РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША

М. А. Лапик, Ю. Н. Орлов

О логарифмической асимптотике ортогональной меры системы специальных полиномов в задаче комбинационного рассеяния

Москва, 2007

М. А. Лапик[1], Ю. Н. Орлов *О логарифмической асимптотике ортогональной меры системы специальных полиномов в задаче комбинационного рассеяния*

Аннотация

Рассматривается класс полиномиальных гамильтонианов, имеющих полный набор законов сохранения, линейных по операторам числа частиц. Для таких систем методами, развитыми в теории логарифмического потенциала, получена точная асимптотика спектра при больших числах заполнения. Введена система неклассических специальных полиномов, представляющая систему собственных функций спектральной задачи, и получено выражение для функции распределения нормированных собственных значений.

В качестве примера рассмотрен точно решаемый случай квадратичного гамильтониана, специальными полиномами для которого являются полиномы Кравчука.

Lapik, M. A. Orlov Yu. N. *On the logarithmic asymptotics of orthogonal measure for special polynomials in the problem of radiation scattering.*

Abstract

We consider a class of polynomial quantum Hamiltonians with complete number of conservation laws, linear with respect to particle number operators. The system of special non-classical polynomials is introduced for the Hamiltonian diagonalization problem. The exact asymptotics for orthogonal measure are obtained for these system of polynomials by logarithmic potentials methods in the case of large particle numbers.

The exact case of quadratic Hamiltonian is considered as an explicit example.

[1]Работа первого автора частично поддержана программой "Организация и финансирование работ молодых ученых РАН по приоритетным направлениям фундаментальных исследований", грантами РФФИ-05-01-00697, НШ - 4466.2006.1.

1 Введение

В ряде задач квантовой оптики [1] процессы взаимодействия излучения с веществом моделируются гамильтонианами, полиномиальными в терминах операторов рождения и уничтожения, действующих в симметричном пространстве Фока [2]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_{(\alpha,\beta)\in J} b_{\alpha\,\beta} a^{+\alpha} a^{-\beta} + h.c. \tag{1}$$

Пространство Фока и операторы рождения и уничтожения определены во многих классических курсах квантовой механики, но для облегчения восприятия проводимых в работе обобщений в этой вводной части мы дадим необходимые определения базовых понятий, относящихся к методу вторичного квантования.

Все рассматриваемые в работе операторы действуют в гильбертовом пространстве функций $\mathbf{H}$ с интегрируемым квадратом модуля. Стандартный счетномерный базис этого пространства обозначается через $\{|n\rangle\}$.

Обозначим через a^+ и a^- некоторые эрмитово сопряженные операторы в $\mathbf{H}$, такие, что их коммутатор равен единице: $[a^-, a^+] = 1$. Тогда оператор $\hat{A} = a^+a^-$ является самосопряженным, причем все его собственные значения неотрицательны. Т.е., если $|\alpha\rangle$ - нормированный собственный вектор оператора $\hat{A}$, отвечающий собственному значению α, то

$$\alpha = \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle = \|a^-|\alpha\rangle\|^2 \geqslant 0.$$

Далее, легко проверяется, что $[\hat{A}, a^\pm] = \pm a^\pm$, откуда следует, что $\hat{A}a^\pm = a^\pm(\hat{A} \pm 1)$, т.е.

$$\hat{A}a^\pm|\alpha\rangle = (\alpha \pm 1)a^\pm|\alpha\rangle.$$

Поэтому вектор $a^\pm|\alpha\rangle$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$ с собственным значением $\alpha \pm 1$. Аналогично, для любого натурального числа n вектор $(a^-)^n|\alpha\rangle$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$ с собственным значением $\alpha - n$. Поскольку же, как установлено выше, все собственные значения оператора $\hat{A}$ неотрицательны, то α - целое неотрицательное число и, кроме того, должно существовать основное, или вакуумное, состояние $|0\rangle$ такое, что $a^-|0\rangle = 0$. Следовательно, за векторы стандартного базиса можно взять собственные векторы оператора $\hat{A}$. Поскольку его значения - целые неотрицательные числа, то он называется оператором числа частиц и обозначается $\hat{n}$. Тогда получается, что операторы $a^\pm$ действуют на векторы стандартного базиса следующим образом:

$$a^-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

В соответствии с этими равенствами они называются операторами уничтожения и рождения.

В случае многих сортов частиц, с каждым из которых связывается свое гильбертово пространство, базисом является тензорное произведение соответствующих одночастичных базисов: $|n_1\rangle_1 \, |n_2\rangle_2 \ldots |n_p\rangle_p$.

В этих терминах операторы $a^{\pm}$ в (1) удовлетворяют правилам коммутации $[a_j^-, a_k^+] = \delta_{jk}$, а оператор $\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^{p} \omega_k \hat{n}_k$ диагонален в представлении чисел заполнения, которые являются собственными значениями операторов числа частиц k-го типа: $a_k^+ a_k^- \equiv \hat{n}_k$. Действие операторов $a^{\pm}$ на базисные векторы определяется формулами

$$a_k^- |n\rangle_k = \sqrt{n_k} |n-1\rangle_k, \quad a_k^+ |n\rangle_k = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k. \tag{2}$$

В (1) принята мультииндексная запись $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \ldots a_p^{\alpha_p}$, где индексы α принадлежат некоторому подмножеству целочисленной p-мерной решетки $\mathbb{Z}_+^p$, в соответствии с размерностью задачи, определяемой количеством типов частиц, так что вектор показателей степеней $(\alpha, \beta) \in J \subset \mathbb{Z}_+^{2p}$ принадлежит некоторому подмножеству J целочисленной $2p$-мерной решетки $\mathbb{Z}_+^{2p}$. Величины ω_k и $b_{\alpha\,\beta}$ – действительные коэффициенты, $h.c.$ означает эрмитово сопряжение. Задача состоит в отыскании собственных значений и собственных функций гамильтониана (1). В случае, если точное ее решение не известно, требуется определить асимптотическое поведение собственных значений при больших числах заполнения (собственных значениях оператора числа частиц).

В случае, когда множество J состоит только из элементов 0 и 1, гамильтониан (1) является квадратичным и может быть диагонализован каноническим преобразованием Боголюбова [2]. Если взаимодействие имеет более высокий порядок по степеням α, β, то операторы, в терминах которых гамильтониан запишется в диагональном виде, уже не будут операторами рождения и уничтожения безонного типа, т.е. удовлетворяющих соотношениям (2). В силу этого диагонализующее преобразование заведомо не будет каноническим (оставляющими инвариантными правила коммутации между операторами рождения и уничтожения), т.к. в случае представления $\hat{H}' = \sum_k \omega'_k b_k^+ b_k^-$ коммутатор эрмитово сопряженных операторов b_k^- и b_k^+ будет отличен от единицы.

Хотя решить аналитически в общем виде задачу на собственные значения $\hat{H}\psi = E\psi$ для гамильтониана (1) при произвольных α, β не представляется возможным, можно тем не менее получить некоторые точные результаты относительно асимптотического поведения его спектра.

В данной работе исследуется главная асимптотика спектра гамильтониана (1) по числам заполнения и формулируются точные результаты об асимптотической функции распределения собственных значений в рамках подхода, использующего методы теории логарифмического потенциала. Поскольку асимптотическая функция распределения собственных значений является одновременно и весовой функцией, с которой ортогональны соответствующие собственные функции гамильтониана, то представление последних в виде системы специальных полиномов, ортогональных относительно указанного веса, позволит фактически провести диагонализацию гамильтониана, т.е. перейти (асимптотически) к новому базису в пространстве чисел заполнения. Это, в свою очередь, позволит определить коммутационные соотношения между новыми сопряженными операторами рождения и уничтожения.

Таким образом, в данной работе излагается методика асимптотической диагонализации полиномиальных гамильтонианов, возникающих в ряде модельных задач квантовой оптики. Дается также иллюстрация этого подхода на примере точно решаемого случая квадратичного гамильтониана.

2 Законы сохранения в задаче стоксова рассеяния

Обозначим через J_Δ множество векторов $\alpha-\beta \in \mathbb{Z}^p$, а через L – их линейную оболочку. Известно [3], что оператор

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^{p} C_k \hat{n}_k \tag{3}$$

коммутирует с гамильтонианом (1) тогда и только тогда, когда вектор $C = (C_1, ..., C_p)$ ортогонален линейной оболочке L векторов $\alpha - \beta$, т.е. принадлежит ортогональному дополнению $L^\perp$ в $\mathbb{R}^p$: $(C, \alpha - \beta) = 0$. Это утверждение позволяет существенно упростить исследование неограниченного оператора $\hat{H}$, анализируя его на конечномерных инвариантных подпространствах. Ниже подробно рассматривается пример многофотонного рассеяния, являющийся одной из базовых моделей в ряде задач квантовой оптики [1].

При описании комбинационного рассеяния одномодового излучения частоты ω_0 на возбуждениях (фононах) нескольких сортов, возникающих в среде, используется следующая модель [1], называемая моделью рассеяния на стоксовых фононах (постоянная Планка положена равной единице):

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^{p} \omega_k \, a_k^+ a_k^- + B \left(a_0^+ \prod_{k=1}^{p} a_k^- + h.c. \right), \tag{4}$$

где ω_k, B – действительные постоянные. Согласно (3), эта система имеет p законов сохранения, записываемых в виде [3]

$$\hat{I}_0 = \hat{n}_0 + \hat{n}_p, \quad \hat{I}_k = \hat{n}_k - \hat{n}_p, \quad k = 1, ..., p-1. \tag{5}$$

Поскольку операторы $\hat{I}_k$ (5) коммутируют с гамильтонианом (4), то пространство собственных значений этих операторов инвариантно относительно действия гамильтониана. Это означает, что при действии гамильтониана на каждое слагаемое в (5) величины $n_0 + n_p$ и $n_k - n_p$ не меняются. Положим

$$n_0 + n_p = N, \quad n_1 = n_2 = \cdots = n_p = j. \tag{6}$$

При фиксированном N первое из равенств (6) обеспечивает ограниченность области изменения собственных значений n_k операторов числа частиц в (5). В общем случае для гамильтониана вида (1) система законов сохранения имеет вид [3]

$$\hat{I}_k = \gamma_p \hat{n}_k - \gamma_k \hat{n}_p = const, \quad k = 1, ..., p-1; \;\; \gamma = \alpha - \beta.$$

Представим собственную функцию $|\psi\rangle_N$ оператора $\hat{H}$, отвечающую заданному значению N в первом законе сохранения в формулах (5, 6), в виде разложения по стандартному фоковскому базису:

$$|\psi\rangle_N = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, |N-j\rangle_0 \, |j\rangle_1 \ldots |j\rangle_p \,. \tag{7}$$

Тогда, используя (2), получаем, что задача на собственные значения $\hat{H}|\psi\rangle_N = E^{(N)}|\psi\rangle_N$ для гамильтониана (4) на вышеуказанном инвариантном подпространстве запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sqrt{N-j}(j+1)^{p/2}\lambda_{j+1} + \sqrt{N-j+1}(j)^{p/2}\lambda_{j-1} = \\ &\qquad = \left[\frac{E^{(N)} - \omega_0 N}{B} + \frac{j}{B}\left(\omega_0 - \sum_{k=1}^{p}\omega_k\right)\right]\lambda_j. \end{aligned} \tag{8}$$

Равенство (8) представляет собой линейную алгебраическую систему относительно λ_j, где j меняется от 0 до N.

Эту систему можно записать в виде

$$D\lambda = x\lambda, \quad x = x^{(N)} = \frac{E^{(N)} - \omega_0 N}{B}, \tag{9}$$

где D – симметричная трехдиагональная $(N+1)\times(N+1)$ - матрица с элементами

$$D_{jk} = \sqrt{q_j}\,\delta_{j,k+1} + c_j\delta_{j,k} + \sqrt{q_{j+1}}\,\delta_{j,k-1}, \quad j,k = 0,...,N,$$
$$q_j = j^p(N-j+1), \quad c_j = \frac{j}{B}\left(-\omega_0 + \sum_{i=1}^{p}\omega_i\right). \tag{10}$$

Таким образом, задача о распределении собственных значений гамильтониана (4) при больших числах заполнения (т.е. при $N\to+\infty$) свелась к исследованию асимптотики спектра симметричной трехдиагональной матрицы при увеличении ее размерности, причем элементы матрицы также зависят от размерности матрицы D как от параметра.

3 Система специальных полиномов для задачи комбинационного рассеяния

Вектор с компонентами $(\lambda_0,...,\lambda_N)$, зависящими от собственных значений x, которые определены в (9), является собственной функцией гамильтониана (4). Эти компоненты, как видно из (8), связаны рекуррентно и зависят от x полиномиально. Преобразуем систему (8) так, чтобы старший коэффициент при x был равен единице. Для этого введем специальные полиномы $P_k^N(x)$ по формулам

$$P_k^N(x) = \frac{\lambda_k(x)}{\lambda_0(x)}\sqrt{q_1q_2...q_k}, \quad q_k = k^p(N-k+1) \quad k=1,...,N. \tag{11}$$

Верхний индекс полинома на единицу меньше порядка матрицы D. Тогда из (8) получаем

$$P_{k+1}^N(x) = (x-c_k)P_k^N(x) - q_kP_{k-1}^N(x), \quad k=0,...,N-1, \tag{12}$$
$$P_{N+1}^N(x) = (x-c_N)P_N^N(x) - \sqrt{q_N}P_{N-1}^N(x), \quad P_{-1}^N = 0,\ P_0^N = 1. \tag{13}$$

Следовательно, задача нахождения собственных функций спектральной задачи (9) свелась к рекуррентным соотношениям (12), известным из теории ортогональных полиномов [4]. Искомые собственные значения $x_k^{(N)}$ гамильтониана (4) при фиксированном значении N являются корнями полинома $P_{N+1}^N(x)$. При каждом N существует весовая функция $\rho_N(x)$ (спектральная мера, сосредоточенная в корнях полинома $P_{N+1}^N(x)$), относительно которой ортогональны первые N полиномов:

$$\int P_k^N(x)P_m^N(x)\,d\rho_N(x) = \delta_{km}, \quad 0\le k,m\le N,$$

где

$$\rho'_N(x) := \sum_{x_j^{(N)}: P_{N+1}^N(x_j^{(N)})=0} \rho_N^j \, \delta(x - x_j^{(N)}), \quad \rho_N^j = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \left[P_k^N(x_j^{(N)}) \right]^2}. \quad (14)$$

Здесь $\delta(x - x_0)$ обозначает точечную меру массы 1 в точке x_0.

Как известно [4], полиномы $P_k^N(x)$ могут быть представлены в следующем виде через определители:

$$P_{k+1}^N(x) = \frac{1}{G_k} \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_k \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{k-1} & \tau_k & \dots & \tau_{2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^k \end{vmatrix}, \quad G_k = \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_k \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{k-1} & \tau_k & \dots & \tau_{2k-1} \\ \tau_k & \tau_{k+1} & \dots & \tau_{2k} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

а величины

$$\tau_k \equiv \tau_k^{(N)} = \int x^k \, d\rho_N. \quad (16)$$

суть моменты соответствующей весовой функции, т.е. средние значения степеней корней полинома $P_{N+1}^N(x)$ или, что то же самое, средние следов степеней матрицы D (10).

Поставим вопрос об асимптотике полиномов $P_k^N(x)$ и, соответственно, меры ортогональности, при $N \to \infty$. С этой целью заметим, что при фиксированном N максимальные значения элементов (10) матрицы D имеют порядок $\sqrt{(N+1)^{p+1}}$. Поэтому удобно перейти от матрицы D к другой матрице $\widetilde{D}$ с элементами $\widetilde{D}_{ij} = D_{ij}(N+1)^{-\frac{p+1}{2}}$. Введем соответствующие нормированные собственные значения

$$s_j^{(N)} = x_j^{(N)}(N+1)^{-\frac{p+1}{2}} \quad j = 0, ..., N \quad (17)$$

и рассмотрим следы n-ых степеней матрицы $\widetilde{D}$:

$$\mu_n^{(N)} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{x_j^{(N)}}{(N+1)^{p+1}} \right)^n = \frac{1}{N+1} Tr(\widetilde{D}_{ij})^n. \quad (18)$$

Из (10) и (11) с точностью до $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ равномерно по t получаем

$$q(t) = t^p(1-t), \quad c(t) = \Omega t, \quad \Omega = \frac{1}{B}\left(\omega_0 - \sum_{i=1}^{p} \omega_i\right), \quad t = \frac{k}{N+1}, \quad (19)$$

так что с вышеуказанной точностью

$$D_{jk} = N^{\frac{p+1}{2}} \left(\Omega\, t\, N^{-\frac{p-1}{2}}\, \delta_{jk} + \sqrt{q(t)}\, (\delta_{j,k-1} + \delta_{j,k+1}) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right). \quad (20)$$

Выражение (20) в круглых скобках, умножаемых на $N^{\frac{p+1}{2}}$, представляет элементы матрицы $\widetilde{D}$, записанные с точностью до $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. Видно, что при $p > 1$ ее диагональные элементы асимптотически равны нулю, т.е. в пределе при $N \to \infty$ матрица $\widetilde{D}$ двухдиагональна. Эту предельную матрицу будем обозначать $\widetilde{D}_\infty$. Отметим, что важным является т.н. случай "точного резонанса", когда $\Omega = 0$. В этом случае двухдиагональна не только матрица $\widetilde{D}_\infty$, но и сама матрица $\widetilde{D}$, а также и D.

Чтобы вычислить моменты (18), рассмотрим матрицу вида

$$\widehat{D}_{ij} = a\delta_{ij} + b(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}).$$

Для нее

$$\widehat{D}^n_{ij} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} a^{n-m} b^m\, \delta_{i,j+m-2l}.$$

Таким образом, если диагональные элементы в данной матрице $\widehat{D}$ отсутствуют, то след ее n-ой степени отличен от нуля только при четном n.

Возвращаясь к матрице $\widetilde{D}$, видим, что при $p > 1$ все ее нечетные моменты в пределе $N \to \infty$ равны нулю, а для четных моментов получаем

$$\lim_{N\to\infty} \mu^{(N)}_{2n} = \binom{2n}{n} \int_0^1 q^n(t)\, dt = \binom{2n}{n} \frac{(pn)!n!}{[(p+1)n+1]!}, \quad \lim_{N\to\infty} \mu^{(N)}_{2n+1} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, при $N \to \infty$ моменты (18) надлежащим образом нормированных собственных значений (17) существуют и конечны. Из теоремы Гамбургера [5] о восстановимости функции распределения по своим моментам следует, что для каждого N существует распределение $F_N(s)$, такое, что $dF_N = f_N(s)\, ds$ и главные части моментов плотности распределения равны выражениям (21). Именно, теорема Гамбургера утверждает, что если некоторая последовательность чисел $\{\mu_{2n}\}$ такова, что ряд по обратным степеням этих величин расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^{(N)}_{2n} \right)^{-\frac{1}{2n}} = \infty, \quad (22)$$

то существует единственная функция распределения F, моменты которой равны этим числам $\{\mu_{2n}\}$.

Рассматривая величины (21), замечаем, что, как функции параметра p, они образуют монотонно убывающую последовательность:

$$\frac{\mu_{2n}^{(N)}(p+1)}{\mu_{2n}^{(N)}(p)} = \frac{(((p+1)n)!)^2}{(pn)!\,((p+2)n+1)!} = \frac{(pn+1)\cdots(pn+n)}{((p+1)n+n+1)\cdots((p+1)n+2n)}$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n+1}{n(p+1)}\right)^{-1} < \left(1+\frac{n+1}{n(p+1)}\right)^{-n} < 1.$$

Поэтому, если рассматриваемый выше ряд (22) расходится для случая $p=1$, то он и подавно расходится для остальных $p>1$. При $p=1$ из (21) получаем $\mu_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N}\right)$, причем последовательность $\mu_{2n}^{(N)}(p)$ сходится равномерно к $\dfrac{1}{2n+1}$ при $N\to\infty$, так что ряд (22), действительно, расходится. Таким образом, распределения $F_N(s)$ при всех $p \geqslant 1$ существуют и единственны.

Далее, по теореме Хелли (см., напр., [6]) о существовании слабого предела у последовательности равномерно ограниченных неубывающих функций следует, что в слабом смысле существует предельная спектральная мера. Это значит, что плотность $f_N(s)$ функции распределения нормированных собственных значений $s_k^{(N)}$

$$f_N(s) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\delta\left(s - s_k^{(N)}\right) \qquad (23)$$

сходится в слабом смысле к некоторой $f(s)$, имеющей своими моментами величины (21):

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-R_N}^{R_N} f_N(s)s^n\,ds = \int_{-R}^{R} f(s)s^n\,ds = \mu_n.$$

Здесь R_N и R - спектральные радиусы операторов, отвечающих соответственно матрицам $\widetilde{D}$ и $\widetilde{D}_\infty$:

$$R = \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}(\mu_{2n}^{(N)})^{1/2n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\lim_{N\to\infty}(\mu_{2n}^{(N)})^{1/2n} = 2\sqrt{\frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}}. \qquad (24)$$

Менять местами пределы в (24) можно в силу равномерной по N сходимости последовательности $(\mu_{2n}^{(N)})^{1/2n}$.

Зная моменты μ_n (21) предельного распределения $f(s)$, можно получить выражение для соответствующей характеристической функции в виде ряда, или в эквивалентном интегральном представлении – через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$
\begin{gathered}
g(y) = \int_{-R}^{R} f(s) e^{isy}\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_{2k} y^{2k}}{(2k)!} = \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} \binom{2k}{k} \int_0^1 q^k(t)\, dt = \int_0^1 J_0(y\sqrt{q(t)})\, dt.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

В частности, для $p=1$ ряд в (25) легко суммируется:

$$
g(y)|_{p=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin y}{y}, \quad f(y)|_{p=1} = \frac{1}{2}. \tag{26}
$$

Рассматривая выражение (26) для $g(y)$ как результат интегрирования в (25), получаем известную формулу ([7], стр. 177, формула 13) из теории бесселевых функций:

$$
\int_0^1 J_0(y\sqrt{t(1-t)})\, dt = \frac{\sin y}{y}.
$$

В общем случае произвольных натуральных α, β интеграл

$$
g(y;\alpha,\beta) = \int_0^1 J_0\left(y\sqrt{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}}\right)\, dt \tag{27}
$$

не выражается через элементарные функции.

Зависимость функции $g(y;\alpha,\beta)$ от y определяет асимптотическое распределение собственных значений гамильтониана, модулирующего процесс комбинационного рассеяния. Порядок модели задается числами α и β, являющимися показателями степеней для самого старшего монома в формуле (1).

Интересно отметить, что если для моментов μ_{2k}, имеющих вид (21), использовать асимптотическое представление факториалов по формуле Стирлинга, то получим $\mu_{2k} \sim \dfrac{R^{2k}}{(p+1)k+1}$, где R есть спектральный радиус оператора с матрицей $\widetilde{D}$ (см. формулу (24)). Подставляя это приближенное выражение для μ_{2k} в формулу (26) для $g(y)$ (соответствующую функцию обозначим $\widetilde{g}(y)$), получаем

$$
\widetilde{g}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{(Ry)^{2k}}{(p+1)k+1}.
$$

При $p=1$ из (24) следует $R=1$, так что $\widetilde{g}(y) = \frac{\sin y}{y} = g(y)$, т.е. $\widetilde{g}(y)$ в этом случае совпадает с точным выражением (26).

В последующих разделах будет изложен подход к построению искомой асимптотики специальных полиномов (11) с использованием методов теории логарифмического потенциала [8]-[10].

4 Логарифмическая асимптотика ортогональной меры

Дадим определения основных понятий, использующихся в этом разделе.

Логарифмическим потенциалом конечной борелевской меры λ называется функция

$$U^{\lambda}(x)=\int \log\frac{1}{|x-y|}\,d\lambda(y) \tag{28}$$

Равновесной (или экстремальной) мерой $\lambda_Q^{t,\sigma}$ называется мера, дающая минимум среди всех мер массы t, ограниченных мерой σ (с непрерывным потенциалом), функционалу энергии в (непрерывном) внешнем поле $Q(x)$:

$$I_Q[\lambda]=\int U^{\lambda}(x)\,d\lambda(x)+2\int Q\,d\lambda\to\min\,.$$

Точнее

$$I_Q[\lambda_Q^{x,\sigma}]=\inf_{\lambda(\mathbb{R})=t,\ \lambda\leqslant\sigma} I_Q(\lambda). \tag{29}$$

Для экстремальной задачи (29) с ограничением σ во внешнем поле Q экстремальная мера $\lambda_Q^{t,\sigma}$ существуют и единственны (в случае конечных энергий). Известно [8]-[10], что экстремальная мера однозначно характеризуется следующими условиями равновесия: для некоторой (не обязательно единственной) константы $w=w_Q^{x,\sigma}$ имеем

$$U^{\lambda_Q^{x,\sigma}}+Q\begin{cases}\leqslant w & \text{на}\quad S_{\lambda_Q^{x,\sigma}},\\ \geqslant w & \text{на}\quad S_{\sigma-\lambda_Q^{x,\sigma}}.\end{cases} \tag{30}$$

Множеством равновесия называют множество $S_{\lambda_Q^{x,\sigma}}\bigcap S_{\sigma-\lambda_Q^{x,\sigma}}$, а экстремальную меру называют также равновесной.

Оказывается [10]-[12], что равновесная мера $\lambda_Q^{t,\sigma}$, ограничение σ и поле Q связаны с некоторой системой полиномов, ортогональных на некотором отрезке.

Пусть имеется система ортогональных полиномов, связанных рекуррентными соотношениями

$$\widetilde{P}_{k+1}^{N}(x)=(x-c_{k,N})\widetilde{P}_k^{N}(x)-q_{k,N}\widetilde{P}_{k-1}^{N}(x),\quad \widetilde{P}_{-1}^{N}=0,\quad \widetilde{P}_0^{N}=1,\quad k=1,...,N,$$

(31)

и носители мер $\widetilde{\rho}_N(x)$, относительно которых ортогональны конечные системы полиномов (31), принадлежат некоторому отрезку, например $[0,1]$. Если существует непрерывная на компакте функция $Q(x)$, являющаяся логарифмической асимптотикой плотностей мер $\widetilde{\rho}_N(x)$? и существует слабый предел мер, считающих нули многочленов $\widetilde{P}^N_{N+1}$, т.е.

$$\max_{s_j^{(N)}:\ \widetilde{P}^N_{N+1}(s_j^{(N)})=0} \left| \frac{\ln \widetilde{\rho}^j_N}{N+1} + 2Q(s_j^{(N)}) \right| \longrightarrow 0, \quad N \to \infty, \tag{32}$$

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \delta(s - s_k^{(N)}) \xrightarrow[N\to\infty]{*}, \ \sigma(s), \tag{33}$$

то при дополнительном техническом "условии отзделимости" собственных значений для каждого $t \in [0,1]$ имеет место равномерная сходимость на произвольных компактах $K \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}$:

$$\left| \widetilde{P}^{N-1}_{[tN]} \right|^{\frac{1}{[tN]}} (z) \rightrightarrows \ exp\left(-\frac{1}{t} U^{\lambda_Q^{t,\sigma}}(z) \right), \quad N \to \infty, z \in K. \tag{34}$$

Условие же отделимости заключается в том, что

$$\exists \Delta > 0: \quad \min_{1\le 1 \le N} |s_{i+1}^{(N)} - s_i^{(N)}| > \frac{\Delta}{N}.$$

Применительно к задаче, которая обсуждалась в предыдущих параграфах, заметим, что фигурирующие в (34) ограничительные меры σ совпадают с введенной ранее функцией $f(s)$.

Пусть для каждого t множество равновесия есть отрезок Δ_t. Если найдутся непрерывные функции $c(t)$ и $q(t)$ такие что

$$\lim_{\substack{k/N \to t,\\ N\to\infty}} c_{k,N} = c(t), \qquad \lim_{\substack{k/N \to t,\\ N\to\infty}} q_{k,N} = q(t), \tag{35}$$

то $\Delta_t = [c(t) - 2\sqrt{q(t)}, c(t) + 2\sqrt{q(t)}]$.

На Рис. 1 приведены зависимости $x(t)$ в соответствии с условием $x^2 = 4q(t)$, для случая, когда $q(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$. Напомним, что это та самая функция, которая фигурирует в представлении (27).

В частности, для задачи, рассматриваемой в п.2, при $p > 1$ $c(t) = 0$, а $q(t) = t^p(1-t)$. Функцию $q(t)$ можно взять в более общем виде, отвечающем случаю произвольного операторного монома в модельном гамильтониане вида (1): $t^\alpha(1-t)^\beta$, α, $\beta > 0$. Эта функция возникает при исследовании

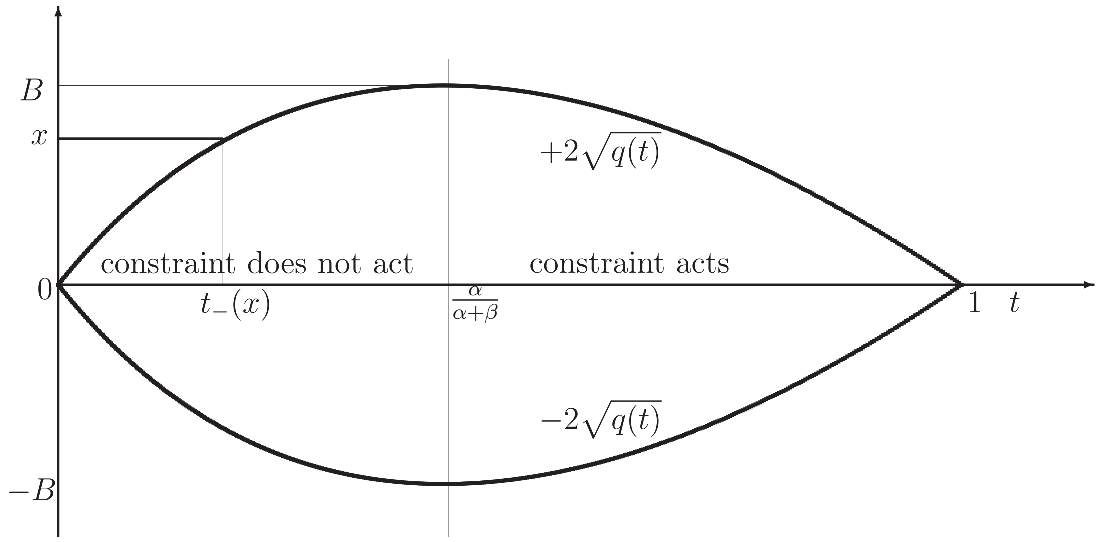

Рис. 1: Схема, определяющая $t_-(x)$ в зависимости от монотонности границ множества равновесия $\Delta_t = [-2\sqrt{q(t)}, +2\sqrt{q(t)}]$.

общего случая (1), поскольку для изучения асимптотики общего гамильтониана следует из суммы операторных слагаемых в (1) оставить только моном старшей степени по $\alpha+\beta$.

Как следует из [13], [14] существуют явные формулы зависимости внешнего поля Q ограничительной меры σ и равновесной меры $\lambda_Q^{t,\sigma}$ от множества равновесия $\Delta_t = [-2\sqrt{q(t)}, 2\sqrt{q(t)}]$.

$$d\sigma(x) = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{d\,\tau}{\sqrt{4q(\tau)-x^2}}\right) d\,x \tag{36}$$

$$Q(x) = \int_0^{t_-(x)} g_{[-2\sqrt{q(\tau)},2\sqrt{q(\tau)}]}(x)\,d\,\tau, \tag{37}$$

$$d\lambda_Q^{t,\sigma}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{d\,\tau}{\sqrt{4q(\tau)-x^2}}\right) d\,x \tag{38}$$

где $t_-(x)$ есть наименьшее из двух решений на $[0,1]$ уравнения $4q(t) = x^2$ и g_{Δ_t} функции Грина дополнения отрезка $\Delta_t = [-2\sqrt{q(t)}, 2\sqrt{q(t)}]$ в $\mathbb{C}^2$ с полюсом в бесконечности:

$$g_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \log\left|\dfrac{2x-a-b}{b-a} + \sqrt{\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)^2 - 1}\right| & x \notin [a,b], \\ 0 & x \in [a,b], \end{cases}$$

Таким образом, формулы (34)-(38) решают поставленную задачу об определении асимптотики собственных значений и собственных функций гамильтониана (1) комбинационного рассеяния. Рассмотрим теперь точно решаемый пример, имеющий большое теоретическое и прикладное значение – гамильтониан, сводящийся к гармоническому осциллятору.

5 Точно решаемый случай

Положим в (4) $p = 1$. Тогда гамильтониан

$$\hat{H} = \omega_1 \, a_1^+ a_1^- + \omega_2 \, a_2^+ a_2^- + B(a_1^+ a_2^- + a_2^+ a_1^-) \tag{39}$$

приводится к диагональному виду преобразованием Боголюбова:

$$a_1^\pm = b_1^\pm \cos\varphi - b_2^\pm \sin\varphi, \quad a_2^\pm = b_1^\pm \sin\varphi + b_2^\pm \cos\varphi, \quad \mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{B}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Легко проверяется, что $[b_i^-, b_j^+] = [a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij}$. В новых операторах гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2 + 2B)\; b_1^+ b_1^- + \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2 - 2B)\; b_2^+ b_2^- . \tag{40}$$

Это гамильтониан двумерного гармонического осциллятора с разделенными переменными. По каждой из переменных собственные значения операторов $\hat{n}_k' = b_k^+ b_k^-$ суть неотрицательные целые числа, а собственные функции – многочлены Эрмита, умноженные на свою весовую функцию (плотность ортогональной меры).

С другой стороны, поскольку, согласно (5), у гамильтониана (39) имеется закон сохранения $n_1 + n_2 = N$, то его собственные значения $E_k^{(N)},\ k \leqslant N$ на указанном инвариантном подпространстве равны

$$E_k^{(N)} = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2 + 2B)\, N - 2Bk. \tag{41}$$

Из (41) следует, что собственные значения матрицы D (10), отвечающей оператору $\hat{H}$ (39) в стандартном фоковском базисе, равны $x_k^{(N)} = 2k - N$, $k \leqslant N$. Это означает, что характеристический многочлен симметричной двухдиагональной матрицы с элементами

$$D_{ij} = \sqrt{k(N-k+1)}\delta_{i,j-1} + \sqrt{(k+1)(N-k)}\delta_{i,j+1}$$

при четной и, соответственно, нечетной размерностях имеет вид

$$P_{2N+1}^{2N}(x) = x \prod_{k=1}^{N} \left(x^2 - 4k^2\right), \quad P_{2N}^{2N-1}(x) = \prod_{k=1}^{N} \left(x^2 - (2k-1)^2\right). \tag{42}$$

Рекуррентные соотношения (12) принимают вид

$$P_{k+1}^N(x) = xP_k^N(x) - k(N-k+1)P_{k-1}^N(x), \quad P_{-1}^N = 0,\ P_0^N = 1,\ k = 0, ..., N-1. \tag{43}$$

Здесь x есть один из корней многочлена (42), т.е. целое число из $[-N, N]$.

Система полиномов (43) является классическими полиномами Кравчука с точностью до сдвига и растяжения, т.е.

$$\sqrt{q_1 q_2 ... q_k}\, P_k^N\,(2x + N) = K_k^N(x). \tag{44}$$

Полиномы Кравчука $K_k^N(x)$ [15] $p = \frac{1}{2}$ (см. также [4], [10] и [12]) удовлетворяют рекуррентным соотношениям для $k = 0, ..., N-1$ с начальными условиями $K_{-1}^N = 0,\ K_0^N = 1$

$$xK_k^N(x) = \sqrt{(k-1)(N-k)}K_{k-1}^N(x) + \frac{N}{2}K_k^N(x) + \sqrt{k(N-k+1)}K_{k+1}^N(x), \tag{45}$$

И являются полиномами ортогональными относительно биномиального распределения на $\{0, 1, ..., N\}$. Легко видеть, что Для полноты изложения мы приведем здесь результаты, полученные в [10], [12], для предельного распределения нулей полиномов Кравчука.

Рассматриваются сжатые (отрезок [0,N] линейно переводится в [0,1]) полиномы Кравчука $\widetilde{K}_{n,N}(x)$, $0 \le n \le N$ с единичным старшим коэффициентом, т.е. $\widetilde{K}_{n,N}(x) := A_{n,N}K_{n,N}(Nx) = x^n + \cdots$, где $K_{n,N}(y)$ – это классические полиномы Кравчука с простыми нулями на отрезке [0,N]

$$K_{n,N}(y) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \begin{pmatrix} N-y \\ n-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\chi_{\widetilde{K}_n}$ меру, "считающую" нули $\widetilde{K}_{n,N}(x)$. Рассмотрим последовательность $(n_j, N_j)_{j=1}^{\infty}$ такую, что $n_j/N_j \to t < 1$ при $j \to \infty$. Тогда, как показано в [10], $\chi_{\widetilde{K}_{n_j,N_j}} \xrightarrow{*} \frac{1}{t}\lambda_Q^{t,m}$ при $j \to \infty$, где ограничение m есть мера Лебега на отрезке [0,1], а внешнее поле имеет вид

$$Q(x) = \frac{1}{2}\{x \log x + (1-x)\log(1-x) + \log 2\}.$$

Множество равновесия для этой задачи зависит от массы t следующим образом: $\Delta_t = \left[\frac{1}{2} - \sqrt{t(1-t)}, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{t(1-t)}\right]$. Равновесная мера

$$\lambda_Q^{t,m}(x) = \frac{d\,x}{2} + \frac{2t-1}{2}d\,\mu,$$

где плотность меры μ определяется как

$$\mu' = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2t} & \text{на} \quad [0,1] \setminus \Delta_t \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{2}{1-2t}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-4t(1-t)}{1-4t(1-t)-4x+x^2}} & \text{на} \quad \Delta_t. \end{cases}$$

Как известно, асимптотической мерой полиномов Кравчука $K_{n,N}(y)$ при $N \to \infty$ и фиксированных n, y являются полиномы Эрмита

$$\lim_{N\to\infty} K_{n,N}(y) = \frac{H_n(y)}{\sqrt{2^n n!}},$$

как это и должно быть, исходя из преобразования задачи (39)к виду (40)

6 Асимптотические неклассические соотношения коммутации и представление когерентных состояний коллективных возбуждений

В этом пункте мы сделаем важное замечание относительно новых коммутационных соотношений, которым удовлетворяют операторы рождения и уничтожения, в терминах которых гамильтониан (1) асимптотически, т.е. при больших числах заполнения, диагональный. Представим его в виде

$$\widehat{H}' = b^+ b^-, \quad \widehat{H}'|n\rangle = E(n)|n\rangle.$$

Из (9) и (22) следует, что при больших n его собственные значения ведут себя как

$$E(n) = \omega_0 n \pm BRn^{(p+1)/2}. \tag{46}$$

Рассмотрим положительную ветвь спектра $E(n)$. Для нее при $p > 1$ имеем

$$E(n) \approx cn^{(p+1)/2}, \quad c = BR. \tag{47}$$

Введем тогда операторы $b^\pm$ по формулам:

$$b^-|n\rangle = \sqrt{E(n)}|n-1\rangle, \quad b^+|n\rangle = \sqrt{E(n+1)}|n+1\rangle. \tag{48}$$

Приближенные (при больших n) соотношения коммутации, которым удовлетворяют эти операторы, имеют вид

$$[b^-, b^+]|n\rangle = (E(n+1) - E(n))\,|n\rangle \approx \frac{c(p+1)}{2} n^{(p-1)/2}|n\rangle = C(n)|n\rangle. \tag{49}$$

В терминах исходной физической задачи комбинационного рассеяния, описываемой гамильтонианом (1), эти операторы представляют собой операторы рождения и уничтожения коллективных возбуждений среды.

Неклассические, т.е. отличные от бозонных соотношений коммутации вида $[a^-, a^+] = 1$, соотношения (49) означают, в частности, что при переходе к неквантовому описанию фазовое пространство соответствующих канонических гамильтоновых переменных становится нелинейным.

Возможные представления неклассических соотношений вида $[b^-, b^+] = C(b^+b^-)$ и их дальнейшие обобщения были построены в работе [16]. В терминах [16] представление (48) названо представлением бозонного типа.

Удобным способом описания векторов и операторов во вторичном квантовании является т.н. представление когерентных состояний (ПКС, см. [1]). Оно осуществляется переходом от стандартного фоковского базиса $\{|n\rangle\}$ к базису из собственных функций оператора уничтожения. Метод построения ПКС для неклассических соотношений бозонного типа был предложен в [17]. Применим его для получения представления ПКС для соотношений (48).

Собственный вектор $|z\rangle$ оператора уничтожения b^- называется когерентным состоянием с (комплексным) собственным значением z. Введем величины $Q_n = c^{-n}E(1)E(2)...E(n), \quad Q_0 \equiv 1$, где $E(n)$ и c определены в (46). Тогда нормированный вектор $|z\rangle$ имеет в фоковском базисе следующее представление:

$$\begin{gathered} |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{G\left(|z/c|^2\right)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z/c|^2}{\sqrt{Q_n}} |n\rangle, \\ G(x) \equiv G_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{Q_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^{\nu+1}}, \quad \nu = \frac{p-1}{2} \geq 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Далее переменную z/c обозначаем для краткости просто z. По аналогии с полилогарифмом функция $G_\nu(x)$ может быть названа полиэкспонентой. Соответствующий ряд сходится во всей комплексной плоскости и представляет собой целую функцию.

Введем в комплексной плоскости меру $d\mu = \omega(|z|^2)dzd\overline{z}$, моменты которой равны введенным выше величинам Q_n. Это условие приводит к моментной системе, которой удовлетворяет плотность ω:

$$\int_0^\infty \frac{x^n \omega(x)}{\sqrt{G_\nu(x)}} dx = Q_n = (n!)^{\nu+1}. \tag{51}$$

В частности, для точно решаемого случая, когда $\nu = 0$ и $Q_n = n!$, получаем

$G_0(x) = e^x$, и решение моментной системы (51) имеет вид $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{G_0(x)}} = \exp(-x/2)$. Тогда разложение фоковских состояний $\{|n\rangle\}$ по когерентным $\{|z\rangle\}$ имеет вид

$$|n\rangle = \frac{\sqrt{Q_n}}{\pi} \int \overline{z}^n |z\rangle \, d\mu(z). \tag{52}$$

Поскольку же из (50) следует

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{Q_n G(|z|^2)}}$$

то формула (43) может быть переписана в виде

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle z|n\rangle |z\rangle \sqrt{G(|z|^2)} \, d\mu(z). \tag{53}$$

Отсюда следует, что КС $\{|z\rangle\}$ порождают неортогональное разбиение единицы, поскольку в этом случае (53) можно представить в виде

$$|n\rangle = \hat{I}|n\rangle, \quad \hat{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \frac{1}{\pi} \int |z\rangle\langle z| \sqrt{G(|z|^2)} \, d\mu(z). \tag{54}$$

Рассмотрим произвольный вектор $|\alpha\rangle$, записывающийся в фоковском представлении в виде $|\alpha\rangle = \sum \alpha_n |n\rangle$. Сопоставим ему формальный ряд

$$\alpha(z) = \langle z|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{G(|z|^2)}} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{Q_n}} \, \overline{z}^{\,n}, \tag{55}$$

называемый ковариантным символом вектора $|\alpha\rangle$. Тогда в ПКС вектор $|\alpha\rangle$ записывается в виде

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int \alpha(z) |z\rangle \, d\mu(z). \tag{56}$$

Для скалярного произведения двух векторов получаем

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int \alpha(z) \beta(\overline{z}) |z\rangle \, d\mu(z). \tag{57}$$

Аналогично, если $\hat{H}$ – некоторый оператор, имеющий в фоковском представлении матрицу $H_{mn} = \langle m|\hat{H}|n\rangle$, т.е. $\hat{H} = \sum_{m,n} H_{mn} |m\rangle\langle n|$, то ему можно сопоставить аналитическую функцию двух переменных

$$H(z, w) = \langle z|\hat{H}|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{G(|z|^2) G(|w|^2)}} \sum_{m,n} H_{mn} \frac{z^m w^n}{\sqrt{Q_m Q_n}}. \tag{58}$$

Пусть $|\beta\rangle = \hat{H}|\alpha\rangle$ представляет результат действия оператора $\hat{H}$ на вектор $|\alpha\rangle$. Тогда получаем, что

$$\beta(z) = \frac{1}{\pi}\int B(z,w)\alpha(w)\,d\mu(w). \tag{59}$$

Таким образом, векторы состояний квантовой системы и действующие на них операторы можно описывать аналитическими функциями с использованием ПКС, отвечающих оператору уничтожения квазичастиц в асимптотически диагональном представлении гамильтониана (1). Нетривиальным вопросом, требующим специального исследования, является нахождение правила преобразования исходных операторов $a_i^{\pm}$ к операторам $b^{\pm}$, в терминах которых гамильтониан диагонален.

В заключение отметим, что когерентные состояния (50) и порождаемую ими меру, плотность которой удовлетворяет условиям (51), можно использовать для представления комплексной дельта-функции. Именно, поскольку из (52) следует

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{Q_n G(|z|^2)}} = \frac{1}{\pi}\int w^n\langle w|z\rangle\,d\mu(z)$$

и скалярное произведение двух когерентных состояний выражается формулой

$$\langle z|w\rangle = \frac{G(\overline{z}w)}{\sqrt{G(|z|^2)G(|w|^2)}}, \tag{60}$$

то

$$z^n = \frac{1}{\pi}\int \frac{G(\overline{z}w)}{\sqrt{G(|w|^2)}}w^n\,d\mu(w).$$

Это означает, что любая аналитическая функция $h(z) = \sum h_n z^n$ может быть представлена в виде

$$h(z) = \int K(z,w)h(w)\,d\mu(w), \quad K(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{G(\overline{z}w)}{\sqrt{G(|w|^2)}}. \tag{61}$$

Формула (61) имеет самостоятельное математическое содержание, которое можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема *о представлении δ-функции в комплексной плоскости.* Пусть задана последовательность положительных чисел Q_n такая, что ряд $G(x) = \sum \dfrac{x^n}{Q_n}$ сходится при всех $x \in \mathbb{R}_+$ и существует функция $\omega(x)$, удовлетворяющая моментной системе $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n\omega(x)}{\sqrt{G(x)}}\,dx = Q_n$. Тогда $\omega(x)$ определяет меру $d\mu(z) = \omega(|z|^2)dzd\overline{z}$ в комплексной плоскости переменных $z, \overline{z}$

такую, что для любой аналитической функции $h(z) = \sum h_n z^n$ справедливо представление

$$h(z) = \int K(z,w)h(w)\,d\mu(w), \quad K(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{G(\overline{z}w)}{\sqrt{G(|w|^2)}}.$$

Заключение

Итак, в работе проведено исследование асимптотики спектра гамильтониана некоторой модельной задачи комбинационного рассеяния в квантовой оптике. Получены выражения для асимптотической функции распределения собственных значений гамильтониана в частных случаях и описан метод их отыскания в более общих ситуациях, основанный на применении теории логарифмического потенциала. Совокупность выполняемых при этом операций, таких как ограничение гамильтониана на конечномерные инвариантные подпространства законов сохранения, линейных по некоторым самосопряженным операторам, определение вида нормировки собственных значений гамильтониана, получение выражения для его спектрального радиуса, решение задачи об экстремальной мере и определение правила коммутации операторов, диагонализующих гамильтониан, составляет сущность развиваемого авторами метода асимптотической диагонализации. Отметим, что специфической чертой спектра является наличие у него отрицательной ветви при достаточно больших числах заполнения. Эта ветвь не имеет четкой физической интерпретации и свидетельствует о неограниченности спектра гамильтониана снизу. Возможно, это ограничивает область применения полиномиальных моделей вида (1).

Благодарности

Авторы благодарят А.И. Аптекарева и Д.Н. Тулякова за полезные обсуждения в процессе работы.

Список литературы

[1] Perina Ja. *Quantum Statistics of Nonlinear Optics*, Reidel: Dordrecht, 1984.

[2] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) *Введение в квантовую статистическую механику*, М.: Наука, 1984.

[3] Веденяпин В.В., Орлов Ю.Н. *О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана*, ТМФ. 1999. Т.121. i2. С.307 - 315.

[4] Szego G. *Orthogonal polynomials*, N.-Y: The American Mathematical Society, 1959;

[5] Shohat J.A., Tamarkin J.D. *The problems of moments*, N.-Y., 1943.

[6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа,* М.: Наука, 1976.

[7] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*, М.: Наука, 1983.

[8] E. B. Saff, V. Totik. *Logarithmic Potentials with External Fields,* Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin,1997.

[9] Е.А. Рахманов *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной,* Мат. сб. Т.187, i8-с.109-124.-1996

[10] P. D. Dragnev, E. B. Saff *Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable,* J.Anal. Math. 72(1997),223-259.

[11] Е.А. Рахманов *Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси,* Мат. сб. Т.119(162)-с.163-203.-1982.

[12] A.I.Aptekarev, W. Van Assche *Asymptotic of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice,* Journal of physics A: Mathematics and General, 34(48), 2001, 10627-10639.

[13] *В. С. Буяров, Е. А. Рахманов.* О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси. ,//Мат. сб. i5 190(1999), 11-22;

[14] *A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche.* The asymptotic zero distribution of ortogonal polynomials with varying recurrence coefficients. ,//J. Approx. Theory;

[15] Krawtchouk M. C. R. Acad. Sci. Paris, 1929. Vol. 189. P. 620-622.

[16] Веденяпин В.В., Мингалев И.В., Мингалев О.В. *Представления общих соотношений коммутации* ТМФ, 1997. Т. 113. ь 3. С. 369-383.

[17] Орлов Ю.Н. *Основы квантования вырожденных динамических систем* М.: МФТИ, 2004.