем:

$$\frac{d^r}{ds^r} G_2(s)\Big|_{s=c} = \frac{d^r}{ds^r}\left(\frac{1}{s(s-1)} + f(s) + f(1-s)\right)\Big|_{s=c-1/2}. \tag{12}$$

Далее имеем:

$$\frac{d^r}{ds^r}\frac{1}{s(s-1)}\Big|_{s=c-1/2} = (-1)^r r!\left(\frac{1}{(c-3/2)^{r+1}} - \frac{1}{(c-1/2)^{r+1}}\right). \tag{13}$$

Теперь теорема 2 следует из (12), (6), (13) и следствия 2 теоремы 3. Теорема 2 доказана.

4. Формулировка и доказательство теоремы 3

1^0. Для любого натурального числа $r \geq 2$ и любого вещественного числа α полагаем

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} = \int_1^\infty (\ln^r x) x^\alpha \omega(x)\, dx, \tag{14}$$

где

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}.$$

Теорема 3. *Следующее асимптотическое равенство справедливо при $r \to \infty$:*

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} \sim \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + \beta\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^\beta\right) \times$$

$$\times \left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi})^2} + \dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)}}, \tag{15}$$

где $\beta = \beta(r)$ — функция, для которой выполняется равенство $\lim\limits_{r\to\infty}\beta(r) = 0$.

Доказательство теоремы 3 приведено ниже в пунктах 2–6.

2^0. Полагаем $u = \ln x$. Тогда имеем:

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} = \int_0^\infty u^r e^{u(\alpha+1)} \omega(e^u)\, du = \int_0^\infty e^{F(u)}\, du, \tag{16}$$

где

$$F(u) = r\ln u + u(\alpha+1) - \pi e^u + \ln(1+\psi(e^u)), \quad \psi(x) = \sum_{n=2}^\infty e^{-(n^2-1)\pi x}. \tag{17}$$

Дифференцирование функции $F(u)$ приводит к равенствам

$$\frac{dF}{du} = \frac{r}{\alpha} + \alpha + 1 - \pi e^u + \frac{d\ln(1+\psi(e^u))}{du}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2F}{du^2} = -\frac{r}{u^2} - \pi e^u + \frac{d^2\ln(1+\psi(e^u))}{du^2}. \tag{19}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{du} = \frac{r}{\alpha} + \alpha + 1 - \pi e^u + \frac{d\ln(1+\psi(e^u))}{du} = 0 \tag{20}$$

в области $u \geq 0$. Так как

$$\lim_{u\to 0}\frac{dF}{du}(u) = +\infty, \quad \lim_{u\to\infty}\frac{dF}{du}(u) = -\infty$$

и неравенство $(d^2F/du^2) < 0$ справедливо для $u \geq 0$ и большого r, то при большом r уравнение (20) имеет в области $u > 0$ единственное решение.

Рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{r}{\alpha} - \pi e^u = 0. \tag{21}$$

Согласно лемме 1.2 из [3] решение $u = \hat{u}$ уравнения (21) имеет вид

$$\hat{u} = \ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_1(r), \tag{22}$$

и при этом $\lim\limits_{r\to\infty} c_1(r) = 0$.

Поэтому в силу (22), (20) и (19) решение $u = \tilde{u}$ уравнения (20) имеет вид

$$\tilde{u} = \ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2(r), \tag{23}$$

где $c_2 = c_2(r)$ — функция, такая что

$$\lim_{r\to\infty} c_2(r) = 0. \tag{24}$$

Пусть ε_r — константа, такая что $0 < \varepsilon_r < \tilde{u}$. Представим интеграл $\mathrm{I}_{r,\alpha}$ в виде

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} = \int\limits_0^{\tilde{u}-\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du + \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du + \int\limits_{\tilde{u}+\varepsilon_r}^{\infty} e^{F(u)}\,du. \tag{25}$$

Подставляя (23) в первое уравнение в (17), получаем:

$$\begin{aligned} e^{F(\tilde{u})} = {} & \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right) \times \\ & \times \left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right)^{\alpha+1} \left(1 + \psi\left(\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

В силу (24) при $r \to \infty$

$$\left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right)^{\alpha+1} \sim \left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1}, \tag{27}$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\psi\left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right) = 0.$$

Поэтому в силу (24) при $r \to \infty$ получаем асимптотическое равенство

$$e^{F(\tilde{u})} \sim \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right)\left(\frac{r}{\pi}\left(\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1}. \tag{28}$$

Подставляя (23) в (19), имеем:

$$\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u}) = -\frac{r}{\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)^2} - \pi\exp\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right) +$$

$$+\frac{d^2\ln\left(1 + \psi\left(\exp\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)\right)\right)}{du^2} = -\frac{r}{\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)} -$$

$$-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2} + \mathrm{o}(1) < -c_3 r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}, \tag{29}$$

где $c_3 > 0$, не зависит от r и $\lim\limits_{r\to\infty}\mathrm{o}(1) = 0$.

Оценим $\left|(d^3F(u)/du^3)\right|$ при $\tilde{u} - \varepsilon_r \le u \le \tilde{u} + \varepsilon_r$. Дифференцируя (19), получаем:

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} = \frac{2r}{u^3} - \pi e^u + \frac{d^3\ln(1+\psi(e^u))}{du^3}.$$

Поэтому в силу (23)

$$\sup_{\tilde{u} - \varepsilon_r \le u \le \tilde{u} + \varepsilon_r}\left|\frac{d^3F}{du^3}(u)\right| <$$
$$< c_4\left(\frac{r}{\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2 - \varepsilon_r\right)^3} + r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{\varepsilon_r}\right), \tag{30}$$

где $c_4 > 0$ — константа, не зависящая от r. В области $\tilde{u} - \varepsilon_r \le u \le \tilde{u} + \varepsilon_r$ имеем:

$$F(u) = \tilde{F}(u) + \hat{F}(u), \tag{31}$$

где

$$\tilde{F}(u) = F(\tilde{u}) + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2, \quad \hat{F}(u) = \frac{1}{6}\frac{d^3F}{du^3}(\zeta_1)(u-\tilde{u})^3, \tag{32}$$
$$\tilde{u}-\varepsilon_r \le \zeta_1 \le \tilde{u}+\varepsilon_r.$$

Применяя лемму 2.1 из работы [3] и равенство (29), получаем:

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left|\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}\right|}}(1+R_{\varepsilon_r}),$$

где

$$|R_{\varepsilon_r}| < \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_r^2\right)}{1+\sqrt{1-\exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_r^2\right)}}.$$

Поэтому в силу (29)

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\,(A+\mathrm{o}(1))}}(1+R_{\varepsilon_r}), \tag{33}$$

где

$$A = \frac{1}{2\left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)} + \frac{\exp\ c_2}{2\ln\frac{r}{\pi}}$$

и

$$|R_{\varepsilon_r}| < \frac{\exp\left(-r\varepsilon_r^2 A + \varepsilon_r \mathrm{o}(1)\right)}{1+\sqrt{1-\exp\left(-r\varepsilon_r^2 A+\varepsilon_r \mathrm{o}(1)\right)}}. \tag{34}$$

В силу (31) имеем:

$$\exp(F(u)) = \exp(\tilde{F}(u)+\hat{F}(u)) = \exp(\tilde{F}(u) + \exp(\tilde{F}(u)(\exp(\hat{F}(u)) - 1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du = \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{\tilde{F}(u)}\,du + R'_{\varepsilon_r}, \tag{35}$$

где в силу (32)

$$\begin{aligned} \left|R'_{\varepsilon_r}\right| < e^{F(\tilde{u})} &\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_r \le u \le \tilde{u}+\varepsilon_r} \left|\exp(\hat{F}(u)-1)\right| \times \\ &\times \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du. \end{aligned} \tag{36}$$

Применяя равенство для $\hat{F}(u)$ в (32) и неравенство (30), и предполагая, что велечина $\varepsilon_r^3 r$ не превосходит константу, не зависящую от r, выводим неравенство

$$\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_r \le u \le \tilde{u}+\varepsilon_r} \left|\exp(\hat{F}(u)-1)\right| < c_5\, \varepsilon_r^3 \frac{r}{\ln \dfrac{r}{\pi}},$$

где c_5 — константа, не зависящая от r. Если равенство

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon_r^3\, r = 0 \tag{37}$$

выполнено, то согласно предыдущему неравенству

$$\left|R'_{\varepsilon_r}\right| = e^{\tilde{F}(u)} \left(\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\, du \right) \cdot \mathrm{o}(1),$$

и в силу (35) при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\, du \sim e^{F(\tilde{u})} \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\, du. \tag{38}$$

Применяя (38), (28), (33) и (34), и предполагая справедливость (37) и равенства

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon_r^2\, r = \infty, \tag{39}$$

получаем при $r \to \infty$ асимптотическое равенство

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\, du \sim \left(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi} + c_2\right)^r \exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1} e^{c_2}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi} - \ln\ln\frac{r}{\pi})^2} + \dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)}}, \tag{40}$$

где $c_2 = c_2(r)$ — функция, которая удовлетворяет неравенству (34).

3^0. Введем величины $u_+ = \tilde{u} + \varepsilon_r$, $u_- = \tilde{u} - \varepsilon_r$. Так как $u = \tilde{u}$ — решение уравнения (20), то имеем:

$$F(u_+) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_r^2}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_+), \quad F(u_-) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_r^2}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_-), \tag{41}$$

где ζ_+ и ζ_- — величины, удовлетворяющие неравенствам

$$\tilde{u} \le \zeta_+ \le \tilde{u} + \varepsilon_r, \quad \tilde{u} - \varepsilon_r \le \zeta_- \le \tilde{u}. \tag{42}$$

Применяя (19), (23) и (42), получаем:

$$\max\left(\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_-),\ \frac{d^2F}{du^2}(\zeta_+)\right) < -\frac{r}{\left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+c_2+\varepsilon_r\right)^2}- \\ -\frac{r}{e^{c_2+\varepsilon_r}\ln\frac{r}{\pi}}+c_6, \tag{43}$$

где c_6 — константа, не зависящая от r. Полагаем

$$\varepsilon_r = r^{-(1/2-\delta)},\ \ 0<\delta<\frac{1}{6}. \tag{44}$$

Тогда справедливы равенства (37) и (39), и в силу (41) и (43) выполняются неравенства

$$\begin{gathered} F(\tilde u)-F(u_+) > c_7 r^\delta,\ \ F(\tilde u)-F(u_-) > c_7 r^\delta, \\ e^{F(u_+)} = e^{F(\tilde u)-(F(\tilde u)-F(u_+))} < \frac{e^{F(\tilde u)}}{e^{c_7 r^\delta}}, \\ e^{F(u_-)} = e^{F(\tilde u)-(F(\tilde u)-F(u_-))} < \frac{e^{F(\tilde u)}}{e^{c_7 r^\delta}}, \end{gathered} \tag{45}$$

где $c_7>0$ — константа, не зависящая от r. В силу (19) при больших r в области $0\le u\le\tilde u$ выполняется неравенство $(d^2F/du^2)(u)<0$, $(dF/du)(\tilde u)=0$ и $F(u)$ монотонно возрастающая функция от u. Поэтому (45) и (23) приводят к неравенству

$$\int\limits_0^{\tilde u-\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du < c_8\tilde u e^{F(u_-)} < c_8\frac{\left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+c_2\right)e^{F(\tilde u)}}{e^{c_7 r^\delta}}, \tag{46}$$

где $c_8>0$ — константа, не зависящая от r.

4^0. Предположим, что положительное число $\tilde{\tilde x}_r$ удовлетворяет уравнению

$$\ln^r \tilde{\tilde x}_r = \exp(\pi\delta\tilde{\tilde x}_r), \tag{47}$$

где δ — параметр, введенный в (44). Тогда справедливы равенства

$$\frac{r}{\pi\delta} = \frac{\tilde{\tilde x}_r}{\ln\ln\,\tilde{\tilde x}_r}, \tag{48}$$

$$\mu \overset{\mathrm{def}}{=} \ln\frac{r}{\pi\delta} = \ln\,\tilde{\tilde x}_r - \ln\ln\ln\,\tilde{\tilde x}_r = \tilde{\tilde y}_r - \ln\ln\,\tilde{\tilde y}_r \overset{\mathrm{def}}{=} f(\tilde{\tilde y}_r),$$

где

$$\tilde{\tilde y}_r = \ln\,\tilde{\tilde x}_r. \tag{49}$$

Предположим, что $\hat{y}_r$ удовлетворяет уравнению

$$\mu = \hat{y}_r - \ln\, \hat{y}_r. \tag{50}$$

В силу (48) и (50) имеем: $f(\hat{y}_r) > \mu$, $f(\mu) < \mu$, и так как $f(y)$ — монотонно возрастающая функция от y, то соотношение (48) приводит к неравенствам

$$\mu < \tilde{\tilde{y}}_r < \hat{y}_r. \tag{51}$$

Согласно (48) и лемме 1.1 из [3], решение $\hat{y}_r$ уравнения (50) имеет вид

$$\hat{y}_r = \ln\frac{r}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{r}{\pi\delta} + c_9,$$

и функция $c_9(r)$ удовлетворяет равенствам $\lim\limits_{r\to\infty} c_9(r) = 0$. Следовательно, в силу (51) и (49) имеем:

$$\ln\frac{r}{\pi\delta} < \ln\, \tilde{\tilde{x}}_r < \ln\frac{r}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{r}{\pi\delta} + c_9. \tag{52}$$

Применение (45) и(52) дает

$$\left|\int\limits_{u_+}^{\ln\, \tilde{\tilde{x}}_r} e^{F(u)}\, du\right| < e^{F(u_+)}|\ln\, \tilde{\tilde{x}}_r - u_+| < \frac{\left(\ln\frac{r}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{r}{\pi\delta} + c_9 - u_+\right) e^{F(u_+)}}{e^{c_7 r^\delta}}. \tag{53}$$

5^0. Оценим интеграл

$$\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_r}^{\infty} (\ln^r\, x) x^\alpha \omega(x)\, dx, \tag{54}$$

где $\tilde{\tilde{x}}_r$ определяется в равенстве (47), и $\omega(x)$ — функция, которая определяется в начале этой секции. Согласно (47) и (52) имеем:

$$\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_r < \int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_r}^{\infty} x^\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2 - \delta)}\right) dx < \int\limits_{r/(\pi\delta)}^{\infty} x^\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2 - \delta)}\right) dx. \tag{55}$$

6^0. Согласно определению интеграла $\mathrm{I}_{r,\alpha}$ выполняется следующее неравенство:

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} = \int\limits_0^{\tilde{u} - \varepsilon_r} e^{F(u)}\, du + \int\limits_{\tilde{u} - \varepsilon_r}^{\tilde{u} + \varepsilon_r} e^{F(u)}\, du + \int\limits_{\tilde{u} + \varepsilon_r}^{\ln\, \tilde{\tilde{x}}_r} e^{F(u)}\, du + \int\limits_{\ln\, \tilde{\tilde{x}}_r}^{\infty} e^{F(u)}\, du, \tag{56}$$

где $\tilde{u}$, ε_r и $\tilde{\tilde{x}}_r$ — величины, введенные выше. Предполагая, что выполняется (44) и (53)–(55), в силу (46) и (53)–(55) получается неравенство

$$\left| \int\limits_0^{\tilde{u}-\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du + \int\limits_{\tilde{u}+\varepsilon_r}^{\infty} e^{F(u)}\,du \right| < c_{10}\frac{\left(\ln\dfrac{r}{\pi}-\ln\ln\dfrac{r}{\pi}+c_{11}\right)e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 r^{\delta}}} + \\ + \int\limits_{r/(\pi\delta)}^{\infty} x^{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2-\delta)}\right)dx \tag{57}$$

для всех достаточно больших r, где c_{10} и c_{11} — константы, не зависящие от r. Так как $r\to\infty$, то первый член на правой стороне соотношения (57) в силу (38), (33) и (34) имеет вид

$$\mathrm{o}\left(\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du\right),$$

а второй член есть o(1). Поэтому выполняется асимптотическое равенство

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} \sim \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)}\,du \ \text{ при } \ r\to\infty,$$

и в силу (40) справедливо асимптотическое равенство

$$\mathrm{I}_{r,\alpha} \sim \left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+c_2\right)^{r}\exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}e^{c_2}\right)\times \\ \times\left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi})^2}+\dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)}}, \tag{58}$$

где функция $c_2 = c_2(r)$ удовлетворяет (24). Таким образом, теорема 3 с $\beta(r) = c_2(r)$ доказана.

Следствие 2. *Мы имеем следующее асимптотическое выражение при* $r\to\infty$:

$$\left.\frac{d^r f}{ds^r}\right|_{s=b} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{r}\left(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi}+\beta\right)^{r}\exp\left(-r\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}e^{\beta}\right)\times \\ \times\left(\frac{r}{\pi}\left(\ln\frac{r}{\pi}\right)^{-1}\right)^{\alpha+1}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\left(\dfrac{1}{2(\ln\frac{r}{\pi}-\ln\ln\frac{r}{\pi})^2}+\dfrac{1}{2\ln\frac{r}{\pi}}\right)}} \tag{59}$$

с функцией $f(s)$, определенной в (6) и функцией $\beta = \beta(r)$, для которой $\lim_{r\to\infty} \beta(r) = 0$, $\alpha = b/2 - 3/4$.

5. Дискуссия

В работе [3] получена следующая асимптотическая формула для четных производных функции римана $\xi = \xi(s+1/2)$ в точке $s = 0$:

$$\frac{d^r}{ds^r}\xi(s+\frac{1}{2})\Big|_{s=0} \sim 2^{-(r-2)}\left(\ln\frac{r-2}{\pi} - \ln\ln\frac{r-2}{\pi} + \gamma\right)^{r-2} \times$$
$$\times \exp\left(-(r-2)\left(\ln\frac{r-2}{\pi}\right)^{-1} e^{\gamma}\right)(r-2)^{1/4} r(r-1)\times$$
$$\times\left(\ln\frac{r-2}{\pi}\right)^{-1/4} \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{1}{\left(\ln\frac{r-2}{\pi} - \ln\ln\frac{r-2}{\pi}\right)^2} + \frac{1}{\ln\frac{r-2}{\pi}}\right)}}, \qquad (60)$$

где $\gamma = \gamma(r)$ — функция, удовлетворяющая условию $\lim_{r\to\infty} \gamma(r) = 0$.

Сравним формулу (60) с формулой для четных производных функции Тейлора $G(s)$, для которой справедлива гипотеза Римана. В этом случае мы видим, что абсолютная величина четной производной функции $G(s)$ в точке $s = 0$ при $r \to \infty$ растет быстрее, чем соответствующие производные функции Римана $\xi(s+1/2$ в точке $s = 0$.

Список литературы

[1] P.R. Taylor, On the Riemann Zeta-Function // In Quarterly Journal Math., v. 16, (1945), 1–21.

[2] L.D. Pustyl'nikov, On the asymptotic behaviour of the Taylor series coefficient of $\xi(s)$ // Russian Math. Surveys, v. 55, (2000), N 2, p. 349–350.

[3] L.D. Pustyl'nikov, An asymptotic formula for the Taylor coefficients of the function $\xi(s)$ // Izvestiya: Mathematics **65**:1 (2001), p. 85–98.