



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А. Д. Брюно, И. В. Горючкина**

Все асимптотические  
разложения решений  
уравнения  $P_6$  в случае  $a \cdot b = 0$

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все асимптотические разложения решений уравнения  $P_6$  в случае  $a \cdot b = 0$  // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 70. 30 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-70>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ВСЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
РАЗЛОЖЕНИЯ  
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ  $P_6$   
ПРИ  $a \cdot b = 0$

Москва, 2007 г.

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все асимптотические разложения решений уравнения P6 в случае  $a \cdot b = 0$ . Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Здесь рассматривается уравнение P6 при  $x \rightarrow 0$  и  $a = 0$ . При этом, получены 4 базовых семейства разложений его решений отличных от базовых семейств разложений решений при  $a \cdot b \neq 0$ . Всего при  $x \rightarrow 0$  и  $a = 0$  существуют 11 семейств разложений решений, включающих в себя разложения четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. Большинство из них новые. Случаи  $a = 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  и  $b = 0$  получаются из случая  $a = 0$ ,  $x \rightarrow 0$  с помощью отражений симметрий уравнения. При  $a = b = 0$  отсутствуют разложения решений отличные от разложений решений при  $a \cdot b \neq 0$ ,  $a = 0$  и  $b = 0$ . Последний параграф посвящен сравнению полученных результатов с известными.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. All asymptotic expansions of solutions to the equation P6 in the case  $a \cdot b = 0$ . Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

Here we consider the equation P6 for  $x \rightarrow 0$  and  $a = 0$ . In that, we obtained 4 base families of expansions of its solutions different from base families of expansions of solutions for  $a \cdot b \neq 0$ . Altogether for  $x \rightarrow 0$  and  $a = 0$  there exist 11 families of expansions of solutions involving expansions of four types: power, power-logarithmic, complicated and exotic. Most of them are new. Cases  $a = 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  and  $b = 0$  are obtained from the case  $a = 0$ ,  $x \rightarrow 0$  by means of reflections of symmetries of the equation. For  $a = b = 0$  there are absent expansions of solutions different from expansions of solutions for  $a \cdot b \neq 0$ ,  $a = 0$  and  $b = 0$ . The last paragraph is dedicated to comparison of obtained results with known results.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00050).

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

III. РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ Р6 В СЛУЧАЯХ  
 $a = 0, b \neq 0$  И  $a \neq 0, b = 0$  ВБЛИЗИ НУЛЯ И  
 БЕСКОНЕЧНОСТИ

§1. Общие свойства уравнения

**3.1.1. Постановка задачи.** В этой главе для шестого уравнения Пенлеве (2.1.1) в двух случаях значений комплексных параметров:

1.  $a = 0, b \neq 0$ ,  $c$  и  $d$  – произвольные,
2.  $a \neq 0, b = 0$ ,  $c$  и  $d$  – произвольные;

ищем асимптотические разложения его решений при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  вида (2.1.2) всех четырех типов – степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические.

**3.1.2. Носители и нормальные конусы.** Если  $a = 0$ , тогда уравнение (2.1.5) примет вид

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) \\
 & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + \\
 & 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\
 & x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\
 & 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 1 а, пропадут точки  $(0, 6)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, 5)$ . Носитель  $\mathbf{S}(f_{a=0})$  левой части уравнения (3.1.1), его выпуклая оболочка  $\mathbf{\Gamma}(f_{a=0})$ , грани  $\Gamma_i^{(0)} \stackrel{def}{=} Q_i, i = 2, 3, \tilde{\Gamma}_j^{(0)} \stackrel{def}{=} \tilde{Q}_j, j = 1, 2, 4, \Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \tilde{\Gamma}_1^{(1)}, \tilde{\Gamma}_2^{(1)}$  изображены на рис. 2 а (грани носителя  $\mathbf{S}(f)$ , сохранившиеся из случая  $a \cdot b \neq 0$ , помечены волной), соответствующие этим граням вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_i^{(d)}, \tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}, d = 0, 1$  – на рис. 2 б.

Для  $\omega = -1$  разбиение комплексной плоскости  $r \in \mathbb{C}$  на приведенные нормальные конусы  $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$  и  $\check{\check{\mathbf{U}}}_j^{(d)}$  показано на рис. 3.

Если  $b = 0$ , тогда уравнение (2.1.5) примет вид

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) \\
 & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + \\
 & + 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\
 & x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + \\
 & 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 1 а, пропадут точки  $(3, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ . Носитель  $\mathbf{S}(f_{b=0})$  левой части уравнения (3.1.2), его выпуклая оболочка  $\Gamma(f_{b=0})$ , грани  $\Gamma_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_i$ ,  $i = 5, 6$ ,  $\tilde{\Gamma}_j^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Q}_j$ ,  $j = 2, 3, 4$ ,  $\Gamma_4^{(1)}$ ,  $\Gamma_5^{(1)}$ ,  $\Gamma_6^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$  изображены на рис. 4 а (грани носителя  $\mathbf{S}(f)$ , сохранившиеся из случая  $a \cdot b \neq 0$ , помечены волной), соответствующие этим граням вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_i^{(d)}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$  – на рис. 4 б.

Используя симметрию (2.1.7) можно сократить вычисления. С ее помощью случай  $a = 0$  переводится в случай  $b = 0$ . Вершины  $\Gamma_2^{(0)}$ ,  $\Gamma_3^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$  и ребра  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ ,  $\Gamma_3^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$  в случае  $a = 0$ , симметричны вершинам  $\Gamma_5^{(0)}$ ,  $\Gamma_6^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$  и ребрам  $\Gamma_4^{(1)}$ ,  $\Gamma_5^{(1)}$ ,  $\Gamma_6^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$  в случае  $b = 0$  соответственно.

Поэтому далее подробно рассмотрим случай  $a = 0$ , а затем с помощью симметрии (2.1.7) перенесем результаты на случай  $b = 0$ .

Кроме того, вершины  $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$  и ребра  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ , изображенные на рис. 1 а, 2 а и 4 а рассматривались в случае  $a \cdot b \neq 0$  в главе 2. Члены уравнения (2.1.5), имеющие множителем параметр  $a$ , имеют носитель, изображенный на рис. 6 сплошными точками.

Таким образом, при  $a = 0$  члены в уравнении (2.1.5), соответствующие вершинам  $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$  и ребрам  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ , остаются без изменений. И соответствующие им укороченные уравнения также не меняются, т. е. сохраняются виды разложений решений, соответствующие им, изменяясь, быть может, лишь в членах, начиная со второго.

При  $b = 0$ , аналогично случаю  $a = 0$ , члены уравнения (2.1.5), соответствующие вершинам  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$  и ребрам  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ , остаются без изменений. Таким образом, в разложениях решений, соответствующих этим граням, могут измениться члены начиная со второго, но виды разложений сохраняются.

Поэтому в случае  $a = 0$  рассмотрим вершины  $\Gamma_2^{(0)}$ ,  $\Gamma_3^{(0)}$  и ребра  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ ,  $\Gamma_3^{(1)}$ , которым могут соответствовать новые виды разложений решений уравнения (2.1.1).

Аналогично в случае  $b = 0$  новые виды разложений могут соответствовать вершинам  $\Gamma_5^{(0)}$ ,  $\Gamma_6^{(0)}$  и ребрам  $\Gamma_4^{(1)}$ ,  $\Gamma_5^{(1)}$ ,  $\Gamma_6^{(1)}$ , которые мы получим используя симметрию (2.1.7) и результаты случая  $a = 0$ .

Более того, используя симметрию (2.1.9) можно сократить вычисления и в случае  $a = 0$ . Так как с ее помощью разложения, соответствующие вершине  $\Gamma_2^{(0)}$  и ребрам  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ , переводятся в разложения, соответствующие вершине  $\Gamma_3^{(0)}$  и ребрам  $\Gamma_3^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$  (и наоборот).

Таким образом, мы подробно изучим одну вершину  $\Gamma_3^{(0)}$  и два ребра

$\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$  в случае  $a = 0$ , а затем с помощью симметрий (2.1.7), (2.1.9) перенесем полученные результаты на все оставшиеся случаи. А именно, при  $a = 0$  с помощью симметрии (2.1.9) получим разложения решений, соответствующие вершине  $\Gamma_2^{(0)}$  и ребру  $\Gamma_1^{(1)}$ . А с помощью симметрии (2.1.7) из разложений, возникающих в случае  $a = 0$ , получим разложения, соответствующие случаю  $b = 0$ .

Напомним, что согласно теореме 2.1.4 при  $a = 0$  имеется исключительное решение  $\mathcal{I}_4 : y = \infty$ , а при  $b = 0$  – решение  $\mathcal{I}_1 : y = 0$ .

## § 2. Разложения решений вблизи нуля, соответствующие вершине $\Gamma_3^{(0)}$

Вершина  $\Gamma_3^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_3$  – левая верхняя (см. рис. 2 а), по теореме 1.5.1 ей соответствует пара значений  $\omega_3^{(0)} = -1$ ,  $\tau = -1$ .

Вершине  $\Gamma_3^{(0)} = (0, 4)$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'xy^3 + 2cy^4 = 0. \quad (3.2.1)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 > 0\}$ , то есть  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Приведенный нормальный конус  $\check{\mathbf{U}}_3^{(0)} = -(1, r)$ , где

$$r : r \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} r \leq 0, r \neq 0. \quad (3.2.2)$$

**3.2.1. Разложения решений со степенной асимптотикой.** Решением уравнения (3.2.1) является выражение  $y = c_r x^r$ ,  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени  $r$  определяется из характеристического уравнения  $\chi(r) = x^{-4r} \hat{f}_3^{(0)}(x, x^r) = -r^2 + 2c = 0$ , которое имеет два корня

$$r_{1,2} = \sqrt{2c} \quad (3.2.3)$$

и приведенного нормального конуса (3.2.2).

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_3^{(0)}(x, y)}{\partial y} &= 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 y^3 + 6y'' x^2 y^2 - 6y' \frac{d}{dx} x^2 y^2 - \\ &- 6y'^2 x^2 y + 2 \frac{d}{dx} x y^3 + 6y' x y^2 + 8c y^3. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^3 x^{3r} \left( \frac{d^2}{dx^2} x^2 + 3r(r-1) - 3r \frac{d}{dx} x - 3r^2 + \frac{d}{dx} x + 3r + 4c \right). \quad (3.2.5)$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2c_r^3(k^2 - 3rk + 2r^2) \quad (3.2.6)$$

имеет два корня  $k_1 = 2r$  и  $k_2 = r$ . Конус задачи  $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > \operatorname{Re} r$  или  $\operatorname{Re} k = \operatorname{Re} r$ ,  $|\operatorname{Im} k| < |\operatorname{Im} r|$ ,  $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)\}$ . Числа  $k_{1,2}$  не лежат в  $\mathcal{K}$ , следовательно, критических чисел нет.

Носитель разложения решения

$$\mathbf{K} = \{s = r - lr + m; l \geq 0, m \geq 1; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.2.7)$$

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{B}_7 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.2.8)$$

где показатели степени таковы:  $r = \sqrt{2c}$  и удовлетворяет неравенствам (3.2.2),  $s$  из множества (3.2.7),  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

В случае  $\operatorname{Re} r = 0$  разложения (3.2.8) являются экзотическими. Обозначим их семейства  $\mathcal{B}_7^\tau$ , где  $\tau = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ .

Носитель (3.2.7) имеет две образующие  $-r$  и  $1$  и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке  $r$ , стороны которого параллельны векторам  $-(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$  и  $(1, 0)$ .

По теореме 1.2.5 ряд (3.2.8) сходится для достаточно малых  $|x|$ .

Если  $2c = k^2$ , где  $k$  – целое число, то согласно (3.2.7) разложение (3.2.8) содержит только целые степени  $x$ , т. е. является рядом Лорана. Только в этом случае оно было известно [42, § 46, теорема 46.3].

Вычислим второе приближение решения в случае  $\operatorname{Re} r < 0$ .

Если  $-1 \leq \operatorname{Re} r < 0$ , оно имеет вид  $y = c_r x^r + c_{r+1} x^{r+1}$ . Вычислим коэффициент  $c_{r+1}$ . Второе приближение уравнения (3.1.1) есть

$$\hat{f}_3^{(0)}(x, y) = -4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 6y'x^2y^3 + 2xy^4(-c + d - b). \quad (3.2.9)$$

$$b_{r+1} = x^{-4r-1} \hat{f}_3^{(0)}(x, c_r x^r) = 2c_r^4(r^2 - r - c + d - b), \quad \nu(1+r) = 2c_r^3(1-r), \\ c_{r+1} = c_r(c + d - b - r)/(r-1).$$

Если  $\operatorname{Re} r < -1$ , то второе приближение решения есть  $y = c_r x^r + c_0$ , а второе приближение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$\hat{f}_3^{(0)}(x, y) = -2y''x^2y^2 + 2y'^2 - 2y'xy^2. \quad (3.2.10)$$

Так как  $b_0 = \hat{f}_3^{(0)}(x, c_r x^r) = 0$ ,  $\nu(0) = 4c_r^3 r^2 \neq 0$ , то  $c_0 = 0$ .

Случай  $\operatorname{Re} r = -1$  рассмотрен вместе со случаем  $-1 \leq \operatorname{Re} \sqrt{2c} < 0$ , поскольку вклад второго приближения (3.2.10) равен нулю.

**3.2.2. Нестепенные асимптотики.** Вычислим нестепенные решения уравнения (3.2.1), если они существуют. Преобразуем его

$$g(x, y) = y^{-4} \hat{f}_3^{(0)}(x, y) = \frac{2y''}{y} x^2 - \frac{3y'^2}{y^2} x^2 + \frac{2y'}{y} x + 2c = 0, \quad (3.2.11)$$

$S(g) = \{0\}$ . Уравнение  $g(x, y) = 0$  содержит ненулевую постоянную  $2c$ . В случае  $c = 0$ , уравнение  $\chi(r) = 0$  имеет двукратный корень  $r = 0$ . Но  $P = \omega(1, 0)$  не лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ . Поскольку  $\Delta(g) = 2$  и

$$g^* = \frac{2y''}{y} x^2 - \frac{3y'^2}{y^2} x^2, \quad \text{coef}(g^*) = -1 \neq 0, \quad (3.2.12)$$

то по теоремам 1.3.5 и 1.3.6 нужных нестепенных асимптотик нет.

### §3. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$

Ребро  $\Gamma_2^{(1)}$  горизонтально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{f}_2^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2y'' x^4 y^3 - 3y'^2 x^4 y^2 + 4y' x^3 y^3 - 2dx^2 y^4 + 2y'' x^2 y^3 - 3y'^2 x^2 y^2 + \\ & + 2y' x y^3 + 2cy^4 - 4y'' x^3 y^3 + 6y'^2 x^3 y^2 - xy^4(c + b - d) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Оно не дает степенных решений, так как ребро  $\Gamma_2^{(1)}$  горизонтально. Проверим, существуют ли нестепенные асимптотики. Ребро  $\Gamma_2^{(1)}$  соединяет вершины  $Q_3 = (0, 4)$  и  $Q_2 = (2, 4)$ , соответствующие укороченные уравнения  $\hat{f}_3^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y'' x^2 y^3 - 3y'^2 x^2 y^2 + 2y' x y^3 + 2cy^4 = 0$  и  $\hat{f}_2^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y'' x^4 y^3 - 3y'^2 x^4 y^2 + 4y' x^3 y^3 - 2dx^2 y^2 = 0$  имеют порядки дифференцирования равные 2. А порядок дифференцирования уравнения  $\hat{f}_2^{(1)}(x, y) = 0$  также равен 2, следовательно, по теореме 1.3.4, не существует решений ни при  $x \rightarrow 0$ , ни при  $x \rightarrow \infty$ .

### §4. Разложения решений вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_3^{(1)}$

**3.4.1. Предварительный анализ.** Ребро  $\Gamma_3^{(1)}$  вертикально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y'' x^2 y^3 - 3y'^2 x^2 y^2 + \quad (3.4.1)$$

$$2y' x y^3 + 2cy^4 + 2y'^2 x^2 y - 2y'' x^2 y^2 - 2y' x y^2 = 0.$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$ , ему соответствуют  $x \rightarrow 0$  и  $\omega = -1$ .



Поэтому ищем его степенные решения в виде  $y = c_0$ ,  $c_0 \neq 0$ . Вычислим коэффициент  $c_0$ . Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}_3^{(1)}(c_0) \stackrel{\text{def}}{=} c_0^{-3} \hat{f}_3^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\text{def}}{=} 2cc_0 = 0. \quad (3.4.2)$$

Высота ребра  $\Gamma_3^{(1)}$  равна единице и определяющее уравнение первой степени. Из него следует, что при  $c = 0$  оно имеет решение  $c_0$  – произвольная постоянная, а при  $c \neq 0$  имеет только нулевое решение  $c_0 = 0$ . Поэтому далее рассмотрим два случая:  $c \neq 0$  и  $c = 0$ .

**3.4.2. Разложения решений при  $a = 0$ ,  $b \cdot c \neq 0$ .** В этом случае степенных решений уравнения (3.4.1) нет. Вычислим нестепенные решения этого уравнения.

Поскольку нет кратных ненулевых решений определяющего уравнения, то по теореме 1.3.2 нет решений стремящихся к ненулевой постоянной.

Сделаем логарифмическое преобразование  $\xi = \ln x$  в уравнении (3.4.1). Тогда согласно (2.2.13) и (3.4.1) получаем уравнение

$$\varphi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_3^{(1)}(\xi, y) = 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) + 2cy^4 = 0. \quad (3.4.3)$$

По теореме 1.3.3, у этого уравнения нас интересуют только решения, стремящиеся к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ . Носитель левой части уравнения, его выпуклая оболочка и нормальные конусы граней изображены на рис. 7. Конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}$ , что соответствует пределу  $\xi \rightarrow \infty$ , то есть  $x \rightarrow 0$ . С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_2^{(0)}$  и  $\mathbf{U}_1^{(1)}$ . Укороченное уравнение  $\hat{\varphi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2cy^4 = 0$  имеет только тривиальное решение.

Вершине  $\Phi_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0 \quad (3.4.4)$$

имеет решение  $y = c_0$ , так как вектор  $P = \omega(1, r) = (1, 0)$  лежит в  $\mathbf{U}_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$ . Но постоянное решение нам не подходит.

Ребру  $\Phi_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y) = -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 2cy^4 = 0. \quad (3.4.5)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1, -2), \lambda > 0\}$ . Первое приближение решения уравнения  $\varphi(\xi, y) = 0$  есть  $y = c_{-2}\xi^{-2}$ ,  $c_{-2} \neq 0$ . Вычислим коэффициент  $c_{-2}$ . Определяющее уравнение

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(c_{-2}) = c_{-2}^3(-4 + 2cc_{-2}) = 0, \quad (3.4.6)$$

так как  $c_{-2} \neq 0$ , то оно имеет решение  $c_{-2} = 2/c$ . Найдем критические числа решения. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y)}{\partial y} = -2 \frac{d^2}{d\xi^2} y^2 - 4\dot{y}y + 4y \frac{d}{d\xi} y + 2\dot{y}^2 + 8cy^3. \quad (3.4.7)$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2 \frac{d^2}{d\xi^2} c_{-2}^2 \frac{1}{\xi^4} - 24c_{-2}^2 \frac{1}{\xi^6} - 8c_{-2}^2 \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi^5} + 8c_{-2}^2 \frac{1}{\xi^6} + 8cc_{-2}^3 \frac{1}{\xi^6}. \quad (3.4.8)$$

Характеристический многочлен  $\nu(k) = c_{-2}^2(-2k^2 - 6k, c_{-2} \neq 0$ , имеет два корня  $k_1 = 0, k_2 = -3$ . Конус задачи  $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -2 \text{ или } \operatorname{Re} k = 0, \operatorname{Im} k \neq 0\}$ . Число  $k_2 \in \mathcal{K}$ , то есть  $k_2$  – единственное критическое число. Носитель разложения решения  $\mathbf{K} = \{s = -2 - 2l, l > 0\}$ . Множество  $\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l, l > 0\}$ . Второе приближение решения уравнения  $\varphi(\xi, y) = 0$  есть

$$y = c_{-2} \frac{1}{\xi^2} + c_{-3} \frac{1}{\xi^3}. \quad (3.4.9)$$

Поскольку  $k_2 \notin \mathbf{K}$ , то условие совместности автоматически выполнено и коэффициент  $c_{-3}$  – комплексная произвольная постоянная.

Разложение решения есть

$$y = \frac{2}{c} \frac{1}{\xi^2} + c_{-3} \frac{1}{\xi^3} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s} \frac{1}{\xi^s}, \quad (3.4.10)$$

где  $c_{-3}$  – комплексная произвольная постоянная, а  $c_{-s}$  – комплексные, постоянные и однозначно определенные. По теореме 1.2.5 ряд (3.4.10) сходится для достаточно больших  $|\xi|$ . Сделаем обратную замену и получим асимптотику решения уравнения (3.1.1)

$$y = \frac{2}{c} \frac{1}{\ln^2 x} + c_{-3} \frac{1}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s} \frac{1}{\ln^s x}, \quad (3.4.11)$$

где  $c_{-3}$  – комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты  $c_{-s}$  – постоянные и однозначно определенные.

Вычислим критические числа укороченных решений (3.4.11). Первая вариация определена формулой (3.4.14). Обозначим ее  $\mathcal{M}(x, y)$ . Сделаем в  $\mathcal{M}(x, y)$  логарифмическую замену  $\xi = \ln x$  и производную по  $\xi$  будем обозначать точкой. Тогда  $y' = \dot{y}/x, y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$ . Оператор

$$\mathcal{M}(x, y) = 2 \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) y^3 + 6(\ddot{y} - \dot{y})y^2 - 6 \frac{d}{d\xi} \dot{y}y^2 - 6\dot{y}^2 y + 2 \frac{d}{d\xi} y^3 + 6\dot{y}y^2 +$$

$$4\frac{d}{d\xi}y'y + 2y'^2 - 2\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right)y^2 - 4(\ddot{y} - \dot{y})y - 2\frac{d}{d\xi}y^2 - 4y'y + 8cy^3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\xi, y). \quad (3.4.12)$$

Для решений (3.4.11) имеем  $y = \frac{2}{c}\frac{1}{\xi^2} + \dots$ . Поэтому в операторе  $\mathcal{N}$  члены старшей по  $\xi$  степени  $n$  имеют  $n = -4$  и образуют оператор

$$\mathcal{N}_{-4} = -2y^2\frac{d^2}{d\xi^2},$$

где  $y = \frac{2}{c}\frac{1}{\xi^2}$ . Ему соответствует характеристический многочлен  $\nu(k) = -2\left(\frac{2}{c}\right)^2 k^2$ , который имеет двукратный корень  $k = 0 = r$ , т. е. не дает критических значений.

По теореме 1.4.1 для решений исходного уравнения (3.1.1) существует единственное разложение

$$\mathcal{B}_3 : \quad y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (3.4.13)$$

где  $\varphi_0$  есть (3.4.10),  $\varphi_{\sigma}$  ряды по убывающим степеням некратных логарифмов. Оно получается из (2.3.27) и (2.3.25) при  $a = 0$ .

**3.4.3. Разложения решений при  $a = c = 0$ ,  $b \neq 0$ .** Вычислим сначала в этом случае степенные и степенно-логарифмические разложения.

Согласно (3.4.2) коэффициент  $c_0$  – произвольная постоянная. Вычислим критические числа. Первая вариация есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_3^{(1)}(x, y)}{\partial y} &= 2\frac{d^2}{dx^2}x^2y^3 + 6y''x^2y^2 - 6\frac{d}{dx}y'x^2y^2 - 6y'^2x^2y + \\ &+ 2\frac{d}{dx}xy^3 + 6y'xy^2 + 4\frac{d}{dx}y'x^2y + 2y'^2x^2 - 2\frac{d^2}{dx^2}x^2y^2 - \\ &- 4y''x^2y - 2\frac{d}{dx}xy^2 - 4y'xy + 8cy^3. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Линейный дифференциальный оператор при  $c = 0$  есть

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\partial \hat{f}_3^{(1)}(x, c_0)}{\partial y} = 2\frac{d^2}{dx^2}x^2c_0^3 + 2\frac{d}{dx}xc_0^3 - 2\frac{d^2}{dx^2}x^2c_0^2 - 2\frac{d}{dx}xc_0^2. \quad (3.4.15)$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2k^2c_0^2(c_0 - 1), \quad (3.4.16)$$

в зависимости от  $c_0 \neq 0$  имеет два корня. Если  $c_0 = 1$ , то его двукратным корнем является любое число  $k$  и  $\mathcal{L}(x) \equiv 0$ . Если  $c_0 \neq 1$ ,  $c_0$  – произвольная постоянная, то многочлен (3.4.16) имеет двукратный нулевой корень  $k = 0$ .

Конус задачи  $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0 \text{ или } \operatorname{Re} k = 0, \operatorname{Im} k \neq 0\}$ . Если  $c_0 \neq 0, 1$ , то  $k \notin \mathcal{K}$ , т. е. критических корней нет и разложение идет по целым возрастающим степеням  $x$ . Разложение решения

$$\mathcal{B}_8 : \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \quad (3.4.17)$$

где комплексный коэффициент  $c_0 \neq 0, 1$  – произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты  $c_s$  – постоянные и однозначно определенные. Разложение (3.4.17) известно [42, § 46, формула (46.4)]. Ряд (3.4.17) сходится для достаточно малых  $|x|$  по теореме 1.2.5.

Второе приближение решения уравнения есть  $y = c_0 + c_1 x$ . Второе приближение уравнения (3.1.1) есть

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(x, y) = & 2y''x^3y - y'^2x^3 - 2(b-d)xy^2 + \\ & + 2y''x^3y^2 - 2y'^2x^3y + 6y'x^2y^2 - 4xy^3(b-d) - \\ & - 4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 2xy^4(b-d). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Коэффициент  $c_1 = -b_1/\nu(1)$ ,  $b_1 = x^{-1}\hat{f}_3^{(1)}(x, c_0) = -2(b-d)c_0^2(c_0-1)^2$ ,  $\nu(1) = 2c_0^2(c_0-1)$ ,

$$c_1 = (b-d)(c_0-1). \quad (3.4.19)$$

Если  $c_0 = 1$ , т. е.  $\mathcal{L}(x) \equiv 0$ , то сделаем в уравнении (3.1.1) при  $c = 0$  замену  $y = u + 1$  и получим уравнение

$$\begin{aligned} g(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & u''x^2(x-1)^2(u+1)u(u+1-x) - \\ & u'^2[x^2(x-1)^2u(u+1-x) + x^2(x-1)^2(u+1)^2(u+1-x) + \\ & x^2(x-1)^2(u+1)u] + 2u'[x(x-1)^2(u+1)u(u+1-x) + \\ & x^2(x-1)(u+1)u(u+1-x) + x^2(x-1)^2(u+1)u - 2bxu^2(u+1-x)^2 + \\ & 2dx(x-1)(u+1)^2u^2] = 0. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Уравнение (3.4.20) имеет тривиальное решение  $u = 0$ . В уравнении (3.1.1) ему соответствует исключительное решение  $\mathcal{I}_2 : y = 1$ .

Конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, p_2 < 0\}$ . Носитель  $\mathbf{S}(g)$  левой части уравнения (3.4.20), его выпуклая оболочка  $\mathbf{\Gamma}(g)$ , грани: вершины  $G_i^{(0)}$  и ребра  $G_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ; изображены на рис. 8 а. Вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_i^{(j)}$ , соответствующие этим граням изображены на рис. 8 б.

С конусом задачи  $\mathcal{K}$  пересекаются нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$  и  $\mathbf{U}_1^{(1)}$ .

Вершине  $G_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux = 0. \quad (3.4.21)$$

Первое приближение решения имеет вид  $u = c_r x^r$ , где  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени  $r$  определим из характеристического уравнения

$$\chi(r) = r^2 = 0, \quad (3.4.22)$$

т. е.  $r_{1,2} = 0$ . Вектор  $P = \omega(1, r) = -(1, 0)$  не лежит в  $\mathbf{U}_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$ , следовательно, подходящих решений, соответствующих вершине  $G_1^{(0)}$ , нет.

Ребру  $G_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{g}_1^{(1)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 \\ & - 2(b-d)u^2x + 6u''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - 2(d+2b)u^2x^2 \\ & - 2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Это ребро горизонтально. Его левой вершине  $G_5^{(0)} = (0, 2)$  соответствует укороченное уравнение (3.4.21). Для обоих этих уравнений (3.4.21) и (3.4.23) суммарный порядок дифференцирования  $\Delta(\hat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\hat{g}_5^{(0)}) = 2$ . Согласно теореме 1.3.4 уравнение (3.4.23) не имеет нестепенных решений при  $x \rightarrow 0$ .

Вычислим в этом случае нестепенные решения уравнения (3.4.1). Определяющее уравнение (3.4.2) здесь имеет произвольное решение. Конус задачи есть  $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ . И кроме того,  $y \neq \text{const}$ .

При  $c = 0$  носитель  $\mathbf{S}(\varphi)$  уравнения (3.4.3) состоит из двух точек  $Q_1$  и  $Q_3$ . Его выпуклая оболочка это отрезок, совпадающий с ребром  $\Phi_3^{(1)}$  (рис. 7 а) Нормальные конусы суть  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_2 < 0\}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$ . С конусом задачи пересекаются нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(1)}$ .

Случай вершины  $\Phi_1^{(0)}$  рассматривался в случае  $c \neq 0$ . Вычисленный ранее вектор  $P = (1, 0)$  лежит в конусе задачи  $\mathcal{K}$ , но ему отвечает постоянное решение, которое нам не подходит. Следовательно, решений, соответствующих вершине  $\Phi_1^{(0)}$ , нет.

Вершине  $\Phi_3^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\ddot{y}y^3 - 3\dot{y}^2y^2 = 0.$$

Нормальный конус есть  $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$ . Ищем его решения в виде  $y = c_r \xi^r$ ,  $c_r \neq 0$ ,  $c_r$  – произвольная постоянная. Вычислим показатель степени  $r$ . Характеристическое уравнение

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{-4r+2} \hat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, \xi^r) \stackrel{\text{def}}{=} -r^2 - 2r = 0$$

имеет корни  $r_1 = 0$  и  $r_2 = -2$ . Вектору  $P_1 = \omega(1, r_1) = (1, 0)$  соответствует постоянное решение, которое нам не подходит. А вектор  $P_2 = \omega(1, r_2) = (1, -2)$  не лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ . Следовательно, решений, соответствующих вершине  $\Phi_3^{(0)}$ , нет.

Вертикальному ребру  $\Phi_3^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_3^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\dot{y}y^3 - 3\dot{y}^2y^2 - 2\dot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0. \quad (3.4.24)$$

Корнем определяющего уравнения служит любая постоянная. Но решение  $y(\xi) = \text{const}$  нам не подходит.

Согласно п. 3.2 гл. 1 делаем еще одно логарифмическое преобразование  $\eta = \ln \xi$ , тогда  $\dot{y} = \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\eta}$ ,  $\ddot{y} = \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{d^2y}{d\eta^2} - \frac{dy}{d\eta} \right)$ . При этом уравнение (3.4.24) принимает вид

$$\hat{\varphi}_3^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\eta, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2 \left( \frac{d^2y}{d\eta^2} - \frac{dy}{d\eta} \right) y^2(1-y) + \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^2 y(2-3y) = 0.$$

Носитель  $\mathbf{S}(\sigma)$  состоит из четырех точек  $Q_1 = (-1, 3)$ ,  $Q_2 = (-1, 4)$ ,  $Q_3 = (-2, 4)$ ,  $Q_4 = (-2, 3)$ . Их выпуклая оболочка является квадратом с этими вершинами. Граница этого квадрата состоит из четырех вершин и четырех ребер. Их нормальные конусы суть квадранты и координатные лучи плоскости  $p_1, p_2$ .

Конус задачи здесь  $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$  и решение  $y(\eta) \neq \text{const}$ . С конусом задачи пересекаются нормальные конусы верхнего, правого и нижнего ребра и двух правых вершин.

Верхнее и нижнее ребра соответствуют вершинам  $\Phi_3^{(0)}$  и  $\Phi_1^{(0)}$ , для которых было уже установлено отсутствие нужных решений. Правому ребру соответствует укороченное уравнение

$$2\frac{dy}{d\eta}y^2(1-y) = 0. \quad (3.4.25)$$

Оно имеет только постоянные решения, которые нам не подходят. Укороченные уравнения, соответствующие правым вершинам, являются частями уравнения (3.4.25). Поэтому они имеют также только постоянные решения которые нам не подходят. Следовательно, нет решений, соответствующих ребру  $\Phi_3^{(1)}$ .

Итак, в случае  $c = 0$  нет нестепенных решений уравнения (3.4.1).

А теперь решим уравнение (3.4.1) в явном виде. Очевидно, что уравнение (3.4.1) и уравнение (2.3.1) при  $a = 0$  это одно и то же. Поэтому мы воспользуемся результатами гл. 2 и сразу рассмотрим уравнение (2.3.30).

В случае  $a = 0$  уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y \sqrt{(2c - C_2 + C_2 y)}. \quad (3.4.26)$$

Интегрирование уравнения (3.4.26) зависит от значения  $C_2$  и параметра  $c$ . Рассмотрим три случая значений постоянной  $C_2$ .

*Случай  $C_2 = 2c$ .* Если  $a = 0$ ,  $c \neq 0$ , то уравнение (2.3.30) имеет решение (2.3.33), сохранившееся из случая  $a \neq c \neq 0$ . Ему соответствует разложение (2.3.34).

В случае  $a = c = 0$  уравнение (3.4.26) есть  $dy/d\xi = 0$ . Оно имеет решение  $y = C_3$ ,  $C_3$  – произвольная постоянная. Этому решению соответствует семейство разложений решений (3.4.17) полного уравнения.

*Случай  $C_2 = 0$ .* Уравнение (3.4.26) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y \sqrt{2c}. \quad (3.4.27)$$

Если  $a = 0$ ,  $c \neq 0$ , то уравнение (3.4.27) имеет решение

$$y = C_4 x^{\pm \sqrt{2c}}, \quad (3.4.28)$$

где  $C_4$  – произвольная постоянная.

Функция (3.4.28) является решением укороченного уравнения (3.4.1), соответствующего ребру  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ . Более того, она является решением каждого из укороченных уравнений, соответствующих вершинам  $\tilde{Q}_4$  и  $Q_3$  (рис. 2б).

Пусть  $r = \pm \sqrt{2c}$ . Если  $\operatorname{Re} r \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} r \geq 0$ ,  $r \neq 0$ , то  $r$  попадает в приведенный нормальный конус  $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)}$ , соответствующий нижней вершине  $\tilde{Q}_4$ . Если  $\operatorname{Re} r \leq 0$ ,  $\operatorname{Im} r \leq 0$ ,  $r \neq 0$ , то  $r$  попадает в приведенный нормальный конус  $\check{\mathbf{U}}_3^{(0)}$ , соответствующий верхней вершине  $Q_3$ .

*Случай  $0 \neq C_2 \neq 2c$ .* Пусть

$$t^2 = 2c - C_2 + C_2 y, \quad (3.4.29)$$

тогда уравнение (3.4.26) принимает вид

$$\frac{dt}{d\xi} = \pm (t^2 - 2c + C_2)/2. \quad (3.4.30)$$

Уравнение (3.4.30) имеет интеграл

$$\ln \frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16}),$$

где  $C_{16}$  – произвольная постоянная. Отсюда получаем

$$\frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \exp\left(\pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16})\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma. \quad (3.4.31)$$

Учитывая (3.4.29) и (3.4.31) получаем

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2} \frac{4\sigma}{(1 - \sigma)^2}. \quad (3.4.32)$$

Правую часть (3.4.32) можно записать в виде

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2} \left( \frac{2}{1/\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma}} \right)^2. \quad (3.4.33)$$

Положим  $2i\eta = \ln \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16})$ . Учитывая равенство  $\xi = \ln x$ , имеем

$$\eta = \pm i \frac{\sqrt{2c - C_2}}{2} (\ln x + C_{16}).$$

Тогда (3.4.33) принимает вид

$$y = \frac{C_2 - 2c}{C_2} \frac{1}{\sin^2 \eta}. \quad (3.4.34)$$

Согласно (3.4.31)  $y$  разлагается в ряд по степеням  $\sigma = (C_{17}x)^{\pm\sqrt{2c-C_2}}$ , где  $C_{17}$  – произвольная постоянная.

Если  $2c - C_2$  – вещественное отрицательное число, то число  $i\sqrt{2c - C_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma$  – вещественно. В этом случае  $\eta = \gamma \ln(C_{17}x)$ . Из (3.4.34) видно, что  $y$  разлагается в ряд по целым степеням  $\sigma$ , т. е. по целым степеням  $x^{2\gamma i}$ , что дает ряд по чисто мнимым степеням  $x$ , который при  $a = 0$  соответствует семействам  $\mathcal{A}_{00}^r$  экзотических разложений (2.2.26) с  $\text{Re } r = 0$ .

## §5. Разложения решений вблизи бесконечности при

$$a = 0, \quad b \neq 0$$

**3.5.1 . Разложения решений вблизи бесконечности, соответствующие вершине  $\Gamma_2^{(0)}$ .** Вершина  $\Gamma_2^{(0)} = (2, 4)$  с помощью преобразования (2.1.9) переводится в вершину  $\Gamma_3^{(0)} = (0, 4)$ . Поэтому разложения соответствующие вершине  $\Gamma_2^{(0)}$  получаются с помощью симметрии (2.1.9) из разложений соответствующих вершине  $\Gamma_3^{(0)}$ . И представляют собой следующие семейства

$$\mathcal{G}_7 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.5.1)$$

где  $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$ ,  $\text{Re } \sqrt{1 - 2d} > 0$ ,  $s \in \{r + l(1 - r) - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$ , комплексные коэффициенты:  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная,  $c_s$  постоянны и однозначно определены.



Если  $1 < \operatorname{Re} r \leq 2$ , второе приближение решения есть  $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$ , где  $c_{r-1} = c_r(c + b + d - r)/r$ .

Если  $\operatorname{Re} r > 2$ , то второе приближение решения есть  $y = c_r x^r + c_1 x$ , где  $c_1 = 0$ .

$$\mathcal{G}_7^\tau : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.5.2)$$

где  $r = 1 \pm \sqrt{1 - 2d}$ ,  $\operatorname{Re} r = 1$ ,  $s \in \{r + l(1 - r) - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ , комплексные коэффициенты:  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

**3.5.2 . Разложения решений вблизи бесконечности, соответствующие ребру  $\Gamma_1^{(1)}$ .** При  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $d = 1/2$  имеем семейство степенных разложений  $\mathcal{G}_8$ , соответствующее ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  и вычисленное с помощью симметрии (2.1.9) из семейства разложений решений  $\mathcal{B}_8$ , соответствующего ребру  $\Gamma_3^{(1)}$ .

$$\mathcal{G}_8 : y = c_1 x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} x^{-s}, \quad (3.5.1)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_1 \neq 0, 1$  – произвольная постоянная,  $c_{-s}$  постоянны и однозначно определены. Второе приближение решения имеет вид  $y = c_1 x + c_0$ , где

$$c_0 = (c_1 - 1)(1 - 2c - 2b). \quad (3.5.2)$$

При  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $d \neq 1/2$  имеем семейство сложных разложений, соответствующее ребру  $\Gamma_3^{(1)}$ , в случае  $d \neq 1/2$ .

$$\mathcal{G}_3 : y = \varphi_1 x + \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{-\sigma} x^{-\sigma}, \quad (3.5.3)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{4}{1 - 2d} \frac{1}{\ln^2 x} + c_{-3} \frac{1}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s} \left( \frac{1}{\ln x} \right)^s, \quad (3.5.4)$$

комплексные коэффициенты:  $c_{-3}$  – произвольный, остальные  $c_{-s}$  постоянны и однозначно определены;  $\varphi_{-\sigma}$  ряды по убывающим степеням некратных логарифмов.

## §6. Сводка результатов в случае $a = 0$ , $b \neq 0$

**Теорема 3.6.1.** В случае  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow 0$  имеет всего 22 семейства разложений решений. Из них 18 семейств  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_{00}^\tau$ ,  $\mathcal{A}_{01}^\tau$ ,  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $\mathcal{H}_1^\tau$ ,  $\mathcal{H}_2^\tau$ ,  $\mathcal{H}_6^\tau$ ,  $\tau = \pm 1$  и  $\mathcal{B}_3$ , соответствующие вершине

$\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$ , ребру  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$  и ребру  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ , сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Остальные 4 семейства разложений решений новые:

$\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_7^\tau, \tau = \pm 1$ , которые существуют при  $c \neq 0$  и определяются формулами (3.2.8), (3.2.7) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{B}_8$ , которое существует при  $c = 0$ , определяется формулой (3.4.17) и имеет 1 параметр.

**Замечание 3.6.1.** Семейства  $\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_7^\tau$  и  $\mathcal{B}_8$  также назовем базовыми. С помощью симметрий уравнения (2.1.7), (2.1.9) и (2.1.10) из них получаются другие семейства разложений.

Однопараметрические семейства  $\mathcal{B}_7$  и  $\mathcal{B}_8$  – степенные,  $\mathcal{B}_7^\tau$  – экзотические,  $\mathcal{B}_3$  – сложное. Существование базовых семейств  $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_7^\tau, \mathcal{B}_8$  при разных значениях параметров для  $a = 0$  показано в табл. 1.

**Теорема 3.6.2.** В случае  $a = 0, b \neq 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow \infty$  имеет 22 семейства разложений решений. Из них 18 семейств  $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_{\infty 0}^\tau, \mathcal{A}_{\infty 1}^\tau, \mathcal{D}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{D}_1^\tau, \mathcal{D}_2^\tau, \mathcal{D}_6^\tau, \tau = \pm 1$  и  $\mathcal{G}_3$ , соответствующие вершине  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ , ребру  $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$  и ребру  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ , сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Остальные 4 семейства разложений решений новые:

$\mathcal{G}_7$  которое существует при  $c \neq 0$ , определяется формулой (3.5.1) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{G}_7^\tau, \tau = \pm 1$  которые существуют при  $c \neq 0$ , определяются формулой (3.5.2) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{G}_8$ , которое существует при  $d = 1/2$ , определяется формулой (3.5.1) и имеет 1 параметр.

Шестое уравнение Пенлеве имеет три симметрии (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10). Если скомбинировать первые две из них, то получается симметрия

$$(x, y, a, b, c, d) \rightarrow \left( \frac{1}{x^*}, \frac{y^*}{x^*}, a^*, b^*, -d^* + \frac{1}{2}, -c^* + \frac{1}{2} \right). \quad (3.6.1)$$

Она переводит семейства разложений при  $x \rightarrow 0$  в семейства разложений при  $x \rightarrow \infty$ . При этом семейства  $\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_7^\tau, \mathcal{B}_8$  переходят в семейства  $\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7^\tau, \mathcal{G}_8$  соответственно (и обратно). Покажем это на примере семейств разложений  $\mathcal{B}_7$  и  $\mathcal{G}_7$ .

Формула (3.2.8) при замене (3.6.1) испытывает следующие преобразования

$$\begin{aligned} \frac{y^*}{x^*} &= c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s}, \\ y^* &= c_r x^{*-r+1} + \sum_s c_s x^{*-s+1}, \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Положим  $c_{r^*}^* = c_r$ ,  $r^* = -r + 1$ ,  $c_{s^*}^* = c_s$ ,  $s^* = -s + 1$ , где  $s^*$  пробегает множество  $\mathbf{K}^* = \{s^* = r^* + l(1 - r^*) - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$ . Получаем ряд

$$y^* = c_{r^*}^* x^{*r^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*},$$

Из §2 известно, что в случае  $\operatorname{Re} \sqrt{2c} > 1$ , второе приближение решения, соответствующее вершине  $\Gamma_3^{(0)}$ , есть  $y = c_r x^r + c_0$ ,  $c_r \neq 0$ ,  $c_r$  – произвольная постоянная,  $r = -\sqrt{2c}$ . С помощью преобразования (3.6.1) получаем второе приближение решения, соответствующее вершине  $\Gamma_2^{(0)}$  для  $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d^*} > 1$ ,

$$y^* = c_{r^*}^* x^{*r^*} + c_1^* x^*,$$

где  $r^* = 1 + \sqrt{1 - 2d^*}$ ,  $c_{r^*}^* \neq 0$ ,  $c_{r^*}^*$  – произвольная постоянная,  $c_1^* = 0$ .

Аналогично в случае  $0 < \operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d^*} \leq 1$  получаем

$$y^* = c_{r^*}^* x^{*r^*} + c_{r^*-1}^* x^{*r^*-1},$$

где  $r^* = 1 + \sqrt{1 - 2d^*}$ ,  $c_{r^*}^* \neq 0$ ,  $c_{r^*}^*$  – произвольная постоянная,  $c_{r^*-1}^* = c_{r^*}^* (-r^{*2} + r^* + c^* + b^* - d^*)/r^*$

Наконец, опускаем звездочки и получаем

$$\mathcal{H}_7 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.6.3)$$

где комплексный показатель  $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$ ;  $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} > 0$ ,  $c_r \neq 0$ ,  $c_r$  – комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты  $c_s$  – постоянные и однозначно определенные,  $s \in \mathbb{C}$  пробегает множество  $\{r + l(1 - r) - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$ , в случае  $0 < \operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} \leq 1$  имеет второе приближение  $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$ , где

$$c_{r-1} = c_r (-r^2 + r + c + b - d)/r,$$

а в случае  $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} > 1$ , второе приближение решения уравнения имеет вид  $y = c_r x^r + c_1 x$ , где  $c_1 = 0$ .

## §7. Разложения решений в случае $a \neq 0$ , $b = 0$

С помощью симметрии (2.1.7) разложения, вычисленные в случае  $a = 0$ , переводятся в разложения, имеющиеся в случае  $b = 0$ .

**3.7.1. Разложения, соответствующие вершине  $\Gamma_6^{(0)} = (4, 2)$ .** Эта вершина симметрична вершине  $\Gamma_3^{(0)}$ . Поэтому разложения решений, соответствующие вершине  $\Gamma_6^{(0)}$  симметричны разложениям решений, соответствующих вершине  $\Gamma_3^{(0)}$ . Рассмотрим разложение (3.2.8). Формула (3.2.8)

при замене (2.1.7) испытывает такие преобразования

$$\frac{1}{y^*} = c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s},$$

$$y^* = \frac{1}{\frac{c_r}{x^{*r}} \left( 1 + \sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right)}, \quad (3.7.1)$$

Так как  $|x|^* \rightarrow \infty$  и  $\left| \sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right| < 1$ , то (3.7.1) можно разложить в ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right)^n. \quad (3.7.2)$$

Выпишем первые два его члена

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} - \sum_s \frac{c_s}{c_r^2} x^{*-s+2r} + \dots \quad (3.7.3)$$

Положим  $c_r^* = 1/c_r$ ,  $c_{s^*}^* = -c_s/c_r^2$ ,  $s^* = -s + 2r$ , где  $s^*$  пробегает множество  $\{r + lr - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$ , получим ряд

$$y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*} + \dots,$$

Второе приближение решения в случае  $-1 < \operatorname{Re} r \leq 0$  имеет вид  $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{r-1}^* x^{*r-1}$ ,  $r = -\sqrt{2c}$ ,

$$c_{r-1}^* = -\frac{c_{r+1}}{c_r^2} = -c_r^* \frac{c^* + d^* + a^* - r}{r-1}.$$

А в случае  $\operatorname{Re} r < -1$ , второе приближение решения есть

$$y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r}^* x^{*2r},$$

где  $c_{2r}^* = 0$ . Наконец, опустим звездочки и получим выражение

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.4)$$

где комплексный показатель  $r = \sqrt{2c}$  и удовлетворяет условиям  $\operatorname{Re} r < 0$  (в этом случае формула (3.7.4) определяет однопараметрическое семейство  $\mathcal{G}_7$  степенных разложений) или  $\operatorname{Re} r = 0$  (в этом случае формула (3.7.4) определяет однопараметрические семейства  $\mathcal{G}_7^\tau$ ,  $\tau = \pm 1$  экзотических разложений),  $s$  пробегает множество  $\{r + lr - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$ ,

комплексные коэффициенты  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  – постоянны и однозначно определены.

В случае  $-1 \leq \operatorname{Re} r < 0$  разложение решения имеет второе приближение  $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$ , где

$$c_{r-1} = -c_r \frac{c + d + a - r}{r - 1},$$

а в случае  $\operatorname{Re} r < -1$ , второе приближение решения уравнения имеет вид  $y = c_r x^r + c_{2r} x^{2r}$ , где  $c_{2r} = 0$ . По теореме 1.2.5 ряд (3.7.4) сходится для достаточно больших  $|x|$ .

**3.7.2. Разложение, соответствующее вершине  $\Gamma_5^{(0)}$ .** Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{H}_7 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.5)$$

где  $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$ ,  $\operatorname{Re} r > 1$ ,  $s \in \{r + l(r-1) + m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$ , комплексные коэффициенты  $c_r$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  – постоянны и однозначно определены. В случае  $\operatorname{Re} r \geq 2$  второе приближение решения  $y = c_r x^r + c_{2r-1} x^{2r-1}$ ,  $c_{2r-1} = c_r \frac{r - c + a - d}{r}$ , в случае  $1 < \operatorname{Re} r < 2$  второе приближение решения  $y = c_r x^r + c_{2r-1} x^{2r-1}$ ,  $c_{2r-1} = 0$ . В случае  $\operatorname{Re} r = 1$  разложения (3.7.5) являются экзотическими. Обозначим их семейство  $\mathcal{H}_7^\tau$ , где  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ . Ряд (3.7.5) сходится для достаточно малых  $|x|$ , согласно теореме 1.2.5.

**3.7.3. Разложения решений, соответствующие  $\Gamma_6^{(1)}$ .** При  $c = 0$  имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{D}_8 : y = c_0 + \frac{c_{-1}}{x} + \sum_{s=2}^{+\infty} \frac{c_{-s}}{x^s}, \quad (3.7.6)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_0 \neq 0, 1$ , – произвольная постоянная, комплексный коэффициент  $c_{-1} = (d + a)(1 - c_0)c_0$ , все  $c_{-s}$  – постоянны и однозначно определены.

По теореме 1.2.5 ряд (3.7.6) сходится для достаточно больших  $|x|$ .

При  $c \neq 0$  имеем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{D}_3 : y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{-\sigma} x^{-\sigma}, \quad (3.7.7)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{c}{2} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} \left( \frac{1}{\ln x} \right)^s + \dots, \quad (3.7.8)$$

комплексные коэффициенты:  $c_1$  – произвольная постоянная, все  $c_{-s}$  – постоянны и однозначно определены;  $\varphi_{-\sigma}$  ряды по убывающим степеням логарифмов.

**3.7.4. Разложения решений, соответствующие  $\Gamma_4^{(1)}$ .** При  $d = 1/2$  имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_8 : \quad y = c_1 x + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s x^s, \quad (3.7.9)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_1 \neq 0, 1$  – произвольная постоянная,  $c_2 = -c_1(1 - c_1)(1 - 2c_1 + 2a)$ , все  $c_s$  – постоянны и однозначно определены.

Этот ряд сходится для достаточно малых  $|x|$ .

При  $d \neq 1/2$  имеем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3 : \quad y = \varphi_1 x + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (3.7.10)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1 - 2d}{4} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} (\ln x)^{-s}, \quad (3.7.11)$$

комплексные коэффициенты:  $c_1$  – произвольная постоянная, все  $c_{-s}$  – постоянны и однозначно определены;  $\varphi_{\sigma}$  ряды по убывающим степеням логарифмов.

**3.7.5 . Сводка результатов в случае  $a \neq 0, b = 0$ .**

**Теорема 3.7.1.** В случае  $a \neq 0, b = 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow 0$  имеет всего 22 семейства разложений решений. Из них 18 семейств  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{00}^{\tau}, \mathcal{A}_{01}^{\tau}, \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{B}_1^{\tau}, \mathcal{B}_2^{\tau}, \mathcal{B}_6^{\tau}, \tau = \pm 1$  и  $\mathcal{H}_3$ , соответствующие вершине  $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$ , ребру  $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$  и ребру  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ , сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Остальные 4 семейства разложений решений новые:

$\mathcal{H}_7, \mathcal{H}_7^{\tau}, \tau = \pm 1$ , которые существуют при  $d \neq 1/2$ , определяются формулой (3.7.5) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{H}_8$ , которое существует при  $d = 1/2$ , определяется формулой (3.7.9) и имеет 1 параметр;

**Теорема 3.7.2.** В случае  $a \neq 0, b = 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow \infty$  имеет 22 семейства разложений решений. Из них 18 семейств  $\mathcal{A}_{\infty}, \mathcal{A}_{\infty 0}^{\tau}, \mathcal{A}_{\infty 1}^{\tau}, \mathcal{G}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{G}_1^{\tau}, \mathcal{G}_2^{\tau}, \mathcal{G}_6^{\tau}, \tau = \pm 1$  и  $\mathcal{D}_3$ , соответствующие вершине  $\tilde{\Gamma}_2^{(0)}$ , ребру  $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$  и ребру  $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ , сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Остальные 4 семейства разложений решений новые:

$\mathcal{D}_7, \mathcal{D}_7^{\tau}, \tau = \pm 1$  которые существуют при  $c = 0$ , определяются формулой (3.7.4) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{D}_8$ , которое существует при  $c = 0$ , определяется формулой (3.7.6) и имеет 1 параметр.

С помощью симметрии (3.6.1) разложения решений при  $x \rightarrow 0$  переводятся в разложения решений при  $x \rightarrow \infty$ . При этом разложения  $\mathcal{H}_7$ ,  $\mathcal{H}_7^\tau$ ,  $\mathcal{H}_8$  переходят в разложения  $\mathcal{D}_7$ ,  $\mathcal{D}_7^\tau$ ,  $\mathcal{D}_8$  соответственно (и обратно).

#### IV. РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ Р6 В СЛУЧАЕ $a = b = 0$ ВБЛИЗИ НУЛЯ И БЕСКОНЕЧНОСТИ

##### §1. Разложения

Для шестого уравнения Пенлеве (2.1.1) при  $a = b = 0$ ,  $c$  и  $d$  – произвольные, ищем разложения его решений при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  вида (2.1.2) всех четырех типов – степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические.

Уравнение (2.1.5) при  $a = b = 0$  принимает вид

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) \\ & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + \\ & x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] \\ & - [2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Носитель  $\mathbf{S}(f_{a=b=0})$  левой части уравнения (3.1.1), его выпуклая оболочка  $\Gamma(f_{a=b=0})$ , грани: вершины  $\Gamma_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_i$  и ребра  $\Gamma_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , изображены на рис. 5.

Согласно рис. 5 в этом случае нет новых семейств разложений решений. Все семейства разложений, существующие в случае  $a = b = 0$ , содержатся в случаях  $a \cdot b \neq 0$ ,  $a = 0, b \neq 0$  и  $a \neq 0, b = 0$  и перечислены в главах 2 и 3.

**Теорема 3.1.1.** *В случае  $a = b = 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow 0$  имеет всего 15 семейств разложений решений. Из них 7 семейств  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_{00}^\tau$ ,  $\tau = \pm 1$ ,  $\mathcal{A}_{01}^\tau$ ,  $\mathcal{B}_3$  и  $\mathcal{H}_3$  сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Еще 8 семейств разложений решений  $\mathcal{B}_7$ ,  $\mathcal{B}_7^\tau$ ,  $\mathcal{B}_8$ ,  $\mathcal{H}_7$ ,  $\mathcal{H}_7^\tau$  и  $\mathcal{H}_8$  сохранились из случаев  $a = 0, b \neq 0$  и  $a \neq 0, b = 0$*

**Теорема 3.1.2.** *В случае  $a = b = 0$  уравнение (2.1.1) при  $x \rightarrow \infty$  имеет всего 15 семейств разложений решений. Из них 7 семейств  $\mathcal{A}_\infty$ ,  $\mathcal{A}_{\infty 0}^\tau$ ,  $\tau = \pm 1$ ,  $\mathcal{A}_{\infty 1}^\tau$ ,  $\mathcal{G}_3$  и  $\mathcal{D}_3$  сохранились из случая  $a \cdot b \neq 0$ . Еще 8 семейств разложений решений  $\mathcal{G}_7$ ,  $\mathcal{G}_7^\tau$ ,  $\tau = \pm 1$ ,  $\mathcal{G}_8$ ,  $\mathcal{D}_7$ ,  $\mathcal{D}_7^\tau$  и  $\mathcal{D}_8$  сохранились из случаев  $a = 0, b \neq 0$  и  $a \neq 0, b = 0$*

## §2. Примеры и сравнения с известными результатами

*Пример 1.* В случае

$$a = b = c = 0, \quad d = 1/2 \quad (3.2.2)$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три двухпараметрических семейства разложений  $\mathcal{A}_{00}^\tau$ ,  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$  (семейства экзотических разложений) и  $\mathcal{A}_0$  (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \quad (3.2.3)$$

где комплексные показатели степени:  $r$  – произвольный с  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$  для семейств  $\mathcal{A}_{00}^\tau$ ,  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$  и с  $0 < \operatorname{Re} r < 1$  для семейства  $\mathcal{A}_0$ ,  $s \in \{r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$ ; комплексные коэффициенты:  $c_r$  ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

Если  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$  сумма ряда (3.2.3) для  $m = 0$  есть функция (3.4.34), т. е. асимптотики имеют вид

$$y = \sin^{-2} \left[ -\frac{\operatorname{Im} r}{2} \ln(C_{17}x) \right], \quad (3.2.4)$$

где  $r = \sqrt{-C_2}$ ,  $C_2$  – любое вещественное положительное число,  $C_{17}$  – ненулевая произвольная постоянная.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений  $\mathcal{B}_8$ , определяемое формулой

$$y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \quad (3.2.5)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_0 \neq 0, 1$ ,  $c_0$  произвольная постоянная,  $c_1 = (c_0 - 1)/2$ , остальные  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

*Пример 2.* В случае (3.2.2) Пикар [52] проинтегрировал уравнение (2.1.1) в явном виде. Некоторые асимптотики решений Пикара есть в лемме 2 [47]. При  $x \rightarrow 0$  они имеют вид

$$y(x) \sim a_0 x^r (1 + O(x^\varepsilon)), \quad (3.2.6)$$

где  $0 < \operatorname{Re} r < 1$ , либо  $r = 0$ , либо  $r = 1$ ,  $a_0$  – ненулевая произвольная постоянная.

В случае  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$  асимптотики решений суть [43]

$$y(x) \sim (1 + O(x)) \sin^{-2} \left[ \frac{-\operatorname{Im} r \log(x)}{2} + O(1) \right]. \quad (3.2.7)$$



Сравнивая формулу (3.2.6) с формулами (3.2.3), (3.2.5) и формулу (3.2.7) с формулой (3.2.4), видим, что формулы (3.2.6) и (3.2.7) суть асимптотики решений семейств  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{B}_8$  (для  $r = 0$ ) и  $\mathcal{A}_{00}^r$  соответственно.

*Пример 3.* При

$$a = 2, b = c = 0, d = 1/2 \quad (3.2.8)$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три двухпараметрических семейства разложений  $\mathcal{A}_{00}^r$  (семейство экзотических разложений) и  $\mathcal{A}_0$  (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \quad (3.2.9)$$

где комплексные показатели степени:  $r$  – произвольный с  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$  для семейств  $\mathcal{A}_{00}^r$  и с  $0 < \operatorname{Re} r < 1$  для семейства  $\mathcal{A}_0$ ,  $s \in \{r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$ ; комплексные коэффициенты:  $c_r$  ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

В случае  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$  сумма ряда (3.2.9) для  $m = 0$  есть функция (2.3.82), где  $C_2$  вещественное положительное число,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -C_2/4$ ,  $\gamma = \sqrt{C_2}/2$ . Таким образом, асимптотики решений суть

$$y = \frac{\beta}{\beta \cos^2[\sqrt{-\beta} \ln(C_{11}x)] + \sin^2[\sqrt{-\beta} \ln(C_{11}x)]}, \quad (3.2.10)$$

где  $\beta$  произвольное вещественное отрицательное число,  $C_{11}$  – ненулевая произвольная постоянная.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений  $\mathcal{B}_6$ , определяемое формулой

$$y = 1 + c_2 x^2 + \frac{c_2}{2} x^3 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s x^s, \quad (3.2.11)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_2$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

3. Однопараметрическое семейство сложных разложений  $\mathcal{B}_3$  с асимптотикой

$$y = -\ln^{-2} x + c_{-3} \ln^{-3} x + \sum_{s=4}^{\infty} c_{-s} \ln^{-s} x, \quad (3.2.12)$$

где комплексные коэффициенты:  $c_{-3}$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_{-s}$  постоянны и однозначно определены.

*Пример 4.* В случае (3.2.8) в работе [47] был найден класс решений (названный решениями Шази) в явном виде. Для решений этого класса в лемме 5 [47] при  $x \rightarrow 0$  асимптотики имеют вид

$$y(x) \sim -\log^{-2} x + b_0 \log^{-3} x + O(\log^{-4} x), \quad (3.2.13)$$

где  $b_0$  произвольная комплексная постоянная.

Формула (3.2.13) аналогична (3.2.12) в случае (3.2.8). Для других решений в случае (3.2.8) (за исключением решений Шази) асимптотики не выписаны.

Согласно лемме 6 из [47] существует преобразование, которое отображает решения в случае (3.2.8) в решения в случае (3.2.2). По лемме 7 [47] все решения Шази преобразуются в исключительное решение  $\mathcal{I}_4 : y = \infty$ . По лемме 8 [47] решения типа Пикара не отображаются в это исключительное решение. Таким образом, можно предполагать, что асимптотики решений типа Пикара имеют вид асимптотик решений семейств  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_{00}^r$  и  $\mathcal{B}_6$ .

Рассмотрим преобразование из леммы 6 [47] для разложений решений семейства  $\mathcal{B}_6$ , т. е. для разложений вида (3.2.11). В результате этого преобразования разложения (3.2.11) переводятся в разложения вида

$$y = \frac{1}{1 - 64c_2} - \frac{32c_2}{1 - 64c_2}x + \dots, \quad (3.2.14)$$

где  $c_2$  – комплексная произвольная постоянная из (3.2.11).

Если  $c_2 \neq 1/64$ , то разложение (3.2.14) относится к семейству  $\mathcal{B}_8$ , т. е. имеет вид (3.2.5). Но в случае  $c_2 = 1/64$  оно является исключительным решением  $y = \infty$ . Следовательно, в случае (3.2.8) решение (3.2.11) семейства  $\mathcal{B}_6$  с  $c_2 = 1/64$  с помощью преобразования из леммы 6 [47] переводится в решение  $y = \infty$ . Поэтому и по лемме 8 [47] оно не является решением Пикара. Поскольку его асимптотика при  $x \rightarrow 0$  отлична от асимптотик (3.2.12) решений Шази, то это решение не является решением Шази.

Таким образом, в случае (3.2.8) существует решение (3.2.11) с  $c_2 = 1/64$ , которое не является решением Шази и не является решением типа Пикара. Это противоречит теореме 4 (iii) из [47], утверждающей, что в случае (3.2.8) решения Шази и решения типа Пикара исчерпывают все возможные решения.

На самом деле в случае (3.2.8) имеются решения трех типов: 1) двухпараметрическое семейство решений типа Пикара; 2) однопараметрическое семейство решений Шази и 3) единственное решение (3.2.11) с  $c_2 = 1/64$ . При этом разложения типа 2) являются предельными для типа 1), а решение типа 3) – предельно для решений типов 1) и 2). У решения типа 3) специфичны не только асимптотические, но и другие свойства.

## Литература

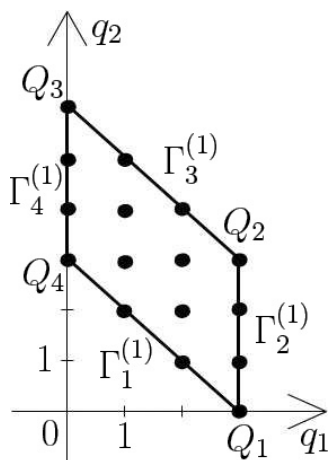
11. Брюно А.Д. , Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004.
16. Брюно А.Д., Чухарева И.В. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №49.
27. Розов Н.Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. 4. 233–234.
42. Gromak I.V., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.
43. Guzzetti D. On the critical behavior, the connection problem and elliptic representation of a Painlevé 6 equation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2001. 4. 293-377.
46. Kimura H. The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1983. 134. 363–392.
47. Mazzocco M. Picard and Chazy solutions to the Painleve VI equation // Math. Ann. 2001. 321. 157–195.
48. Okamoto K. Studies on the Painleve equations I. The six Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. 146. 337–381.
52. Picard E. Démonstration d'un théorème générale sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique // Acta Math. 1887. 11. 1–12.
56. Shimomura S. Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular points // Funkcial. Ekvac. 1982. 25. 163–184.
57. Shimomura S. Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point // Funkcial. Ekvac. 1982. 25. 185–197.
58. Shimomura S. Supplement to "Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point" // Funkcial. Ekvac. 1982. 25. 363–371.
59. Shimomura S. A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // J. Math. Soc. Japan. 1987. 39. 649–662.

62. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Методы, используемые при исследовании асимптотических разложений решений уравнения Р6. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №61.
63. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Все базовые асимптотические разложения решений уравнения Р6 в случае  $a \cdot b \neq 0$ . Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №62.

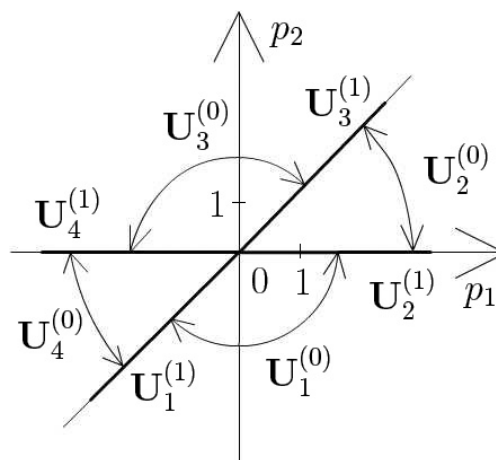
Табл. 1.

Зависимость базовых семейств  $\mathcal{B}$  от параметров при  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ .

$c \neq 0$	$c = 0$
$\mathcal{I}_4$	$\mathcal{I}_4$
$\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_7^T$	$\mathcal{I}_2$
$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_8$

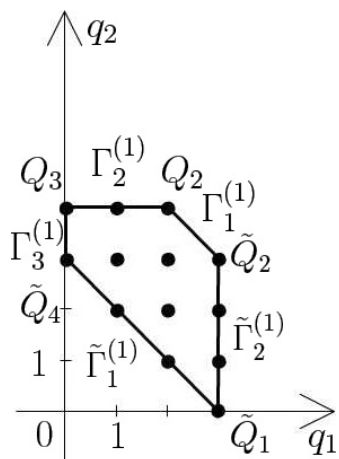


а)

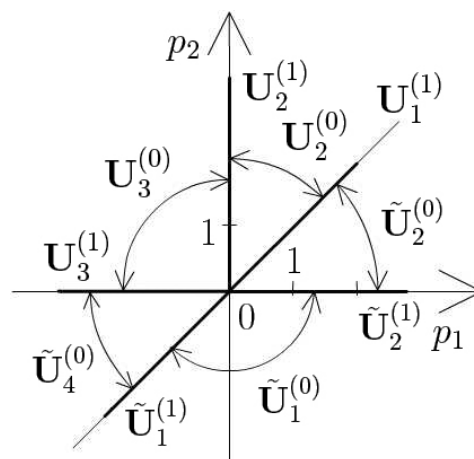


б)

Рис. 1



а)



б)

Рис. 2

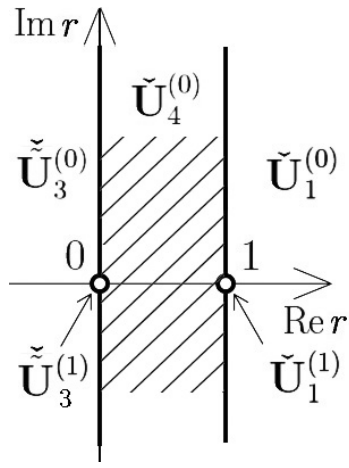


Рис. 3

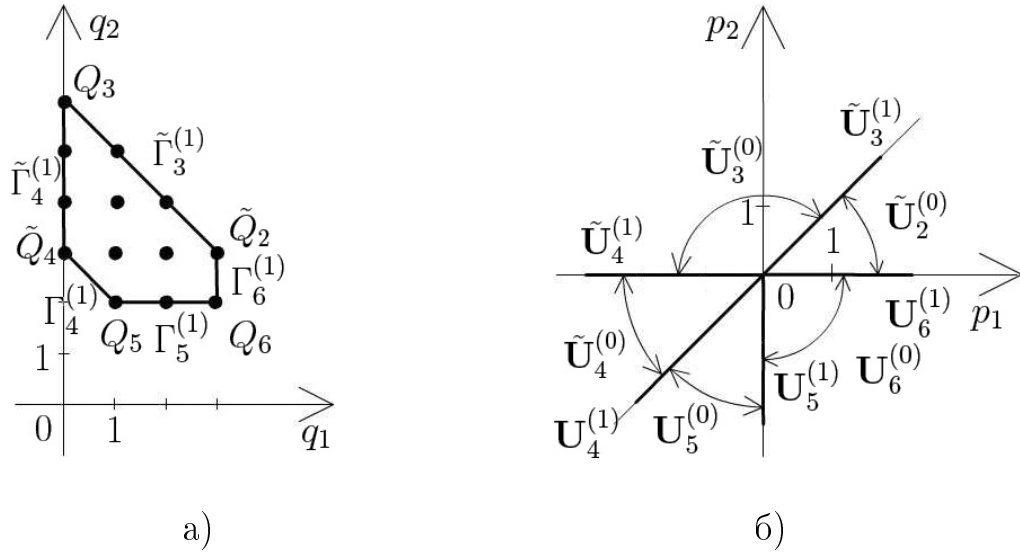


Рис. 4

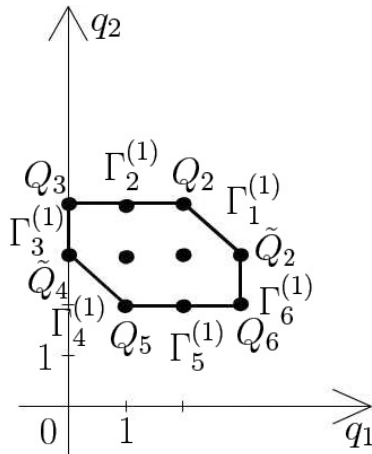


Рис. 5

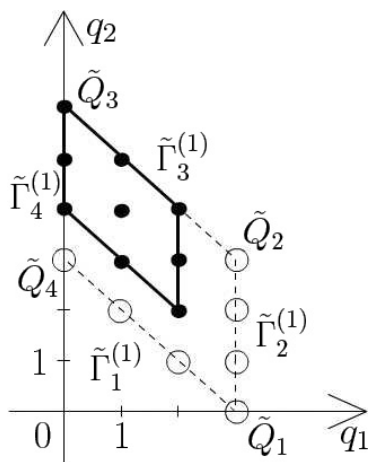
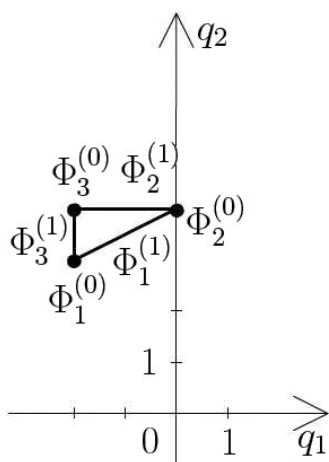
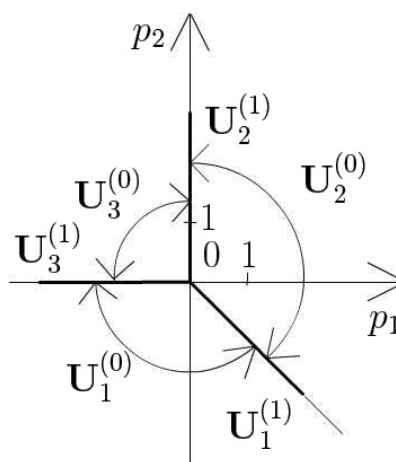


Рис. 6

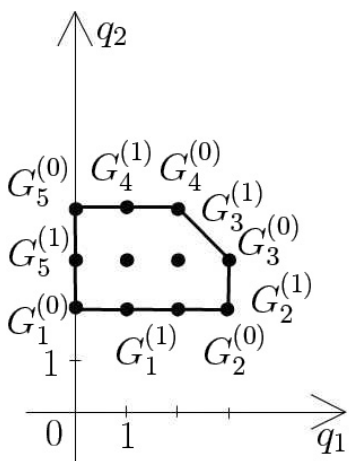


а)

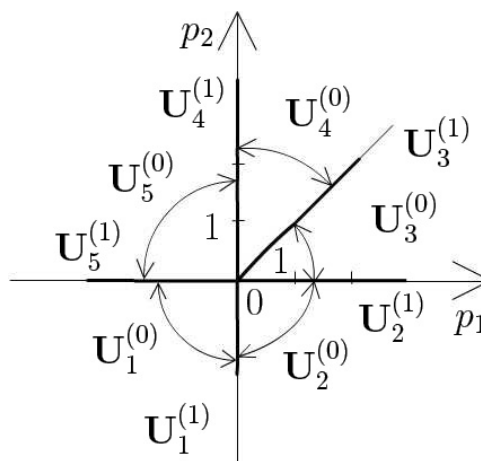


б)

Рис. 7



а)



б)

Рис. 8