



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 81 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.Д. Устюгов, М. В. Попов

Кусочно-параболический
метод на локальном
шаблоне. V. Трехмерная
изотермическая
турбулентность.

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Устюгов С.Д., Попов М. В. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. V. Трехмерная изотермическая турбулентность. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 81. 24 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-81>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
V. Трехмерная изотермическая МГД турбулентность.

Москва 2007

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

**Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
V. Трехмерная изотермическая турбулентность.**

Аннотация

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне, предложенный авторами и исследованный в предыдущих работах, был использован для решения задачи о развитии однородной изотермической МГД турбулентности, которая является важной для проблемы звездообразования в темных молекулярных облаках. Метод PPML показал свою эффективность и позволил получить трехмерную картину турбулентного течения вещества с хорошим разрешением. В работе показано, что сверхзвуковое движение вещества приводит к формированию турбулентной структуры с областями повышенной концентрации вещества и сильными зонами разрежения. Исследовано влияние магнитного поля на спектр кинетической энергии и на процесс ее диссипации.

S.D. Ustyugov, M.V. Popov

**Piecewise parabolic method on local stencil.
V. 3D isothermal turbulence.**

Abstract

Suggested by the authors and investigated in the previous papers Piecewise Parabolic Method on Local stencil was applied to numerical simulation of a homogeneous isothermal MHD turbulence, which is essential for an astrophysical problem of star formation in dark molecular clouds. PPML approved itself as an effective method and allowed to obtain a high resolution 3D picture of turbulent motion of a matter. We show that a supersonic motion of a matter forms a turbulent structure which has the regions of high concentration of a matter as well as the regions of strong rarefaction. We also have investigated the influence of the magnetic field to the spectrum of the kinetic energy and to the process of its dissipation.

Содержание

1	Введение	3
2	Уравнения идеальной изотермической МГД	4
3	Метод Хартена-Лакса-ван Лира решения задачи Римана	9
4	Выполнение условия $\text{div}\mathbf{V} = 0$	12
5	Начальные условия	14
6	Результаты	15
7	Заключение	18

1 Введение

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML) был предложен авторами в работе [1] и расширен для решения уравнений газовой динамики [2] и МГД [3, 4]. PPML был исследован на известных тестовых задачах, решение которых показало преимущество метода по сравнению с исходным кусочно-параболическим методом (PPM) [5]. Мы провели характеристический анализ и воспользовались свойством сохранения инвариантов Римана при их переносе вдоль характеристических кривых системы уравнений, что позволило использовать информацию с предыдущего временного слоя при реконструкции решения внутри разностных ячеек. Такой подход позволил отказаться от интерполяционной процедуры, использованной в PPM, и применить локальный шаблон при построении численной схемы. Это дало возможность точного представления разрывных решений без добавления излишней диссипации. Большое внимание было уделено вопросу сохранения монотонности решения и сохранению бездивергентности магнитного поля в задачах МГД.

В данной работе мы применили метод PPML для исследования изотермической МГД турбулентности в сжимаемом газе. Под турбулентностью мы понимаем движение газа, происходящее за счет случайного движения вещества на различных масштабах. Эта задача интересна, прежде всего, для астрофизической проблемы формирования звезд из самогравитирующих газопылевых облаков. Турбулентность, возникающая в таких облаках, характеризуется высокой сжимаемостью и неоднородностью вещества, сильными возмущениями плотности, ударными волнами, двигающимися с числами Маха от 1 в горячих областях ($\sim 10^4$ K) до 50 в холодных (~ 10 K), и показателем адиабаты, меняющимся в диапазоне $0.4 < \gamma < 1.2$ [6]. Реликтовое электромагнитное поле приводит к анизотропии гравитационного сжатия вещества, влияет на темп звездообразования. Наблюдаемые скорости звездообразования можно объяснить только при учете сверхзвуковой турбулентности [7].

Мы рассматриваем область пространства, в которой температуру вещества можно считать постоянной, таким образом, показатель адиабаты $\gamma = 1$. Целью работы является проверка численной схемы, построенной на основе метода PPML, на реальной астрофизической задаче.

2 Уравнения идеальной изотермической МГД

Система уравнений, описывающая поведение идеального проводящего газа при постоянной температуре, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B}) + \nabla \bar{p} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где ρ - плотность, \mathbf{v} - вектор скорости (его компоненты в дальнейшем будем обозначать как u , v и w), \mathbf{B} - вектор магнитного поля (чтобы не загромождать уравнения (2.1), мы включили множитель $1/\sqrt{4\pi}$ в определение \mathbf{B}), \bar{p} - полное давление (гидродинамическое+магнитное):

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + p_{mag}, \\ p_{mag} &= \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{2}. \end{aligned}$$

Т.к. рассматривается изотермический случай, то в системе (2.1) отсутствует уравнение для полной энергии, а уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$p = a^2 \rho,$$

где $a = const$ - изотермическая скорость звука. Система (2.1) также дополняется ограничением на магнитное поле:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Дивергентная форма (2.1), записанная для консервативных переменных, в трехмерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z)^T, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + \bar{p} - B_x^2, \rho uv - B_x B_y, \rho uw - B_x B_z, 0, u B_y - v B_x, u B_z - w B_x)^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv - B_x B_y, \rho v^2 + \bar{p} - B_y^2, \rho vw - B_y B_z, v B_x - u B_y, 0, v B_z - w B_y)^T, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = (\rho w, \rho u w - B_x B_z, \rho v w - B_y B_z, \rho w^2 + \bar{p} - B_z^2, w B_x - u B_z, w B_y - v B_z, 0)^T. \quad (2.6)$$

Все величины в (2.3)-(2.6) зависят от координат x, y, z и времени t .

Введем обозначения:

$$(b_x, b_y, b_z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (B_x, B_y, B_z), \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

Тогда альвеновская скорость c_a , быстрая скорость c_f и медленная скорость c_s запишутся в виде:

$$c_a = |b_x|, \\ c_{f,s} = \left(\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2} \right)^{1/2}.$$

Система (2.2) в физических переменных в квазилинейной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

где

$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z)^T.$$

Матрицы A_x, A_y и A_z можно вычислить через Якобианы консервативной системы $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}, \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{U}$:

$$A_x = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad A_y = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad A_z = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad (2.8)$$

где M - матрица перехода:

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.8) матрицы A_x , A_y и A_z имеют вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & B_y/\rho & B_z/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & B_x/\rho & 0 & B_z/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$A_z = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & -B_z/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & -B_z/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & B_x/\rho & B_y/\rho & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & B_x & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & B_y & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матриц A_x , A_y и A_z могут иметь сингулярности в точках вырождения собственных значений. Чтобы этого избежать Брио и Ву предложили нормировку вида [8]:

$$(\beta_y, \beta_z) = \begin{cases} \frac{(B_y, B_z)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(\alpha_f, \alpha_s) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{a^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - a^2}\right)}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Решение задачи Римана для системы изотермической МГД состоит из двух медленных и двух быстрых магнитоакустических волн, двух альвеновских волн, а также волны, соответствующей сохранению магнитного потока [9]. Эти волны распространяются вдоль характеристик системы уравнений со скоростями, соответствующим собственным значениям Якобианов A_x , A_y и A_z . Выпишем далее собственные значения и собственные векторы Якобианов с учетом нормировки (2.9)-(2.10).

Для Якобиана A_x имеем следующие собственные значения:

$$\lambda_x^{1,7} = u \pm c_f, \quad \lambda_x^{2,6} = u \pm c_a, \quad \lambda_x^{3,5} = u \pm c_s, \quad \lambda_x^4 = u. \quad (2.11)$$

Левые и правые собственные векторы имеют вид:

$$\mathbf{l}_x^{1,7} = \left(\frac{\alpha_f}{2}, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2a^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_y, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_z \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{1,7} = \left(\rho \alpha_f, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_y, \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_z \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{2,6} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, \mp \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{2,6} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{3,5} = \left(\frac{\alpha_s}{2}, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2a^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_y, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_z \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{3,5} = \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_y, -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_z \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_x^4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

Для Якобиана A_y имеем:

$$\lambda_y^{1,7} = v \pm c_f, \quad \lambda_y^{2,6} = v \pm c_a, \quad \lambda_y^{3,5} = v \pm c_s, \quad \lambda_y^4 = v,$$

$$\mathbf{l}_y^{1,7} = \left(\frac{\alpha_f}{2}, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2a^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_x, 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_z \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{1,7} = \left(\rho \alpha_f, \mp \alpha_s c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_x, 0, \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_z \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^{2,6} = \left(0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, 0, \mp \frac{\beta_x}{\sqrt{2\rho}} \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{2,6} = \left(0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, 0, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_x \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^{3,5} = \left(\frac{\alpha_s}{2}, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2a^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_x, 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_z \right),$$

$$\mathbf{r}_y^{3,5} = \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_f c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ \left. -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_x, 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_z \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_y^4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_y^4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T.$$

Аналогично для A_z :

$$\lambda_z^{1,7} = w \pm c_f, \quad \lambda_z^{2,6} = w \pm c_a, \quad \lambda_z^{3,5} = w \pm c_s, \quad \lambda_z^4 = w,$$

$$\mathbf{l}_z^{1,7} = \left(\frac{\alpha_f}{2}, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_z, \mp \frac{\alpha_s}{2a^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_z, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2a^2}, \right. \\ \left. \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_x, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} a} \beta_y, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_z^{1,7} = \left(\rho \alpha_f, \mp \alpha_s c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_z, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_z, \pm \alpha_f c_f, \right. \\ \left. \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_x, \alpha_s \sqrt{\rho} a \beta_y, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_z^{2,6} = \left(0, -\frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_z, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_z, 0, \pm \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}}, \mp \frac{\beta_x}{\sqrt{2\rho}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_z^{2,6} = \left(0, -\frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_z, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_z, 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_x, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_z^{3,5} = \left(\frac{\alpha_s}{2}, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_z, \pm \frac{\alpha_f}{2a^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_z, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2a^2}, \right. \\ \left. -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_x, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} a} \beta_y, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_z^{3,5} = \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_f c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_z, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_z, \pm \alpha_s c_s, \right. \\ \left. -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_x, -\alpha_f \sqrt{\rho} a \beta_y, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_z^4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

$$\mathbf{r}_z^4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

3 Метод Хартена-Лакса-ван Лира решения задачи Римана

При построении численной схемы на основе метода РРМЛ необходимо решать задачу Римана о распаде разрыва на гранях разностных ячеек. Для этого мы предложили использовать метод Роу [3, 4], однако в задаче о сверхзвуковой турбулентности появляются течения вещества с большими скоростями, возникают сильные волны разрежения и резкие перепады плотности, по оценкам, от 3×10^{-3} до 30 в безразмерных единицах. В таких условиях метод Роу может давать нефизические решения - отрицательные значения плотности. Чтобы избежать этого мы предлагаем вместо метода Роу использовать метод Хартена-Лакса-ван Лира (HLLD), который является положительно определенным, а по точности практически не уступает ему [10]. В работе [11] можно найти описание данного метода для случая изотермической МГД. Мы изложим необходимые формулы для расчета распада разрыва вдоль направления x .

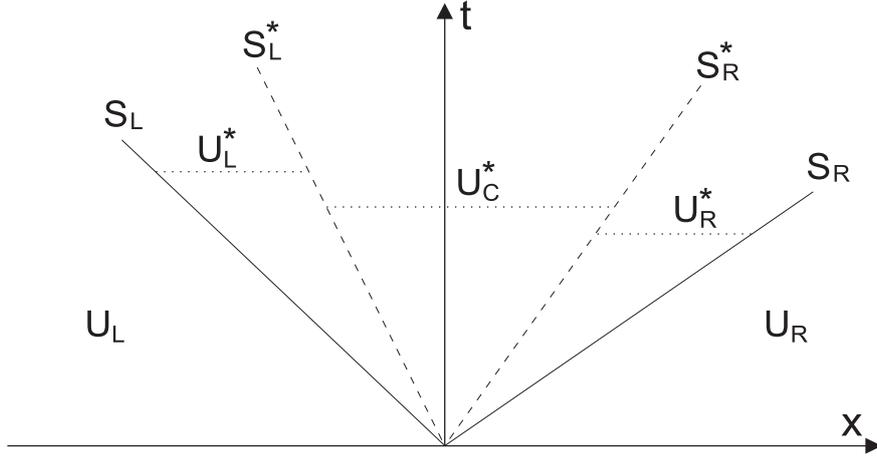


Рис. 1. Веер Римана в методе HLLD для изотермической МГД.

При распаде разрыва между состояниями \mathbf{U}_L и \mathbf{U}_R возникает несколько промежуточных состояний. Метод HLLD предполагает, что таких состояний всего три: \mathbf{U}_L^* , \mathbf{U}_C^* и \mathbf{U}_R^* . Они разделяются двумя быстрыми магнитоакустическими волнами со скоростями S_L и S_R , и двумя альвеновскими волнами со скоростями S_L^* и S_R^* (см. рис. 1). Таким образом, в отличие от метода Рои, в методе HLLD не рассматриваются медленные магнитоакустические волны и волна, соответствующая сохранению магнитного потока. Энтروпийная волна в изотермической МГД отсутствует.

Т.к. альвеновские волны приводят к разрыву только тангенциальных компонент скорости и магнитного поля, то значения плотности, нормальной компоненты скорости и полного давления непрерывны внутри Риманова веера:

$$\begin{aligned}\rho_L^* &= \rho_c^* = \rho_R^* \equiv \rho^*, \\ u_L^* &= u_c^* = u_R^* \equiv u^*, \\ \bar{p}_L^* &= \bar{p}_c^* = \bar{p}_R^* \equiv \bar{p}^*.\end{aligned}$$

Среднее по вееру состояние \mathbf{U}^{hll} и средний поток \mathbf{F}^{hll} вычисляется из условий на скачке по формулам [11]:

$$\mathbf{U}^{\text{hll}} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{S_R - S_L}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F}^{\text{hll}} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}. \quad (3.2)$$

Таким образом, первые две компоненты состояния \mathbf{U} и потока \mathbf{F} для всех промежуточных состояний внутри веера совпадают и заменяются средними согласно (3.1)-(3.2):

$$\rho_L^* = \rho_c^* = \rho_R^* \equiv \rho^* \equiv \rho^{\text{hll}},$$

$$\begin{aligned} m_{x,L}^* &= m_{x,c}^* = m_{x,R}^* \equiv m_x^* \equiv m_x^{\text{hll}}, \\ F_{[\rho],L}^* &= F_{[\rho],c}^* = F_{[\rho],R}^* \equiv F_{[\rho]}^* \equiv F_{[\rho]}^{\text{hll}}, \\ F_{[m_x],L}^* &= F_{[m_x],c}^* = F_{[m_x],R}^* \equiv F_{[m_x]}^* \equiv F_{[m_x]}^{\text{hll}}. \end{aligned}$$

Среднюю по вееру компоненту скорости u^* следует вычислять по формуле:

$$u^* = \frac{F_{[\rho]}^{\text{hll}}}{\rho^{\text{hll}}}.$$

Нормальная компонента магнитного поля внутри веера вычисляется как среднее арифметическое:

$$B_x = \frac{B_{x,L} + B_{x,R}}{2}.$$

Терпящие разрыв внутри веера компоненты состояния \mathbf{U} вычисляются следующим образом:

$$\rho^* v_\alpha^* = \rho^* v_\alpha - B_x B_{y,\alpha} \frac{u^* - u_\alpha}{(S_\alpha - S_L^*)(S_\alpha - S_R^*)}, \quad (3.3)$$

$$\rho^* w_\alpha^* = \rho^* w_\alpha - B_x B_{z,\alpha} \frac{u^* - u_\alpha}{(S_\alpha - S_L^*)(S_\alpha - S_R^*)}, \quad (3.4)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{B_{y,\alpha}}{\rho^*} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{(S_\alpha - S_L^*)(S_\alpha - S_R^*)}, \quad (3.5)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{B_{z,\alpha}}{\rho^*} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{(S_\alpha - S_L^*)(S_\alpha - S_R^*)}, \quad (3.6)$$

где $\alpha = L$ или R . Для центрального состояния имеем:

$$\rho^* v_c^* = \frac{\rho^* v_L^* + \rho^* v_R^*}{2} + \frac{X(B_{y,R}^* - B_{y,L}^*)}{2}, \quad (3.7)$$

$$\rho^* w_c^* = \frac{\rho^* w_L^* + \rho^* w_R^*}{2} + \frac{X(B_{z,R}^* - B_{z,L}^*)}{2}, \quad (3.8)$$

$$B_{y,c}^* = \frac{B_{y,L}^* + B_{y,R}^*}{2} + \frac{\rho^* v_R^* - \rho^* v_L^*}{2X}, \quad (3.9)$$

$$B_{z,c}^* = \frac{B_{z,L}^* + B_{z,R}^*}{2} + \frac{\rho^* w_R^* - \rho^* w_L^*}{2X}, \quad (3.10)$$

где $X = \sqrt{\rho^*} \operatorname{sgn} B_x$. Поток на границе определяется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), & S_L < 0 < S_L^*, \\ \mathbf{F}_c^*, & S_L^* < 0 < S_R^*, \\ \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & S_R^* < 0 < S_R, \\ \mathbf{F}_R, & S_R < 0, \end{cases}$$

где \mathbf{F}_c вычисляется с помощью (3.7)-(3.10). Скорости быстрых магнитоакустических волн с учетом обозначений (2.11) можно оценить как [12]:

$$S_L = \min(\lambda_x^7(\mathbf{U}_L), \lambda_x^7(\mathbf{U}_R)), \quad S_R = \max(\lambda_x^1(\mathbf{U}_L), \lambda_x^1(\mathbf{U}_R)).$$

Скорости альвеновских волн:

$$S_L^* = u^* - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho^*}}, \quad S_R^* = u^* + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho^*}}.$$

Заметим, что в случае обращения в ноль знаменателя в (3.3)-(3.6) соответствующие компоненты импульса и магнитного поля не испытывают скачка.

4 Выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

Численная схема на основе метода PRML, использованная нами при моделировании изотермической турбулентности, изложена в [3, 4]. Здесь мы приведем только формулы для вычисления бездивергентного магнитного поля в трехмерном случае.

Воспользуемся теоремой Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.1)$$

Очевидно, вычисленное по формуле (4.1) поле бездивергентно. Чтобы воспользоваться (4.1) в численной схеме, компоненты магнитного поля следует определять в центрах граней разностных ячеек, электрического поля - на ребрах ячеек, остальные величины - в центрах ячеек. Т.к.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

то, вычисляя потоки в каждый момент времени, мы получаем компоненты электрического поля, относящиеся, как и сами потоки, к центрам граней ячеек. Из (2.4)-(2.6) и (4.2) видно, что

$$\begin{aligned} F_6 &= -G_5 = uB_y - vB_x = -E_z, \\ F_7 &= -H_5 = uB_z - wB_x = E_y, \\ G_7 &= -H_6 = vB_z - wB_y = -E_x. \end{aligned}$$

Чтобы получить компоненты электрического поля на ребрах ячеек, нужно усреднить его компоненты, относящиеся к соответствующим центрам граней ячеек, окружающих данное ребро:

$$E_{x \ i, j+1/2, k+1/2} = \frac{1}{4} \left(-G_{7 \ i, j+1/2, k} - G_{7 \ i, j+1/2, k+1} + H_{6 \ i, j, k+1/2} + H_{6 \ i, j+1, k+1/2} \right), \quad (4.3)$$

$$E_{y\ i+1/2, j, k+1/2} = \frac{1}{4} \left(F_{7\ i+1/2, j, k} + F_{7\ i+1/2, j, k+1} - H_{5\ i, j, k+1/2} - H_{5\ i+1, j, k+1/2} \right), \quad (4.4)$$

$$E_{z\ i+1/2, j+1/2, k} = \frac{1}{4} \left(-F_{6\ i+1/2, j, k} - F_{6\ i+1/2, j+1, k} + G_{5\ i, j+1/2, k} + G_{5\ i+1, j+1/2, k} \right). \quad (4.5)$$

Вычислив компоненты электрического поля на временном шаге $n + 1$ согласно (4.3)-(4.5), можно вычислить компоненты магнитного поля в центре граней ячеек на шаге $n + 1$ по теореме Стокса (4.1), зная их значения на шаге n . Теорема Стокса аппроксимируется на сетке следующим образом:

$$B_{x\ i+1/2, j, k}^{n+1} = B_{x\ i+1/2, j, k}^n - \frac{\tau}{A_{i+1/2, j, k}} \times \left(\Delta z_{i+1/2, j+1/2, k} E_{z\ i+1/2, j+1/2, k} - \Delta z_{i+1/2, j-1/2, k} E_{z\ i+1/2, j-1/2, k} + \Delta y_{i+1/2, j, k-1/2} E_{y\ i+1/2, j, k-1/2} - \Delta y_{i+1/2, j, k+1/2} E_{y\ i+1/2, j, k+1/2} \right), \quad (4.6)$$

$$B_{y\ i, j-1/2, k}^{n+1} = B_{y\ i, j-1/2, k}^n - \frac{\tau}{A_{i, j-1/2, k}} \times \left(\Delta x_{i, j-1/2, k+1/2} E_{x\ i, j-1/2, k+1/2} - \Delta x_{i, j-1/2, k-1/2} E_{x\ i, j-1/2, k-1/2} + \Delta z_{i-1/2, j-1/2, k} E_{z\ i-1/2, j-1/2, k} - \Delta z_{i+1/2, j-1/2, k} E_{z\ i+1/2, j-1/2, k} \right), \quad (4.7)$$

$$B_{z\ i, j, k+1/2}^{n+1} = B_{z\ i, j, k+1/2}^n - \frac{\tau}{A_{i, j, k+1/2}} \times \left(\Delta x_{i, j-1/2, k+1/2} E_{x\ i, j-1/2, k+1/2} - \Delta x_{i, j+1/2, k+1/2} E_{x\ i, j+1/2, k+1/2} + \Delta y_{i+1/2, j, k+1/2} E_{y\ i+1/2, j, k+1/2} - \Delta y_{i-1/2, j, k+1/2} E_{y\ i-1/2, j, k+1/2} \right), \quad (4.8)$$

где A - площадь граней ячеек, Δx , Δy , Δz - длины соответствующих ребер. Таким образом, определено магнитное поле в центрах граней ячеек. Усреднив соответствующие компоненты поля, можно вычислить поле в центрах ячеек:

$$B_{x\ i, j, k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(B_{x\ i-1/2, j, k}^{n+1} + B_{x\ i+1/2, j, k}^{n+1} \right), \quad (4.9)$$

$$B_{y\ i, j, k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(B_{y\ i, j-1/2, k}^{n+1} + B_{y\ i, j+1/2, k}^{n+1} \right), \quad (4.10)$$

$$B_{z\ i, j, k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(B_{z\ i, j, k-1/2}^{n+1} + B_{z\ i, j, k+1/2}^{n+1} \right). \quad (4.11)$$

Вычисленные таким образом компоненты магнитного поля удовлетворяют условию бездивергентности на временном шаге $n + 1$. Полученные с помощью консервативной разностной схемы компоненты магнитного поля заменяются на (4.9)-(4.11).

5 Начальные условия

Для расчета изотермической турбулентности в начальный момент времени в области размером $[0, 1]^3$ на сетке 128^3 задавалось однородное распределение плотности $\rho_0 = 1$ и давления $p_0 = 1$ (изотермическая скорость звука $a = 1$) и только одна компонента магнитного поля B_{0x} , такая что $\beta = 2p/B_{0x}^2 = 200$. Начальное поле скоростей задавалось случайным образом со степенным спектром мощности в диапазоне волновых чисел $k/k_{min} \in [1, 2]$, где $k_{min} = 2\pi$ так, чтобы среднеквадратичное значение числа Маха

$$M^{rms} = \sqrt{\frac{1}{128^3} \sum_{i,j,k} M_{i,j,k}^2} = 3.$$

Чтобы управлять турбулентностью, в каждый момент времени к компонентам скорости добавлялось возмущение вида $A \delta \mathbf{v}(x, y, z)$, где амплитуда A выбиралась из условия постоянства скорости подвода кинетической энергии

$$\dot{E}_{in} = \frac{\Delta E}{\tau} = const. \quad (5.1)$$

В случае сжимаемой материи с меняющимся распределением плотности для выполнения (5.1) необходимо вычислять амплитуду A , решая квадратное уравнение

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta V \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,k} A \delta \mathbf{v}_{i,j,k} (\mathbf{v}_{i,j,k} + A \delta \mathbf{v}_{i,j,k}), \quad (5.2)$$

где ΔV - объем ячейки. При этом выбирается наибольший корень (5.2).

Все расчеты проводились с использованием системы распараллеливания DVM FORTRAN для исходного кода программы на 64 процессорах суперкомпьютера MVS1500M с распределенной архитектурой памяти в МСЦ РАН. Вычислительная область разбивалась однородно на трехмерную решетку процессоров. Для всех переменных применялись периодические граничные условия.

6 Результаты

Мы исследовали полученное турбулентное движения вещества с помощью спектрального анализа поля скоростей. Спектр мощности скоростей (или удельная спектральная плотность кинетической энергии) $\varepsilon(\mathbf{k})$ определяется с помощью Фурье преобразования вида

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

как

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k})|^2.$$

Трехмерный спектр мощности скоростей для скаляра волнового вектора определится в этом случае как

$$\varepsilon(k) \equiv \int \varepsilon(\mathbf{k}) \delta(|\mathbf{k}| - k) d\mathbf{k},$$

где $\delta(k)$ - δ -функция Дирака, $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$. Средняя спектральная энергия на одну моду есть

$$P(k) \equiv \frac{\varepsilon(k)}{2\pi k^2}.$$

Удельная кинетическая энергия и магнитная энергия вещества записываются в виде

$$P_k(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{v}^2(\mathbf{k})}{2}, \quad P_B(\mathbf{k}) \equiv \frac{\delta \mathbf{B}^2(\mathbf{k})}{8\pi\rho}, \quad (6.1)$$

где $\delta \mathbf{B} = |\mathbf{B} - \mathbf{B}_0|$. Интересно сравнить сдвиговую и сжимаемую компоненты спектральной плотности энергии, которые вычисляются как

$$P_{shear}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{v}_{shear}^2(\mathbf{k})}{2} = \frac{|\mathbf{k} \times \mathbf{v}(\mathbf{k})|^2}{2}, \quad (6.2)$$

$$P_{comp}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{v}_{comp}^2(\mathbf{k})}{2} = \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})|^2}{2} \quad (6.3)$$

соответственно.

Разностная сетка, состоящая из N ячеек, дает ограничение на максимальное значение волнового вектора. Для $N = 128$ максимальное значение $k_{max} = N/2 = 64$. В наших расчетах мы подводили энергию в интервале волновых чисел $k \in [1, 2]$, поэтому инерционный интервал начинался с $k = 3$ и в конце допустимого диапазона волновых чисел начинал переходить в диссипативную область.

На рис. 2-3 представлены, вычисленные согласно (6.1), распределения по спектру удельной кинетической и магнитной энергии для момента времени

$t = 0.5$. Динамическое время (размер области $L = 1$ деленное на удвоенное число Маха $M = 3$) равно $1/6$. Сравнение спектров для кинетической и магнитной энергии показывает, что часть кинетической энергии мелких масштабов перекачивается в магнитную энергию больших масштабов. Основная часть кинетической энергии сосредоточена в инерционном интервале, который соответствует большим масштабам неоднородностей. Присутствие магнитного поля уменьшает диссипацию энергии и кривая инерциального диапазона становится более пологой по сравнению со случаем без магнитного поля.

На рис. 4-5 - вычисленные согласно (6.2) и (6.3) распределения по спектру сдвиговой и сжимаемой компоненты спектральной плотности энергии, соответственно для момента времени $t = 0.5$. Из наклона кривых следует, что кинетическая энергия расходуется в большей степени на сжатие вещества поперек магнитного поля, в то время как диссипация энергии при сдвиге вещества вдоль магнитного поля значительно меньше.

Также была вычислена полная кинетическая энергия вещества

$$E_k = \frac{1}{\Delta V} \int \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} d\mathbf{x} = \frac{1}{2N^3} \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,k} \mathbf{v}_{i,j,k}^2, \quad (6.4)$$

полная магнитная энергия

$$E_B = \frac{1}{\Delta V} \int \frac{\mathbf{B}^2}{2} d\mathbf{x} = \frac{1}{2N^3} \sum_{i,j,k} \mathbf{B}_{i,j,k}^2, \quad (6.5)$$

и среднеквадратичное число Маха

$$M_{rms} = \left(\frac{1}{2N^3} \sum_{i,j,k} \mathbf{v}_{i,j,k}^2 \right)^{1/2}. \quad (6.6)$$

Изменение величин (6.4)-(6.6) с течением времени представлено на рис. 6. Видно, что значение M_{rms} остается вблизи тройки, а часть кинетической энергии вещества постепенно перекачивается в энергию магнитного поля.

В процессе развития турбулентности функция плотности вероятностей приобретает нормальное распределение представленное на рис. 7. Квадрат дисперсии можно выразить через число Маха M как [13]

$$\sigma^2 = \ln(1 + b^2 M^2). \quad (6.7)$$

В наших расчетах $b \approx 0.48 \pm 0.08$.

Рисунки 8-10 демонстрируют развитие турбулентности с течением времени. На них представлено распределение плотности на сечении расчетной

области при $z = 0.5$. Видно, что образуются крупные скопления вещества, разреженные области с низкой плотностью, ударные волны. Резкие перепады значений плотности на фронтах ударных волн говорят о хорошей передаче разрывных решений в используемой численной схеме.

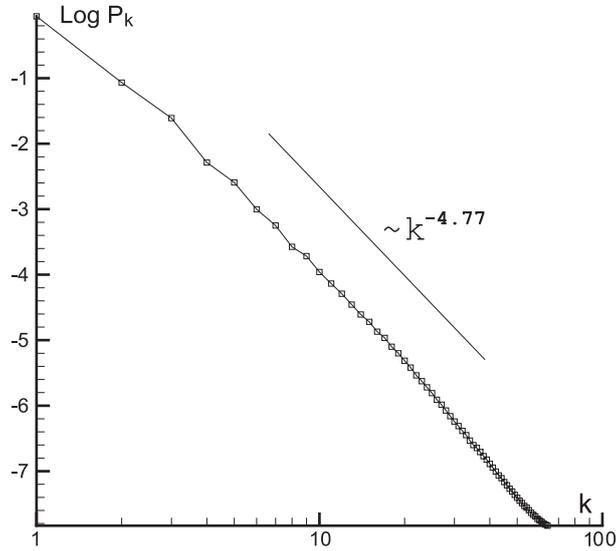


Рис. 2. Спектральная плотность удельной кинетической энергии.

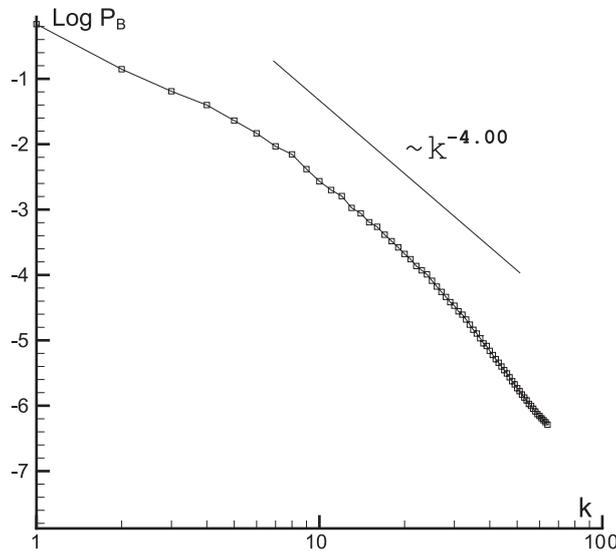


Рис. 3. Спектральная плотность магнитной энергии.

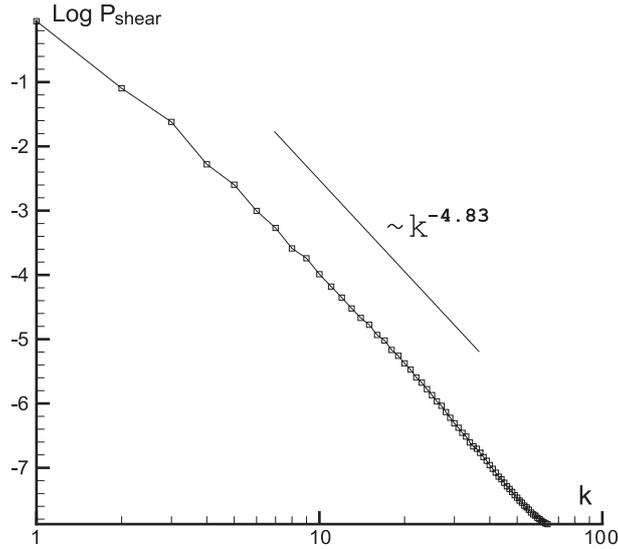


Рис. 4. Сдвиговая компонента спектральной плотности удельной кинетической энергии.

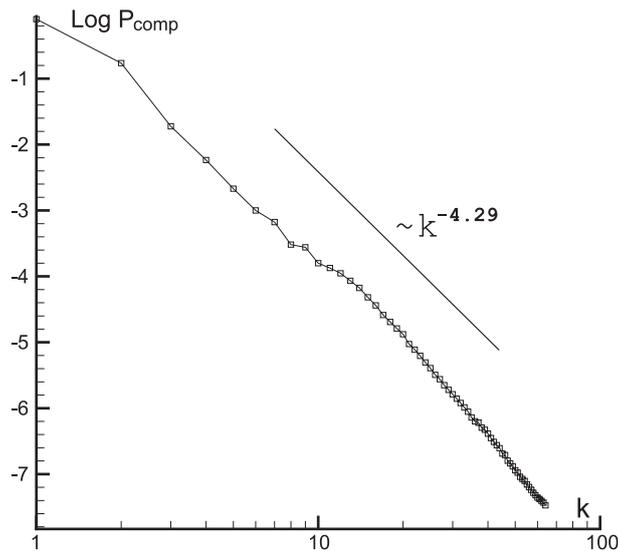


Рис. 5. Сжимаемая компонента спектральной плотности удельной кинетической энергии.

7 Заключение

В работе рассмотрена задача о развитии однородной изотермической МГД турбулентности в периодической вычислительной области. Проведенные исследования интересны, прежде всего, для астрофизической проблемы влияния сверхзвуковой турбулентности на темп звездообразования в темных молекулярных облаках. Использованная численная схема на основе кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML) за счет низкой численной диссипации позволила достичь высокой точности передачи фронтов

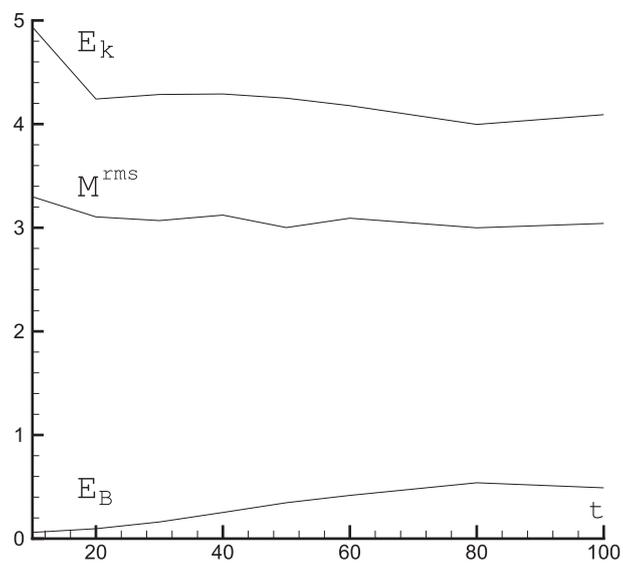


Рис. 6. Кинетическая энергия, среднеквадратичное число Маха и магнитная энергия вещества.

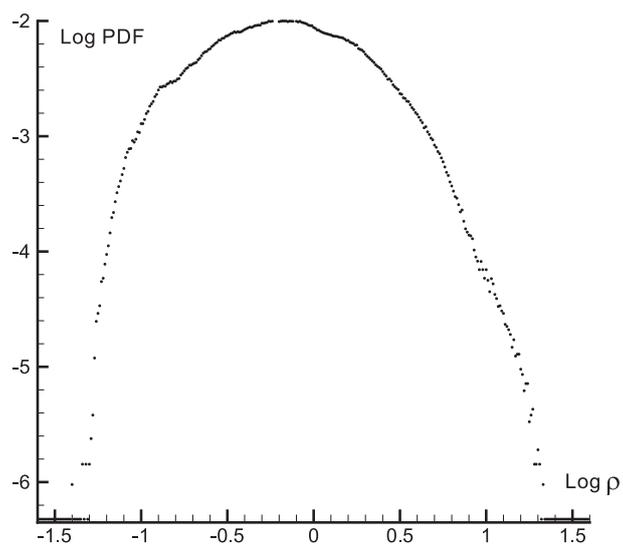


Рис. 7. Функция плотности вероятности.

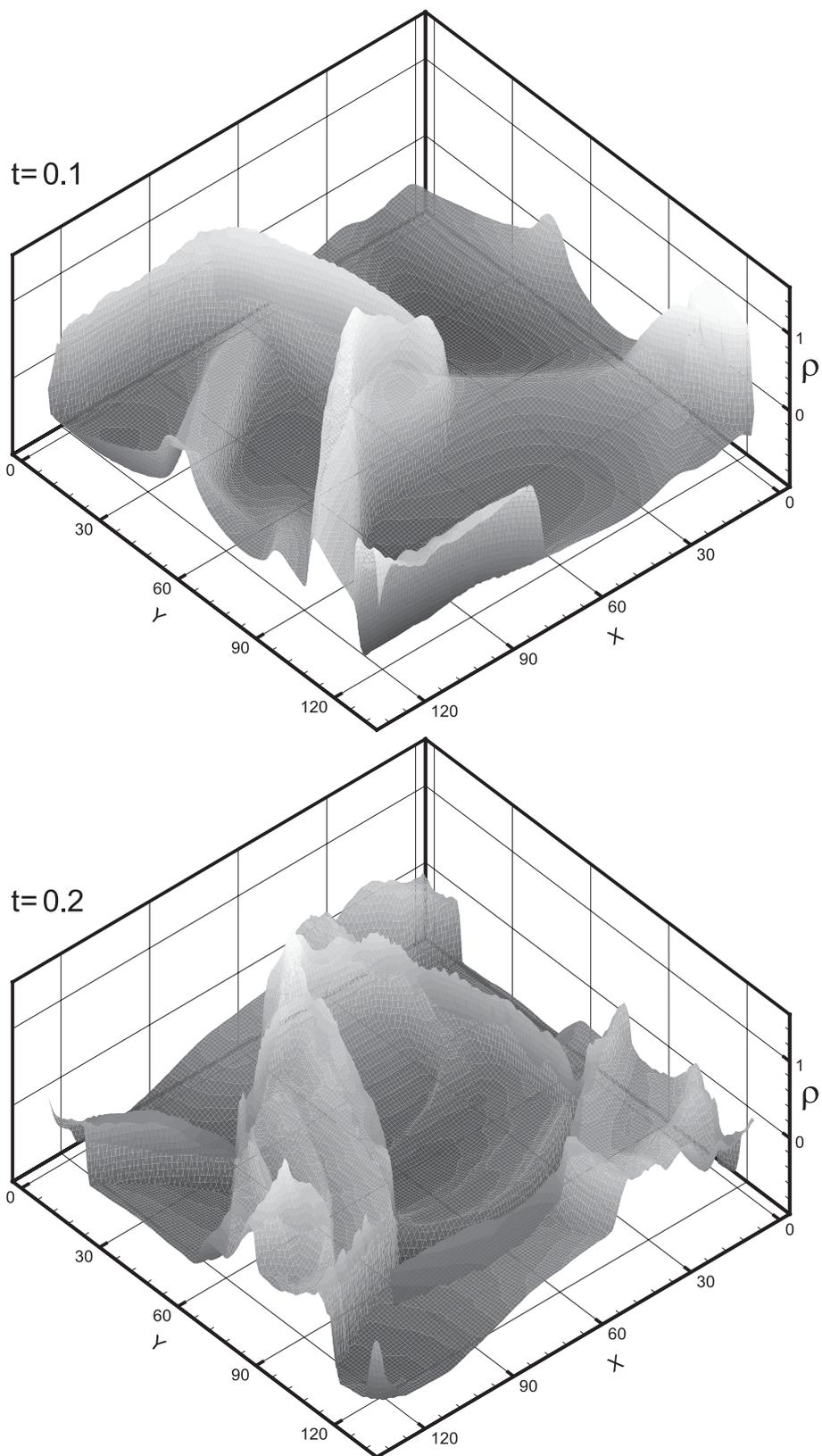


Рис. 8. Распределение плотности при $t = 0.1$ и $t = 0.2$.

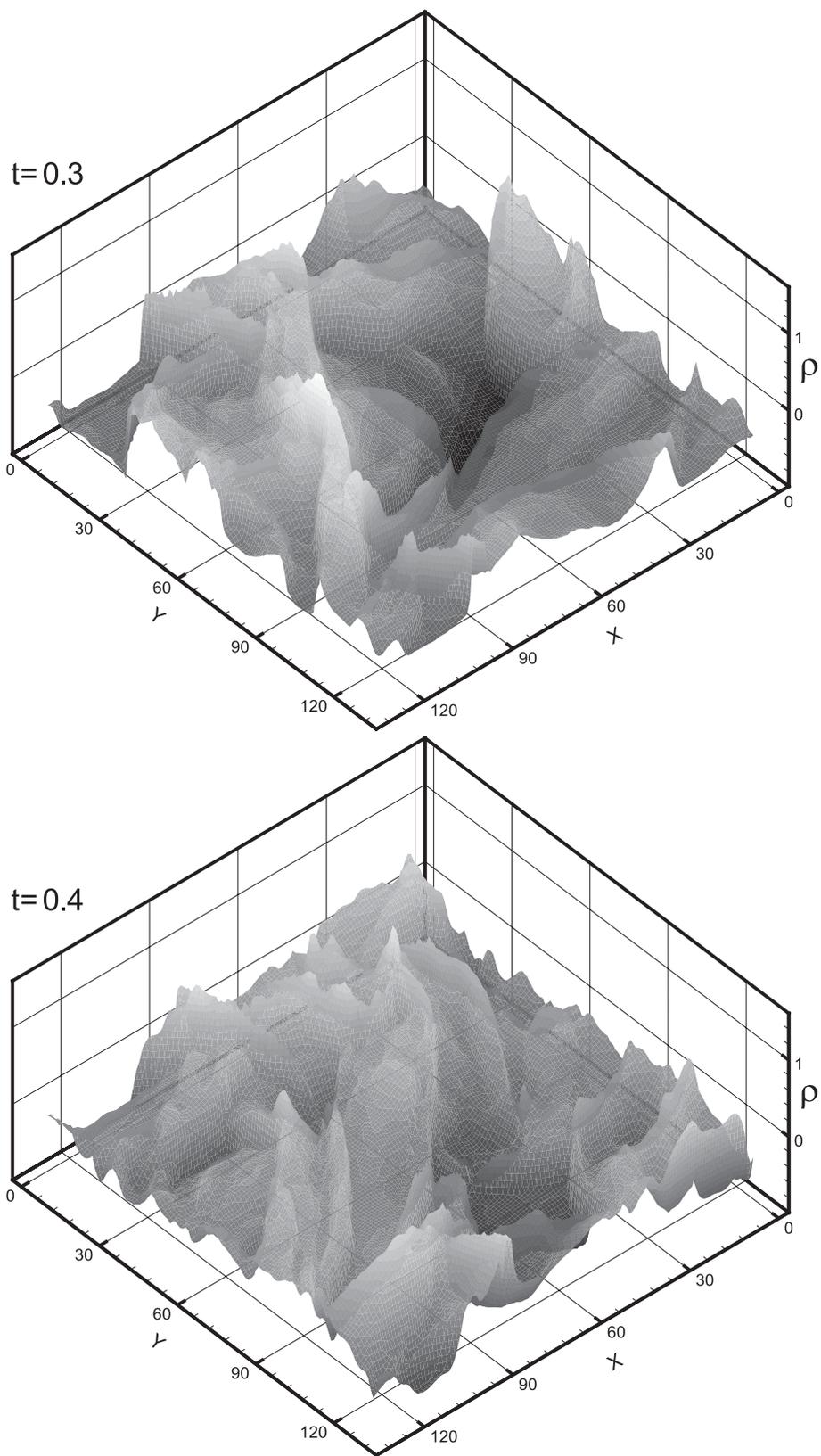


Рис. 9. То же при $t = 0.3$ и $t = 0.4$.

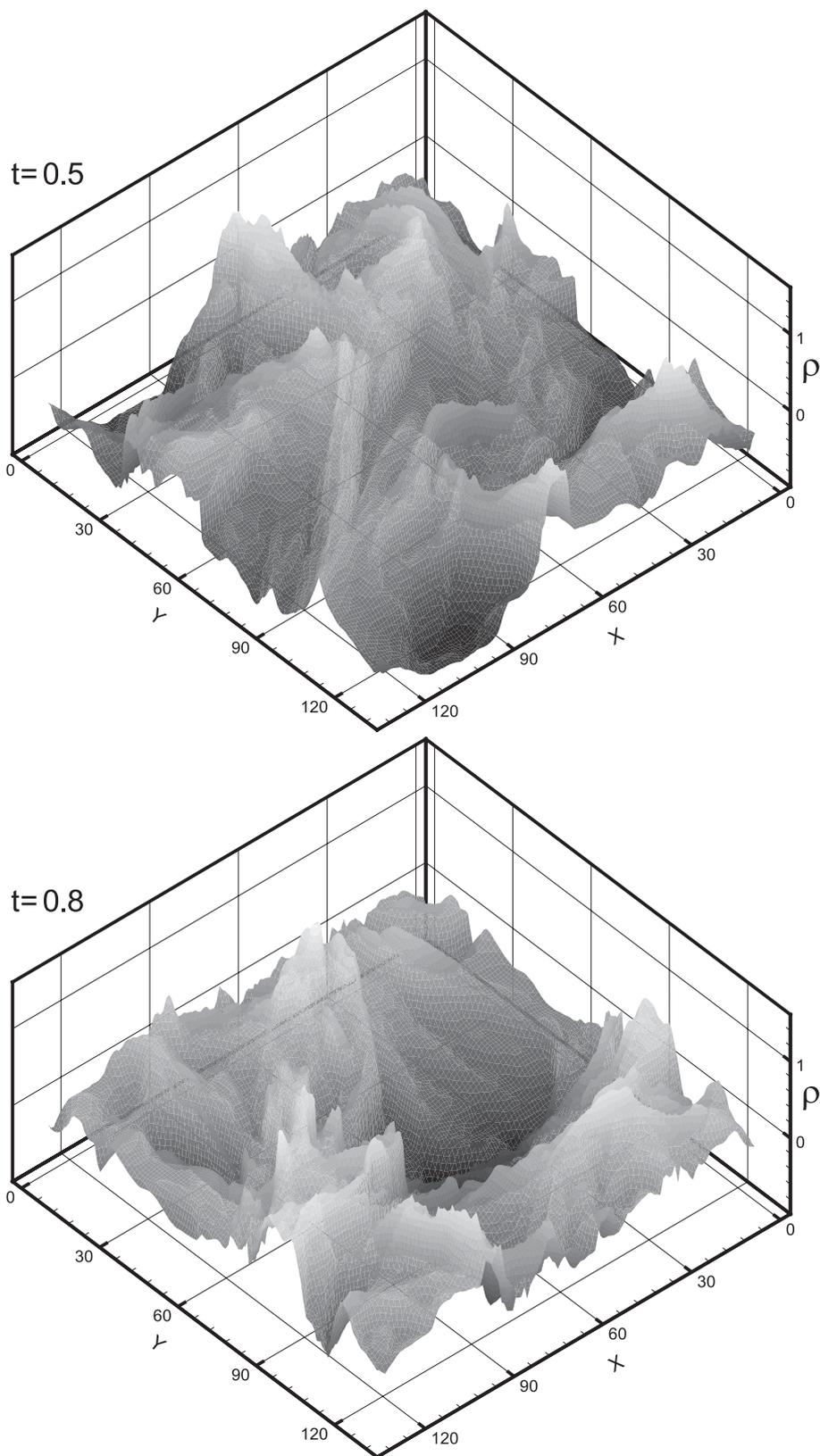


Рис. 10. То же при $t = 0.5$ и $t = 0.8$.

возникающих ударных волн и контактных разрывов, получить трехмерный процесс турбулентного движения вещества с хорошим разрешением.

В работе показано, что сверхзвуковое движение вещества приводит к формированию турбулентной структуры с областями повышенной концентрации вещества и сильными зонами разрежения. Важную роль играет также магнитное поле, которое приводит к более пологой кривой спектра кинетической энергии в инерционном интервале. Диссипация кинетической энергии в мелких масштабах происходит в основном за счет процесса сжатия вещества против магнитного поля.

Список литературы

- [1] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 65, 21 с.
- [2] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 71, 22 с.
- [3] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. III. Одномерная идеальная МГД. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 78, 27 с.
- [4] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. IV. Многомерная идеальная МГД. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2007, № 11, 30 с.
- [5] *P. Collela, P. Woodward* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 174.
- [6] *M. Spaans, J. Silk* *Astrophys. J.*, **538**, 2000, p. 115.
- [7] *Mordecai-Mark Mac Low* Control of star formation by supersonic turbulence. arXiv:astro-ph/0301093 v2 10 Sep 2003
- [8] *M. Brio, C.C. Wu* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **75**, 1988, p. 400.
- [9] *K.G. Powell, Ph.L. Roe, T.J. Linde, T.I. Gombosi, D.L. De Zeeuw* A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **154**, 1999, p. 284.

- [10] *T. Miyoshi, K. Kusano* A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **208**, 2005, p. 315.
- [11] *A. Mignone* A simple and accurate Riemann solver for isothermal MHD. *J. Comp. Phys.* **225**, 2007, p. 1427. (<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0701798v1>)
- [12] *S.F. Davis* Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **9**, 1988, p. 445.
- [13] *P. Padoan, Å Nordlund, B.J.T. Jones* The universality of the stellar initial mass function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288**, 1997, p. 145.