

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, В.П. Варин

ПОРОЖДАЮЩЕЕ СЕМЕЙСТВО ε
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

Москва, 2007 г.

А.Д. Брюно, В.П. Варин. Порождающее семейство с периодических решений ограниченной задачи. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел при $\mu = 0$. В § 1 на плоскости симметрии вблизи тела P_2 вводится новая локальная система координат. В § 2 описывается порождающее семейство c , которое выходит из коллинеарной неподвижной точки L_1 . В § 3 с помощью новых локальных координат подробно описываются те части порождающего семейства i , которые расположены вблизи тела P_2 . Кроме того, там сопоставляются характеристики порождающих семейств c и i .

A.D. Bruno, V.P. Varin. The generating family c of periodic solutions of the restricted problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2007.

We consider the plane circular restricted three-body problem for $\mu = 0$. In § 1, in the plane of symmetry, we introduce a new local coordinate system near the primary P_2 . In § 2, we describe the generating family c , which is born at the collinear stationary point L_1 . In § 3, using the new local coordinate system, we give a detailed description of those parts of the generating family i which are near the primary P_2 . In addition, we give a comparison there of the characteristics of the generating families c and i .

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
Москва, 2007 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 05-01-00050, и программой Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики".

E-mails: bruno@keldysh.ru, varin@keldysh.ru

[http: www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru)

(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

В книге [1] изложены основы для изучения натуральных семейств периодических решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел при малых значениях μ . Такое изучение было начато в серии препринтов [2–8]. Здесь оно продолжено.

Используются понятия и обозначения из [1–8].

§ 1. Локальные координаты вблизи тела P_2

На плоскости симметрии $\Pi = \{x_2 = y_1 = 0\}$ имеются координаты x_1, y_2 . Чтобы изучить характеристики семейств периодических решений, проходящие вблизи тела $P_2 = \{x_1 = 0\}$, введем при $\mu \neq 0$ координаты

$$w_1 = \frac{\mu}{1 - x_1}, \quad y_2. \quad (1.1)$$

В этих координатах тело P_2 представлено вертикалью $w_1 = +\infty$, если $x_1 \leq 0$, и вертикалью $w_1 = -\infty$, если $x_1 \geq 0$. Следовательно, для разных знаков $1 - x_1$ получаются две различные плоскости с телом P_2 в той или иной бесконечности. Такое раздувание абсциссы объясняется тем, что очень близко к телу P_2 проходит много характеристик различных семейств, и для их различения простого увеличения масштаба недостаточно. Кроме того, согласно принципу Брука на характеристике одного семейства знак $1 - x_1$ не меняется. В координатах (1.1) взаимное расположение характеристик такое же, как и в координатах x_1, y_2 . Тело P_1 представлено вертикалью $w_1 = \mu$. В [2] формулой (2.3) были введены координаты $z_1 = (x_1 - 1)/\mu, y_2$. Но они оказались не удобными по указанной выше причине. Очевидно

$$w_1 = -1/z_1. \quad (1.2)$$

При $\mu = 0$ предельные положения характеристики вычисляются по скорости входа (v_1, v_2) решения-отрезка в тело P_2 . Пусть $V^2 = v_1^2 + v_2^2$. Согласно формуле (3.6) § 3 препринта [2] и формуле (1.2) имеем

$$w_1 = -\frac{V^2 v_1}{V - |v_1|}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{2|w_1| + 3 - C} \operatorname{sgn} v_2. \quad (1.3)$$

Напомним, что $V^2 = 3 - C$, где C — значение константы Якоби на решении-отрезке. При $\mu \rightarrow 0$ точка (w_1, y_2) из (1.1) стремится к предельному положению (w_1, y_2) из (1.3). Формулы (1.3) будем использовать для изображения характеристик порождающих семейств.

§ 2. Порождающее семейство c

Натуральное семейство c выходит из неподвижной коллинеарной точки L_1 и заканчивается как двукратное на семействе h .

При $\mu = 0$ порождающее семейство c состоит из двух частей: семейства c задачи Хилла и семейства c основной предельной задачи (т.е. ограниченной задачи с $\mu = 0$). Будем их обозначать c' и c'' соответственно.

Семейство c задачи Хилла вычислено в [9], а в [10] вычислены значения вертикального следа Tr_v на нем. В работах [11, 12, 7] показаны характеристики семейства c задачи Хилла в координатах

$$\xi_1 = (x_1 - 1)/\mu^{1/3}, \quad \eta_2 = (y_2 - 1)/\mu^{1/3}.$$

На этих рисунках видно, что из точки L_1 выходят две характеристики: одна идет вверх, а другая — вниз. Обе расположены слева от тела P_2 . Верхняя характеристика удаляется от тела P_2 , а нижняя приближается к нему.

Здесь опишем вторую часть c'' семейства c . Семейство c основной предельной задачи — это часть семейства B_1 решений-отрезков. Все оно состоит из однократных симметричных решений-отрезков, имеющих одну точку пересечения с плоскостью симметрии Π . Соответствующая характеристика семейства B_1 в координатах \tilde{a}, \tilde{e} показана на рис. 20 и 40 [1] и на рис. 4 в [7]. Семейству c'' соответствует та часть семейства B_1 , характеристика которого имеет $\tilde{a} \leq 1$. Она располагается при $\tilde{e} \in [1, 2]$ и $\tilde{e} \in [-2, -1]$. Обе характеристики семейства c'' в разных системах координат показаны на рис. 1–3. При этом в рис. 1, 2 на оси абсцисс использованы две переменные: слева $x_1 \in [0, 1]$ и затем $w_1 \in [0, 3]$. На рис. 3 вторая характеристика проходит вдоль тела P_2 . На ней $x_1 = 1$, y_2 вычисляется по (1.3), и затем \tilde{a}, \tilde{e} вычисляются по (2.2) из [2]:

$$\tilde{e} = x_1 y_2^2 (1 - \mu)^{-1} \text{sign } y_2, \quad \tilde{a} = x_1 / |2 - |\tilde{e}||.$$

На рис. 4 показана зависимость нормированного периода $\tilde{T} \stackrel{\text{def}}{=} T/(2\pi)$ от x_1 и w_1 . Плоский след $\text{Tr} = +\infty$ и вертикальный след $\text{Tr}_v = -\infty$ везде, кроме последней орбиты 3, где они оба перескакивают от своих бесконечностей к значению 2. Семейство c'' имеет три критические орбиты, представленные в таблице 1. Орбита 1 — начальная семейства c'' , состоит из одной точки $x_1 = 1, x_2 = 0$. На орбите 2 происходит столкновение с телом P_1 , а на орбите 3 семейство c заканчивается как локально двукратное на круговой орбите с $a = 1, \tilde{e} = -1$. На рис. 5 показана критическая орбита 2. Отметим, что на семействе c'' константа Якоби монотонно убывает от 3 до -1 .

§ 3. О порождающем семействе i

Порождающее семейство i описано в [5]. Здесь укажем его свойства в новых координатах (1.3). Для кусков $\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_9, \mathbf{K}_{15}\text{--}\mathbf{K}_{17}$ орбиты порожда-

ющих семейств начинаются и заканчиваются в теле P_2 . Для этих кусков на рис. 6 характеристики порождающего семейства показаны в координатах w_1, y_2 (см. формулу (1.3)). При этом для кусков $\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_9, \mathbf{K}_{15}$ и \mathbf{K}_{17} использованы семейства C_{12}, C_{23}, C_{34} соответственно, а для куска \mathbf{K}_{16} – семейство B_1 , ибо на этом куске орбиты суть $C_{12} + 2B_1$ и вблизи тела P_2 происходит симметричное соединение двух концов решений-отрезков из B_1 .

На рис. 6 указаны куски \mathbf{K}_l и номера критических точек. Отметим, что характеристика куска \mathbf{K}_{16} проходит по характеристике семейства c'' (т.е. B_1). При этом между орбитами 34 и 33 характеристика семейства i проходит дважды, т.е. имеется зигзаг характеристики, расположенный на характеристике семейства B_1 . Получается, что вдоль нижнего участка характеристики семейства B_1 характеристика семейства i имеет зигзаги, аналогичные зигзагам вдоль верхнего участка характеристики семейства B_1 , которые описаны в [5], п. 1.4. Если раздуть участки характеристики семейства i , проходящие по характеристикам семейства B_1 , то получим последовательности зигзагов, схематически показанные на рис. 7 и 8 для верхнего и нижнего участка соответственно. В этих рисунках по оси абсцисс откладывается номер n зигзага на характеристике, а по оси ординат $-1/(3 - C)^{1/3}$ и $1/(3 - C)^{1/3}$ на рис. 7 и 8 соответственно. Пересечение характеристики с осью абсцисс означает, что она продолжается вдоль характеристики семейства B_1 , но уже монотонно (т.е. без зигзагов). Левый участок характеристики вблизи оси ординат соответствует ее приходу слева на характеристику семейства B_1 .

Расположенные слева кривые, которые не выходят на ось абсцисс, соответствуют тем участкам характеристики семейства i , которые не пересекаются с характеристиками семейства B_1 . На рис. 7 это характеристика куска \mathbf{K}_2 (см. рис. 2 [5]), а на рис. 8 это характеристики кусков \mathbf{K}_3 и \mathbf{K}_9 (см. рис. 6 здесь). На рис. 7 и 8 также указаны куски характеристик $\mathbf{K}_7, \mathbf{K}_{13}$ и \mathbf{K}_{16} , имеющие зигзаги вдоль характеристик семейства B_1 .

Отметим, что в координатах \tilde{a}, \tilde{e} или x_1, y_2 или w_1, y_2 характеристика семейства i при $\mu = 0$ может располагаться либо слева от характеристик семейства B_1 или на них, но не может быть справа от них. При $\mu > 0$ она располагается слева от характеристик семейства c .

В таблице 2 приведены значения основных величин для критических орбит порождающего семейства i . Она отличается от табл. 1 [5] наличием координат $\tilde{a}(T/2), \tilde{e}(T/2)$ для орбит с нечетными индексами (они начинаются и заканчиваются в теле P_2). Для этих же орбит значения $w_1(T/2), y_2(T/2)$ приведены в табл. 3. Отметим, что в табл. 2 для этих ор-

бит приведены значения $v_1(T/2)$, $v_2(T/2)$, ибо там $x_1(T/2) = 1$, а $y_2(T/2)$ определяется после пересчета по формулам (1.3).

Литература

1. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Брюно А.Д., Варин В.П. О семействах периодических решений ограниченной задачи трех тел. Препринт N 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 20 с.
3. Брюно А.Д., Варин В.П. Семейство h периодических решений ограниченной задачи при малых μ . Препринт N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 32 с.
4. Брюно А.Д., Варин В.П. Семейство h периодических решений ограниченной задачи при больших μ . Препринт N 64. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 31 с.
5. Брюно А.Д., Варин В.П. Порождающее семейство i периодических решений ограниченной задачи. Препринт N 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 27 с.
6. Брюно А.Д., Петрович В.Ю. Десингуляризации ограниченной задачи трех тел. Препринт N 53. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 11 с.
7. Брюно А.Д., Варин В.П. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ . Препринт N 34. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2007. 30 с.
8. Брюно А.Д., Варин В.П. Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи. Препринт N 35. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2007. 27 с.
9. Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem V. Hill's case: periodic orbits and their stability // Astron. and Astrophys. 1969. V. 1. N. 2. P. 223–238.
10. Hénon M. Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem II. Hill's case // Astron. and Astrophys., **30**, (1974), 317-321.
11. Bruno A.D. Singular perturbations in Hamiltonian mechanics // Hamiltonian Mechanics./ Ed. J. Seimenis. N.Y.: Plenum Press, 1994. P. 43-49.
12. Брюно А.Д. Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. Препринт N 93. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1996. 32 с.

Таблица 1. Критические орбиты порождающего семейства c'' .

k	$x_1(0)$	$y_2(0)$	$v_1(T/2)$	$v_2(T/2)$	\tilde{T}	C
1	1	1	0	0	3/2	3
2	1	∞	-0.77337	-1	1	1.401879
3	1	-1	0	-2	1	-1

$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$	k
$+\infty$	$-\infty$	1	1	1	1	1
$+\infty$	$-\infty$	0.71333	± 2	2.070245	-2.483035	2
$+\infty, 2$	$-\infty, 2$	1	-1	1	-1	3

k	$w_1(T/2)$	$y_2(T/2)$
1	1	1
2	-2.51823	-1.57577
3	0	-1

Таблица 2. Критические орбиты

k	$x_1(0)$	$y_2(0)$	$x_1/v_1(T/2)$	$y_2/v_2(T/2)$	T	C
1	-0.48074	-1.44224	0.48074	1.44224	1/2	3.466806
2	-0.62996	-1.25992	0.62996	1.25992	1	3.174802
3	-0	$-\infty$	0	∞	1	1.587401
4	-0.62996	1.25992	0.62996	-1.25992	1	0
5 ₁	-1	0.64233	0	-1.64233	1	0.302723
6 ₁	-1.11511	0	-0.45439	-1	1	1.793529
7 ₁	-1	-0.64233	0	-0.35766	1	2.872078
8	-0.62996	-1.25992	0.62996	1.25992	1	3.174802
9	-0.71137	-1.18563	0.71137	1.18563	3/2	3.092586
10	-0.76314	-1.14471	0.76314	1.14471	2	3.057531
11 ₂	-1.44660	-0.26866	0.07968	4.87734	2	2.087672
12 ₂	-1.00111	-0.64631	0.56750	1.55348	2.28129	2.874117
13 ₂	-1.11511	0	0.02439	8.97987	2.05598	1.793529
14 ₂	-1.08919	0.18386	0	$+\infty$	1.97370	1.401875
15 ₂	-1.06323	0.75542	0.46304	-1.73461	2	-0.296033
16	-0.76314	1.14471	0.76314	1.14471	2	-0.436790
17 ₁	-0.52628	1.57792	0	-1.83043	2	-0.350507
18 ₁	-0	$-\infty$	-0.71797	-1	2	1.484505
19 ₁	-0.52628	-1.57792	0	-0.16956	2	2.971249
20	-0.76314	-1.14471	0.76314	1.14471	2	3.057531
21	-0.79906	-1.11868	0.79906	1.11868	5/2	3.039272
22	-0.82548	-1.10064	0.82548	1.10064	3	3.028534
23 ₂	-0.27594	-2.45690	0.27594	2.45690	3	2.567360
24 ₂	-0.52678	-1.57693	0.78293	1.22585	3.34713	2.971298
25 ₂	-0	$-\infty$	0.05931	5.69137	3.08850	1.484505
26 ₂	-0.00094	46.09515	0	$+\infty$	2.99013	1.401875
27 ₂	-0.63084	1.39961	0.63084	-1.39962	3	-0.554474
28	-0.82548	1.10064	0.82548	-1.10064	3	-0.605706
29 ₁	-1	0.88802	0	-1.88802	3	-0.564633
30 ₃	-1.06323	0.75542	-0.21093	-1.80320	2.85821	-0.296033
31 ₃	-1.08919	0.18386	-0.77337	-1	2.97370	1.401875
32 ₃	-1.11511	0	-0.45439	-1	3.11196	1.793529
33 ₃	-1.00111	-0.64631	0.035995	-0.35297	3.57535	2.874117
34 ₃	-1.44660	-0.26866	-0.73387	-0.61134	3.10317	2.087672
35 ₁	-1	-0.88802	0	-0.11197	3	2.987461
36	-0.82548	-1.10064	0.82548	1.10064	3	3.028534
37	-0.84574	-1.08738	0.84574	1.08738	7/2	3.021678
38	-0.86177	-1.07721	0.86177	1.07721	4	3.017032
39 ₂	-1.31106	-0.60421	0.41247	1.92050	4	2.744731

семейства i для $\mu = 0$

Γ	Γ_v	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{\epsilon}(0)$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{\epsilon}(T/2)$	k
-2	-2	-0.48074	1	0.48074	1	1
2	2	-0.62996	1	0.62996	1	2
2	2	-0.62996	± 2	0.62996	± 2	3
2	2	-0.62996	-1	0.62996	-1	4
2, $+\infty$	2, $-\infty$	-0.62996	-0.41260	0.62996	-0.41260	5 ₁
$+\infty$	$-\infty$	-0.55755	0	0.66570	-0.49783	6 ₁
$+\infty, 2$	$-\infty, 2$	-0.62996	0.41260	0.62996	0.41260	7 ₁
2	2	-0.62996	1	0.62996	1	8
-2	-2	-0.71137	1	0.71137	1	9
2	2	-0.76314	1	0.76314	1	10
2, $-\infty, +\infty$	2, $+\infty$	-0.76314	0.10441	0.76314	1.89558	11 ₂
$+\infty, -\infty$	$+\infty$	-0.63288	0.41828	0.90016	1.36955	12 ₂
$-\infty$	$+\infty$	-0.55755	0	0.73776	1.96693	13 ₂
$-\infty$	$+\infty$	-0.55481	-0.03682	0.71332	± 2	14 ₂
$-\infty, 2$	$+\infty, 2$	-0.76314	-0.60676	0.76314	-1.39324	15 ₂
2	2	-0.76314	-1	0.76314	-1	16
2, $+\infty$	2, $-\infty$	-0.76314	-1.31037	0.76314	-0.68963	17 ₁
$+\infty$	$-\infty$	-0.67362	∓ 2	23.87091	-1.95811	18 ₁
$+\infty, 2$	$-\infty, 2$	-0.76314	1.31047	0.76314	0.68962	19 ₁
2	2	-0.76314	1	0.76314	1	20
-2	-2	-0.79906	1	0.79906	1	21
2	2	-0.82548	1	0.82548	1	22
2, $-\infty, +\infty$	2, $+\infty$	-0.82548	1.66571	0.82548	1.66571	23 ₂
$+\infty, -\infty$	$+\infty$	-0.76342	1.30996	0.95078	1.17653	24 ₂
$-\infty$	$+\infty$	-0.67362	± 2	0.75483	1.92141	25 ₂
$-\infty$	$+\infty$	-0.67177	-1.99859	0.71332	± 2	26 ₂
$-\infty, 2$	$+\infty, 2$	-0.82548	-1.23588	0.82548	-1.23578	27 ₂
2	2	-0.82548	-1	0.82548	-1	28
2, $+\infty$	2, $-\infty$	-0.82548	-0.78859	0.82548	-0.78859	29 ₁
$+\infty$	$-\infty$	-0.76314	-0.60676	1.08948	-1.08213	30 ₃
$+\infty$	$-\infty$	-0.55481	-0.03682	2.07016	-2.48305	31 ₃
$+\infty$	$-\infty$	-0.55755	0	1.51374	-2.66061	32 ₃
$+\infty, -\infty$	$-\infty$	-0.63288	0.41828	1.15659	-1.13539	33 ₃
$-\infty, +\infty$	$-\infty$	-0.76314	0.10441	1.45764	-2.68604	34 ₃
$+\infty, 2$	$-\infty, 2$	-0.82548	0.78858	0.82548	0.78858	35 ₁
2	2	-0.82548	1	0.82548	1	36
-2	-2	-0.84574	1	0.84574	1	37
2	2	-0.86177	1	0.86177	1	38
2, $-\infty, +\infty$	2, $+\infty$	-0.86177	0.47863	0.86177	1.52136	39 ₂

Таблица 3. Критические орбиты семейства i с нечетными индексами.

k	$w_1(T/2)$	$y_2(T/2)$
5_1	0	-0.64234
6_1	-0.85125	-0.70557
7_1	0	0.64234
17_1	0	-0.83044
18_1	-2.12065	-1.39932
19_1	0	0.83044
29_1	0	-0.88802
30_3	-0.43331	-1.04026
31_3	-2.51824	-1.57577
32_3	-2.85822	-1.63114
33_3	-2.07030	-1.06555
34_3	-3.02577	-1.63891
35_1	0	0.88802

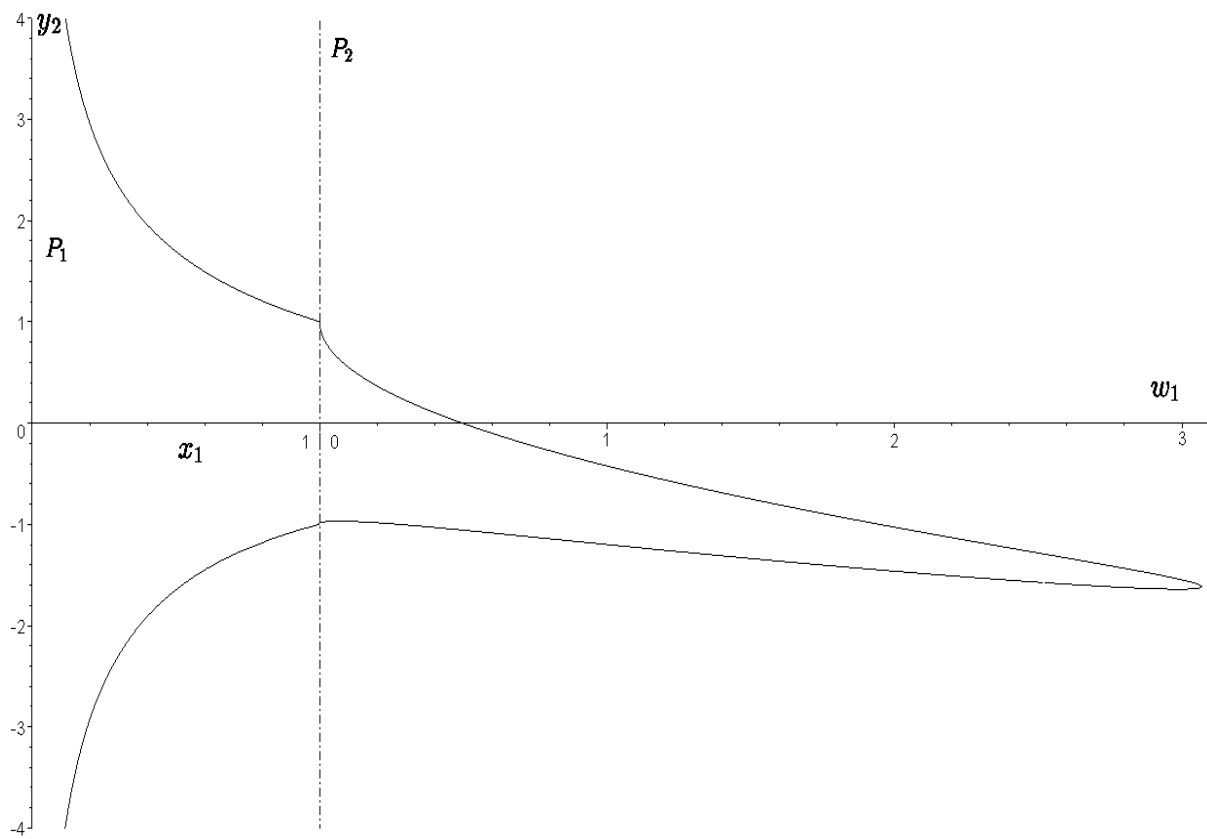


Рис. 1. Характеристики семейства c'' при $\mu = 0$.

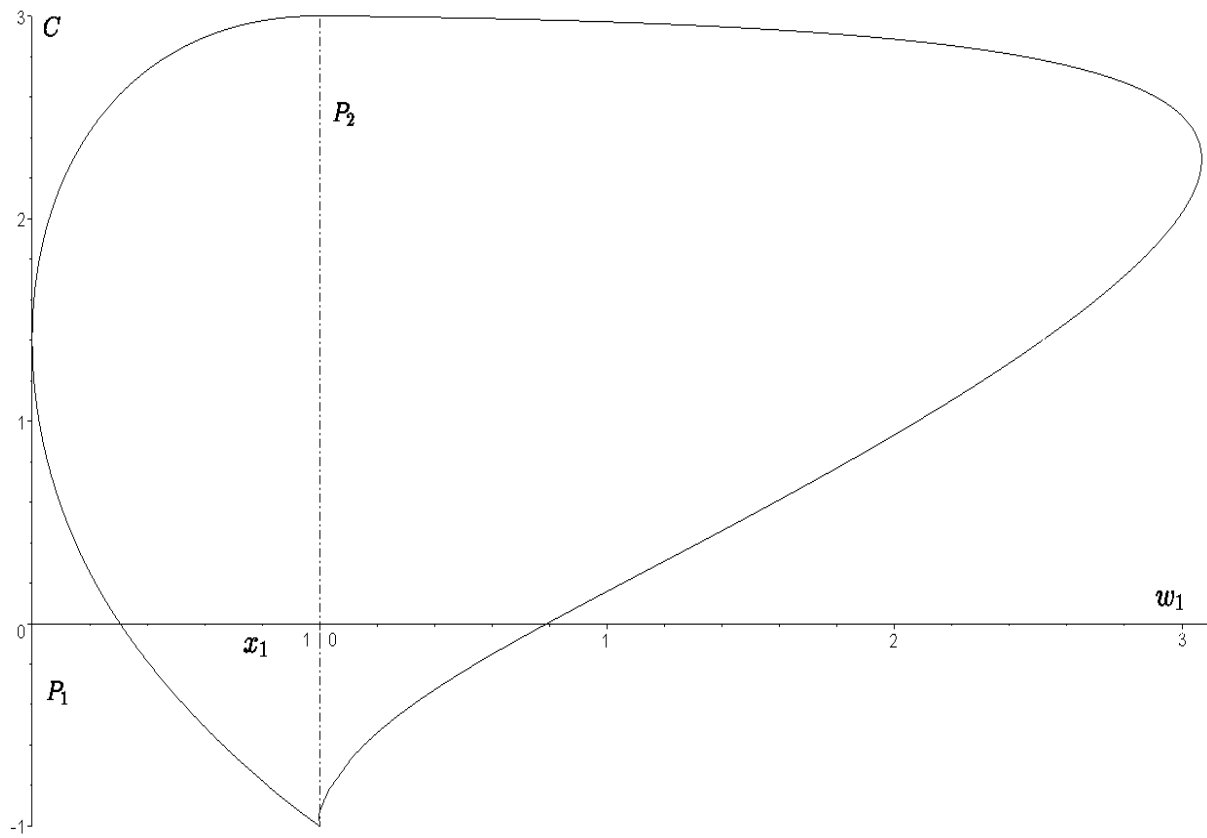


Рис. 2. Характеристика семейства c'' при $\mu = 0$.

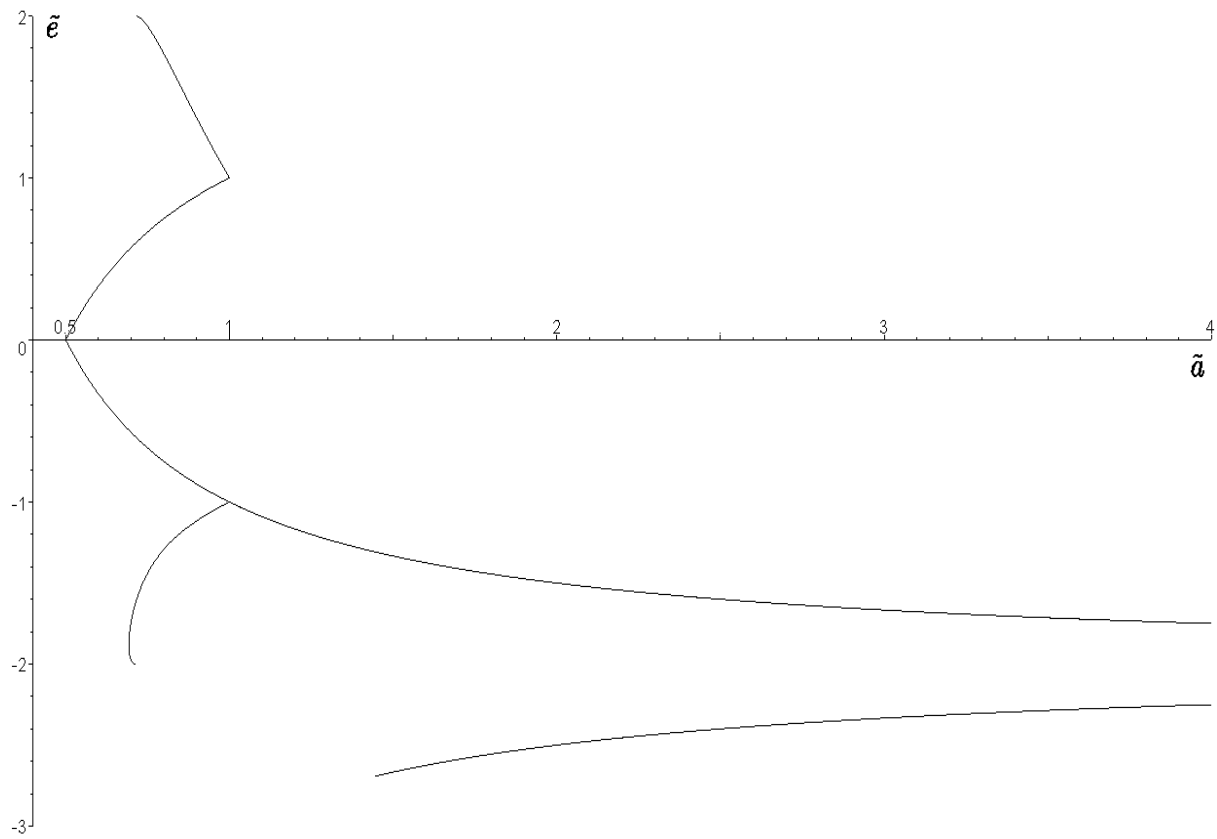


Рис. 3. Характеристики семейства c'' при $\mu = 0$.

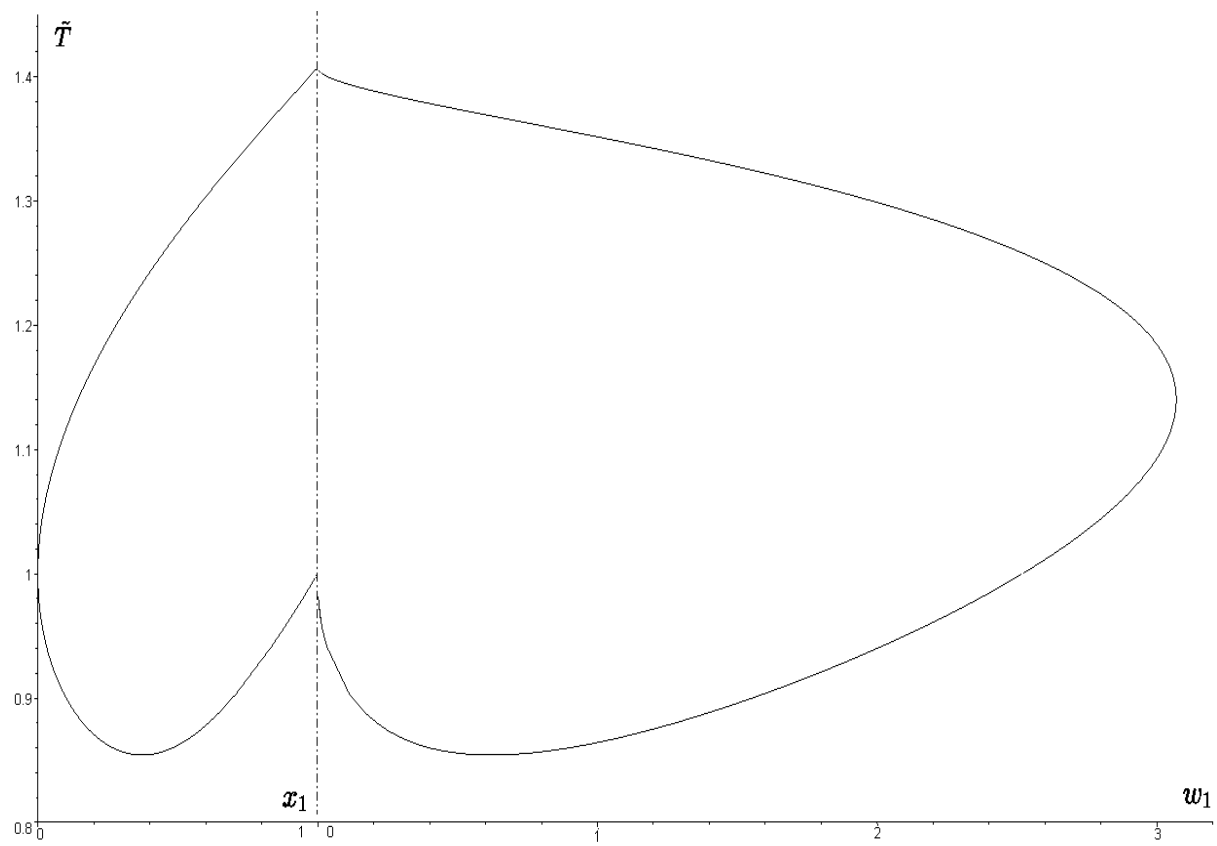


Рис. 4. Нормированный период семейства c'' при $\mu = 0$.

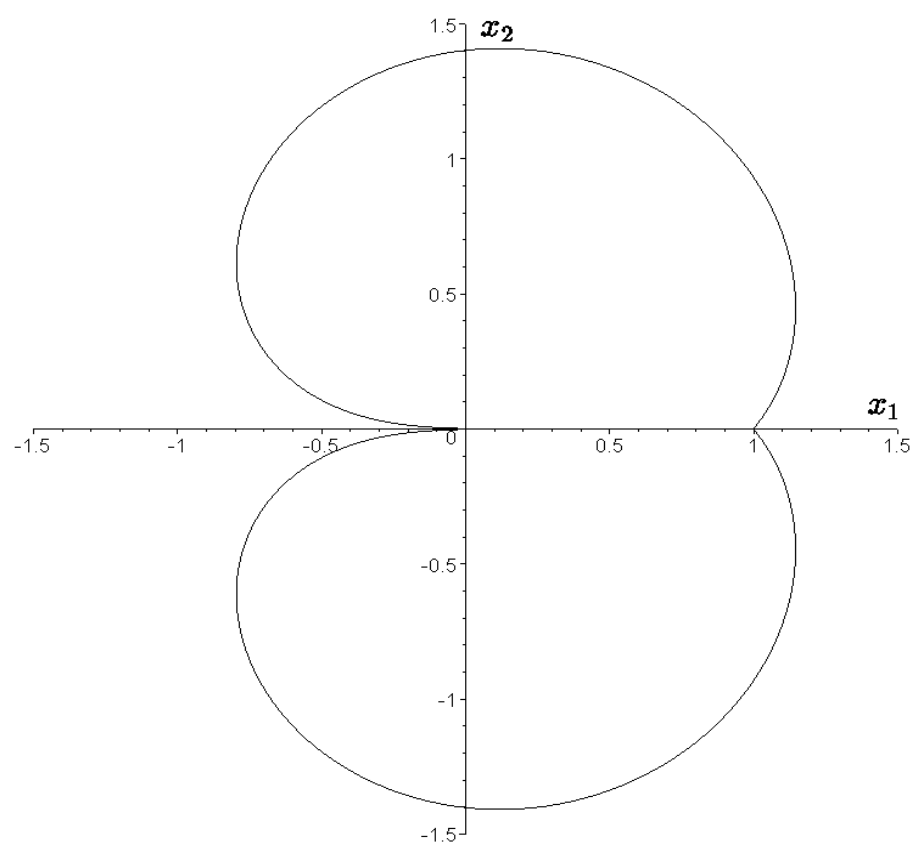


Рис. 5. Критическая орбита 2 семейства c'' при $\mu = 0$.

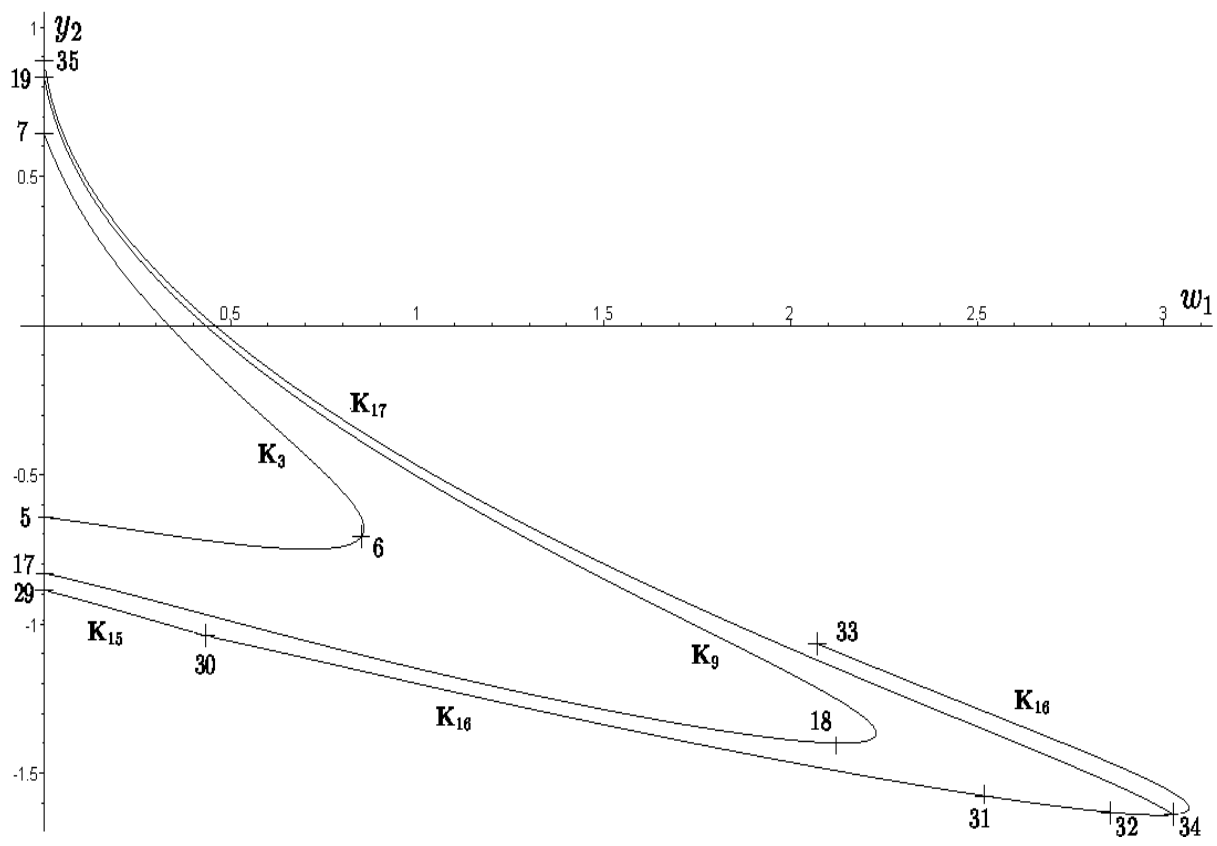


Рис. 6. Характеристики частей семейства c'' в координатах w_1, y_2 .

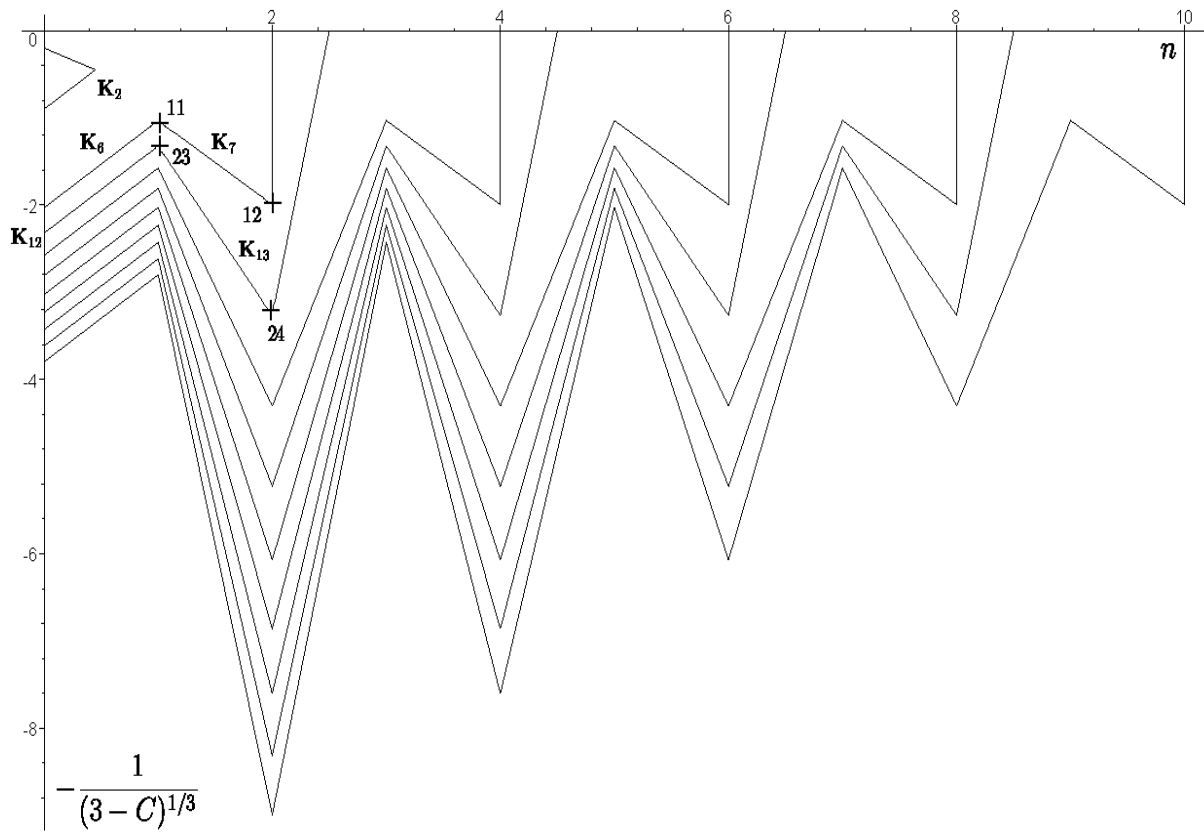


Рис. 7. Зигзаги верхней характеристики семейства i при $\mu = 0$.

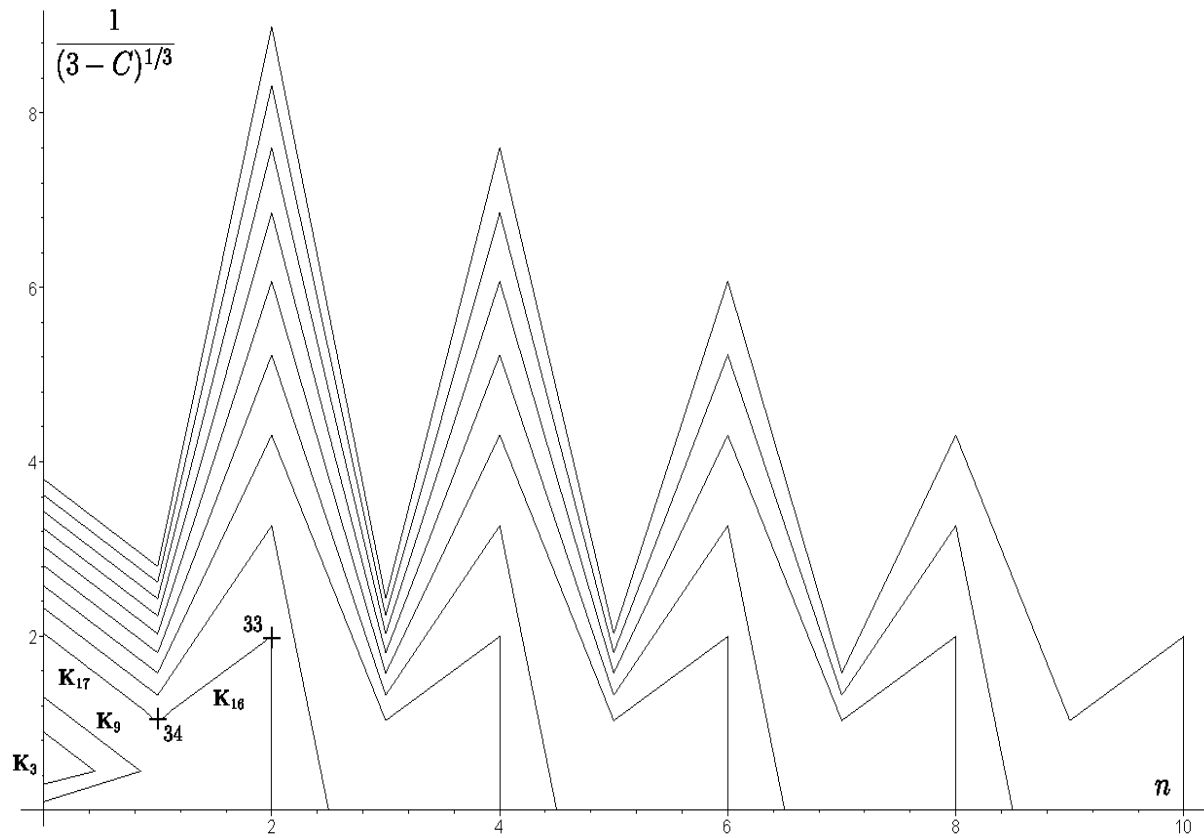


Рис. 8. Зигзаги нижней характеристики семейства i при $\mu = 0$.