РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников

АСИМПТОТИКА ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ $\xi(s, \chi)$

Москва, 2007 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников. Асимптотика производных функции $\xi(s,\chi)$. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

В работе выводится асимптотическая формула для производных функции Дирихле $\xi(s,\chi)$.

L.D. Pustyl′nikov. An asymptotic formula for the derivatives of the function $\xi(s,\chi)$. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2007.

An asymptotic formula for the derivatives of the Dirichlet function $\xi(s,\chi)$ is derived.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00050 и 06-01-00085).

E-mail: lpustyln@spp.keldysh.ru
Сайт: www.keldysh.ru/электронная библиотека/
Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

В этой работе мы находим асимптотическую формулу для значений четных производных функции

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\dfrac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi),$$

где $\chi=\chi(n)$ вещественный примитивный характер по модулю k,

$$\delta=\begin{cases}0, \text{ если } \chi(-1)=+1,\\ 1, \text{ если } \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

$L(s,\chi)$ — L-функция Дирихле, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. При этом будем предполагать, что

$$L(1/2,\chi)\neq 0.$$

Известно, что при всех s справедливо равенство $\xi(s,\chi)=\xi(1-s,\chi)$, и поэтому все нечетные производные функции $\xi(s,\chi)$ в точке $s=1/2$ равны нулю. Нахождение явного асимптотического выражения для значений четных производных функции $\xi(s,\chi)$, когда порядок производной стремится к бесконечности представляет интерес в связи с расширенной гипотезой Римана.

Теорема. *Предположим, что $\chi(n)$ — четный вещественный примитивный характер (т.е. $\chi(-1)=1$,) а m — четное натуральное число. Тогда при $m\to\infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$\frac{d^m\xi}{ds^m}\left(\frac{1}{2},\chi\right)\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\ln\frac{mk}{\pi}-\ln\ln\frac{mk}{\pi}+\beta\right)^m\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{mk}{\ln\dfrac{mk}{\pi}}e^{\beta}\right)\left(\frac{mk}{\pi\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)^{1/4}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m\left(\dfrac{1}{2(\ln\dfrac{mk}{\pi}-\ln\ln\dfrac{mk}{\pi})^2}+\dfrac{1}{2\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)}},$$

где $\beta=\beta(m)$ — такая функция, что $\lim\limits_{m\to\infty}\beta(m)=0$.

Следствие. *При выполнении условий теремы 1 существует такое $m_0=m_0(k)$, зависящее от k, что при $m\geq m_0$ справедливо неравенство*

$$\frac{d^m\xi}{ds^m}\left(\frac{1}{2},\chi\right)>0.$$

Доказательство теоремы проведено в последующих пяти пунктах.

1^0. Пусть $k > 15$, χ — четный примитивный характер, $\pi x^*/k \geq \pi/15$, $x^* \geq k/15$ и

$$\frac{d^m\xi}{ds^m}\left(\frac{1}{2},\chi\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \int\limits_1^\infty (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x,\chi)\, dx, \tag{0}$$

где $\theta(x,\chi) = 2e^{-\pi x/k} + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\chi(n)e^{-n^2\pi x/k}$, $k \geq 2$. Пусть $x^* = k/15$,

$$I'_m = \int\limits_{x^*}^\infty (\ln^m x) x^{-3/4}\theta(x,\chi)\, dx. \tag{1}$$

Полагаем $x = e^u$, $u = \ln x$. Тогда $du = dx/e^u$. Так как при $x \geq x^*$ выполнено неравенство $\theta(x,\chi) > 0$, то I'_m можно преобразовать следующим образом:

$$I'_m = \int\limits_{u^*}^\infty u^m e^{u/4}\theta(e^u,\chi)\, du = \int\limits_{u^*}^\infty e^{F(u)}\, du, \tag{2}$$

где $u^* = \ln x^*$,

$$F(u) = m\ln u + \frac{u}{4} + \left(\ln 2 - \frac{\pi}{k}e^u\right) + \ln(1+\psi(e^u)), \tag{3}$$

$$\psi(e^u) = \sum_{n=2}^{\infty}\chi(n)e^{-(n^2-1)\pi e^u/k}. \tag{4}$$

Дифференцируя (4), получаем равенства

$$\frac{dF}{du} = \frac{m}{u} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{k}e^u + \frac{d\ln(1+\psi(e^u))}{du}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2F}{du^2} = -\frac{m}{u^2} - \frac{\pi}{k}e^u + \frac{d^2\ln(1+\psi(e^u))}{du^2}. \tag{6}$$

При $u \geq u^*$ рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{du}(u) = 0. \tag{7}$$

Так как $x \geq 1$, то в силу (4)–(6) существует такое $m^* = m^*(k) \geq 2$, что, если $m \geq m^*$, то при $u \geq u^*$

$$\frac{d^2F}{du^2}(u) < 0. \tag{8}$$

Поэтому, если в области $u \geq u^*$ решение уравнения (7) существует, то оно — единственное. Рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{m}{u} - \frac{\pi}{k}e^u = 0. \tag{9}$$

В силу леммы 1.2 из работы [2] его решение $u = \hat{u}$ имеет вид

$$\hat{u} = \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_1, \tag{10}$$

где $c_1 = c_1(m)$ — функция, удовлетворяющая равенству $\lim\limits_{m \to \infty} c_1(m) = 0$. Поэтому в силу (10), (7) и (5) решение $u = \tilde{u}$ уравнения (7) имеет вид

$$\tilde{u} = \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2, \tag{11}$$

где $c_2 = c_2(m)$ — функция, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{m \to \infty} c_2(m) = 0. \tag{12}$$

Поэтому $\lim\limits_{m \to \infty} \tilde{u}(m) = \infty$. Выберем число m^* — достаточно большим, чтобы при $m \geq m^*$ выполнялось неравенство $\tilde{u}(m) > u^* = \ln(k/15)$. Пусть ε_m — константа, удовлетворяющая неравенству

$$0 < \varepsilon_m < \tilde{u} - u^* = \tilde{u} - \ln \frac{k}{15}. \tag{13}$$

Подставляя (11) в (4), получаем:

$$\begin{gathered} e^{F(\tilde{u})} = 2 \left(\ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^m \exp\left\{ -\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right\} \times \\ \times \left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right)^{1/4} \left(1 + \psi \left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right) \right). \end{gathered} \tag{14}$$

Далее, в силу (12) при $m \to \infty$ имеем асимптотические равенства

$$\left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} \right)^{1/4},$$

$$\ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \sim \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi},$$

и равенство

$$\lim_{m \to \infty} \psi \left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right) = 0.$$

Поэтому в силу (14) при $m \to \infty$ получаем асимптотическое равенство

$$e^{F(\tilde{u})} \sim 2\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right)^m \exp\left\{-\frac{mk}{\ln\frac{mk}{\pi}}e^{c_2}\right\}\left(\frac{mk}{\pi\ln\frac{mk}{\pi}}\right)^{1/4}. \quad (15)$$

Подставляя (11) в (6), получаем:

$$\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u}) = -\frac{m}{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right)^2} - \frac{\pi}{k}\exp\left\{\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right\} +$$
$$+\frac{d^2\ln\left(1+\psi\left(1+\exp\left\{\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right\}\right)\right)}{du^2} = \quad (16)$$
$$= -\frac{m}{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right)^2} - \frac{m}{\ln\frac{mk}{\pi}}e^{c_2} + \mathrm{o}(m) < -c_3\frac{m}{\ln\frac{mk}{\pi}},$$

где при большом значении m константа $c_3 > 0$ не зависит от m и $\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{o}(m)/m = 0$.

Оценим величину $|d^3F(u)/du^3|$ в области $\tilde{u} - \varepsilon_m \le u \le \tilde{u} + \varepsilon_m$, где ε_m — константа, удовлетворяющая неравенствам (13). Дифференцируя (6), имеем:

$$\frac{d^3F}{du^3}(u) = \frac{2m}{u^3} - \frac{\pi}{k}e^u + \frac{d^3\ln(1+\psi(e^u))}{du^3}.$$

Поэтому в силу (11)

$$\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_m\le u\le\tilde{u}+\varepsilon_m}\left|\frac{d^3F}{du^3}(u)\right| < c_4\left(\frac{m}{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2 - \varepsilon_m\right)^3} + \frac{mke^{\varepsilon_m}}{\ln\frac{mk}{\pi}}\right), \quad (17)$$

где $c_4 > 0$ — константа, не зависящая от m. В области $\tilde{u}-\varepsilon_m \le u \le \tilde{u}+\varepsilon_m$ имеем равенства

$$F(u) = \tilde{F}(u) + \hat{F}(u), \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tilde{F}(u) = F(\tilde{u}) + (1/2)(d^2F/du^2)(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2, \\ \hat{F}(u) = (1/6)(d^3F/du^3)(\beta)(u-\tilde{u})^3, \end{cases} \quad (19)$$

где $\tilde{u} - \varepsilon_m \le \beta \le \tilde{u} + \varepsilon_m$. Применяя лемму 2.1 из работы [2], имеем:

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left|\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})\right|}}(1+R_{\varepsilon_m}),$$

где

$$|R_{\varepsilon_m}| < \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_m^2\right)}{1+\sqrt{1-\exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_m^2\right)}}.$$

Поэтому в силу (16)

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m\left(\frac{1}{2\left(\ln\frac{mk}{\pi}-\ln\ln\frac{mk}{\pi}+c_2\right)^2}+\frac{e^{c_2}}{2\ln\frac{mk}{\pi}}+\frac{\mathrm{o}(m)}{m}\right)}}(1+R_{\varepsilon_m}), \tag{20}$$

где

$$|R_{\varepsilon_m}| < \frac{\exp\left(-\frac{m\varepsilon_m^2}{2\left(\ln\frac{mk}{\pi}-\ln\ln\frac{mk}{\pi}+c_2\right)}-\frac{me^{c_2}\varepsilon_m^2}{2\ln\frac{mk}{\pi}}+\varepsilon_m^2\mathrm{o}(m)\right)}{1+\sqrt{1-\exp\left(-\frac{m\varepsilon_m^2}{2\left(\ln\frac{mk}{\pi}-\ln\ln\frac{mk}{\pi}+c_2\right)^2}-\frac{me^{c_2}\varepsilon_m^2}{2\ln\frac{mk}{\pi}}+\varepsilon_m^2\mathrm{o}(m)\right)}}. \tag{21}$$

В силу (18) получаем:

$$e^{F(u)} = e^{\tilde{F}(u)+\hat{F}(u)} = e^{\tilde{F}(u)} + e^{\tilde{F}(u)}\left(e^{\hat{F}(u)}-1\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\,du = \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{\tilde{F}(u)}\,du + R'_{\varepsilon_m}, \tag{22}$$

где согласно (19)

$$|R'_{\varepsilon_m}| < e^{F(\tilde{u})} \sup_{\tilde{u}-\varepsilon_m\le u\le\tilde{u}+\varepsilon_m} \left|e^{\hat{F}(u)}-1\right| \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\,du. \tag{23}$$

Применяя равенство для $\hat{F}(u)$ из (19) и оценку (17) и предполагая, что $\varepsilon_m^3 m$ не превосходит константы, не зависящей от m, получаем неравенство

$$\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_m \le u \le \tilde{u}+\varepsilon_m} \left| e^{\hat{F}(u)} - 1 \right| < c_5\, \varepsilon_m^3 \frac{mk}{\ln \dfrac{mk}{\pi}},$$

в котором c_5 — константа, не зависящая от m.

Если же справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^3 m = 0, \tag{24}$$

то из предыдущего равенства и (23) следует, что

$$|R'_{\varepsilon_m}| < e^{F(\tilde{u})} \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\, du \cdot \mathrm{o}'(m),$$

где $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{o}'(m) = 0$. Поэтому в силу (22) при $m \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\, du \sim e^{F(\tilde{u})} \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\tilde{u})(u-\tilde{u})^2\right)\, du. \tag{25}$$

Применяя теперь (25), (15), (20), (21) и предполагая, что выполнено равенство (24) и равенство

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^2 m = \infty, \tag{26}$$

получаем при $m \to \infty$ следующее асимптотическое равенство:

$$\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\, du \sim 2\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right)^m \exp\left\{-\frac{mk}{\ln\dfrac{mk}{\pi}} e^{c_2}\right\} \left(\frac{mk}{\pi\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)^{1/4} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m\left(\dfrac{1}{2(\ln\dfrac{mk}{\pi} - \ln\ln\dfrac{mk}{\pi})^2} + \dfrac{1}{2\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)}}, \tag{27}$$

где $c_2 = c_2(m)$ — функция, удовлетворяющая равенству (12).

2^0. Введем величины $u_+ = \tilde{u} + \varepsilon_m$, $u_- = \tilde{u} - \varepsilon_m$. Так как $u = \tilde{u}$ — решение уравнения (7), то

$$F(u_+) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_m^2}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_+), \quad F(u_-) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_m^2}{2}\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_-), \tag{28}$$

где ζ_+ и ζ_- — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\tilde{u} \le \zeta_+ \le \tilde{u} + \varepsilon_m, \quad \tilde{u} - \varepsilon_m \le \zeta_- \le \tilde{u}. \tag{29}$$

Применяя (6), (11) и (29), получаем:

$$\max\left(\frac{d^2F}{du^2}(\zeta_-), \frac{d^2F}{du^2}(\zeta_+),\right) < -\frac{m}{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2 + \varepsilon_m\right)^2} - \\ -\frac{mke^{c_2} - \varepsilon_m}{\ln\frac{mk}{\pi}} + c_6, \tag{30}$$

где c_6 — константа, не зависящая от m. Пусть теперь

$$\varepsilon_m = m^{-(1/2-\delta)}, \ \ 0 < \delta < \frac{1}{6}. \tag{31}$$

Тогда будут справедливы равенства (24) и (26), и в силу (28) и (30) выполняются неравенства

$$\begin{gathered} F(\tilde{u}) - F(u_+) > c_7 m^\delta, \ \ F(\tilde{u}) - F(u_-) > c_7 m^\delta, \\ e^{F(u_+)} = e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_+))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}, \\ e^{F(u_-)} = e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_-))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}, \end{gathered} \tag{32}$$

в которых $c_7 > 0$ — константа, не зависящая от m. Так как согласно (6) при больших m в области $u^* \leq u \leq \tilde{u}$ справедливо неравенство $(d^2F/du^2)(u) < 0$, $(dF/du)(\tilde{u}) = 0$ и функция $F(u)$ монотонно возрастает с ростом u, то в силу (32) и (11) справедливо неравенство

$$\int\limits_{u^*}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\,du < \tilde{u}e^{F(u_-)} < \frac{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}.$$

В силу равенства $x^* = k/15$ и определения функции $\theta(x, \chi)$ имеем:

$$\left|\int\limits_1^{x^*} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx\right| < c_8 k \ln^m \frac{k}{15},$$

где c_8 — константа, не зависящая от k и m. Поэтому из двух последних неравенств имеем:

$$\left|\int\limits_1^{x_-} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx\right| < c_8\left(\frac{\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}} + k\ln^m\frac{k}{15}\right), \tag{33}$$

где

$$x_- = e^{u_-} = e^{\tilde{u} - \varepsilon_m}. \tag{34}$$

3^0. Пусть $\tilde{\tilde{x}}_m$ — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\ln^{mk} \tilde{\tilde{x}}_m = e^{\pi\delta\tilde{\tilde{x}}_m}, \tag{35}$$

где δ — число, введенное в (31). Тогда имеем равенства

$$\frac{mk}{\pi\delta} = \frac{\tilde{\tilde{x}}_m}{\ln\ln\tilde{\tilde{x}}_m}, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \ln\frac{mk}{\pi\delta} = \ln\tilde{\tilde{x}}_m - \ln\ln\ln\tilde{\tilde{x}}_m = \tilde{\tilde{y}}_m - \ln\ln\tilde{\tilde{y}}_m \stackrel{\text{def}}{=} f(\tilde{\tilde{y}}_m), \tag{36}$$

где

$$\tilde{\tilde{y}}_m = \ln\tilde{\tilde{x}}_m. \tag{37}$$

Пусть $\hat{y}_m$ — решение уравнения

$$\mu = \hat{y}_m - \ln\hat{y}_m. \tag{38}$$

В силу (36) и (38) имеем неравенства $f(\hat{y}_m) > \mu$, $f(\mu) < \mu$, и так как функция $f(y)$ монотонно возрастает с ростом μ, то в силу (36) $\tilde{\tilde{y}}$ удовлетворяет неравенству

$$\mu < \tilde{\tilde{y}}_m < \hat{y}_m. \tag{39}$$

Согласно (36) и лемме 1.1 из [2] решение $\hat{y}_m$ уравнения (38) имеет вид

$$\hat{y}_m = \ln\frac{mk}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{mk}{\pi\delta} + c_9,$$

а функция $c_9 = c_9(m)$ удовлетворяет равенству $\lim\limits_{m\to\infty} c_9(m) = 0$, и поэтому в силу (39) и (37) справедливы соотношения

$$\ln\frac{mk}{\pi\delta} < \ln\tilde{\tilde{x}}_m < \ln\frac{mk}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{mk}{\pi\delta} + c_9. \tag{40}$$

Применяя теперь (32) и (40), получаем следующую оценку:

$$\left|\int\limits_{u_+}^{\ln\tilde{\tilde{x}}_m} e^{F(u)}\,du\right| < e^{F(u_+)}|\ln\tilde{\tilde{x}}_m - u_+| < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}\left(\ln\frac{mk}{\pi\delta} + \ln\ln\frac{mk}{\pi\delta} + c_9 - u_+\right). \tag{41}$$

4^0. Оценим интеграл

$$\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_m \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_m}^{\infty} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx,$$

где $\tilde{\tilde{x}}_m$ — величина, определення в (35). Согласно (35), (40) и определению функции$\theta(x,\chi)$ (см. начало п. 1^0) имеем:

$$|\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_m| < 2\int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_m}^{\infty} x^{-3/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\dfrac{\pi x}{k}(n^2-\delta)}\,dx < 2\int\limits_{mk/\pi\delta}^{\infty} x^{-3/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\dfrac{\pi x}{k}(n^2-\delta)}\,dx. \tag{42}$$

5^0. Пусть

$$\mathrm{I}_m = \int\limits_{1}^{\infty} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx. \tag{43}$$

Тогда в силу (1) имеем: Пусть

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_m = &\int\limits_{1}^{x_-} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx + \int\limits_{u_-}^{u_+} e^{F(u)}\,du + \\ &+ \int\limits_{u_+}^{\ln \tilde{\tilde{x}}_m} e^{F(u)}\,du + \int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_m}^{\infty} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx,\end{aligned} \tag{44}$$

где u_- и u_+ — величины, введенные в начале п. 2^0, величина $x_- = e^{u_-}$ введена в (34), а величина $\tilde{\tilde{x}}_m$ — решение уравнения (35).

Предполагая, что справедливы соотношения (31), в силу (33), (41) и (42) при больших m имеем:

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{0}^{x_-} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx + \int\limits_{u_+}^{\ln \tilde{\tilde{x}}_m} e^{F(u)}\,du + \int\limits_{\tilde{\tilde{x}}_m}^{\infty} (\ln^m x)\, x^{-3/4}\theta(x,\chi)\,dx,\right| \le \\ &\le c_{10}\frac{\left(\ln\dfrac{mk}{\pi\delta} + \ln\ln\dfrac{mk}{\pi\delta} + c_{11}\right)e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^{\delta}}} + 2\int\limits_{mk/\pi\delta}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\dfrac{\pi x}{k}(n^2-\delta)}\,dx.\end{aligned} \tag{45}$$

В силу (25), (20) и (21) первое и второе слагаемое в правой части неравенства (43) при $m\to\infty$ есть

$$\mathrm{o}\left(\int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\,du\right).$$

Поэтому в силу (44) и (45) при $m\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathrm{I}_m \sim \int\limits_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)}\,du,$$

а в силу (27) справедливо асимптотическое равенство

$$
\mathrm{I}_m \sim 2\left(\ln\frac{mk}{\pi} - \ln\ln\frac{mk}{\pi} + c_2\right)^m \exp\left\{-\frac{mk}{\ln\dfrac{mk}{\pi}} e^{c_2}\right\}\left(\frac{mk}{\pi\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)^{1/4} \times \tag{46}
$$

$$
\times\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m\left(\dfrac{1}{2(\ln\dfrac{mk}{\pi} - \ln\ln\dfrac{mk}{\pi})^2} + \dfrac{1}{2\ln\dfrac{mk}{\pi}}\right)}},
$$

где $c_2 = c_2(m)$ — функция, удовлетворяющая равенству (12). Так как в силу равенств (0) и (43)

$$
\frac{d\xi^m}{ds^m}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \mathrm{I}_m,
$$

то из (46) следует теорема, если положить $\beta(m) = c_2(m)$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] L.D. Pustyl'nikov, On the asymptotic behaviour of the Taylor series coefficient of $\xi(s)$ // Russian Math. Surveys, v. 55, (2000), N 2, p. 349–350.

[2] L.D. Pustyl'nikov, An asymptotic formula for the Taylor coefficients of the function $\xi(s)$ // Izvestiya: Mathematics **65**:1 (2001), p. 85–98.