ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, В.Ф. Еднерал

Анализ локальной интегрируемости методами нормальной формы и степенной геометрии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А. Д., Еднерал В.Ф. Анализ локальной интегрируемости методами нормальной формы и степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 53. 16 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-53

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно и В.Ф. Еднерал

АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ МЕТОДАМИ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ И СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва, 2007 г.

УДК 517.925+531.38+681.3.062(075.8)

А.Д. Брюно и В.Ф. Еднерал. Анализ локальной интегрируемости методами нормальной формы и степенной геометрии. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Рассматривается автономная система ОДУ, разрешенная относительно производных. Поиск ее формальных и аналитических интегралов вблизи ее конечной неподвижной точки осуществляется по ее нормальной форме. Бесконечно удаленная неподвижная точка сначала переводится в конечную с помощью степенного преобразования. Этот подход применен к системе Янга–Миллза. Оказалось, что в окрестности одной бесконечно удаленной неподвижной точки эта система локально неинтегрируема, чем подтверждается известный результат о ее глобальной неинтегрируемости.

A.D. Bruno and V.F. Edneral. Analysis of the local integrability by methods of normal form and power geometry. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

We consider an autonomous system of ODEs which is solved concerning derivatives. A search of its formal and analytical integrals near its finite stationary point is produced by a usage of its normal form. The infinitely far stationary point at first is moved to finite one by means of a power transformation. This approach is applied to the Yang–Mills system. It is appeared, that in a neighborhood of one infinitely far stationary point this system is locally nonintegrable. That confirms known outcome about global nonintegrability of the system.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и гранта Президента РФ по поддержке научных школ 4476.06.02.

E-mails: bruno@keldysh.ru; edneral@theory.sinp.msu.ru
Сайт: www.keldysh.ru

§1. Теория

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad i = l, ..., n, \tag{1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\varphi_i(X)$ – полиномы.

Будем говорить, что в окрестности неподвижной точки $X = X^0$ система (1) **локально интегрируема**, если она имеет там достаточное число m независимых первых интегралов вида

$$a_j(X)/b_j(X), \quad j = l, \ldots, m,$$

где функции $a_j(X)$ и $b_j(X)$ являются аналитическими в точке $X = X^0$. В противном случае будем называть систему (1) **локально неинтегрируемой** в этой точке.

В окрестности неподвижной точки $X = X^0$ существует формальная обратимая замена координат $X \to Y$, которая преобразует систему (1) в ее нормальную форму [1–3]

$$\dot{y}_i = y_i \; g_i(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} y_i \sum g_{i,Q} Y^Q, i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где

$$Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad Y^Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} y_1^{q_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{q_n}$$

и

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{3}$$

Здесь матрица линейной части системы (2) жорданова и $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ является ее диагональю.

Неулучшаемые условия A и ω на коэффициенты нормальной формы (2), достаточные для аналитичности нормализующего преобразования $X \to Y$, были сформулированы и доказаны Брюно в [4, 5].

Пусть l – число независимых формальных первых интегралов нормальной формы (2). Возможны следующие случаи:

a) $l < m$, тогда (2) не имеет достаточного числа m независимых формальных первых интегралов. Поэтому у системы (1) не может быть достаточного числа m независимых аналитических первых интегралов, то-есть она локально неинтегрируема в окрестности неподвижной точки $X = X^0$;

b) $l \geq m$ и нормализующее преобразование является аналитическим, тогда все формальные интегралы являются аналитическими, и система (1) локально интегрируема в окрестности неподвижной точки $X = X^0$;

c) $l \geq m$ и нельзя гарантировать аналитичность нормализующего преобразования $X \to Y$, тогда ничего нельзя сказать о локальной интегрируемости или неинтегрируемости системы (1) вблизи точки $X = X^0$.

Этот подход был применен к системе уравнений Эйлера–Пуассона. Были найдены как неподвижные точки, вблизи которых система локально интегрируема [6–8], так и неподвижные точки в окрестности которых она локально неинтегрируема [8, 7]. Среди них встречаются действительные неподвижные точки обоих типов [9]. Нормальные формы (2) вычислялись посредством программ, написанных в системе MATHEMATICA [10, 11].

Интегрирование нормальной формы (2) сводится к интегрированию системы порядка $k < n$ (где k – кратность резонанса) посредством степенного преобразования [1-3]

$$\begin{gathered} y_i = z_1^{\alpha_{i,1}} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_{i,n}}, \\ \alpha_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad \det(\alpha_{i,j}) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя степенную геометрию [3], можно изучать локальную интегрируемость в окрестности бесконечно удаленных неподвижных точек. Для этого следует вычислить выпуклый многогранник $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ системы (1). Поверхность многогранника Γ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$ различных размерностей d $(0 \leq d < n)$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует укороченная система [12, 3]

$$\dot{x}_i = \hat{\varphi}_i^{(d)}(X), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

которая является первым приближением системы (1) в части пространства $\mathbb{C}^n$. С помощью степенного преобразования $X \to Z$ вида (4) и степенной замены времени

$$dt = z_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{s_n} d\tau, \quad s_i \in \mathbb{R},$$

можно преобразовать систему (1) в систему

$$dz_i/d\tau \stackrel{\text{def}}{=} z_i' = h_i(Z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

имеющую инвариантное координатное подпространство

$$z_1 = \ldots = z_{n-d} = 0, \tag{7}$$

на котором система (6) соответствует укороченной системе (5). Теперь надо проанализировать локальную интегрируемость системы (6) во всех неподвижных точках системы (6), расположенных в подпространстве (7). Это можно сделать для каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многогранника Γ.

Применяя этот подход к уравнениям Эйлера-Пуассона, мы нашли бесконечно удаленные неподвижные точки обоих типов: с локальной интегрируемостью и с локальной неинтегрируемостью [13, 8]. Все они являются комплексными.

§2. Пример

2.1. Свойства системы Янга–Миллза. Рассмотрим приведенную систему Янга-Миллза

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= r_1 r_2^2, \\ \dot p_2 &= r_1^2 r_2, \\ \dot r_1 &= -p_1, \\ \dot r_2 &= -p_2, \end{aligned} \tag{8}$$

с гамильтоновой функцией

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + r_1^2 r_2^2). \tag{9}$$

Гамильтонова система (8) интегрируема, если у нее существует дополнительный первый интеграл, то есть $m = 2$. Она имеет конечные неподвижные точки вида

$$p_1 = p_2 = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad p_1 = p_2 = 0, \quad r_1 \neq 0, \quad r_2 = 0$$

Поскольку вблизи каждой из этих неподвижных точек система (8) имеет гамильтонову нормальную форму [14, гл. I], то она имеет там как минимум один дополнительный формальный интеграл, т.е. $l \geq 2$. Однако вблизи этих точек нормальная форма скорее всего не удовлетворяет условию A и нормализующее преобразование, по-видимому, расходится [4, 5]. Это случай c) из перечисленных в §1, в котором по нормальной форме не решается вопрос о локальной интегрируемости системы.

Проанализируем теперь бесконечно удаленные неподвижные точки системы (8). Для этого запишем ее в виде

$$\begin{aligned}
(\log p_1)^{\cdot} &= p_1^{-1} r_1 r_2^2,\\
(\log p_2)^{\cdot} &= p_2^{-1} r_1^2 r_2,\\
(\log r_1)^{\cdot} &= -p_1 r_1^{-1},\\
(\log r_2)^{\cdot} &= -p_2 r_2^{-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Носитель этой системы, т.е. набор показателей степеней $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ мономов

$$\mathrm{const} \cdot p_1^{q_1} p_2^{q_2} r_1^{q_3} r_2^{q_4}$$

в правых частях уравнений (10), состоит из четырех точек

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (-1, 0, 1, 2), \qquad & Q_2 &= (0, -1, 2, 1),\\
Q_3 &= (1, 0, -1, 0), \qquad & Q_4 &= (0, 1, 0, -1).
\end{aligned}$$

Выпуклая оболочка носителя, т.е. многогранник Γ, является тетраэдром с

- 4 вершинами: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4;
- 6 ребрами: $[Q_i, Q_j],\ 1 \le i < j \le 4$;
- 4 гранями: $\Gamma_j = \{Q_i\},\ 1 \le i \ne j \le 4$.

В результате симметрии $(p_1, p_2, r_1, r_2) \leftrightarrow (p_2, p_1, r_2, r_1)$, имеем симметрии для

$$\begin{array}{lcc}
\text{вершин:} & Q_1 \leftrightarrow Q_2, & Q_3 \leftrightarrow Q_4;\\
\text{ребер:} & [Q_1, Q_3] \leftrightarrow [Q_2, Q_4], & [Q_1, Q_4] \leftrightarrow [Q_2, Q_3];\\
\text{граней:} & \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2, & \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4.
\end{array}$$

Таким образом, надо рассмотреть 7 различных объектов: тетраэдр Γ, 2 грани Γ_2, Γ_4 и 4 ребра $[Q_1, Q_2], [Q_1, Q_3], [Q_1, Q_4], [Q_3, Q_4]$. Сделаем это последовательно.

2.2. Тетраэдр Γ. Трехмерный тетраэдр Γ лежит в четырехмерном пространстве; следовательно, он лежит на трехмерной гиперплоскости. Найдем ее нормальный вектор. Для этого составим разности

$$\begin{aligned}
Q_1 - Q_4 &= (-1, -1, 1, 3),\\
Q_2 - Q_4 &= (0, 2, 2, 2),\\
Q_3 - Q_4 &= (1, -1, -1, 1)
\end{aligned}$$

и вычислим их внешнее произведение, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8i + 8j + 4k + 4l.$$

Сокращая на общий множитель, получаем нормальный вектор $N = (2, 2, 1, 1)$ для тетраэдра Г. Соответствующая матрица степенного преобразования может быть выбрана в виде

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Степенное преобразование и обратное к нему суть

$$\begin{array}{ll} p_1 = x_1 x_4^2, & x_1 = p_1 r_2^{-2}, \\ p_2 = x_2 x_4^2, & x_2 = p_2 r_2^{-2}, \\ r_1 = x_3 x_4, & x_3 = p_3 r_2^{-1}, \\ r_2 = x_4, & x_4 = r_2. \end{array}$$

Преобразованная система (10) имеет вид

$$\begin{aligned} (\log \dot{x}_1) &= x_1^{-1} x_3 x_4 + 2 x_2 x_4, \\ (\log \dot{x}_2) &= x_2^{-1} x_3^2 x_4 + 2 x_2 x_4, \\ (\log \dot{x}_3) &= x_2 x_4 - x_1 x_3^{-1} x_4, \\ (\log \dot{x}_4) &= -x_2 x_4. \end{aligned}$$

Заменяя время $x_4 dt = d\tau$, то есть деля все уравнения на x_4, получаем новую систему

$$\begin{aligned} (\log x_1)' &= x_1^{-1} x_3 + 2 x_2, \\ (\log x_2)' &= x_2^{-1} x_3^2 + 2 x_2, \\ (\log x_3)' &= x_2 - x_1 x_3^{-1}, \\ (\log x_4)' &= -x_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где штрих означает производную по τ. Ее носитель состоит из точек

$$\begin{array}{ll} \tilde{Q}_1 = (-1, 0, 1, 0), & \tilde{Q}_2 = (0, -1, 2, 0), \\ \tilde{Q}_3 = (1, 0, -1, 0), & \tilde{Q}_4 = (0, 1, 0, 0). \end{array} \tag{12}$$

Инвариантное координатное подпространство здесь $x_4 = 0$. На нем система (11) имеет 4 неподвижные точки

$$x_1^0 = \frac{i\sigma\rho}{\sqrt{2}}, \quad x_2^0 = \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}, \quad x_3^0 = \rho, \quad \sigma, \rho = \pm 1.$$

Векторы собственных значений в них имеют вид

$$\Lambda = \frac{i\sigma}{\sqrt{2}}(4, \frac{3-i\sqrt{7}}{2}, \frac{3+i\sqrt{7}}{2}, -1).$$

Согласно (3) в каждой неподвижной точке нормальная форма линейна

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Она имеет по два независимых первых интеграла

$$z_1 z_4^4 = \mathrm{const}, \quad z_2 z_3 z_4^3 = \mathrm{const}.$$

Условия A и ω удовлетворены, следовательно, имеются два аналитических локальных интеграла. Таким образом, около этих неподвижных точек система локально интегрируема.

Носитель системы (11) состоит из точек (12), лежащих в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Их выпуклая оболочка $\tilde{\Gamma}$ - многогранник системы (11). Теперь надо изучить укорочения системы (11), соответствующие 2 граням $\tilde{\Gamma}_2$, $\tilde{\Gamma}_4$ и четырем ребрам $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2]$, $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3]$, $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_4]$, $[\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4]$. В дальнейшем рассматриваем их как объекты трехмерного пространства, соответствующего первым трем координатам.

2.3. Грань $\tilde{\Gamma}_2 = \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4\}$. Вычислим в $\mathbb{R}^3$ ее внешнюю нормаль. Для этого составим разности

$$\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_4 = (-1, -1, 1), \quad \tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_4 = (1, -1, -1)$$

и вычислим их векторное произведение. Получим нормальный вектор $(2, 0, 2) \sim (1, 0, 1) = N_2$. Поскольку скалярные произведения

$$\langle N_2, \tilde{Q}_1 \rangle = \langle N_2, \tilde{Q}_3 \rangle = \langle N_2, \tilde{Q}_4 \rangle = 0, \quad \langle N_2, \tilde{Q}_2 \rangle = 2,$$

то вектор $-N_2$ является внешней нормалью грани $\tilde{\Gamma}_2$. Поэтому матрицу α степенного преобразования берем в виде

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее степенное преобразование и его обратное суть

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 y_3, & y_1 &= x_1 x_3^{-1}, \\ x_2 &= y_2, & y_2 &= x_2, \\ x_3 &= y_3, & y_3 &= x_3. \end{aligned}$$

При этом x_4 не меняется. Система (11) переходит в систему

$$\begin{aligned}
&(\log y_1)' = y_1^{-1} + y_1 + y_2,\\
&(\log y_2)' = 2y_2 + y_2^{-1}y_3^2,\\
&(\log y_3)' = y_2 - y_1,\\
&(\log x_4)' = -y_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Интеграл (9) в переменных y_1, y_2, y_3, x_4 принимает вид

$$H = x_4^4(y_1^2y_3^2 + y_2^2 + y_3^2)/2. \tag{14}$$

Укороченная система, соответствующая грани $\tilde{\Gamma}_2$, получается из системы (13) при $y_3 = 0$. Ее неподвижные точки на подпространстве $y_3 = x_4 = 0$ суть $y_1^0 = \pm i, y_2^0 = 0$. В них вектор собственных чисел равен

$$\Lambda = \pm i(2, 0, -1, 0).$$

Из-за симметрии этих двух неподвижных точек достаточно исследовать систему (13) только в одной из них, скажем, в точке $y_1^0 = i$. В ней вычисляем нормальную форму вида (2) с $n = 4$, она имеет вид

$$\begin{aligned}
g_1 = {} & 2i + 3iz_2^2 + 12z_2^3 - \tfrac{3}{4}z_1z_3^2 + \tfrac{63}{16}z_1z_2z_3^2 + \tfrac{902}{32}z_1z_2^2z_3^2 + \tfrac{159}{128}iz_1^2z_3^4 + \ldots,\\
g_2 = {} & 4z_2 - \tfrac{i}{2}z_1z_2^{-1}z_3^2 - \tfrac{3}{4}iz_1z_2z_3^2 + \tfrac{316}{16}z_1z_2^3z_3^2 + \tfrac{39}{128}iz_1^2z_3^4 + \\
& + \tfrac{5}{64}z_1^2z_2^{-1}z_3^4 + \ldots,\\
g_3 = {} & -i + 3z_2 + \tfrac{3}{2}iz_2^2 - 6z_2^3 + \tfrac{3}{8}z_1z_3^2 - \tfrac{21}{4}z_1z_2z_3^2 - \tfrac{99}{128}iz_1^2z_3^4 + \ldots,\\
g_4 = {} & -2z_2 - \tfrac{3}{16}z_1^2z_2z_3^4 + \ldots.
\end{aligned} \tag{15}$$

В свою очередь, интеграл (14) принимает вид

$$H = z_4^4[2z_2^2 + iz_1z_3^2 + \frac{1}{2}iz_1z_2^2z_3^2 - \frac{45}{8}iz_1z_2^4z_3^2 + h(z_1, z_2, z_3)]. \tag{16}$$

В резонансных переменных $u_1 = z_1z_3^2$ и z_2 система (15) выглядит так

$$\begin{aligned}
&(\log\dot{} u_1) = g_1 + 2g_3 = 6z_2 - \tfrac{21}{16}iu_1z_2 - \tfrac{195}{32}u_1z_2^2 + \tfrac{15}{16}iu_1 + \ldots,\\
&(\log\dot{} z_2) = g_2 = 4z_2 + \tfrac{i}{2}u_1z_2^{-1} - \tfrac{3}{4}iu_1z_2 + \tfrac{39}{128}u_1^2 + \tfrac{5}{64}u_1^2z_2^{-1} + \ldots.
\end{aligned} \tag{17}$$

Кроме того

$$(\log\dot{} z_4) = g_4 = -2z_2 - \frac{3}{16}u_1^2z_2 + \ldots \tag{18}$$

и

$$H = z_4^4[2z_2^2 + iu_1 + \frac{1}{2}iu_1z_2^2 - \frac{45}{8}iu_1z_2^4 + \tilde{h}(u_1, z_2)]. \tag{19}$$

Поскольку правые части системы (17),(18) не содержат z_4, то ее первый интеграл имеет вид $F = z_4^mG(u_1, z_2)$. Если он отличен от (19), то интеграл H^m/F^4 зависит только от u_1 и z_2. Поэтому для решения вопроса об интегрируемости достаточно найти первый интеграл системы (17) или доказать его отсутствие.

Многоугольник системы (17) содержит ребро с вершинами $(1,0)$ и $(1,-1)$ (см. рис. 1). Соответствующая этому ребру укороченная система есть

$$\begin{aligned}(\log \dot{u}_1) &= 6z_2,\\ (\log \dot{z}_2) &= 4z_2 + \tfrac{i}{2}u_1 z_2^{-1}.\end{aligned}$$

Она квазиоднородна. Поэтому нетрудно найти ее первый интеграл

$$\frac{(iu_1 + 2z_2^2)^{3i/2}}{u_1^2 z_2^{1+3i}} = \text{const}. \tag{20}$$

Из-за наличия комплексных показателей степени, этот интеграл не является аналитическим. Интеграл полной системы (17) является возмущением интеграла (20) и не может быть записан в виде отношения двух степенных рядов по u_1 и z_2. Следовательно, нормальная форма (2), (15) не имеет дополнительного формального интеграла, т.е. система (1) локально неинтегрируема вблизи точки $y_1 = i$, $y_2 = y_3 = x_4 = 0$.

Заметим, что укороченная система (13) при $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ соответствует ребру $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_4]$, поэтому это ребро можно в дальнейшем не рассматривать.

2.4. Грань $\tilde{\Gamma}_4 = \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3\}$. Чтобы вычислить в $\mathbb{R}^3$ ее внешнюю нормаль, составим разности

$$\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_3 = (-2, 0, 2), \quad \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_3 = (-1, -1, 3).$$

Их векторное произведение $M_4 = (2, 4, 2)$. Поделив его на 2, получим нормальный вектор $N_4 = (1, 2, 1)$. Поскольку скалярные произведения

$$\langle N_4, \tilde{Q}_1\rangle = \langle N_4, \tilde{Q}_2\rangle = \langle N_4, \tilde{Q}_3\rangle = 0, \quad \langle N_4, \tilde{Q}_4\rangle = 2,$$

то внешним нормальным вектором грани $\tilde{\Gamma}_4$ является $-N_4$. Поэтому матрицу степенного преобразования берем в виде

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Соответствующее степенное преобразование и его обратное суть

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 y_3, & y_1 &= x_1 x_3^{-1},\\ x_2 &= y_2 y_3^2, & y_2 &= x_2 x_3^{-2},\\ x_3 &= y_3, & y_3 &= x_3.\end{aligned}$$

Система (11) переходит в систему

$$
\begin{aligned}
&(\log y_1)' = y_1^{-1} + y_1 + y_2 y_3^2,\\
&(\log y_2)' = y_2^{-1} + 2y_2,\\
&(\log y_3)' = -y_1 + y_2 y_3^2,\\
&(\log x_4)' = -y_2 y_3^2.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Укороченная система, соответствующая грани $\tilde{\Gamma}_4$, получается из системы (21), если в ней убрать все мономы $y_2 y_3^2$, т.е. при $y_3 = 0$. Ее неподвижные точки на подпространстве $y_3 = x_4 = 0$ суть

$$y_1 = \pm i, \qquad y_2 = \pm 1/2.$$

В них подсистема из первых двух уравнений имеет матрицу линейной части с жордановой клеткой

$$\pm i \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектором собственных значений

$$\Lambda = \pm i(2, 2, -1, 0).$$

Поскольку на настоящий момент алгоритм вычисления нормальной формы реализован только для случая, когда матрица линейной части диагональна, избавимся от жордановой клетки. Для этого положим

$$y_1 = i + u_1^2, \qquad y_3 = u_1 u_3.$$

Тогда система (21) перейдет в систему

$$
\begin{aligned}
&u_1' = iu_1 + \tfrac{1}{2}u_1^3 + \tfrac{1}{2}iu_1 y_2 u_3^2 + \tfrac{1}{2}u_1^3 y_2 u_3^2,\\
&y_2' = 1 + 2iy_2 + 2u_1^2 y_2,\\
&u_3' = -2iu_3 - \tfrac{3}{2}iu_1^2 u_3 - \tfrac{1}{2}iy_2 u_3^3 - u_1^2 y_2 u_3^3,\\
&x_4' = -u_1^2 y_2 u_3^2 x_4.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

В этих переменных интеграл (9) имеет вид

$$H = \frac{1}{2}x_4^4[u_1^2 u_3 + u_1^2(i + u_1^2)^2 u_3^2 + u_1^4 y_2^2 u_3^4]. \tag{23}$$

При $u_1 = u_3 = x_4 = 0$ система (22) имеет неподвижную точку $y_2 = i/2$, в которой вектор собственных чисел есть $\Lambda = (i, 2i, -2i, 0)$. Нормальная форма системы (22) в этой точке имеет вид (2) с $n = 4$ и

$$\begin{aligned}
g_1 = &\quad i - \tfrac{5}{16} z_1^4 z_3^2 + \tfrac{155}{1024} i z_1^8 z_3^4 + \tfrac{135}{256} z_1^6 z_2 z_3^4 + \tfrac{1}{4} i z_1^4 z_2^2 z_3^4 + \dots,\\
g_2 = &\quad 2i - \tfrac{1}{8} z_1^4 z_3^2 + \tfrac{3985}{2048} i z_1^8 z_3^4 + i z_1 z_2^{-1} + \tfrac{127}{256} z_1^6 z_3^2 z_2^{-1} - z_1^2 z_2 z_3^2 -\\
&- \tfrac{665}{512} i z_1^6 z_2 z_3^4 + \tfrac{5}{4} i z_1^4 z_2^2 z_3^4 + \dots,\\
g_3 = &\ -2i - \tfrac{5}{16} z_1^4 z_3^2 + \tfrac{5}{32} i z_1^8 z_3^4 + \tfrac{3}{2} z_1^2 z_2 z_3^2 - \tfrac{3}{64} i z_1^6 z_2 z_3^4 -\\
&- \tfrac{7}{8} i z_1^4 z_2^2 z_3^4 + \dots,\\
g_4 = &\ \tfrac{1}{2} z_1^4 z_3^2 - \tfrac{83}{512} i z_1^8 z_3^4 - z_1^2 z_2 z_3^2 - \tfrac{31}{32} i z_1^6 z_2 z_3^4 + \tfrac{1}{2} i z_1^4 z_2^2 z_3^4 + \dots,
\end{aligned} \tag{24}$$

а интеграл (23) – вид

$$H = z_1^4 z_3^2 z_4^4 [i - \frac{89}{256} z_1^4 z_3^2 - \frac{1}{8} z_1^2 z_2 z_3^2 + \frac{1}{2} z_2^2 z_3^2 + \tilde{h}_1(z_1, z_2, z_3)]. \tag{25}$$

Для резонансных координат $v_1 = z_1^2, \quad v_2 = z_2 z_3$ система (24) дает систему

$$\begin{aligned}
(\log \dot{v}_1) = &\ -\tfrac{15}{16} v_1^2 + \tfrac{235}{512} i v_1^4 + \tfrac{3}{2} v_1 v_2 + \tfrac{129}{128} i v_1^3 v_2 - \tfrac{3}{8} i v_1^2 v_2^2 \dots,\\
(\log \dot{v}_2) = &\ -\tfrac{3}{16} v_1^2 - \tfrac{3665}{2048} i v_1^4 + i v_1 v_2^{-1} + \tfrac{127}{256} v_1^3 v_2^{-1} + \tfrac{1}{2} v_1 v_2 -\\
&- \tfrac{689}{512} i v_1^3 v_2 + \tfrac{3}{8} i v_1^2 v_2^2 + \dots.
\end{aligned} \tag{26}$$

Носитель этой системы расположен в первом квадранте, сдвинутом на вектор $(1, -1)$. Этой вершине соответствует укороченная система

$$\begin{aligned}
(\log \dot{v}_1) &= 0,\\
(\log \dot{v}_2) &= i v_1 v_2^{-1}
\end{aligned}$$

с вектором собственных значений линейной части $\Lambda' = (0, i)$.

Систему (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
(\log \dot{v}_1) &= v_1 \tilde{g}_1(v_1, v_2),\\
(\log \dot{v}_2) &= v_1 v_2^{-1} [i + \tilde{h}_2(v_1)] + v_1 \tilde{g}_2(v_1, v_2),
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ и $\tilde{h}_2$ – степенные ряды от указанных аргументов без свободных членов.

Проведем теперь вторичную нормализацию системы (27). Согласно первой обобщенной теореме о нормальной форме [2, гл.II], существует формальная замена координат $v_1, v_2 \to w_1, w_2$, которая приводит систему (27) к обобщенной нормальной форме

$$\begin{aligned}
(\log \dot{w}_1) &= 0,\\
(\log \dot{w}_2) &= w_1 w_2^{-1} [i + \tilde{h}_2(w_1)].
\end{aligned} \tag{28}$$

Эта система имеет первый интеграл $w_1 = \mathrm{const}$. Следовательно, система (26) имеет формальный интеграл вида

$$v_1 + F_1(v_1, v_2) = \mathrm{const}. \tag{29}$$

Очевидно, что этот интеграл независим от интеграла (23). Остается выяснить его аналитичность. Нормальная форма (24) не удовлетворяет условию A, поэтому нельзя гарантировать аналитичность нормализующего преобразования $u_1, y_2, u_3, x_4 \to z_1, z_2, z_3, z_4$, а следовательно, и — аналитичность дополнительного формального интеграла (29). Заметим, что нормальная форма (28) удовлетворяет условию A. Поэтому для аналитической системы (27) нормализующее преобразование $v_1, v_2 \to w_1, w_2$ аналитично.

Итак, в этом случае имеется дополнительный формальный первый интеграл, про аналитичность которого ничего нельзя сказать.

2.5. Сводка результатов. Случаи ребер $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2], [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3], [\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4]$ исследуются аналогично. В них имеется по одной неподвижной точке, в которых собственные числа оказались соизмеримыми, а нормальные формы – линейными, т.е. условия A и ω там оказались выполнены. Следовательно, нормализующее преобразование аналитично и система в каждой из этих точек имеет по 3 независимых аналитических первых интеграла. Результаты вычислений сведены в таблицу 1, где j это номер случая, k – число неподвижных точек, l_f – число формальных интегралов и l_a – число аналитических интегралов. Напомним, что каждому аналитическому интегралу соответствует формальный, таким образом $l_f \geq l_a$.

Таблица 1.

j	Грань	k	Вектор собственных значений Λ	Вид нормальной формы	l_f	l_a
1	$\tilde{\Gamma}$	4	$\pm i(8, 3 - i\sqrt{7}, 3 + i\sqrt{7}, -2)/2\sqrt{2}$	линейный	2	2
2	$\tilde{\Gamma}_2$ $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_4]$	2	$\pm i(2, 0, -1, 0)$	сложный	1	1
3	$\tilde{\Gamma}_4$	2	$\pm i(1, 2, -2, 0)$	сложный	2	≥ 1
4	$[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2]$	1	$(-1, 2, 0, 0)$	линейный	3	3
5	$[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3]$	1	$(-3, 4, -2, 0)/3$	линейный	3	3
6	$[\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4]$	1	$(-1, -4, 0, -1)$	линейный	3	3

Видно, что в случае 2 имеется локальная неинтегрируемость, в случае 3

– неопределенность, а в остальных случаях – локальная интегрируемость.

Замечание. При анализе случаев 2 и 3 выражения для степенных преобразований были вычислены для большей наглядности кустарно. Согласно общей теории [3] сначала нужно вычислить таблицу соответствий для носителя $\{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4\}$, по ней указать нормальные конусы граней и ребер, и по ним составлять степенные преобразования.

Заключение. Отсутствие дополнительного формального интеграла во втором случае доказывает локальную неинтегрируемость системы (13) вблизи неподвижной точки $y_1 = i$, $y_2 = y_3 = x_4 = 0$. Следовательно, отсутствует и глобальная интегрируемость системы (8), что подтверждает известный результат [15].

Список литературы

[1] Брюно А.Д.: Нормальная форма дифференциальных уравнений//ДАН СССР **157**, № 6 (1964) 1276–1279.

[2] Брюно А.Д.: Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 256 с.

[3] Брюно А.Д.: Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

[4] Брюно А.Д.: Расходимость преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме//ДАН СССР **174**, № 5 (1967) 1003–1006.

[5] Брюно А.Д.: Аналитическая форма дифференциальных уравнений//Труды московского математического общества **25** (1971) 119–262.

[6] Брюно А.Д.: Локальная интегрируемость уравнений Эйлера – Пуассона//ДАН **409**, № 3 (2006), 295–299.

[7] Брюно А.Д.: Анализ уравнений Эйлера – Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы//ПММ **71**, № 2 (2007) 192–226.

[8] Брюно А.Д., Еднерал В.Ф.: Вычисление нормальных форм уравнений Эйлера – Пуассона. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 1. Москва, 2007. 17 с.

[9] Брюно А.Д., Еднерал В.Ф.: Об интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона//Фундаментальная и прикладная математика **13**, № 1 (2007) 45–59.

[10] Edneral V.F., Khanin R.: Multivariate Power Series and Normal Form Calculation in *Mathematica*//Proceed. of the Fifth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2002, Big Yalta, Ukraine, September, 2002), ed. by Ganzha et al., Tech. Univ. München, Munich, 2002, pp. 63–70.

[11] Edneral V.F.: On algorithm of the normal form building//Proceed. of the 10th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2007, September 16-20, 2007. Bonn, Germany), ed. by Ganzha et al., Springer-Verlag series: Lecture Notes in Computer Science, LNCS 4770, 2007, pp. 134–142.

[12] Брюно А.Д.: Асимптотическое поведение решений нелинейных систем дифференциальных уравнений//ДАН СССР **143**, № 4 (1962) 763–766.

[13] Брюно А.Д.: Нормальные формы и интегрируемость уравнений Эйлера – Пуассона//Механика твердого тела, Донецк, № 35 (2005), 3–18.

[14] Брюно А.Д.: Ограниченная задача трех тел//М: Наука, 1990. 295 с.

[15] Зиглин С.Л.: Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике//Функц. анализ и прил. **17**, № 1 (1983), 8–23.

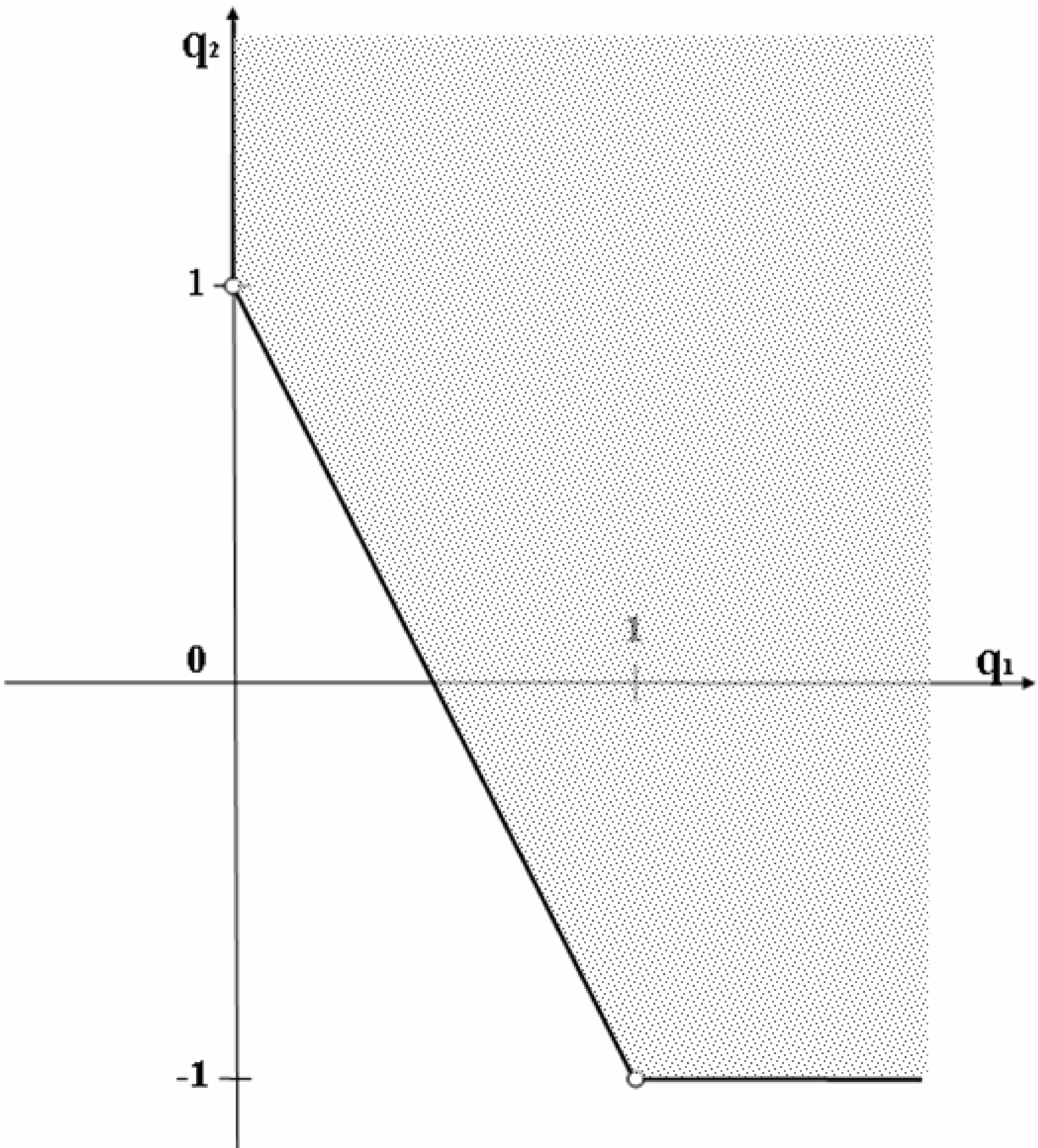

Рис. 1