



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина

Методы, используемые при
исследовании
асимптотических разложений
решений уравнения Р6

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А. Д., Горючкина И. В. Методы, используемые при исследовании асимптотических разложений решений уравнения Р6 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 61. 30 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-61>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ
АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ P_6

Москва, 2007 г.

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Методы, используемые при исследовании асимптотических разложений решений уравнения P6. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Здесь изложены те методы и результаты степенной геометрии, которые используются для исследования асимптотических разложений решений шестого уравнения Пенлеве. Методы степенной геометрии применимы к весьма широкому классу уравнений и систем. Уравнения Пенлеве относятся к сравнительно узкому классу уравнений со своей спецификой. В частности, эта специфика проявляется в том, что степенные асимптотики решений имеют не более одного критического числа и в разложениях отсутствуют кратные логарифмы. Поэтому здесь излагаются только случаи, соответствующие не более чем одному критическому числу и некратному логарифму.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. Methods are used for researching of asymptotic expansions of solutions to the equation P6. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

Here are written methods and results of power geometry which are used to research asymptotic expansions of solutions to the six Painlevé equation. The methods of power geometry are applied to very wide class of equations and systems. The equations of Painlevé relate to comparatively narrow class of equations with their specific character. Particular, this specific character shows up in that the power asymptotic forms have no more than one critical value and multiple logarithms are lacking in expansions. That's why here is written only cases corresponding to no more than one critical value and logarithm.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00050).

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

§1. Степенные асимптотики решений

1.1.1. Основные определения и постановка задачи. Пусть x – независимая и y – зависимая переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x, y)$.

Дифференциальным мономом $a(x, y)$ называется произведение обычного монома

$$cx^{r_1}y^{r_2}, \quad (1.1.1)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, и конечного числа производных вида

$$d^l y/dx^l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (1.1.2)$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \quad (1.1.3)$$

называется *дифференциальной суммой*.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \quad (1.1.4)$$

где $f(X)$ – дифференциальная сумма, в которую y входит в целых степенях. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \rightarrow 0, \\ 1, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$ и решение уравнения (1.1.4) имеет вид

$$y = c_r x^r + o(|x|^{r+\epsilon}), \quad (1.1.6)$$

где коэффициент $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, показатели степени $r, \epsilon \in \mathbb{R}$ и $\omega\epsilon < 0$. Тогда выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \quad (1.1.7)$$

является *степенной асимптотикой* решения (1.1.6).

Задача 1.1.1. Для заданного уравнения (1.1.4) найти все степенные асимптотики (1.1.7) его решений вида (1.1.6).

Для решения задачи 1.1.1 степенная геометрия дает теорию и алгоритмы, основанные на выделении укороченных уравнений.

1.1.2. Выделение укороченных уравнений. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам. Для монома вида (1.1.1) имеем $Q(cX^R) = R$, т. е. $Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2)$; для производной (1.1.2) имеем $Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1)$; при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы

$Q(a_1a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму (1.1.3), называется *носителем суммы* $f(X)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Через $f_Q(X)$ обозначим сумму тех мономов $a_i(X)$ из (1.1.3), у которых $Q(a_i) = Q$. Тогда дифференциальную сумму (1.1.3) можно записать в виде

$$f(X) = \sum f_Q(X) \text{ по } Q \in \mathbf{S}(f).$$

Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний – ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \text{ по } Q(a_i) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}. \quad (1.1.8)$$

Пусть плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1q_1 + p_2q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в плоскости \mathbb{R}_*^2 соответствует свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{array}{l} \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \\ \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Пусть вектор N_j – это внешняя нормаль к ребру $\Gamma_j^{(d)}$. Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальный конус – это луч, который направлен от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ наружу многоугольника $\Gamma(f)$ и натянут на вектор N_j . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ – это открытый сектор (угол) на плоскости \mathbb{R}_*^2 с вершиной в нуле $P = 0$, ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в \mathbb{R}_*^2 и укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0. \quad (1.1.9)$$

Теорема 1.1.1 [3, гл. VI, теорема 1.1]. *Если уравнение (1.1.4) имеет решение (1.1.6) и $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укорочение (1.1.7) решения (1.1.6) является решением укороченного уравнения (1.1.8), (1.1.9).*

Поэтому для нахождения всех укороченных решений (1.1.7) уравнения (1.1.4) надо вычислить: носитель $\mathbf{S}(f)$, многоугольник $\Gamma(f)$, все его грани $\Gamma_j^{(d)}$, нормальные конусы ребер $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и нормальные конусы вершин $\mathbf{U}_j^{(0)}$. Затем для каждого укороченного уравнения (1.1.8), (1.1.9) надо найти все

его решения (1.1.7), у которых один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 0$, то это означает, что один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 1$, то это свойство всегда выполнено.

1.1.3. Решение укороченного уравнения. Здесь рассмотрим по отдельности два случая: вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (1.1.9) с точечным носителем Q и с $d = 0$. Положим $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(X)$, тогда решение (1.1.7) уравнения (1.1.9) удовлетворяет уравнению $g(X) = 0$. Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, получаем, что $g(x, cx^r)$ не зависит от x и c и является многочленом от r , т. е. $g(x, cx^r) \equiv \chi(r)$, где $\chi(r)$ – *характеристический многочлен* дифференциальной суммы $\hat{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, для решения (1.1.7) уравнения (1.1.9) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \quad (1.1.10)$$

а коэффициент c_r – произвольный. Из корней r_i уравнения (1.1.10) надо отобрать только те, для которых один из векторов $\omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$, лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. При этом значение ω определяется однозначно. Соответствующие выражения (1.1.7) с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (1.1.4).

Укороченное уравнение (1.1.9) называется *алгебраическим*, если оно не содержит производных.

Замечание 1.1.1 [3]. Если укороченное уравнение (1.1.9) с $d = 0$ является алгебраическим, то оно не имеет решений вида (1.1.7). Поэтому укорочения, состоящие из одного алгебраического монома, можно не рассматривать.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (1.1.9) с $d = 1$, нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(1)}$ которого является лучом $\{\lambda N_j, \lambda > 0\}$. Включением $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$ однозначно определяются показатель степени r укороченного решения (1.1.7) и значение $\omega = \pm 1$ в (1.1.5). Для определения коэффициента c_r надо выражение (1.1.7) подставить в укороченное уравнение (1.1.9). После сокращения на некоторую степень x получаем алгебраическое *определяющее уравнение* для коэффициента c_r

$$\tilde{f}_j(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \quad (1.1.11)$$

Каждому его корню $c_r = c_r^{(i)} \neq 0$ соответствует свое выражение (1.1.7), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения

(1.1.4). При этом согласно (1.1.5), если в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$ координата $p_1 < 0$, то $x \rightarrow 0$, а если $p_1 > 0$, то $x \rightarrow \infty$.

Итак, каждое укороченное уравнение (1.1.9) имеет несколько подходящих решений (1.1.7) с $\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$. Объединим их в непрерывные по ω , r , c_r и параметрам уравнения (1.1.4) семейства.

Если нас интересуют не все решения (1.1.6) уравнения (1.1.4), а только те, у которых $\omega(1, r)$ лежит в некотором заданном конусе \mathcal{K} , то \mathcal{K} называется *конусом задачи* [3, гл. I, § 6]. Например, для укороченного уравнения (1.1.9) нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ является конусом задачи, если нет других ограничений.

1.1.4. Критические числа укороченного решения. Если найдено укороченное решение (1.1.7), то замена

$$y = c_r x^r + z, \quad (1.1.12)$$

приводит уравнение (1.1.4) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_r x^r + z) = 0, \quad (1.1.13)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ – дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее носителя $\mathbf{S}(\tilde{f})$ имеют целую неотрицательную координату q_2 . К уравнению (1.1.13) можно применить описанные выше вычисления (т. е. носителя, многоугольника, укорочений и т.д.) и получить для решения (1.1.6) следующий член разложения $c_{k_0} x^{k_0}$, у которого $k_0 > r$, если $x \rightarrow 0$, и $k_0 < r$, если $x \rightarrow \infty$. Следовательно, получилась задача 1.1.1 для уравнения (1.1.13), но теперь с конусом задачи

$$\mathcal{K} = \{k = p_2/p_1 : k\omega < r\omega, p_1\omega > 0\}. \quad (1.1.14)$$

Однако во многих случаях дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z)$ имеет специальный вид, что позволяет существенно сократить вычисления разложений решения (1.1.6). Предположим, что уравнение (1.1.13) имеет вид

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (1.1.15)$$

где $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2 \geq 0$ и нет точки $Q = (v, 1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P = (p_1, p_2)$ с $p_1\omega > 0$.

По аналогии с известной в функциональном анализе производной Фреше [28] мы введем формальную *производную Фреше* (или *первую вариацию*)

$\delta f(x, y)/\delta y$ дифференциальной суммы $f(x, y)$, которая обладает следующими свойствами и определяется ими:

$$\delta(cx^{q_1}y^{q_2})/\delta y = cq_2x^{q_1}y^{q_2-1}, \quad \delta(d^l y/dx^l)/\delta y = d^l/dx^l,$$

$$\delta(f + g)/\delta y = \delta f/\delta y + \delta g/\delta y, \quad \delta(fg)/\delta y = (\delta f/\delta y)g + f(\delta g/\delta y).$$

Согласно второму свойству первая вариация – это линейный дифференциальный оператор, т. е. имеет вид

$$\sum_{k=0}^l g_k(x, y) \frac{d^k}{dx^k}, \quad (1.1.16)$$

где $g_k(x, y)$ суть дифференциальные суммы.

Теорема 1.1.2 [32, 4]. Пусть (1.1.7) – решение укороченного уравнения (1.1.9) с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$. Тогда в уравнении (1.1.15) оператор

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\delta \hat{f}_j^{(d)}(x, y)}{\delta y} \quad \text{на } y = c_r x^r, \quad (1.1.17)$$

т. е. равен первой вариации, вычисленной на решении (1.1.7). При этом $\mathbf{S}(\mathcal{L}z) = (v, 1)$, где $v = \langle Q_1, (1, r) \rangle - r$ с $Q_1 \in \Gamma_j^{(d)}$.

Следовательно, после подстановки (1.1.13) уравнение (1.1.4) принимает вид (1.1.15), если

$$\mathcal{L}(x) \not\equiv 0.$$

Пусть $\nu(k)$ – характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$, т. е.

$$\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k. \quad (1.1.18)$$

Если $\nu(k) \not\equiv 0$, то корни k_1, \dots, k_s многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями укороченного решения* (1.1.7). Те из вещественных собственных чисел k_i , которые лежат в конусе задачи, т. е. удовлетворяют неравенствам (1.1.14), называются *критическими числами*. Они играют важную роль при нахождении разложения решения (1.1.6), что будет показано в § 2.

Замечание 1.1.2. Степенное решение (1.1.7) алгебраического укороченного уравнения (1.1.9) с $d = 1$ не имеет собственных значений и критических чисел, ибо для него

$$\nu(k) \equiv \nu_0 = \text{const} = \frac{\partial \hat{f}_j^{(1)}}{\partial y}(1, c_r).$$

Если c_r – простой корень уравнения (1.1.11), то $\nu_0 \neq 0$. Если c_r – кратный корень уравнения (1.1.11), то $\nu_0 = 0$.

Если $\mathcal{L}(x) \neq 0$, то $\nu(k) \neq 0$. Если же $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, то для уравнения (1.1.13) с учетом конуса задачи (1.1.14) надо вычислять его решения как описано в пп. 1.1.2, 1.1.3.

1.1.5. Асимптотики с комплексными показателями степени. Рассмотрим решения вида

$$y = c_\rho x^\rho + o(|x|^{r+\epsilon}), \quad c_\rho \neq 0 \quad (1.1.19)$$

с комплексным показателем $\rho = r + is$, где $\epsilon\omega < 0$. Их асимптотики имеют вид

$$y = c_\rho x^\rho, \quad c_\rho \neq 0. \quad (1.1.20)$$

Для таких решений справедливо все сказанное в предыдущих пунктах, если $r = \operatorname{Re} \rho$.

Уточним только, что решения вида (1.1.20) укороченного уравнения (1.1.9) возникают только для вершин $\Gamma_j^{(0)}$, т. е. для $d = 0$. В этом случае характеристическое уравнение (1.1.10) может иметь комплексные корни, которые обозначим ρ_1, \dots, ρ_l . Подходящим корнем ρ_i является такой, для которого один из векторов $\pm(1, \operatorname{Re} \rho_i)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$. Если вместо (1.1.12) сделать замену

$$y = c_\rho x^\rho + z, \quad (1.1.21)$$

то дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_\rho x^\rho + z)$ будет содержать обычные мономы вида $cx^{r_1}z^{r_2}$ с комплексными r_1 . Теорема 1.1.2 сохраняется, только первую вариацию надо вычислять на решении (1.1.20). Характеристический многочлен $\nu(k)$ также определяется по (1.1.18). Его корни k_i также являются собственными значениями укороченного решения (1.1.20). Те из них, у которых вещественные части $\operatorname{Re} k_i$ лежат в конусе задачи, т. е. удовлетворяют неравенствам (1.1.14), называются критическими числами укороченного решения (1.1.20).

Для укороченного уравнения (1.1.9), соответствующего ребру $\Gamma_j^{(1)}$, ищутся только решения (1.1.7) с вещественным показателем r , который однозначно определяется нормалью к этому ребру. Решения же вида (1.1.20) с комплексным ρ , $\operatorname{Re} \rho = r$ и $\operatorname{Im} \rho \neq 0$ приводят к степенным разложениям (3), у которых имеется бесконечно много членов $c_s x^s$ с фиксированным $\operatorname{Re} s$. Поэтому их не рассматриваем.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда имеется не более одного критического числа.

§2. Степенные и степенно-логарифмические разложения

1.2.1. Постановка задачи. Если для уравнения (1.1.15) с $\nu(k) \neq 0$ искать решения в виде степенного ряда

$$z = \sum c_k x^k, \quad \omega k < \omega r, \quad (1.2.1)$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$, то согласно [4] такое разложение решений существует только при определенных условиях. При этом основное условие это отсутствие критических значений. Если же не накладывать этих условий, то получаются разложения вида (1.2.1), где c_k суть многочлены от $\ln x$.

Рассмотрим уравнение (1.1.15), т. е.

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (1.2.2)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ – дифференциальная сумма, в которую z входит в целых неотрицательных степенях, $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор.

Задача 1.2.2. Для уравнения (1.2.2) найти все разложения его решений вида

$$z = \sum \beta_k (\ln x) x^k,$$

где β_k суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами и показатели k или $\text{Re } k$ лежат в конусе задачи (1.1.14), если он есть.

1.2.2. Носитель разложения решения. Для определенности на слагаемые в уравнении (1.2.2) наложим следующие условия.

Условие 1.2.1. Точка $(v, 1)$ является вершиной многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$. В сумме $\tilde{f}(x, z)$ ей соответствует слагаемое $\mathcal{L}(x)z$ и только оно.

Если уравнение (1.2.2) получено из (1.1.4) и $\mathcal{L} \neq 0$, то это условие выполняется автоматически. Если это условие выполнено, то дифференциальная сумма $\mathcal{L}(x)z$ имеет характеристический многочлен (1.1.18) и $\nu(k) \neq 0$.

Параллельно сдвинем носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ на вектор $(-v, -1)$. Тогда вершина $(v, 1)$, соответствующая члену $\mathcal{L}(x)z$, перейдет в начало координат. Пусть задано такое число r , что для всякой точки $Q' \in \mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ скалярное произведение $\langle \omega R, Q' \rangle \geq 0$, где $R = (1, r)$. Пусть вещественное число k_1 удовлетворяет неравенству $k_1 \omega < r \omega$ из (1.1.14). Пусть $\mathbf{S}'_+(k_1)$ – множество конечных сумм векторов $Q' \in \mathbf{S}'$ и вектора $(k_1, -1)$. Обозначим

$$\mathbf{K}(k_1) = \mathbf{S}'_+(k_1) \cap \{q_2 = -1\}. \quad (1.2.3)$$

Предложение 1.2.1 [8]. Множество $\mathbf{K}(k_1)$ не имеет точек накопления в \mathbb{R} , если носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ не имеет точек накопления в \mathbb{R}^2 .

Предложение 1.2.2 [8]. Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ – такая вершина многоугольника $\Gamma(f)$ уравнения (1.1.4), что соответствующее укороченное уравнение (1.1.9) имеет решение (1.1.7) с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(0)}$ и все точки сдвинутого носителя $\mathbf{S}(f) - \Gamma_j^{(0)}$ представляются в виде $\sum_{i=1}^n l_i M_i$, где целые $l_i \geq 0$, а $M_i \in \mathbb{R}^2$ – некоторые вектора. Тогда для множества \mathbf{K} уравнения (1.2.2) справедливо включение

$$\mathbf{K} \subset \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i, \text{ целые } l_i \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

где $r_i = \langle (1, r), M_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Предложение 1.2.3. Если множество

$$\mathbf{K} = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i, \text{ целые } l_i \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

то множество (1.2.3) имеет вид

$$\mathbf{K}(k_1) = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i + m(k_1 - r), \text{ целые } l_i, m \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i + m > 0 \right\}.$$

1.2.3. Вычисление разложений.

Теорема 1.2.1 [8]. Если уравнение (1.2.2) удовлетворяет условию 1.2.1, то оно имеет формальное решение

$$z = z^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \beta_k(\ln x) x^k, \quad k \in \mathbf{K}(k_1), \quad (1.2.4)$$

где $\beta_k(\ln x)$ суть многочлены от $\ln x$ и k_1 – критическое число укороченного решения (1.1.7).

Действительно, двигаясь по точкам k множества (1.2.3) в направлении возрастания $-\omega(k - r)$, для каждого коэффициента β_k из (1.2.4) получаем линейное уравнение

$$\mathcal{L}(x) \beta_k x^k + \theta_k x^{k+v} = 0, \quad (1.2.5)$$

где θ_k – многочлен от коэффициентов β_j и их производных с $-\omega j - r) < -\omega(k - r)$, т. е. $-\omega j < -\omega k$. Кроме того, коэффициент θ_k зависит от

коэффициентов суммы h в (1.2.2). На самом деле, θ_k это коэффициент при x^{k+v} в сумме

$$h \left(x, \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j \right). \quad (1.2.6)$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех β_j с $-\omega j < -\omega k$. Тогда θ_k является многочленом от $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x$.

Лемма 1.2.1 [8]. Уравнение (1.2.5) эквивалентно линейному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{N}_k(\xi)\beta_k(\xi) + \theta_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{1}{m!} \nu^{(m)}(k) \beta_k^{(m)}(\xi) + \theta_k(\xi) = 0, \quad (1.2.7)$$

$$\text{где } \nu^{(m)}(k) = \left. \frac{d^m \nu(q)}{dq^m} \right|_{q=k}, \quad \beta_k^{(m)} = \frac{d^m \beta_k(\xi)}{d\xi^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $\mu(k)$ – наименьшее значение m , для которого $\nu^{(m)}(k) \neq 0$, и $\lambda(k)$ – степень многочлена $\theta_k(\xi)$; при этом $\lambda(k) = -1$, если $\theta_k \equiv 0$.

Лемма 1.2.2 [8]. Пусть $\theta_k(\xi)$ – многочлен степени $\lambda(k)$, тогда уравнение (1.2.7) имеет решение $\beta_k(\xi)$, являющееся многочленом степени $\mu(k) + \lambda(k)$ и содержащее $\mu(k)$ произвольных коэффициентов.

Замечание 1.2.3. Зная оператор $\mathcal{L}(x)$ и носитель $\mathbf{K}(k_1)$ разложения (1.2.4), можно вычислять его коэффициенты прямо по исходному уравнению $f(x, y) = 0$, ибо коэффициент при x^k в сумме (1.2.6) совпадает с коэффициентом при x^{k+v} в сумме

$$f \left(x, c_r x^r + \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j \right).$$

Следовательно, вычислив начальный отрезок разложения

$$y = c_r x^r + \sum \beta_j x^j$$

и подставив его в $f(x, y)$, получаем функцию θ_k в уравнении (1.2.7). В сложных случаях это уравнение можно решать так, как описано в пояснении к лемме 1.2.2.

Говорят, что для критического числа k_1 выполнено *условие совместности*, если для $k = k_1$ в уравнении (1.2.5) $\theta_k \equiv 0$.

Следствие 1.2.1. Пусть в уравнении (1.2.5) θ_k – многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$.

Если в уравнении (1.2.5) число k не является критическим и $\theta_k = \text{const}$, то уравнение (1.2.5) сводится к уравнению

$$\nu(k)\beta_k + \theta_k = 0, \quad (1.2.8)$$

которое имеет решение $\beta_k = -\theta_k/\nu(k)$.

Аналогично, если θ_k многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$ и $\nu(k) \neq 0$, тогда существует решение уравнения (1.2.5), где β_k многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$.

Если в уравнении (1.2.5) число k – единственное некратное критическое число и $\theta_k = \text{const}$, то β_k ищем в виде $\beta_k = \alpha_k + \gamma_k \ln x$ и для него уравнение (1.2.5) принимает вид

$$\nu'(k)\gamma_k + \theta_k = 0. \quad (1.2.9)$$

Оно имеет решение $\gamma_k = -\theta_k/\nu'(k)$. При этом α_k произвольное число. Если $\theta_k = 0$ (т. е. выполняется условие совместности), тогда $\gamma_k = 0$ и $\beta_k = \alpha_k$ – произвольная постоянная. Следовательно, в этом случае логарифмов не возникает.

Как правило, удается вычислить не все разложение (1.2.4), а только его начальный отрезок. При этом желательно, чтобы этот отрезок содержал критическое значение k_1 . Тогда он содержит все произвольные постоянные разложения.

1.2.4. Степени логарифмов в разложении. Очевидно, что степень $\text{ord } \beta_k(\xi)$ многочленов β_k растет вместе с ростом $-\omega(k-r)$. Оценим ее сверху. Положим $\varkappa(j) = \mu(j)/|j-r|$ и $q^* = \max q_2$ по $(q_1, q_2) \in \mathbf{S}(\tilde{f})$.

Теорема 1.2.2 [8] Если в уравнении (1.2.2) нет логарифмов, то в решении (1.2.4)

$$\text{ord } \beta_k \leq q^*|k-r| \sum_{0 < -\omega(j-r) < -\omega(k-r)} \varkappa(j), \quad (1.2.10)$$

где $j, k \in \mathbf{K}(k_1)$.

Замечание 1.2.4. В ситуации теоремы 1.2.2 разложение (1.2.4) может содержать логарифм $\ln x$ только в двух случаях: а) если в множестве \mathbf{K} лежит критическое число k_1 , для которого не выполнено условие совместности; б) если число k_1 – кратное критическое число (в нашем случае это не встречается). Это согласуется с результатами из [4].

1.2.5. Решетка носителя разложения. Дискретное множество \mathbf{Z} в \mathbb{R}^n называется *решеткой*, если оно замкнуто относительно векторных сложения и вычитания. Векторы B_1, \dots, B_n образуют *базис решетки* \mathbf{Z} , если всякая точка $Q \in \mathbf{Z}$ может быть представлена в виде

$$Q = m_1 B_1 + \dots + m_n B_n, \quad \text{где все } m_i \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.2.3. [4]. Если множество $\mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(f) - (v, 1)$ и точка $(k_1, -1)$ лежат в некоторой решетке \mathbf{Z} , то множество

$$\mathbf{K}(k_1) \subset \mathbf{Z} \cap \{q_2 = -1\}.$$

1.2.6. Вычисление второго приближения. Пусть известны укороченное уравнение (1.1.9), его подходящее решение (1.1.7) и его критическое число k_1 . Покажем, как находится ближайшая к r точка s_0 множества \mathbf{K} . Пусть вектор $P = \omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$ (см. (1.1.5)), направлен наружу многоугольника $\Gamma(f)$. Пусть $\mu = \langle P, Q \rangle$ и $\mu' = \max \langle P, Q' \rangle$, где $Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}$, $Q' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)}$.

Теорема 1.2.4 [15]. Ближайшая к r точка s_0 такова, что

$$|s_0 - r| = \mu - \mu'.$$

Если критическое значение k_1 отсутствует или оно таково, что $|k_1 - r| > \mu - \mu'$, то можно вычислить коэффициент c_{s_0} следующим образом. Выделим в дифференциальной сумме $f(x, y)$ второе приближение

$$\hat{f} = \sum f_Q(x, y) \text{ по } Q : \langle P, Q \rangle = \mu',$$

сделаем подстановку $y = c_r x^r + c_{s_0} x^{s_0}$ в сумму

$$\hat{f}_j^{(d)} + \hat{f} \tag{1.2.11}$$

и приведем подобные члены. Приравнявая нулю коэффициент при $x^{\mu'\omega}$ в сумме (1.2.11), получаем линейное уравнение $\nu(s_0)c_{s_0} + b_{s_0} = 0$, где b_{s_0} — это коэффициент суммы $\hat{f}(x, c_r x^r)$ при $x^{\mu'\omega}$.

Если имеется критическое значения k_1 такое, что $|k_1 - r| < \mu - \mu'$, то $s_0 = k_1$ и коэффициент c_{s_0} произвольный.

1.2.7. Комплексные показатели. Пусть число k_1 комплексное, у которого вещественная часть $\text{Re } k_1$ лежит в конусе задачи (1.1.14), т. е. $\omega \text{Re } k_1 < \omega r$. В этом случае множество $\mathbf{S}'_+(k_1)$ содержит точки $Q = (q_1, q_2)$, у которых $q_1 \in \mathbb{C}$, $q_2 \in \mathbb{Z}$, а \mathbf{K} — это множество на комплексной плоскости $q_1 \in \mathbb{C}$. Тогда теорема 1.2.1 остается справедливой, только в разложении

(1.2.4) показатели k частично упорядочены по росту $-\omega(\operatorname{Re} k - r)$. Все дальнейшие утверждения пп. 2.2 – 2.5 также остаются справедливыми.

Если же в уравнении (1.2.2) имеются x^{r_1} с комплексным показателем r_1 , то носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ лежит в прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$. Но при построении многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$ учитываются только $\operatorname{Re} q_1$, т. е. $\operatorname{Re} \mathbf{S}(\tilde{f})$. Все дальнейшие конструкции и результаты сохраняются. Разложения решений (1.2.1) с комплексными показателями k рассматривались в [33].

1.2.8. Существование решений. Если для уравнения (1.2.2) разложение (1.2.4) сходится при достаточно малых $|x|^{-\omega}$, то этому разложению соответствует решение уравнения (1.2.2). Для дифференциальной суммы \tilde{f} в (1.2.2) и степенного разложения (1.2.4) условия его сходимости приведены в [4, 32]. Максимальный порядок производной в дифференциальной сумме $f(x, z)$ назовем ее *порядком дифференцирования* и обозначим $\pi(f)$.

Теорема 1.2.5 [8]. *Для дифференциальной суммы \tilde{f} уравнения (1.2.2) степенное разложение его решения (1.2.4) сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega} \neq 0$, если*

$$\pi(\mathcal{L}z) = \pi(\tilde{f}).$$

Очевидно, что $\pi(\tilde{f}) = \pi(f)$, но, вообще говоря, $\pi(\mathcal{L}z) \leq \pi(\hat{f})$, хотя строгое неравенство здесь имеется только в вырожденных случаях.

Если дифференциальное уравнение (1.2.2) и разложение (1.2.4) вещественны, то у уравнения (1.2.2) всегда существует такое вещественное решение, для которого ряд (1.2.4) является асимптотическим разложением. Вообще говоря, такое решение не единственно. Даже разложение с комплексными показателями может быть вещественным для вещественных значений переменной.

§3. Нестепенные асимптотики решений

1.3.1. Основные определения и постановка задачи. Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *слабо (асимптотически) эквивалентными*, если

$$\psi(x)/\varphi(x) \rightarrow 1.$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *слабой асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот. Обозначим k -кратные экспоненту и логарифм через $\exp^{(k)} x$ и $\ln^{(k)} x$ соответственно, т. е.

$$\exp^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\exp(\dots(\exp x)\dots)) \text{ и } \ln^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \ln(\ln(\dots(\ln x)\dots)).$$

Задача 1.3.3. *Для решений уравнения (1.1.4), где $f(x, y)$ – дифференциальная сумма, найти все (слабые) асимптотики вида*

$$y = cx^r (\exp x)^{s_1} \dots (\exp^{(k)} x)^{s_k} (\ln x)^{t_1} \dots (\ln^{(l)} x)^{t_l}, \quad (1.3.1)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$; $r, s_i, t_i = \text{const} \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C} .

В § 1 изложен метод вычисления всех степенных асимптотик, т. е. вида (1.1.7). Поэтому здесь сосредоточимся на вычислении всех *нестепенных асимптотик* решений (1.3.1), т. е. не имеющих вида (1.1.7).

Порядком функции $\varphi(x)$ называется число

$$r = \lim \frac{\ln |\varphi(x)|}{\ln |x|} \in [-\infty, +\infty],$$

если предел существует. Очевидно, что слабо эквивалентные функции имеют одинаковый порядок.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *сильно (асимптотически) эквивалентны*, если

$$\varphi(x) = \psi(x)[1 + o(|x|^{\omega\epsilon} |\psi(x)|^{\omega_2\epsilon})]$$

для некоторого $\epsilon < 0$, где

$$\omega_2 = \begin{cases} -1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow 0, \\ 0, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \text{const} \neq 0, \\ 1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *сильной асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот.

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.1.4), и функция $\varphi(x)$ имеет порядок r . Тогда *нормальным конусом \mathbf{u}* этого решения является луч

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \lambda(0, -1), & \text{если } r = -\infty; \\ \lambda\omega(1, r), & \text{если } r \in \mathbb{R}; \\ \lambda(0, 1), & \text{если } r = +\infty, \lambda > 0. \end{cases}$$

Понятие *конус задачи* применимо и к решениям с так определенным нормальным конусом \mathbf{u} .

Теорема 1.3.1 [3, гл. VI, теорема 1.1]. *Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1.4) имеет нормальный конус \mathbf{u} , то укороченное уравнение (1.1.9), для которого $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$, имеет сильно асимптотически эквивалентное решение $y = \psi(x)$.*

Таким образом, для вычисления всех (слабых) асимптотик решений уравнения (1.1.4) требуется выделить укороченные уравнения и их нормальные конусы, что приводит к конечному числу следующих задач.

Задача 1.3.4. *Для укороченного уравнения (1.1.9) найти все (слабые) асимптотики его решений $y = \psi(x)$ вида (1.3.1) с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.*

Согласно п. 1.1.1 уравнению (1.1.4) соответствует многоугольник $\Gamma(f)$, а укороченному уравнению (1.1.9) – его ребро или вершина $\Gamma_j^{(d)}$. Ниже рассмотрим по отдельности 3 способа редукции задачи 1.3.4: два для ребра (в зависимости от его наклона) и один для вершины.

Замечание 1.3.5. Алгебраическое укороченное уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т. е. не дает нестепенных асимптотических решений уравнения (1.1.4).

1.3.2. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Если ребро $\Gamma_j^{(1)}$ вертикально, то его нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \lambda\omega(1, 0), \quad \lambda > 0, \quad (1.3.2)$$

и у всех точек $Q = (q_1, q_2) \in \Gamma_j^{(1)}$ координата q_1 одинакова. Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} \hat{f}_j^{(d)}(x, y), \quad (1.3.3)$$

тогда носитель $\mathbf{S}(g)$ лежит на координатной оси $q_1 = 0$. Согласно (1.3.2) все степенные решения (1.1.7) с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$ являются постоянными $y = y^0 = \text{const}$, где y^0 – корень определяющего уравнения

$$\tilde{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(0, y) = 0. \quad (1.3.4)$$

Корень y^0 уравнения (1.3.4) называется *кратным*, если в нем производная $d\tilde{g}(y)/dy$ равна нулю.

Для отыскания нестепенных решений уравнения (1.1.9) сделаем *логарифмическое преобразование*

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x. \quad (1.3.5)$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(\xi, y) = 0. \quad (1.3.6)$$

Из (1.3.5) видно, что $\xi \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, т. е. для уравнения (1.3.6) получаем задачу 3 с конусом задачи

$$p_1 \geq 0. \quad (1.3.7)$$

Теорема 1.3.2 [8, §5]. *Конечные предельные значения $y^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (1.3.6) являются кратными решениями уравнения (1.3.4).*

Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q'_1, q''_2)$, где целые $q'_2 < q''_2$. Будем говорить, что уравнение (1.3.4) имеет *бесконечный корень*, если степень многочлена в (1.3.4) меньше q''_2 ; и имеет *нулевой корень*, если у многочлена в (1.3.4) наименьшая степень по y больше q'_2 .

Теорема 1.3.3 [8, § 5]. *Если уравнение (1.3.4) не имеет бесконечного (нулевого) корня, то уравнение (1.3.6) не имеет решений, стремящихся к бесконечности (нулю).*

Следовательно, если уравнение (1.3.4) не имеет кратных корней, а также бесконечного и нулевого корней, то уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т. е. преобразование (1.3.5) и дальнейшие исследования делать не нужно. В противном случае надо сделать преобразование (1.3.5) и рассмотреть уравнение (1.3.6).

Заметим, что укорочение уравнения (1.3.6) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (1.3.4), т. е. $\tilde{g}(y) \equiv \hat{h}(\xi, y)$. Для нахождения решений уравнения (1.3.6) с бесконечными и нулевыми предельными значениями y надо для уравнения (1.3.6) выделить укороченные уравнения, соответствующие конусу задачи (1.3.7). Для нахождения решений уравнения (1.3.6) с конечными предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (1.3.4). Пусть y^0 — такой кратный корень. Тогда параллельным сдвигом $y = y^0 + z$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (1.3.6) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, z) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, y^0 + z) = 0. \quad (1.3.8)$$

Теперь для уравнения (1.3.8) надо выделять его укороченные уравнения с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 1.3.3.

Итак, для вертикального ребра здесь был описан один шаг, позволяющий найти все степенные решения уравнения (1.1.9) и для нахождения нестепенных асимптотик его решений сводящий задачу 1.3.4 к конечному числу задач 1.3.3.

1.3.3. Случай горизонтального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. В этом случае у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ координата q_2 одинакова. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-q_2} \hat{f}_j^{(1)}(x, y) \quad (1.3.9)$$

и сделаем логарифмическое преобразование

$$\eta = d \ln y / dx. \quad (1.3.10)$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом преобразовании дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$

и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(x, \eta) = 0. \quad (1.3.11)$$

Теперь для уравнения (1.3.11) получаем задачу 1.3.3 с конусом задачи

$$p_1 + p_2 \geq 0.$$

Сумму порядков всех производных, входящих в дифференциальный моном $a(x, y)$, назовем *суммарным порядком дифференцирования монома* $a(x, y)$ и обозначим $\Delta(a)$. Для дифференциальной суммы (1.1.3) *суммарный порядок дифференцирования*

$$\Delta(f) = \max_i \Delta(a_i).$$

Пусть Ω_j – степень характеристического многочлена $\chi_j(r)$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q''_1, q'_2)$ с $q'_1 < q''_1$.

Теорема 1.3.4 [8, §5]. *Если $\Omega_{j-1} = \Delta(\hat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)})$ (или $\Omega_j = \Delta(\hat{f}_j^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)})$), то уравнение (1.3.11) не имеет подходящих решений при $x \rightarrow 0$ (или $x \rightarrow \infty$).*

Следовательно, если $\Omega_{j-1} = \Delta(\hat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(0)}) = \Omega_j$, то преобразование (1.3.10) и дальнейшее исследование делать не надо.

1.3.4. Случай вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(x, y), \quad (1.3.12)$$

тогда $\mathbf{S}(g) = \{0\}$. Степенные решения $y = cx^r$ уравнения $g(x, y) = 0$ имеют произвольную постоянную c и показатель r , удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0. \quad (1.3.13)$$

Для нахождения нестепенных решений сделаем логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln x, \quad \eta = d \ln y / d \ln x. \quad (1.3.14)$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(\xi, \eta) = 0. \quad (1.3.15)$$

Из (1.3.14) видно, что $\xi \rightarrow \infty$, т. е. $p_1 \geq 0$. Таким образом, для уравнения (1.3.15) получаем задачу 1.3.3 с конусом задачи $p_1 \geq 0$, $p_1 + p_2 \geq 0$.

Теперь заметим, что согласно (1.3.14) степенному решению (1.1.7) уравнения (1.1.9) соответствует постоянное решение

$$\eta = r = \text{const} \quad (1.3.16)$$

уравнения (1.3.15).

Теорема 1.3.5 [8, § 5]. *Конечные предельные значения $\eta^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (1.3.15) являются кратными корнями уравнения (1.3.13).*

Пусть $\Delta(g(x, y)) = k$. Обозначим через $g^*(x, y)$ сумму всех тех дифференциальных мономов суммы $g(x, y)$, у которых суммарный порядок дифференцирования равен k , т. е. максимальный в $g(x, y)$. Через $\text{coef}(g^*)$ обозначим сумму всех числовых коэффициентов в дифференциальных мономах суммы $g^*(x, y)$.

Теорема 1.3.6 [8, § 5]. *Если дифференциальная сумма $g(x, y)$ из (1.3.12) содержит ненулевую постоянную (или для нее $\text{coef}(g^*) \neq 0$), то уравнение (1.3.15) не имеет решений, стремящихся к нулю (или к бесконечности).*

Следствие 1.3.2. *Если характеристический многочлен $\chi_j(r)$ для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ не имеет таких кратных корней r , для которых хотя бы один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$, и, если один из векторов $\pm(0, 1)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(0)}$, то $\Omega_j = \Delta(\hat{f}_j^{(0)})$, т. е. многочлен $\chi_j(r)$ не имеет бесконечного корня, тогда вершине $\Gamma_j^{(0)}$ не соответствуют нестепенные асимптотики.*

Следовательно, если для $\hat{f}_j^{(0)}(x, y)$ характеристическое уравнение не имеет кратных корней, сумма $g(x, y)$ имеет ненулевой свободный член и $\text{coef}(g^*) \neq 0$, то уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений.

Заметим, что укорочение уравнения (1.3.15) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (1.3.13), т. е. $\chi(\eta) \equiv \hat{h}(\xi, \eta)$. Для нахождения решений уравнения (1.3.15) с бесконечными и нулевыми предельными значениями надо для уравнения (1.3.15) выделять укороченные уравнения, у которых нормальный конус пересекается с конусом задачи $p_1 \geq 0$, $p_1 + p_2 \geq 0$, и т. д. Для нахождения решений уравнения (1.3.15) с конечными ненулевыми предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (1.3.13). Пусть η^0 – такой корень. Параллельным переносом $\eta = \eta^0 + \zeta$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (1.3.15) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, \eta^0 + \zeta) = 0. \quad (1.3.17)$$

Теперь надо выделять укорочения уравнения (1.3.17) с конусом задачи $p_1 \geq 0$, $p_2 \leq 0$. Это опять задача 1.3.3.

§4. Сложные разложения

1.4.1. Постановка задачи. Ранее было показано как у укороченного уравнения (1.1.9) находить нестепенные решения

$$y = x^r \varphi_r(\ln x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

которые могут служить нестепенными асимптотиками решений полного уравнения (1.1.4). При этом φ_r разлагается в ряд по степеням $\ln x$:

$$\varphi_r = \gamma_\rho (\ln x)^\rho + \sum \gamma_\sigma (\ln x)^\sigma, \quad \sigma < \rho, \quad (1.4.2)$$

где $\gamma_\rho = \text{const}$ и коэффициенты γ_σ либо постоянны, либо являются многочленами от кратных логарифмов (которые здесь не встречаются).

Задача 1.4.5. Для нестепенной асимптотики (1.4.1), (1.4.2), являющейся решением укороченного уравнения (1.1.9) и имеющей $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, найти разложение соответствующего решения полного уравнения (1.1.4)

$$y = \varphi_r x^r + \sum \varphi_s x^s, \quad \omega s < \omega r, \quad (1.4.3)$$

где φ_s – ряды по убывающим степеням кратных логарифмов.

Здесь излагается решение этой задачи для случая, когда укороченное уравнение (1.1.9) соответствует вершине или негоризонтальному ребру и удовлетворяет некоторому ограничению (не дает критических чисел для решения (1.4.1), (1.4.2)). Для этого случая будет показано как получить разложение (1.4.3), у которого коэффициенты φ_s разлагаются в ряды по убывающим степеням простого логарифма вида

$$\varphi_s = \sum \varphi_{st} (\ln x)^t, \quad t \leq T(s), \quad (1.4.4)$$

где коэффициенты φ_{st} зависят от кратных логарифмов.

1.4.2. Вычисление критических чисел. Рассмотрим первую вариацию (1.1.16). Это некоторый линейный дифференциальный оператор $\mathcal{M}(x, y)$, коэффициенты которого суть дифференциальные суммы. Сделаем в нем степенное преобразование

$$y = x^r z, \quad (1.4.5)$$

где r – то же самое, что и в (1.4.1). Получим оператор

$$\mathcal{N}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(x, y). \quad (1.4.6)$$

Сделаем в нем логарифмическую замену

$$\xi = \ln x. \quad (1.4.7)$$

Тогда

$$\mathcal{N}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^v \tilde{\mathcal{N}}(\xi, z), \quad (1.4.8)$$

где v – это степень по x оператора \mathcal{N} и $\tilde{\mathcal{N}} = \sum_{l=0}^m \pi_l(\xi, z)(d^l/d\xi^l)$ – дифференциальный оператор по ξ , коэффициенты которого суть дифференциальные суммы от ξ, z . В каждый коэффициент π_l согласно (1.4.2) подставим $z = \varphi_r(\xi)$ и выделим члены с наибольшей степенью ξ . Пусть n – наибольшая из всех этих степеней, т. е.

$$\pi_l(\xi, \varphi_r(\xi)) = \alpha_l \xi^n + \dots, \quad \alpha_l = \text{const}, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad \sum_{l=0}^m |\alpha_l| \neq 0. \quad (1.4.9)$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{N}}_n = \xi^n \sum_{l=0}^m \alpha_l \frac{d^l}{d\xi^l}. \quad (1.4.10)$$

Тогда $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}_n + \dots$ *Многочлен*

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^m \alpha_l k^l \quad (1.4.11)$$

назовем *характеристическим* для укороченного решения (1.4.1), (1.4.2). Его корни k_1, \dots, k_m – это собственные числа решения (1.4.1), (1.4.2). Те из них, которые лежат в конусе задачи, т. е. $\omega k_i < \omega r$, являются *критическими числами укороченного решения* (1.4.1), (1.4.2).

1.4.3. Вычисление носителя разложения. Напомним, что если степенная асимптотика (1.1.7) с $r \in \mathbb{R}$ не имеет критических чисел, то в разложении (1.1.6) показатели степени s пробегают множество $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}$. Для нестепенной асимптотики (1.4.1) под \mathbf{K} будем понимать то же самое множество, что и для степенной асимптотики.

Теорема 1.4.1 [9]. *Если укороченное решение (1.4.1), (1.4.2) не имеет критических чисел, то ему соответствует единственное разложение (1.4.3), (1.4.4). При этом показатели s пробегают множество \mathbf{K} , а кратность логарифмов в (1.4.3), (1.4.4) не превосходит наибольшей их кратности в (1.4.1), (1.4.2).*

Теорема 1.4.2 [9]. *Если в ситуации теоремы 1.4.1 у разложений (1.4.2) нет кратных логарифмов, то $T(s) \leq s(\rho q - n)$ в разложениях (1.4.3), (1.4.4), где ρ из (1.4.2), $q = \max q_2$ для точек (q_1, q_2) носителя $\mathbf{S}(f)$, n из (1.4.9).*

Итак, если асимптотика степенная, то в соответствующем разложении (1.1.6) решения исходного уравнения (1.1.4) коэффициенты β_s не более чем многочлены от $\ln x$. Если же асимптотика нестепенная и имеет вид (1.4.1), (1.4.2), то в соответствующем разложении (1.1.6) коэффициенты β_s – это ряды по убывающим степеням $\ln x$, причем их показатели степени не ограничены снизу.

Замечание 1.4.6. Как правило, нахождение всего разложения (1.4.2) требует бесконечного числа шагов, также как и каждого разложения (1.4.4). Однако всегда за конечное число шагов можно вычислить начальные куски разложения (1.4.2) и нескольких первых разложений (1.4.4).

§5. Экзотические разложения

1.5.1. Ряды с чисто мнимыми показателями степени. Будем считать, что комплексная переменная x изменяется на универсальной накрывающей, т. е. $x = \exp(\rho + i\varphi)$, $\rho + i\varphi = \text{Ln } x$, где $i^2 = -1$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$, $\rho = \ln |x|$. Пусть $\alpha = \beta + i\gamma$ – комплексное число, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $\gamma \neq 0$. Тогда степенная функция

$$z^\alpha = \exp(\rho + i\varphi)(\beta + i\gamma) = \exp[\rho\beta - \varphi\gamma + i(\rho\gamma + \varphi\beta)].$$

При этом

$$|x^\alpha| = \exp(\rho\beta - \varphi\gamma). \quad (1.5.1)$$

Вещественная линейная функция $\varphi = a\rho + b$, где $a, b = \text{const} \in \mathbb{R}$, определяет некоторую прямую на универсальной накрывающей. На ней

$$|x^\alpha| = \exp[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma].$$

При $\rho \rightarrow -\infty$ предел

$$\lim[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma] = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ -b\gamma, & \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ +\infty, & \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim |x^\alpha| = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ \text{const} \in \mathbb{R}, & \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ \infty, & \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

При этом $\lim |x| = 0$, но $\lim |x^\alpha| = \infty$, если $\beta < \gamma a$, т. е. $\text{sgn } a = \text{sgn } \beta\gamma$ и $|a| > |\beta|/|\gamma|$. Это означает, что при любых $\gamma \neq 0$ и β на универсальной накрывающей есть такой путь $\varphi = a\rho + b$, что $|x| \rightarrow 0$ и $|x^\alpha| \rightarrow \infty$. В частности, при $\beta = 0$ для этого достаточно равенства $\text{sgn } a = \text{sgn } \gamma$.

Таким образом, степенная функция x^α с комплексным показателем α устроена довольно сложно, если $\varphi = \arg x$ меняется неограниченно в обе стороны. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что φ ограничено с одной стороны.

Рассмотрим теперь ряд

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{i\gamma k}, \quad (1.5.2)$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$ и $\gamma = \text{const} \in \mathbb{R}$. Если $\gamma > 0$, то согласно (1.5.1)

$$|x^{i\gamma k}| = \exp(-\varphi\gamma k) = [\exp(-\varphi\gamma)]^k.$$

Поэтому при $\varphi\gamma > 0$ ряд (1.5.2) можно абсолютно суммировать как степенной ряд. По формуле Коши он будет абсолютно сходиться при

$$\exp(-\varphi\gamma) < 1/\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \stackrel{\text{def}}{=} \delta. \quad (1.5.3)$$

Если $\delta > 0$ и $\gamma > 0$, то неравенство (1.5.3) выполнено при $-\varphi\gamma < \ln \delta$, т. е. при

$$\varphi > -\gamma^{-1} \ln \delta. \quad (1.5.4)$$

Заметим, что области сходимости рядов (1.5.2) и $x^A \eta(x)$ совпадают при любом $A = \text{const} \in \mathbb{C}$, если исключить точки $x = 0$ и $x = \infty$. Поэтому в дальнейших рассмотрениях исключим эти точки.

Рассмотрим обобщение ряда (1.5.2)

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \quad (1.5.5)$$

где $c_k, s_k = \text{const} \in \mathbb{C}$, $\text{Re } s_k = 0$, $|\text{Im } s_{k+1}| > |\text{Im } s_k| \geq 0$, s_k не имеют точек накопления и все $\text{Im } s_k$ одного знака. Для его области абсолютной сходимости справедлива формула

$$\varphi \text{sgn}(\text{Im } s_2) > \text{sgn}(\text{Im } s_2) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_k|}{|s_k|}. \quad (1.5.6)$$

Для одностороннего ряда (1.5.5), где все $\text{Im } s_k$ одного знака, область сходимости есть либо $\varphi > \varphi_0$, если $\text{Im } s_k \geq 0$, либо $\varphi < \varphi_0$, если $\text{Im } s_k \leq 0$. Ряд (1.5.5) отнесем к классу \mathcal{P}^+ , если $\text{Im } s_k \geq 0$, и – к классу \mathcal{P}^- , если $\text{Im } s_k \leq 0$. Аналогично ряд $x^A \zeta(x)$ отнесем к классу \mathcal{P}^+ или \mathcal{P}^- в соответствии с классом ряда $\zeta(x)$ в (1.5.5).

1.5.2. Экзотические ряды. Пусть на комплексной плоскости s с координатами $\operatorname{Re} s$, $\operatorname{Im} s$ через начало координат $s = 0$ проведены две прямые: ось $\operatorname{Im} s$ и отличная от нее наклонная прямая (рис. 1). Они делят плоскость на четыре вертикальных угла V_σ^τ , $\sigma, \tau = \pm 1$ (рис. 1). При этом каждый угол будем считать замкнутым, т. е. содержащим свою границу. Нижний индекс σ угла V_σ^τ соответствует знаку $\operatorname{Re} s$ на его границе, проходящей по наклонной прямой, а верхний – знаку $\operatorname{Im} s$ на его вертикальной границе. Степенной ряд

$$\xi(x) = \sum c_s x^s \quad \text{по } s \in \mathbf{K}, \quad (1.5.7)$$

где $c_s = \text{const} \in \mathbb{C}$, будем относить к классу \mathcal{P}_σ^τ , если его носитель $\mathbf{K} \subset V_\sigma^\tau$. Более того, степенной ряд вида $x^A \xi(x)$ будем относить к тому же классу. При этом будем рассматривать только ряды вида (1.5.7), у которых носитель \mathbf{K} не имеет предельных точек на комплексной плоскости s . Ряды (1.5.7) классов \mathcal{P}_σ^τ будем называть *экзотическими*. Согласно п. 1.5.1 на универсальной накрывающей комплексной плоскости $x = \exp(\rho + i\varphi)$ область абсолютной сходимости ряда (1.5.7) класса \mathcal{P}_σ^τ может иметь вид

$$\sigma\rho < \sigma\rho_0, \quad \tau\varphi < \tau\varphi_0, \quad (1.5.8)$$

где ρ_0 и φ_0 – некоторые вещественные постоянные. Ряд (1.5.7) класса \mathcal{P}_σ^τ является асимптотическим при $|x|^\sigma \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \tau\infty$, ибо тогда $|x^\alpha| \geq |x^\beta|$, если $\sigma\operatorname{Re} \alpha \leq \sigma\operatorname{Re} \beta$, $\tau\operatorname{Im} \alpha \leq \tau\operatorname{Im} \beta$, что дает упорядоченность мономов x^α по показателям α .

1.5.3. Постановка задачи. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad (1.5.9)$$

где f – дифференциальная сумма. Для его решений $y = y(x)$ при $|x| \rightarrow 0$ и $|x| \rightarrow \infty$ будем искать *экзотические разложения*

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \quad \text{по } s \in \mathbf{K}, \quad s \neq r, \quad (1.5.10)$$

где носитель \mathbf{K} лежит в сдвинутом на r вертикальном угле $r + V_\sigma^\tau$ с вершиной в точке r . Для обычных разложений (1.5.9), когда множество \mathbf{K} – r лежит в одном "горизонтальном угле", расположенном между двумя наклонными полупрямыми (рис. 2), процедура их поиска описана в § 2. Такие разложения относятся к обоим классам \mathcal{P}_σ^\pm одновременно. Ниже укажем те изменения в этой процедуре, которые позволят получить экзотические разложения (1.5.10) решений уравнения (1.5.9).

Но сначала напомним те основные понятия из §§ 1, 2, которые остаются без изменения. По дифференциальной сумме $f(x, y)$ строится ее носитель $\mathbf{S}(f)$ и многоугольник $\Gamma(f)$, который является выпуклой оболочкой носителя $\mathbf{S}(f)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и

ребер $\Gamma_j^{(1)}$, называемых гранями $\Gamma_j^{(d)}$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует свое укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0. \quad (1.5.11)$$

Пусть согласно (1.1.5)

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } |x| \rightarrow 0, \\ 1, & \text{если } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

Грани $\Gamma_j^{(d)}$ расположены на многоугольнике $\Gamma(f)$ либо слева, либо справа, либо вверху или внизу. Каждой боковой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует свое значение

$$\omega = \omega_j^{(d)} = \begin{cases} -1, & \text{если грань } \Gamma_j^{(d)} \text{ левая,} \\ 1, & \text{если грань } \Gamma_j^{(d)} \text{ правая.} \end{cases}$$

Для верхней и нижней грани $\Gamma_j^{(d)}$ величина $\omega_j^{(d)}$ принимает оба значения ± 1 .

Если экзотическое разложение решения (1.5.10) относится к классу \mathcal{P}_σ^τ , то $\sigma = -\omega$.

1.5.4. Определение нормального конуса. Согласно п. 1.1.2 нормальный конус $\mathbf{U}_k^{(1)}$ ребра $\Gamma_k^{(1)}$ – это вещественный луч $\mathbf{U}_k^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) = \lambda N_k, \lambda > 0\}$, где N_k – внешняя нормаль к ребру $\Gamma_k^{(1)}$. *Приведенным нормальным конусом $\check{\mathbf{U}}_k^{(1)}$ ребра $\Gamma_k^{(1)}$* будем называть внешний нормальный вектор $\omega_k^{(1)}(1, r_k)$ к ребру $\Gamma_k^{(1)}$, у которого первая компонента есть $\omega_k^{(1)}$, т. е. $\check{\mathbf{U}}_k^{(1)} = \mathbf{U}_k^{(1)} \cap \{p_1 = \omega_k^{(1)}\}$. Если ребро $\Gamma_k^{(1)}$ горизонтально, то $\omega_k^{(1)} = \pm 1$, и

$$\omega_k^{(1)} r_k = \begin{cases} +\infty & \text{для верхнего ребра,} \\ -\infty & \text{для нижнего ребра.} \end{cases}$$

Пусть к боковой вершине $\Gamma_j^{(0)}$ примыкают ребра $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ с приведенными нормальными конусами $\omega_k^{(1)}(1, r_k)$ и $\omega_{k+1}^{(1)}(1, r_{k+1})$ соответственно, $r_k < r_{k+1}$ и $\omega_k^{(1)} = \omega_{k+1}^{(1)} = \omega$. *Приведенным нормальным конусом $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$* будем называть множество векторов $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2) = \omega(1, r)$, где r пробегает замкнутую полосу комплексной плоскости r с двумя выколотомы точками

$$r_k \leq \text{Re } r \leq r_{k+1}, \quad r \neq r_k, r_{k+1} \quad (1.5.13)$$

(заштрихована на рис. 3). Нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$ – это множество $\lambda \check{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ с $\lambda > 0$. Заметим, что это множество не является выпуклым, также как $\check{\mathbf{U}}_j^{(0)}$.

Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$ – две соседние вершины многоугольника $\Gamma(f)$ и между ними находится его ребро $\Gamma_k^{(1)}$. Тогда $\check{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ и $\check{\mathbf{U}}_{j+1}^{(0)}$ пересекаются по точкам

вида $\omega(1, r)$, где r пробегает две полупрямые с $\operatorname{Re} r = r_k$: $\operatorname{Im} r < 0$ и $\operatorname{Im} r > 0$. Если вершина $\Gamma_j^{(0)}$ – верхняя или нижняя на многоугольнике $\Gamma(f)$, то примыкающие к ней ребра $\Gamma_k^{(1)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(1)}$ имеют приведенные нормальные конусы $\check{\mathbf{U}}_k^{(1)} = \omega_k^{(1)}(1, r_k)$ и $\check{\mathbf{U}}_{k+1}^{(1)} = \omega_{k+1}^{(1)}(1, r_{k+1})$ с разными значениями $\omega_k^{(1)} = -1$ и $\omega_{k+1}^{(1)} = 1$. Тогда вершине $\Gamma_j^{(0)}$ поставим в соответствие два приведенных нормальных конуса $\check{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)} = \{P = \omega_k^{(1)}(1, r)\}$, где $r \neq r_k$,

$$\operatorname{Re} r \begin{cases} \leq r_k, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ \geq r_k, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя,} \end{cases}$$

и $\check{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)} = \{P = \omega_{k+1}^{(1)}(1, r)\}$, где $r \neq r_{k+1}$,

$$\operatorname{Re} r \begin{cases} \leq r_{k+1}, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ \geq r_{k+1}, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя.} \end{cases}$$

Нормальный же конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ состоит из объединения трех множеств $\mathbf{U}_j^{(0)} = \{\lambda \check{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)}\} \cup \{\lambda \check{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)}\} \cup \{\lambda(0, \delta)\}$, где $\lambda > 0$ и

$$\delta = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ нижняя,} \\ 1, & \text{если вершина } \Gamma_j^{(0)} \text{ верхняя.} \end{cases}$$

Положим $\check{\mathbf{U}}_j^{(0)} = \check{\mathbf{U}}_{j-}^{(0)} \cup \check{\mathbf{U}}_{j+}^{(0)}$.

На каждом боковом ребре $\Gamma_k^{(1)}$ имеются две вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$, одна из них – *верхняя*, а другая – *нижняя* на этом ребре.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует приведенный нормальный конус $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$. При этих определениях теорема 1.1.1 обобщается следующим образом

Теорема 1.5.1 [10]. Пусть уравнение (1.5.9) имеет решение (1.5.10) класса \mathcal{P}_σ^τ , т. е. с определенными значениями τ и $\omega = -\sigma$, и пусть грань $\Gamma_j^{(d)}$ удовлетворяет условиям

- a) $\omega(1, r) \in \check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$;
- b) в случае

$$d = 0, \quad \omega_j^{(0)} \operatorname{Re} r = \omega_k^{(1)}, \quad \operatorname{Im} r \neq 0 \quad (1.5.14)$$

выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) = \begin{cases} \tau & \text{для нижней вершины } \Gamma_j^{(0)} \text{ ребра } \Gamma_k^{(1)}, \\ -\tau & \text{для верхней вершины } \Gamma_j^{(0)} \text{ ребра } \Gamma_k^{(1)}; \end{cases}$$

во всех других случаях $\operatorname{Im} r$ произвольно. Тогда укорочение

$$y = c_r x^r \quad (1.5.15)$$

разложения (1.5.10) является решением укороченного уравнения (1.5.11), соответствующего грани $\Gamma_j^{(d)}$.

Условие б) делает однозначным выбор укороченного уравнения (1.5.11) в тех местах, в которых пересекаются нормальные конусы соседних вершин. При этом определяется

$$\tau = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) & \text{для нижней вершины ребра,} \\ -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) & \text{для верхней вершины ребра.} \end{cases}$$

1.5.5. Определение конуса задачи и критических чисел. Пусть найдено укорочение (1.5.15) разложения решения (1.5.10). Делаем замену

$$y = c_r x^r + z \quad (1.5.16)$$

в уравнении (1.5.9) и получаем уравнение для z

$$g(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y) = 0.$$

Согласно теореме 1.2.1 для разложений z по степеням x^s получаем конус задачи \mathcal{K} , который выделяется двумя неравенствами:

$$1) \omega \operatorname{Re} s \leq \omega \operatorname{Re} r;$$

и при $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r$ еще

$$2) \tau \operatorname{Re} s > \tau \operatorname{Re} r.$$

В случае (1.5.14) значение τ определено, в остальных случаях оно произвольно, т. е. получаются два конуса задачи с $\tau = -1$ и с $\tau = 1$, которые обозначим \mathcal{K}^τ .

Согласно п. 1.1.4 укороченному решению соответствует характеристический многочлен $\nu(k)$, корни которого k_1, \dots, k_n являются собственными значениями решения. Те из собственных чисел k_j , которые лежат в конусе задачи \mathcal{K} , называются *критическими числами*. В случае (1.5.14) значение τ определено и конус задачи \mathcal{K} единственен, поэтому критические числа однозначно определены. В остальных случаях имеются два конуса задачи \mathcal{K}^τ и для каждого из них – свой набор критических чисел. При этом критические числа k_j с $\operatorname{Re} k_j > \omega \operatorname{Re} r$ – общие для обоих \mathcal{K}^+ и \mathcal{K}^- , а с $\operatorname{Re} k_j = \operatorname{Re} r$ – разные для разных τ .

При этих определениях остаются верными все построения и утверждения § 2, где k_1 – комплексное критическое число.

Предложение 1.2.1 теперь звучит так.

Предложение 1.5.4. Множество $\mathbf{K}(k_1)$ не имеет точек накопления в \mathbb{C} , если носитель $\mathbf{S}(f)$ не имеет точек накопления в $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Теперь уточненная теорема 1.2.1 для решений уравнения (1.5.9) позволяет получать степенно-логарифмические разложения (1.5.10), где c_s суть многочлены от логарифма $\ln x$. Показатели s в разложении (1.5.10) можно упорядочить следующим образом. Согласно предложениям 1.2.2 и 1.2.3 множество $\mathbf{K}(k_1) - r$ лежит в некотором центральном угле V с вершиной в нуле, стороны которого либо обе лежат на наклонных прямых, либо одна из них лежит на оси $\text{Im } s$, т. е. угол V имеет вид V_σ^r . Пусть векторы P_1 и P_2 – внешние нормали к сторонам угла V . Положим $P = P_1 + P_2 = (p_1, p_2)$. Теперь для каждой точки $s = s' + is'' \in \mathbb{C}$ положим $\|s\| = p_1 s' + p_2 s''$. Будем говорить, что точка $s \in \mathbb{C}$ предшествует точке $t \in \mathbb{C}$, если $\|s\| > \|t\|$. Разложение (1.5.10), т. е. коэффициенты c_s для $s \in \mathbf{K}$, вычисляются последовательно по этой упорядоченности показателей s так, как описано в леммах 1.2.1 и 1.2.2.

Замечание 1.5.7. Таким образом, экзотические разложения (имеющие бесконечное число показателей степени с фиксированной вещественной частью) решений ОДУ возникают в двух случаях:

1. Если характеристический многочлен укороченного уравнения, соответствующего вершине, имеет незначительный корень, вещественная часть которого совпадает с числом r_k одного из ребер, примыкающих к этой вершине.

2. Если степенное решение укороченного уравнения имеет критическое число, отличное от показателя степени этого решения, но с той же вещественной частью, что у этого показателя степени.

Впрочем, второй случай это вариант первого, ибо критические числа являются корнями характеристического многочлена укороченного уравнения $\mathcal{L}(x)z = 0$, соответствующего вершине после замены (1.5.16).

Литература

3. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.
4. Брюно А.Д. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. **380**. №2. 155–159.
8. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. 31–80.
9. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. **406**. №6. 730–733.
10. Брюно А.Д. Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №66.
11. Брюно А.Д. , Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004. **395**. №6. 733–737.
15. Брюно А.Д. , Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. **410**. №3. 331–334.
28. Тихомиров В.М. Фреше производная // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1985. **5**. 666.
32. Bruno A.D. Power Geometry as a new calculus // Analysis and Applications (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Dordrecht: Kluwer. 2003. 51–71.
33. Chang Y.F., Greene J.M., Tabor M., Weiss J. The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Physica D. 1983. **8**. 183–207.

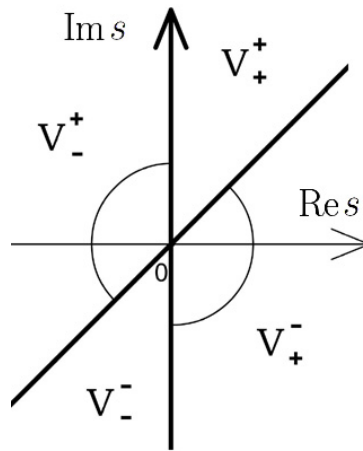


Рис. 1

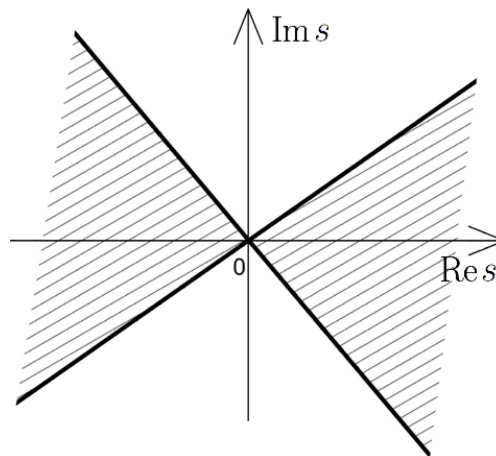


Рис. 2

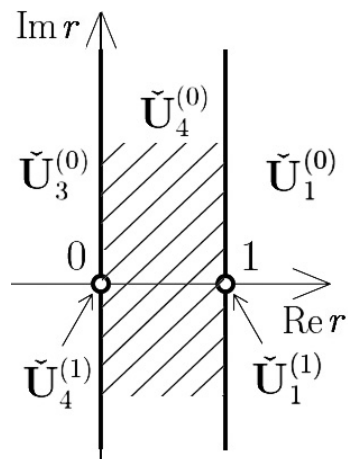


Рис. 3