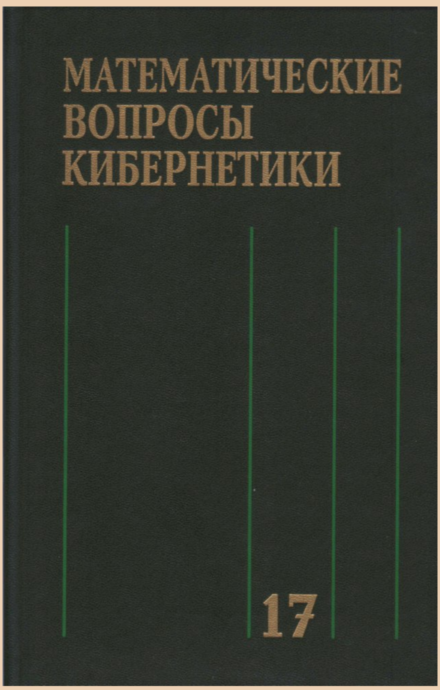

А. А. Часовских

Об A-выразимости в классе линейно-автоматных функций

ОБ A-ВЫРАЗИМОСТИ В КЛАССЕ ЛИНЕЙНО-АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. ЧАСОВСКИХ

(МОСКВА)

§ 1. A-выразимость в классе одноместных линейно-автоматных функций, сохраняющих нулевую последовательность

Рассмотрим множество $L_1^0(\xi)$ одноместных линйно-автоматных функций (л.-а. функций), сохраняющих нулевую последовательность. Множество $L_1^0(\xi)$ строится [5] из проводника $Id(x)$, и задержки $\xi(x)$ с нулевым начальным состоянием с использованием следующих трех операций.

1. Сложения «+». Если $F_i(x) \in L_1^0(\xi)$, $\quad i = 1, 2$, то суммой $F_1(x)$ и $F_2(x)$ называется л.-а. функция $F_+^{(2)}(F_1(x), F_2(x))$, где через $F_+^{(2)}(x_1, x_2)$ обозначается сумматор с двумя входами.

2. Умножения «$\cdot$». Если $F_i(x) \in L_1^0(\xi)$, $\quad i = 1, 2$, то произведением $F_1(x)$ на $F_2(x)$ называется л.-а. функция $F_1(F_2(x))$.

3. Операции «Об». Если $F_i(x) \in L_1^0(\xi)$, $\quad i = 1, 2$, то, применяя операцию обратной связи к переменной x_2 л.-а. функции $F_+^{(2)}(F_1(x_1), \xi \cdot F_2(x_2))$, получим новую л.-а. функцию, которую будем обозначать $\text{Об}_{x_2}(F_1(x_1), \xi \cdot F_2(x_2))$.

Замыкание множества M, $\quad M \subseteq L_1^0(\xi)$, по операциям сложения и умножения обозначим $K_{\text{C}}^1(M)$, а замыкание этого множества по операциям сложения, умножения и операции Об обозначим $K^1(M)$.

Как показано в [5], для любой л.-а. функции $F(x)$ из множества $L_1^0(\xi)$, найдутся натуральные числа n и k и найдутся числа $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_k$ из множества $E_2 = \{0, 1\}$ такие, что

$$F(x) = \text{Об}_{x_2}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \xi^i(x_1), \sum_{i=1}^{k} b_i \xi^i(x_2)\right).$$

На множестве $L_1^0(\xi)$ рассмотрим оператор A-замыкания [1]. Пусть τ — натуральное число. Две л.-а. функции называются *τ-эквивалентными*, если отображения, задаваемые ими на словах длины не большей τ, совпадают. Функция F A-выразима через элементы множества M, если для любого натурального числа τ в $K_{\text{C}}^1(M)$ найдется функция, τ-эквивалентная F. Множество всех л.-а. функций, A-выразимых через элементы множества M, называется *A-замыканием* множества M и обозначается $A^1(M)$.

Используя известную технику [3], можно показать, что функция F содержится в $A^1(M)$ в точности тогда, когда для любого натурального числа τ в $K^1(M)$ содержится функция, τ-эквивалентная F. Таким образом, добавление операции Об к операциям сложения и умножения не изменяет A-замыкания множества M.

В настоящем параграфе предложен алгоритм проверки A-выразимости в $L_1^0(\xi)$ заданной л.-а. функции через заданную конечную систему л.-а. функций.

Если на множествах M_i, $i=1,2$, $M_i \subseteq L_1^0(\xi)$, введены операции сложения и умножения, то можно рассмотреть новые множества M_1+M_2, $M_1 \cdot M_2$, определяемые следующим образом

$$M_1+M_2=\{\mu_1+\mu_2 \quad | \quad \mu_i \in M_i \quad i=1,2\},$$
$$M_1 \cdot M_2=\{\mu_1 \cdot \mu_2 \quad | \quad \mu_i \in M_i \quad i=1,2\},$$

Например, произведение $\{\xi\} \cdot L_1^0(\xi)$ множества $\{\xi\}$, состоящего из единственной функции задержки с нулевым начальным состоянием, и множества $L_1^0(\xi)$ состоит из тех одноместных л.-а. функций, выход которых не зависит от входа в текущий момент времени.

Пусть $\mu_0 \in \{\xi\} \cdot L_1^0(\xi) \setminus \{0\}$. Множество всех л.-а. функций, построенных из проводника и элемента μ_0 с использованием операций сложения, умножения и обратной связи, обозначим $L_1^0\,(\mu_0)$.

Множество формальных степенных рядов (вообще говоря, непериодических) переменной μ_0, $\mu_0 \in \{\xi\} \cdot L_1^0(\xi) \setminus \{0\}$, над полем E_2 обозначим $R_2(\mu_0)$. Таким образом, если $\rho \in R_2(\mu_0)$, то для некоторых чисел a_i, $a_i \in E_2$, $i=0,1,\ldots$, выполнено:

$$\rho=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \mu_0^i.$$

Как показано в [5], дробь μ_0 можно представить степенным рядом переменной ξ: $\mu_0=\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \xi^i$, $b_i \in E_2$. При этом последовательность коэффициентов b_i, $i=0,1,\ldots$, является периодической (с предпериодом) и $b_0=0$. Таким образом, каждый элемент из $R_2(\mu_0)$ является рядом, члены которого — степени некоторого ряда. Нетрудно видеть также, что для каждого натурального i i-я степень ряда μ_0 также является рядом из $R_2(\xi)$, первые i коэффициентов которого равны нулю. Поэтому любой ряд ρ из $R_2(\mu_0)$,

$$\rho=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \mu_0^i,$$

можно просуммировать, т. е. сопоставить ему ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi^i$$

из $R_2(\xi)$ следующим образом. Пусть

$$\mu_0^i=\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} \xi^j.$$

Зафиксируем целое неотрицательное n и положим

$$b_n=a_0 b_{0n} \oplus a_1 b_{1n} \oplus \ldots \oplus a_n b_{nn}.$$

Искомая сумма есть ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi^i.$$

Пусть $\rho_0 \in R_2(\mu_0)$ и $\rho_1 \in R_2(\mu_1)$. Ряды ρ_0 и ρ_1 будем называть *τ-эквивалентными*, если первые τ коэффициентов их сумм совпадают. Нетрудно видеть, что введенное понятие τ-эквивалентности рядов является расширением понятия τ-эквивалентности л.-а. функций с $L_1^0(\xi)$ на $R_2(\xi)$.

Пусть $\rho_0 \in R_2(\mu_0)$ и $\rho_1 \in R_2(\mu_1)$. Ряды ρ_0 и ρ_1 будем называть *равными*, если равны их суммы. Равенство рядов ρ_0 и ρ_1 обозначается как обычно,

$$\rho_0 = \rho_1.$$

Понятие равенства рядов является расширением понятия равенства л.-а. функций с $L_1^0(\xi)$ на $R_2(\xi)$.

Таким образом, любой элемент из $R_2(\mu_0)$ равен некоторому эементу из $R_2(\xi)$. Например, рассмотрим л.-а. функцию $\mu = \dfrac{\xi}{1+\xi^2}$. Имеет место равенство $\mu = \dfrac{\xi}{1+\xi} + \left(\dfrac{\xi}{1+\xi}\right)^2$. Поэтому функция μ является элементом множества $R_2(\dfrac{\xi}{1+\xi})$, а последовательность коэффициентов соответствующего ряда есть $0, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$. С другой стороны, имеет место равенство

$$\mu = \xi + \xi^3 + \xi^5 + \xi^7 + \ldots,$$

т. е. эта функция является элементом $R_2(\xi)$, а коэффициенты соответствующего ряда суть $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$.

Два множества M_1 и M_2, $M_i \subseteq R_2(\mu_i)$, $i = 1, 2$, равны ($M_1 = M_2$) в точности тогда, когда для каждого элемента из M_1 найдется равный ему в M_2 и наоборот. Следующий пример устанавливает равенство

$$R_2(\xi) = R_2(\xi + \xi^2).$$

Действительно, включение $R_2(\xi + \xi^2) \subseteq R_2(\xi)$ уже фактически упоминалось выше, а справедливость включения

$$R_2(\xi) \subseteq R_2(\xi + \xi^2)$$

можно продемонстривовать следующим образом. Рассмотрим некоторый ряд $\mu = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i$, $\quad a_i \in E_2$. Индукцией по i будем строить последовательность b_i, $\quad i = 0, 1, 2, \ldots$, коэффициентов ряда ρ, $\rho = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \left(\xi + \xi^2\right)^i$, равного μ. При $i = 0$ полагаем $b_0 = a_0$. Пусть коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ уже найдены. Представим $\sum\limits_{i=0}^{k} b_i \left(\xi + \xi^2\right)^i$ рядом из $R_2(\xi)$. Пусть коэффициент при x^{k+1} последнего ряда равен c. Положим $b_{k+1} = c \oplus a_{k+1}$. Таким образом, указан способ вычисления коэффициентов $\{b_i\}$. Следуя этому построению, получим, например,

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\xi + \xi^2\right)^{2^i},$$

где в последовательности коэффициентов единицы находятся на местах с номерами, равными степеням двойки. Заметим, что полученная последовательность коэффициентов $\{b_i\}$ не является периодической.

Пусть k — натуральное число и $u(\xi)$ — многочлен из $\{1\} + \{\xi\}E_2[\xi]$. Через $P_1^0(\xi, k, u)$ обозначим множество

$$\left\{ \xi^k u(\xi) \frac{u'(\xi)}{v(\xi)} \quad | \quad u'(\xi), v(\xi) \in E_2[\xi], \quad (\xi u(\xi), v(\xi)) = 1 \right\}.$$

Через $Q_1^0(\xi,k,u)$ обозначим множество

$$\left\{\xi^k\frac{u(\xi)u'(\xi)}{v(\xi)} \quad | \quad u'(\xi), \quad v(\xi)\in E_2[\xi], \right.$$
$$\left. \deg v(\xi)-\deg u(\xi)-\deg u'(\xi)\geqslant 2k, \quad (\xi u(\xi),v(\xi))=1\right\}.$$

Исходя из результата, приведенного в [4], нетрудно получить следующую лемму.

Лемма 1. *Если $M\subseteq L_1^0(\xi)$, $M\setminus E_2\neq\varnothing$, то найдутся л.-а. функция μ_0, $\mu_0\in\{\xi\}L_0^1(\xi)$, некоторое целое неотрицательное число k, многочлен u_0, $u_0\in E_2[\mu_0]$ степени s и конечное множество л.-а. функций M', что либо выполнено равенство*

$$K^1(M)=M'+P_1^0(\mu_0,k,u_0), \tag{1}$$

либо выполнено равенство

$$K^1(M)=M'+Q_1^0(\mu_0,k,u_0). \tag{2}$$

Лемма 1 доставляет описание структуры замкнутых по оператору K^1 классов в $L_1^0(\xi)$. Соответствующий результат для оператора A^1 выглядит следующим образом.

Лемма 2. *Найдется целое неотрицательное число k и найдется множество многочленов M', $M'\subseteq E_2[\mu_0]$, степень каждого из которых не более k, что выполнено равенство*

$$A^1(M)=M'+\mu_0^k\left(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\right), \tag{3}$$

где множество $\left(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\right)$ состоит из тех и только тех л.-а. функций из $L_1^0(\xi)$, которые разлагаются в ряд из множества $R_2(\mu_0)$.

Доказательство. Докажем сначала, что для л.-а. функции μ, $\mu\in A^1(M)$, найдется ряд r, $r\in R_2(\mu_0)$, равный μ. Найдутся натуральное число m и л.-а. функция μ_1 из $\{1\}+\{\xi\}L_1^0(\xi)$ такие, что выполнено равенство

$$\mu_0=\xi^m\mu_1.$$

Для каждого натурального числа t найдется л.-а. функция $\mu^{(t)}(\xi)$ такая, что $\mu^{(t)}(\mu_0)\in K^1(M)$ и л.-а. функции $\mu^{(t)}(\mu_0)$ и μ являются mt-эквивалентными.

Представим функцию $\mu^{(t)}(\mu_0)$ рядом:

$$\mu^{(t)}(\mu_0)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{ti}{\mu_0}^i,$$

$t=1,2,\ldots$. Пусть t_1 и t_2 — два натуральных числа. Для определенности будем считать, что $t_1<t_2$. Покажем, что первые t_1 слагаемых в рядах $\mu^{(t_1)}(\mu_0)$ и $\mu^{(t_2)}(\mu_0)$ совпадают. Предположим противное. Тогда ряд $\mu^{(t_1)}(\mu_0)+\mu^{(t_2)}(\mu_0)$ содержит слагаемое степени меньше t_1. Пусть t_0 — минимальная такая степень. Это означает, что для некоторого $\mu'(\xi)$, $\mu'(\xi)\in\{1\}+\{\xi\}L_1^0(\xi)$ выполнено: $\mu^{(t_1)}(\mu_0)+\mu^{(t_2)}(\mu_0)={\mu_0}^{t_0}\mu'(\mu_0)=\xi^{tm}{\mu_1}^t\mu'(\mu_0)$. Так как ${\mu_1}^t\mu'(\mu_0)\in\{1\}+$ $+\{\xi\}L_1^0(\xi)$, функция $\mu^{(t_1)}(\mu_0)+\mu^{(t_2)}(\mu_0)$ представляется рядом r из $R_2(\xi)$, среди первых mt_1 коэффициентов которого не все равны нулю. Но из mt_1-эквивалентности функции μ функциям $\mu^{(t_1)}$ и $\mu^{(t_2)}$ следует соотношение $\mu^{(t_1)}+\mu^{(t_2)}\in\xi^{mt_1}L_1^0(\xi)$. Полученное противоречие доказывает равенство первых t_1 коэффициентов рядов $\mu^{(t_1)}(\mu_0)$ и $\mu^{(t_2)}(\mu_0)$.

Далее определим ряд $r'(\mu_0)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\mu_0^i$, взяв в качестве a_i коэффициент при μ_0^i в ряде $\mu^{(i+1)}(\mu_0)$. Тогда для каждого натурального числа t первые t коэффициентов рядов $\mu^{(t)}(\mu_0)$ и $r'(\mu_0)$ совпадают, а поэтому эти ряды mt-эквивалентны. Таким образом, сумма ряда $r'(\mu_0)$ совпадает с μ. Следовательно, доказано, что

$$A^{(1)}(M)\subseteq R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi).$$

Рассмотрим следующее множество л.-а. функций:

$$A=\left\{{\mu_0}^k\right\}\cdot\left(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\right),$$

где k — число, фигурирующее в лемме 1.

Таким образом, множество A состоит из всех л.-а. функций, которые могут быть представлены рядом из $R_2(\mu_0)$, первые k коэффициентов которого равны нулю.

Заметим, что для любого μ, $\mu\in R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)$ в $E_2[\mu_0]$ и A найдутся соответственно $u(\mu_0)$ и μ', удовлетворяющие соотношениям $\mu=u(\mu_0)+\mu'$, $\deg u(\xi)<k$, $\mu'\in A$. Положим

$$\begin{aligned}M'=\{u(\mu_0)\mid u(\mu_0)\in E_2[\mu_0],\ \deg u(\xi)<k\\ \text{и найдется л.-а. функция } \mu\in A^1(M),\ \text{ что } u(\mu_0)+\mu\in A\}.\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место включение

$$A^1(M)\subseteq M'+A. \tag{4}$$

Докажем далее, что, если выполнено (1) или (2), то имеет место

$$M'+\left\{\mu_0^k\right\}\cdot L_1^0(\mu_0)\subseteq A^{(1)}(M), \tag{5}$$

в частности,

$$M'\subseteq A^{(1)}(M). \tag{6}$$

Действительно, рассмотрим л.-а. функцию μ, $\mu\in M'+\{\mu_0^k\}\cdot L_1^0(\mu_0)$. Тогда найдутся многочлен $u(\mu_0)$ степени, меньшей k, и ряд $r(\mu_0)$, $r(\mu_0)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\mu_0^i$, такие, что

$$\mu=u(\mu_0)+\mu_0^k r(\mu_0).$$

Л.-а. функции

$$u(\mu_0)+\mu_0^k u_0^{2^\tau}(\mu_0)\sum_{i=0}^{2^\tau-1} a_i\mu_0^i \quad \text{и} \quad u(\mu_0)+\mu_0^k\frac{u_0^{2^\tau}(\mu_0)\sum\limits_{i=0}^{2^\tau-1} a_i\mu_0^i}{1+(\mu_0u_0(\mu_0))^{2^{\tau+k}}}$$

при любом натуральном τ содержатся соответственно в $M'+P_1^0(\mu_0,k,u_0)$ и $M'+Q_1^0(\mu_0,k,u_0)$ и являются τ-эквивалентными функции μ. Таким образом, включение (5) доказано.

Используя соотношение (5), нетрудно показать, что все элементы множества A содержатся в $A^1(M)$. Из включений $A\subseteq A^1(M)$, (6) и (4) вытекает доказываемое равенство (3). Лемма 2 доказана.

Далее будет получен критерий представимости л.-а. функции рядом из $R_2(\mu_0)$. Точнее, будет найден алгоритм, проверяющий, найдется ли в $R_2(\mu_0)$ ряд, сумма которого равна заданной л.-а. функции.

Рассмотрим две л.-а. функции μ_1 и μ_2 из $\{\xi\}L_1^0(\xi)$. Тогда формально определены поля отношений многочленов $E_2(\mu_i)$, $\quad i=1,2$. Поле $E_2(\mu_i)$ содержит подкольцо $L_1^0(\mu_i)$. Обозначим через $E_2(\mu_1,\mu_2)$ поле, получаемое расширением поля E_2 элементами μ_1 и μ_2 (см. [2]). По теореме Люрота [2] в $E_2(\xi)$ найдется дробь μ такая, что

$$E_2(\mu_1,\mu_2)=E_2(\mu). \tag{7}$$

Как было показано в [5], μ, удовлетворяющее равенству (7), может быть выбрано из $\{\xi\}L_1^0(\xi)$. Сначала получим следующий результат.

Л е м м а 3. *Пусть для каждого* μ_i, $\mu_i\in L_1^0(\xi)$, $\quad i=1,2$, *выполнено включение*

$$\mu_i\in R_2(\mu_0). \tag{8}$$

Тогда для μ, $\mu\in\{\xi\}L_1^0(\xi)$, *удовлетворяющего* (7), *имеет место*

$$\mu\in R_2(\mu_0). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены соотношения (8), $i=1,2$, (7) и $\mu\in\{\xi\}L_1^0(\xi)$. Тогда для некоторых рядов $r_i(\mu_0)$, $r_i(\mu_0)\in R_2(\mu_0)$, $\quad i=1,2$, и некоторых многочленов двух переменных $u_i(x,y)$, $u_i(x,y)\in E_2[x,y]$, $\quad i=1,2$ справедливы равенства:

$$\mu_i=r_i(\mu_0),\quad i=1,2, \tag{10}$$

$$\mu=\frac{u_1(\mu_1,\mu_2)}{u_2(\mu_1,\mu_2)}. \tag{11}$$

Последнее равенство нужно воспринимать как формальное соотношение, выполняющееся в поле $E_2(\xi)$.

Ввиду равенства (11) и равенств (10) в $\{1\}+\{\mu_0\}R_2(\mu_0)$ найдутся ряды $r_i'(\mu_0)$, $\quad i=1,2,\quad$ и найдется целое число k такие, что

$$\mu=\mu_0^k\frac{r_1'(\mu_0)}{r_2'(\mu_0)}.$$

Дробь $\frac{r_1'(\mu_0)}{r_2'(\mu_0)}$ соответствует некоторому ряду r' из $\{1\}+\{\mu_0\}R_2(\mu_0)$. Отсюда следует, что k — положительное число, а также включение (9).

Лемма 3 доказана.

Множество $R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)$ состоит из всех одноместных л.-а. функций сохраняющих нулевую последовательность, каждый из которых равен сумме какого-нибудь ряда из $R_2(\mu_0)$. Таким образом,

$$R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)=\{\mu\mid \mu\in L_1^0(\xi),\ \text{найдется } r(\mu_0)\in R_2(\mu_0),\ \text{что } \mu=r(\mu_0)\}.$$

Последняя лемма позволяет описать структуру $R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)$.

Л е м м а 4. *Для каждого* μ_0, $\mu_0\in\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big)\setminus\{0\}$ *найдется* μ, $\mu\in\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big)\setminus\{0\}$, *такое, что*

$$R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)=L_1^0(\mu). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как принято, степенью несократимой дроби μ', $\mu'\in L_1^0(\xi)$, называется максимум из степеней числителя и знаменателя. Степень дроби μ' будем обозначать $\deg\mu'$.

Заметим сначала, что множество $\big(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\big)\setminus\{0\}$ содержит элемент из $\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big)\setminus\{0\}$. Пусть μ_1 — такой элемент, имеющий наименьшую степень.

Нетрудно видеть, что $L_1^0(\mu_1)\subseteq R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)$. Пусть $R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\neq L_1^0(\mu_1)$. Тогда найдется μ_2, $\mu_2\in\big(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\big)\setminus L_1^0(\mu_1)$, что $\mu_2\in\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big)\setminus\{0\}$.

Тогда по лемме 3 л.-а. функция μ, $\mu\in\{\xi\}L_1^0(\xi)$, удовлетворяющая соотношению (7), содержится в $R_2(\mu_0)$, т. е. $L_1^0(\mu)\subseteq R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)$. Поле $E_2(\xi)$ является алгебраическим расширением поля $E_2(\mu_1)$ степени $\deg\mu_1$ (см. [2, теорема на стр. 258]). Так как μ_2 не содержится в поле $E_2(\mu_1)$, то поле $E_2(\xi)$ — алгебраическое расширение поля $E_2(\mu_1,\mu_2)$ степени меньшей, чем $\deg\mu_1$. Отсюда и последней из упоминавшихся выше теорем, вытекает неравенство $\deg\mu<\deg\mu_1$. Получили противоречие с предположением о минимальности степени μ_1, поэтому доказано равенство

$$R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)=L_1^0(\mu_1),$$

а, вместе с ним, и лемма 4.

Теперь можно уточнить структуру A^1-замкнутых классов.

Т е о р е м а 1. *Для любого* M,

$$M\subseteq L_1^0(\xi),\quad M\setminus E_2\neq\varnothing, \tag{13}$$

найдется μ, $\mu\in\{\xi\}L_1^0$, $\mu\neq 0$, *найдется целое неотрицательное число* k *и найдется множество многочленов* M', $M'\subset E_2[\mu]$, *степень каждого из которых меньше* k, *такие, что выполнено равенство*

$$A^1(M)=M'+\mu^kL_1^0(\mu). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для некоторого множества M выполнены соотношения (13). Тогда по леммам 2 и 4 в множестве $\{\xi\}L_1^0$ найдутся ненулевые элементы μ_0 и μ, а также найдется целое неотрицательное число k такие, что для некоторого конечного множества многочленов M', $M'\subset E_2[\mu_0]$ степени меньшей k выполнено равенство

$$A^1(M)=M'+\mu_0^kL_1^0(\mu), \tag{15}$$

причем $\mu_0\in L_1^0(\mu)$.

Тогда, для некоторого натурального числа s и некоторого $\mu_1(\xi)$, $\mu_1(\xi)\in\{1\}+\{\xi\}L_1^0(\xi)$, выполнено $\mu_0=\mu^s\mu_1(\mu)$. Поэтому $\mu_0^kL_1^0(\mu)=\mu^{ks}L_1^0(\mu)$ и из равенства (15) получаем

$$A^1(M)=M'+\mu^{ks}L_1^0(\mu). \tag{16}$$

Далее, найдется множество M'' многочленов из $E_2[\mu]$, степень каждого из которых меньше ks, такое, что

$$M'\subset M''+\mu^{ks}L_1^0(\mu).$$

Отсюда и из (16) получаем

$$M=M''+\mu^{ks}L_1^0(\mu).$$

Теорема доказана.

Далее будет получено необходимое и достаточное условие того, что л.-а. функция μ удовлетворяет соотношению (12).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mu_0 \in \big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$. *Для л.-а. функции* μ, $\mu \in \big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$, *соотношение* (12) *выполнено в точности тогда, когда* μ — *дробь минимальной степени такая, что выполнены следующие два свойства:*

1. $\mu_0 \in L_1^0(\mu)$,

2. *если представить* μ_0 *в виде* $\frac{u(\mu)}{v(\mu)}$, *где* $u(\xi)$ *и* $v(\xi)$ — *элементы* $E_2[\xi]$, *то* $u(\xi) \in \{\xi\} + \{\xi^2\}E_2[\xi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что для л.-а. функций μ и μ_0 выполнено равенство (12). Так как $\mu_0 \in R_2(\mu_0) \cap L_1^0(\xi)$, справедливо первое из указанных в формулировке теоремы свойств. Поэтому найдутся многочлены $u(\xi)$ и $v(\xi)$ из $E_2[\xi]$ такие, что дробь $\frac{u(\xi)}{v(\xi)}$ несократима и $\mu_0 = \frac{u(\mu)}{v(\mu)}$. Так как $\mu_0 \in \{\xi\}L_1^0(\xi)$ и $\mu \in \{\xi\}L_1^0(\xi)$, то $u(\mu) \in \{\mu\}E_2[\mu]$. Если коэффициент при ξ в многочлене $u(\xi)$ равен нулю, то для некоторых чисел a_i, $a_i \in E_2$, $i = 2, 3, \dots$, л.-а. функция μ_0 равна сумме ряда $\sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i\mu^i$. Отсюда следует: если сумма некоторого ряда $r(\mu_0)$, $r(\mu_0) \in R_2(\mu_0)$ равна μ', $\mu' \in L_1^0(\xi)$, то μ' является также суммой некоторого ряда $r(\mu)$ из $R_2(\mu)$, причем $r(\mu) = \sum\limits_{i=2}^{\infty} b_i\mu^i$ для некоторых чисел b_i из E_2. В частности, $\mu = \sum\limits_{i=2}^{\infty} c_i\mu^i$, $c_i \in E_2$, $i = 2, 3, \dots$, что противоречит единственности представления л.-а. функции суммой ряда из $R_2(\mu)$. Таким образом, $u \in \{\xi\} + \{\xi^2\}E_2[\xi]$.

Если дробь μ', $\mu' \in \big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$, такова, что $\mu_0 = \frac{u'(\mu')}{v'(\mu')}$ и $u'(\xi) \in \{\xi\} + \{\xi^2\}L_1^0(\xi)$, то

$$L_1^0(\mu') \subseteq R_2(\mu_0) \cap L_1^0(\xi) = L_1^0(\mu),$$

откуда $E_2(\mu') \subset E_2(\prime)$ и (см. [2]) $\deg \mu'(\xi) \geqslant \deg \mu(\xi)$. Таким образом, μ имеет минимальную степень среди всех дробей из $\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$, со свойствами 1, 2. Необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Пусть для некоторых л.-а. функций μ и μ_0 из множества $\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$ выполнены указанные в теореме свойства. Тогда найдутся числа a_i, $a_i \in E_2$, $i = 2, 3, \dots$, такие, что

$$\mu_0 = \mu + \mu^2 \sum_{i=2}^{\infty} a_i\mu^{i-2}.$$

Тогда найдутся числа b_i, $i = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\mu_0)^i.$$

Поэтому

$$L_1^0(\mu') \subseteq R_2(\mu_0) \cap L_1^0(\xi).$$

С другой стороны, по лемме 4, для некоторого μ из множества $\big(\{\xi\}L_1^0(\xi)\big) \setminus \{0\}$ имеет место равенство $R_2(\mu_0) \cap L_1^0(\xi) = L_1^0(\mu')$, т. е.

$$L_1^0(\mu) \subseteq L_1^0(\mu'). \tag{17}$$

При этом μ' обладает свойствами 1, 2 из условия леммы, а, следовательно, по выбору μ: $\deg \mu' \leqslant \mu$. Отсюда и из (17) получаем равенство

$$L_1^0(\mu) = L_1^0(\mu').$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема совместно с леммой 2 позволяют получить конечную процедуру проверки A^1-выразимости через конечные множества л.-а. функций из L_1^0.

Теорема 3. *Существует алгоритм, проверяющий по данным μ' и M, $\mu' \in L_1^0$, $M \subset L_1^0(\xi)$, $|M| < \infty$, справедливость соотношения*

$$\mu' \in A^1(M). \tag{18}$$

Доказательство. Если $M \subseteq E_2$, то алгоритм проверки соотношения (18) тривиален. В противном случае найдутся натуральное k и ненулевая л.-а. функция μ_0 из $\{\xi\}L_1^0(\xi)$ такие, что для некоторого множества многочленов M', $M' \subseteq E_2[\mu_0]$, степень каждого из которых не более k, справедливо равенство (3). Сначала найдем число k и л.-а. функцию μ_0. Это делается так, как показано в [5].

Далее проверим включение

$$\mu' \in R_2(\mu_0) \cap L_1^0(\xi). \tag{19}$$

По лемме 2, справедливость этого включения является необходимым условием A^1-выразимости л.-а. функции μ' через множество M. Для этого перечислим все ненулевые л.-а. функции μ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, из $\{\xi\}L_1^0(\xi)$, степени которых не превосходят $\deg \mu_0$ таким образом, что $\deg \mu_i \leqslant \deg \mu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Далее, найдем минимальное i_0, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, s\}$, такое, что

$$\mu_0 \in L_1^0(\mu_{i_0}) \tag{20}$$

и, если представить μ_0 в виде несократимой дроби $\frac{u(\mu_{i_0})}{v(\mu_{i_0})}$, где $u(\xi)$ и $v(\xi)$ — элементы $E_2[\xi]$, то $u(\xi) \in \{\xi\} + \{\xi^2\}E_2[\xi]$. Для этого используем алгоритмы, описанные в [5]. Как уже говорилось выше, такое число i_0 найдется. Используя опять же алгоритмы из [5], проверяем включение $\mu' \in L_1^0(\mu_{i_0})$. Если это включение не выполнено, то по теореме 1 и лемме 2 включение (19) не имеет места.

В противном случае $\mu' \in R_2(\mu_0)$. Тогда для целого неотрицательного числа k_1, $k_1 = k\dfrac{\deg \mu_0}{\deg \mu_{i_0}}$, выполнены включения

$$\{\mu_{i_0}^{k_1}\}L_1^0(\mu_{i_0}) \subseteq A^1(M) \subseteq L_1^0(\mu_{i_0}).$$

Для сокращения дальнейших построений нам понадобится одно вспомогательное понятие. Пусть $\mu \in L_1^0(\mu_{i_0})$. Тогда найдется такой многочлен $u_0(\xi)$ степени меньшей k_1, что $\mu + u_0(\mu_0) \in \{\mu_{i_0}^{k_1}\}\, L_1^0(\mu_{i_0})$. Многочлен $u_0(\xi)$ называется *проекцией дроби μ на множество многочленов степени меньшей k_1*. Таким образом,

$$A^1(M) = M' + \{\mu_{i_0}^{k_1}\}\, L_1^0(\mu_{i_0}),$$

где M' представляет собой множество проекций всех дробей из $A^1(M)$ на множество многочленов степени меньшей k_1. Множество M' содержится в множестве многочленов степени меньшей k_1, а поэтому может быть построено за конечное число шагов из элементов множества M. Теперь остается только спроектировать μ' на множество многочленов степени меньшей k_1 и проверить, принадлежит ли проекция p множеству M'. Соотношение $\mu' \in A^1(M)$ имеет место в точности тогда, когда $p \in M'$.

Теорема 3 доказана.

Приведем пример, поясняющий результаты этого параграфа.

Рассмотрим л.-а. функции μ_i, $i=1,2$,

$$\mu_1 = \xi^2+\xi^3+\xi^6+\xi^7+\xi^9+\xi^{14}+\xi^{16}+\xi^{18},$$
$$\mu_2 = \xi^4+\xi^7+\xi^8+\xi^9+\xi^{16}+\xi^{18}+\xi^{19}+\xi^{24}+\xi^{26}+\xi^{27}$$

и проверим, содержится ли л.-а. функция μ', $\mu' = \dfrac{1}{1+\xi^2+\xi^3}$, в множестве $A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right)$.

Для этого обозначим л.-а. функцию $\xi^2+\xi^3+\xi^4+\xi^7+\xi^8+\xi^9$ через μ_0. Путем подстановки упомянутого многочлена от ξ вместо л.-а. функции μ_0 нетрудно проверить справедливость равенств

$$\mu_1 = \mu_0+\mu_0^2, \quad \mu_2 = \mu_0^2+\mu_0^3.$$

Отсюда и из формального равенства $\mu_0 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, выполненного в поле $E_2(\xi)$, заключаем, что

$$E_2(\mu_1,\mu_2) = E_2(\mu_0).$$

Поэтому и по лемме 2 найдется целое неотрицательное число k такое, что выполнены включения

$$\{\mu_0^k\}\left(R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi)\right) \subseteq A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right) \subseteq R_2(\mu_0)\cap L_1^0(\xi). \tag{21}$$

Следуя разобранному выше примеру, можно получить соотношение

$$\mu_0 \in A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right).$$

Отсюда и из (21) получаем

$$A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right) = A^1\left(\{\mu_0\}\right).$$

Обозначим через μ л.-а. функцию $\xi^2+\xi^3$. Нетрудно проверить равенство

$$\mu_0 = \mu+\mu^2+\mu^3,$$

и, используя теорему 2, заключить:

$$A^1\left(\{\mu_0\}\right) = L_1^0(\mu).$$

Таким образом, вопрос о вхождении л.-а. функции μ' в множество $A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right)$ равносилен справедливости включения

$$\mu' \in L_1^0(\mu).$$

Это уже можно проверить, даже не используя результатов из [5], так как

$$\mu' = \frac{1}{1+\mu}.$$

Результатом приведенных рассуждений стало доказательство включения

$$\mu' \in A^1\left(\{\mu_1,\mu_2\}\right).$$

Далее заметим, что для любого μ, $\mu\in\{\xi\}L_1^0(\xi)$, справедливо $L_1^0(\mu)\subseteq A^1\left(\{\mu\}\right)$. Л.-а. функцию μ, $\mu\in\{\xi\}L_1^0(\xi)$, будем называть *A-минимальной*, если

$$L_1^0(\mu) = A^1\left(\{\mu\}\right).$$

По теореме 1 для любого M, $M \subseteq L_1^0$, найдется A-минимальная функция μ_0, найдется целое неотрицательное число k и найдется множество M' многочленов, степень каждого из которых не превосходит k, такие, что

$$A^1(M) = M' + \{\mu_0^k\} L_1^0(\mu_0), \tag{22}$$

Л.-а. функцию μ_0, удовлетворяющую этому равенству, будем называть *A-основанием множества M*. Минимальное число k, для которого найдется M',

$$M' \subset \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} a_i \xi^i \quad \middle| \quad a_i \in E_2, i = 0, 1, \ldots, k-1 \right\},$$

удовлетворяющее равенству (22), называется *глубиной множества M по A-основанию* μ_0, а само множество M' называется *k-приближением для M*.

Заметим, что A-основание множества л.-а. функций M вообще говоря не единственно. Так для множества всех л.-а. функций A-основанием является как задержка ξ, так и функция μ', $\mu' = \dfrac{\xi}{1+\xi}$. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\xi = \text{Об}_{x_2}(\mu', \mu').$$

Поэтому $L_1^0(\xi) = L_1^0(\mu')$ и $A^1\{\xi\} = L_1^0(\xi) = L_1^0(\mu') = A^1(\mu')$. Последнее соотношение доказывает, что л.-а. функции ξ и μ' являются A-основаниями множества $L_1^0(\xi)$ всех одноместных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность.

Множество всех A-оснований множества M обозначается $B(M)$. Если $\mu_0 \in B(M)$, то глубину множества M по A-основанию μ_0 обозначим $G(M, \mu_0)$, а $G(M, \mu_0)$-приближение для M обозначим $P(M, \mu_0)$, так как оно однозначно определяется по паре M и μ_0.

Нетрудно видеть, что множество $\{\mu_0^k\} L_1^0(\mu_0)$ A^1-порождается системой $\left\{\mu_0^k, \mu_0^{k+1}, \ldots, \mu_0^{2k-1}\right\}$, т. е. имеет место равенство

$$A^1\left\{\mu_0^k, \mu_0^{k+1}, \ldots, \mu_0^{2k-1}\right\} = \{\mu_0^k\} L_1^0(\mu_0).$$

Отсюда и из равенства (22) вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Любое A^1-замкнутое множество M, $M \subseteq L_1^0$ является конечнопорожденным. Поэтому число A^1-замкнутых множеств в L_1^0 счетно.*

§ 2. A-выразимость через множества линйно-автоматных функций с существенной функцией, замыкания которых содержат все константы

В настоящем параграфе мы рассмотрим проблему A-выразимости (аппроксимационной выразимости) в классе L всех л.-а. функций [5] через множества, на которые накладываются некоторые ограничения.

Как и в [5], л.-а. функцию, все переменные которой фиктивны, назовем константой, а множество, состоящее из всех констант, обозначим L_c.

Сумматор с n входами обозначим через $F_+^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В [5] показано, что для любой л.-а. функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ найдутся одноместные функции $\mu_i(x)$, $\mu_i \in L_1^0(\xi)$, и константа μ_0, $\mu_0 \in L_c$, такие, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_+^{(n+1)}(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n), \mu_0). \tag{23}$$

В соответствии с [5] л.-а. функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет нулевую последовательность 0^∞, $0^\infty = 0, 0, \ldots, 0, \ldots$, если $f(0^\infty, 0^\infty, \ldots, 0^\infty) = 0^\infty$.

Множество всех таких л.-а. функций будем обозначать, как уже повелось, через L^0. В [5] на множестве L всех л.-а. функций рассматривался оператор замыкания K по операциям композиции (суперпозиции и обратной связи) и оператор замыкания A [3]. Как показано ранее, множество L^0 является K-замкнутым классом в L, а также A-замкнутым классом в L, т. е.

$$L^0 = K(L^0) \quad \text{и} \quad L^0 = A(L^0).$$

K-базисом, а также A-базисом в L является, например, множество $\{\xi_1(x),\ \ F_+^{(2)}(x_1,x_2)\}$, состоящее из задержки с начальным состоянием 1 и сумматора с двумя входами. K-базис и A-базис в L^0 составляет, например, задержка ξ с начальным состоянием 0 и тот же сумматор. Таким образом,

$$L = K\left(\left\{\xi_1(x), F_+^{(2)}(x_1,x_2)\right\}\right) = A\left(\left\{\xi_1(x), F_+^{(2)}(x_1,x_2)\right\}\right),$$
$$L^0 = K\left(\left\{\xi(x), F_+^{(2)}(x_1,x_2)\right\}\right) = A\left(\left\{\xi(x), F_+^{(2)}(x_1,x_2)\right\}\right).$$

Напомним, что переменная x_i л.-а. функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, удовлетворяющей соотношению (23), называется *непосредственной* [5], если $\mu_i \in \{1\} + \{\xi\}L_1^0(\xi)$. Л.-а. функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *существенной*, если среди ее переменных есть не менее двух непосредственных. В [5] рассмотрен замкнутый класс V_1, состоящий из всех л.-а. функций, не являющихся существенными. Там же показано, что V_1 — A-предполный класс в L.

В настоящем параграфе рассмотрим задачу об A-выразимости через подмножества L, не содержащиеся в V_1, (т. е. через системы л.-а. функций, содержащие существенную функцию), и A-замыкания которых содержат L_c.

Множество M, $M \subseteq L$, называется S-системой, если $M \setminus V_1 \neq \varnothing$ и $L_c \subset A(M)$.

Л е м м а 1. *Для множества M, $M \subseteq L$, соотношение*

$$M \setminus V_1 \neq \varnothing \tag{24}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$F_+^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \in A(M). \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено включение (25). Так как

$$F_+^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \notin V_1,$$

ввиду A-замкнутости V_1, справедливо (24). Достаточность условия (25) для (24) доказана. Далее докажем его необходимость.

Пусть имеет место (24). Тогда найдется $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $f(x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n) \in M \setminus V_1$. Не ограничивая общность рассуждений, будем считать, что переменные x_1 и x_2 функции f являются непосредственными. Пусть (23) — разложение f в сумму одноместных л.-а. функций. Обозначим функции $f(x_1,x,x,\ldots,x)$ и $f(x,x_2,x,x,\ldots,x)$ через $f_1(x_1,x)$ и $f_2(x_2,x)$ соответственно. Тогда для функций $G_i(x_i,x)$,

$$G_i(x_i,x) = \underbrace{f_i(f_i(\ldots f_i(}_{2^k-1 \text{ символов } f_i} x_i,x),\ldots,x),x), \quad i=1,2,$$

надутся л.-а. функции $\eta_i(x)$, $\eta_i(x) \in L_1^0(x)$, $i=1,2$, и константы $\mu^{(i)}$, $i=1,2$, что

$$G_i(x_i,x) = F_+^{(3)}\left(\mu_i^{2^k-1}(x_i), \eta_i(x), \mu^{(i)}\right), \quad i=1,2.$$

Тогда для некоторых $G(x)$, $G(x) \in L_1^0(x)$, и γ, $\gamma \in L_c$, функция $H(x_1, x_2, x)$,

$$H(x_1, x_2, x) = f\left(G_1(x_1, x), G_2(x_2, x), x, x, \dots\right),$$

совпадает с $F_+^{(4)}\left(\mu_1^{2^k}(x_1), \mu_2^{2^k}(x_2), G(x), \gamma\right)$. Как нетрудно видеть, $\mu_i^{2^k}(x) \in \{1\} + \left\{\xi^{2^k}\right\} L_1^0(\xi)$. Поэтому л.-а. функции $H(x_1, x_2, x)$ и $F_+^{(4)}(x_1, x_2, G(x), \gamma)$ являются 2^k-эквивалентными. Отсюда вытекает, что 2^k-эквивалентны функции $H(x_1, H(x_2, x_3, x_3), x_3)$ и $F_+^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$. Таким образом, соотношение (25), а вместе с ним и лемма 1, доказаны.

Пусть для л.-а. функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет место равенство (23). Как и в [5] через $U(f)$ обозначим множество

$$\{\mu_i \quad | \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

содержащееся в L_1^0, а для M, $M \subseteq L$, через $U(M)$ обозначим

$$\bigcup_{f \in M} U(f).$$

Множество $U(M)$ называется *U-основанием множества M*.

Если для л.-а. функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет место разложение (23), то, как и в [6], через $C(f)$ обозначим множество $\{\mu_0\}$, состоящее из одной константы μ_0. Для M, $M \subseteq L$, через $C(M)$ обозначим

$$\bigcup_{f \in M} C(f).$$

Множество $C(M)$ называется *C-основанием множества M*.

Множество всех л.-а. функций из L, имеющих нечетное число непосредственных входов, обозначим V_{H}. Заметим, что любая S-система не содержится в V_{H}, так как V_{H} является A-замкнутым классом, а никакая константа в нем не содержится.

Поэтому, если S-система M такова, что $U(M) \subseteq E_2$ (такие S-системы будем называть *вырожденными*), то, как нетрудно видеть, выполнено:

$$A(M) = \left\{\gamma, F_+^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma) | n = 1, 2, \dots, \gamma \in L_c\right\}.$$

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что

$$U(M) \setminus E_2 \neq \varnothing, \tag{26}$$

т. е. будем рассматривать невырожденные S-системы.

Теперь исследуем, какими могут быть U-основания и C-основания A-замкнутых невырожденных S-систем.

Лемма 2. *Если множество M, $M \subseteq L$, не содержится в V_1, то*

$$U(A(M)) = A^1(U(M)). \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $M \subseteq L$ и $M \nsubseteq V_1$. Сначала докажем включение

$$U(A(M)) \subseteq A^1(U(M)). \tag{28}$$

Пусть $f \in A(M)$. Тогда для каждого натурального числа τ из л.-а. функций множества M с использованием операций суперпозиции можно построить функцию f_τ, которая τ-эквивалентна функции f. Отсюда, для любого μ, $\mu \in U(f)$, и любого натурального τ найдется л.-а. функция μ_τ, $\mu_\tau \in U(f_\tau)$,

τ-эквивалентная μ, причем, как следует из [5], $\mu_\tau \in K_c^1(U(M))$. Поэтому $\mu \in A^1(U(M))$ и включение (28) доказано.

Теперь докажем, что

$$A^1(U(M)) \subseteq U(A(M)). \tag{29}$$

Пусть $\mu \in A^1(U(M))$. Тогда для любого натурального τ в $K_c^1(U(M))$ найдется л.-а. функция μ_τ, которая является τ-эквивалентной μ. Обозначим через $K_c(M)$ множество всех л.-а. функций, получаемых с использованием операций суперпозиции из элементов множества M. Нетрудно видеть, что, если μ' и μ'' содержатся в $U(K_c(M))$, то $\mu'\mu''$ содержится в $U(K_c(M))$. Кроме того, учитывая лемму 1, если $\mu' \in U\left(f'\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$ и $\mu'' \in U(f''\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}\right))$, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что найдутся л.-а. функции $g'\left(x_2, x_3 \ldots, x_n\right)$ и $g''\left(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{n+k}\right)$ такие, что

$$f'\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = F_+^{(2)}\left(\mu'(x_1), g'\left(x_2, x_2, \ldots, x_n\right)\right),$$
$$f''\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}\right) = F_+^{(2)}\left(\mu''(x_{n+1}), g'\left(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{n+k}\right)\right).$$

Тогда для некоторого ν, $\nu \in L_1$, имеет место равенство

$$F^{(3)}\left(f'\left(x', x, x, \ldots, x\right), f''\left(x', x, x, \ldots, x\right), x\right) = F_+^{(2)}\left(\left(\mu' + \mu''\right)\left(x'\right), \nu(x)\right),$$

т. е. $\mu' + \mu'' \in U(K_c(M))$. Следовательно,

$$K_c^1(U(M)) \subseteq U(K_c(M)).$$

Теперь вернемся к рассмотренным выше функциям μ_τ. Выше доказано, что для любого натурального τ выполнено $\mu_\tau \in U(K_c(M))$. Поэтому для каждого натурального τ найдется л.-а. функция $f_\tau(x_{1,\tau}, x_{2,\tau}, \ldots, x_{n_\tau,\tau})$ такая, что для некоторой $g_\tau(x_{2,\tau}, x_{3,\tau}, \ldots, x_{n_\tau,\tau})$ выполнено равенство

$$f_\tau(x_{1,\tau}, x_{2,\tau}, \ldots, x_{n_\tau,\tau}) = F_+^{(2)}(\mu_\tau(x_{1,\tau}), g_\tau(x_{2,\tau}, x_{3,\tau}, \ldots, x_{n_\tau,\tau})).$$

Теперь рассмотрим функции $G_\tau\left(x_1, x_2, x\right)$,

$$G_\tau\left(x_1, x_2, x\right) = F_+^{(3)}\left(f_\tau\left(x_1, x, x, \ldots x\right), f_\tau\left(x_2, x, x, \ldots x\right), x\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$G_\tau\left(x_1, x_2, x\right) = F_+^{(3)}\left(\mu_\tau\left(x_1\right), \mu_\tau\left(x_2\right), x\right).$$

Поэтому

$$F_+^{(3)}\left(\mu\left(x_1\right), \mu\left(x_2\right), x\right) \in A(M),$$

Откуда, $\mu \in U(A(M))$. Включение (29), а вместе с ним и лемма доказаны.

Л е м м а 3. *Пусть M является S-системой. Тогда*

$$A^1(U(M)) \subseteq A(M). \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in A^1(U(M))$. Тогда по лемме 2 выполнено: $\mu \in U(A(M))$, т. е. найдется натуральное число n и найдется л.-а.

функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\mu \in U(g)$. По условию леммы, $0^\infty \in A(M)$ и $F_+^{(3)} \in A(M)$. Обозначим константу $g(0^\infty, \ldots, 0^\infty)$ через γ. Имеем

$$\gamma \in A(M),$$

и для некоторого i, $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, выполнено:

$$g\left(\underbrace{0^\infty, \ldots, 0^\infty}_{i-1 \text{ символов } 0}, x, 0^\infty, \ldots, 0^\infty\right) = F_+^{(2)}\left(\mu(x), \gamma\right)$$

принадлежит $A(M)$. Отсюда,

$$F_+^{(3)}\left(F_+^{(2)}\left(\mu\left(x\right), \gamma\right), \gamma, 0^\infty\right) = \mu(x)$$

принадлежит $A(M)$. Поэтому доказано включение (30). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть M является S-системой. Тогда включение $f \in A(M)$ выполнено в точности тогда, когда*

$$U(f) \subseteq A^1(U(M)). \tag{31}$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы вытекает из леммы 2. Докажем достаточность. Пусть M является S-системой, $f \in L$ и выполнено (31).

По определению S-системы, $0^\infty \in A(M)$, а по лемме 1, $F_+^{(3)} \in A(M)$.

Используя л.-а. функции $F_+^{(3)}$, 0^∞ и операцию подстановки, можно получить сумматор с $n+1$ входом $F_+^{(n+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Из определения S-системы следует $\mu_0 \in A(M)$, а с учетом леммы 3, $\mu_i \in A(M)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому,

$$F_+^{(n+1)}\left(\mu_1(x_1), \mu(x_2), \ldots, \mu(x_n), \mu_0\right) \in A(M),$$

т. е. $f \in A(M)$. Достаточность утверждения теоремы, а с ним и сама теорема, доказаны.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Задача A-выразимости через конечные S-системы алгоритмически разрешима.*

§ 3. A-выразимость всех констант через множества линейно-автоматных функций, содержащие существенную функцию

В настоящем параграфе предложен алгоритм проверки, является ли данное конечное множество M, $M \subset L$, S-системой. Учитывая теорему 2 из предыдущего параграфа, A-выразимость через заданное конечное множество л.-а. функций может быть проверена в два этапа. На первом этапе проверяем, является ли исследуемое множество S-системой, и, в случае положительного решения, определяем A-выразимость данной л.-а. функции через эту систему. К сожалению, если после первого этапа на вопрос, является ли M S-системой, будет получен отрицательный ответ, то вопрос об A-выразимости через такую систему может остаться открытым.

Пусть $r \in N$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ и для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет место разложение (23). Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает r-свойством в точности если для любого i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено соотношение $\mu_i(\xi) + \mu_i(0) \in \in \{\xi^r\} \cdot L_1^0$. Таким образом, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает r-свойством тогда и только тогда, когда найдутся натуральные числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, и найдется константа γ, $\gamma \in L_c$, такие, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $F_+^{(k+1)}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ являются r-эквивалентными.

Множество всех л.-а. функций, обладающих r-свойством, обозначим S_r. Нетрудно видеть, что для любого множества л.-а. функций M, $U(M) \setminus E_2 \neq \varnothing$, найдется натуральное число r_0 такое, что $M \subseteq S_{r_0}$, но $M \nsubseteq S_{r_0+1}$. Такое число r_0 называется *1-глубиной множества M*.

Пусть $r \in N$. Определим отображение σ_r, $\sigma_r : S_r \to E_2^{r+1}$ следующим образом. Пусть $f \in S_r$ и для f имеет место (23). Для некоторых чисел a_t, $a_t \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots, r-1$, и константы μ_0', $\mu_0' \in L_c$, справедливо равенство

$$\mu_0 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{r-1}\xi^{r-1} + \xi^r\mu_0'.$$

Определим число b:

$$b = \begin{cases} 1, & \text{если число непосредственных входов функции } f \text{ четно;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь положим

$$\sigma_r(f) = (b, a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}).$$

Если $M \subseteq S_r$, то, как принято, через $\sigma_r(M)$ обозначается множество $\{\sigma_r(f) \mid f \in M\}$. Множество векторов E_2^{r+1} будем рассматривать вместе с операцией «+» покомпонентного сложения по модулю 2. Если $M \subseteq E_2^{r+1}$, то замыкание множества M по операции сложения обозначим $S(M)$.

Лемма. *Пусть $M \subseteq S_r$ и M содержит существенную функцию. Тогда*

$$\sigma_r(A(M)) = S(\sigma_r(M)).$$

Доказательство. Сначала докажем включение

$$S(\sigma_r(M)) \subseteq \sigma_r(A(M)). \tag{32}$$

Ввиду справедливости соотношения

$$\sigma_r(M) \subseteq \sigma_r(A(M))$$

достаточно показать, что из

$$\bar{a} \in \sigma_r(A(M)) \quad \text{и} \quad \bar{b} \in \sigma_r(A(M))$$

вытекает

$$\bar{a} + \bar{b} \in \sigma_r(A(M)). \tag{33}$$

Действительно, пусть включения (33) имеют место. Тогда в $A(M)$ найдутся л.-а. функции f и g, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g = g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k})$, такие, что $\bar{a} = \sigma_r(f)$ и $\bar{b} = \sigma_r(g)$. По лемме 1 из предыдущего параграфа имеем $F_+^{(3)} \in A(M)$. Поэтому функция $h(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+k})$,

$$h(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) = F_+^{(3)}(x, f(x_1, x_2, \ldots, x_n), g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k})),$$

содержится в $A(M)$.

Нетрудно видеть, что $\sigma_k(h) = \bar{a} + \bar{b}$. Поэтому (33), а, вместе с ним, (32) доказано.

Теперь докажем соотношение

$$\sigma_r(A(M)) \subseteq S(\sigma_r(M)). \tag{34}$$

Если $M \subseteq L$, то через $S(M)$ обозначается замыкание множества M по операциям суперпозиции. Из определения A-замыкания следует, что

$$S(M) \subseteq A(M). \tag{35}$$

С другой стороны, для любой функции f, $f \in A(M)$, найдется функция f_r, $f_r \in S(M)$, такая, что f и f_r являются r-эквивалентными. Поэтому $f_r \in S_r$ и $\sigma_r(f) = \sigma_r(f_r)$. Отсюда и из (35) получаем $\sigma_r(S(M)) = \sigma_r(A(M))$. Таким образом, (34) будет доказано, если установить справедливость соотношения

$$\sigma_r(S(M)) \subseteq S(\sigma_r(M)). \tag{36}$$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S(M)$ и $g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}) \in S(M)$.

Если функция h получена из f с использованием операции переименования переменных или отождествления переменных, то $\sigma_r(h) = \sigma_r(f)$. Если h получена подстановкой f вместо непосредственной переменной функции g, то $\sigma_r(h) = \sigma_r(f) + \sigma_r(g)$. Если h получена подстановкой f вместо переменной функции g, не являющейся непосредственной, то $\sigma_r(h) = \sigma_r(g)$. Следовательно, если $\sigma_r(f) \in S(\sigma_r(M))$ и $\sigma_r(g) \in S(\sigma_r(M))$, то $\sigma_r(h) \in S(\sigma_r(M))$. Включение (36) получаем теперь ввиду $\sigma_r(M) \subseteq S(\sigma_r(M))$. Лемма доказана.

Следующая теорема сводит вопрос об A-выразимости всех констант через некоторое множество л.-а. функций (с ограничениями) к проверке полноты некоторой системы векторов в конечномерном векторном пространстве.

Т е о р е м а 1. *Пусть $M \subseteq L$, M содержит существенную функцию и $U(M) \nsubseteq E_2$. Множество $A(M)$ содержит все константы* (*т. е.* $L_c \subseteq A(M)$) *в точности тогда, когда $S(\sigma_{r_0}(M)) = E_2^{r_0+1}$, где через r_0 обозначена 1-глубина множества M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $M \subseteq L$, M содержит существенную функцию, $U(M) \nsubseteq E_2$, $L_c \subseteq A(M)$ и M имеет 1-глубину r_0.

Учитывая лемму, требуется доказать равенство

$$\sigma_{r_0}(A(M)) = E_2^{r_0+1}. \tag{37}$$

Для любых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}$, $a_t \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots, r_0 - 1$, найдутся константы γ и γ', $\gamma \in L_c$, $\gamma' \in L_c$, такие, что $\gamma = a_0 + a_1\xi + \ldots$ $\ldots + a_{r_0-1}\xi^{r_0-1} + \xi^{r_0}\gamma'$.

Справедливы соотношения:

$$\gamma \in A(M), \quad \sigma_{r_0}(\gamma) = (1, a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}),$$
$$F_+^{(3)}(x, 0^\infty, \gamma) \in A(M), \quad \sigma_{r_0}(F_+^{(3)}(x, 0^\infty, \gamma)) = (0, a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}).$$

Отсюда,

$$(1, a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}) \in \sigma_{r_0}(A(M)),$$
$$(0, a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}) \in \sigma_{r_0}(A(M)).$$

Равенство (37) и необходимость теоремы доказаны.

Достаточность. Пусть $M \subseteq L$, M содержит существенную функцию, $U(M) \not\subseteq E_2$, M имеет 1-глубину r_0 и

$$S(\sigma_{r_0}(M)) = E_2^{r_0+1}. \tag{38}$$

Из равенства (38) и леммы следует, что $M \not\subseteq V_{\text{H}}$. Пусть $g \in M \setminus V_{\text{H}}$. Отождествляя все переменные л.-а. функции g и применяя операцию обратной связи к единственной переменной функции $g(x, \ldots, x)$, получаем некоторую константу. Эту константу обозначим γ'.

Выберем в L_c произвольную константу γ и покажем, что $\gamma \in A(M)$.

Заметим, прежде всего, что для любых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1}$, $a_t \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots, r_0 - 1$ из (38) вытекает существование в $A(M)$ л.-а. функций $g_{0,a_0,a_1,\ldots,a_{r_0-1}}(x)$ и $g_{1,a_0,a_1,\ldots,a_{r_0-1}}(x)$, r_0-эквивалентных соответственно $F_+^{(2)}(x, \gamma'')$ и γ'', где через γ'' обозначена константа $a_0 a_1 \ldots a_{r_0-1} 00\ldots$.

Из определения 1-глубины следует, что найдется функция f, $f \in M$, такая, что для некоторого μ', $\mu' \in 1 + \{\xi\} \cdot L_1^0$, и некоторого b, $b \in E_2$, справедливо: $b + \xi^{r_0} \cdot \mu' \in U(f)$. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для f выполнено разложение (23) и $\mu_1 = b + \xi^{r_0} \cdot \mu'$. Через $f'(x)$ обозначим л.-а. функцию $f(x, \gamma', \gamma', \ldots, \gamma')$.

Для некоторой константы γ_1, $\gamma_1 \in L_c$, имеем

$$f'(x) = F_+^{(2)} \left(\left(b + \xi^{r_0} \cdot \mu' \right)(x), \gamma_1 \right).$$

Построим далее последовательность одноместных л.-а. функций $\{f_j(x)\}$ такую, что $f_j(x)$ и γ являются $j \cdot r_0$-эквивалентными.

По лемме 1 предыдущего параграфа $F_+^{(3)} \in A(M)$. Положим

$$h_{a_0 a_1 \ldots a_{r_0-1}}(x) = \begin{cases} F_+^{(3)}(f'(x), x, g_{1 a_0 a_1 \ldots a_{r_0-1}}(\gamma')), & \text{если } b = 1, \\ F_+^{(3)}(f'(x), \gamma', g_{0 a_0 a_1 \ldots a_{r_0-1}}(\gamma')), & \text{если } b = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для некоторой константы γ_2, $\gamma_2 \in L_c$, выполнено

$$h_{\gamma_1(0)+\gamma(0), \gamma_1(1)+\gamma(1), \ldots, \gamma_1(r_0-1)+\gamma(r_0-1)}(x) = \\ = F_+^{(2)} \left(\xi^{r_0} \cdot \mu'(x), \gamma(0)\gamma(1) \cdots \gamma(r_0-1)\gamma_2 \right).$$

Положим

$$f_1(x) = h_{\gamma_1(0)+\gamma(0), \gamma_1(1)+\gamma(1), \ldots, \gamma_1(r_0-1)+\gamma(r_0-1)}(x).$$

Пусть уже построена функция

$$f_j(x) = F_+^{(2)} \left(\xi^{r_0 \cdot j} \cdot \mu^{(j)}(x), \gamma(0)\gamma(1) \ldots \gamma(r_0 \cdot j - 1)\gamma_{j+1} \right),$$

причем $\mu^{(j)}(x) \in 1 + \{\xi\} \cdot L_1^0$, $\quad \gamma_{j+1} = \gamma_{j+1}(0)\gamma_{j+1}(1)\ldots$.

Найдется последовательность $\beta(0), \beta(1), \ldots, \beta(r_0 - 1)$, $\quad \beta(t) \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots, r_0 - 1$, такая, что для некоторого $\widetilde{\mu}^{(j)}$, $\widetilde{\mu}^{(j)} \in L_1^0$, выполнено:

$$\mu^{(j)} \cdot \left(\beta(0) + \beta(1)\xi + \ldots + \beta(r_0-1)\xi^{r_0-1} \right) = \\ = \gamma_{j+1}(0) + \gamma(r_0 \cdot j) + \left(\gamma_{j+1}(1) + \gamma(r_0 \cdot j + 1) \right) \xi + \ldots \\ + \left(\gamma_{j+1}(r_0-1) + \gamma(r_0 \cdot (j+1) - 1) \right) \xi^{r_0-1} + \xi^{r_0} \cdot \widetilde{\mu}^{(j)}.$$

Положим
$$f_{j+1}(x) = f_j\left(h_{\beta(0)\beta(1)\dots\beta(r_0-1)}(x)\right).$$
Тогда для некоторых $\mu^{(j+1)}(x)$ и γ_{j+2}, $\mu^{(j+1)}(x) \in 1 + \{\xi\} \cdot L_1^0$, $\gamma_{j+2} \in L_c$, выполнено:
$$f_{j+1}(x) = F_+^{(2)}\left(\xi^{r_0(j+1)} \cdot \mu^{(j+1)}(x), \gamma(0)\gamma(1)\dots\gamma((j+1)r_0 - 1)\gamma_{j+2}\right).$$

Построенная последовательность л.-а. функций $\{f_j(x)\}$ обладает требуемым свойством: $f_j(x)$ и γ являются $j \cdot r_0$-эквивалентными, следовательно, $\gamma \in A(M)$.

Достаточность утверждения теоремы и сама теорема доказаны.

Ниже приведен пример конечной S-системы.

Пусть
$$M = \left\{F_+^{(4)}\left(x_1, \xi^6 x_2, \left(1+\xi^3\right)x_3, 1+\xi^2\right), F_+^{(2)}\left(\xi^4 x_1, \xi+\xi^2\right),\right.$$
$$\left. F_+^{(2)}\left(x_1, 1+\xi+\xi^2\right), 1+\xi+\xi^2\right\}.$$

Множество M содержит существенную л.-а. функцию
$$F_+^{(4)}\left(x_1, \xi^6 x_2, \left(1+\xi^3\right)x_3, 1+\xi^2\right),$$
1-глубина которой равна 3. Имеют место следующие равенства.
$$\sigma_3\left(F_+^{(4)}\left(x_1, \xi^6 x_2, \left(1+\xi^3\right)x^3, 1+\xi^2\right)\right) = (1,1,0,1),$$
$$\sigma_3\left(F_+^{(2)}\left(\xi^4 x_1, \xi+\xi^2\right)\right) = (1,0,1,1),$$
$$\sigma_3\left(F_+^{(2)}\left(x_1, 1+\xi+\xi^2\right)\right) = (0,1,1,1),$$
$$\sigma_3\left(1+\xi+\xi^2\right) = (1,1,1,1).$$

Нетрудно видеть, что множество векторов $\{(1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$ порождает линейное пространство E_2^4 по операции сложения. Следовательно, по теореме 1, $L_c \subseteq A(M)$, и M является S-системой,

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Задача проверки, является ли конечное множество л.-а. функций S-системой, алгоритмически разрешима.*

§ 4. Достаточные условия A-выразимости

В настоящем параграфе приведены некоторые «естественные» условия на множество л.-а. функций, обеспечивающие возможность проверки A-выразимости заданных л.-а. функций через его элементы.

Будем рассматривать множества л.-а. функций, содержащие существенную функцию, A-замыкания которых содержат 0^∞. Такие множества л.-а. функций будем называть *S_0-системами.*

Л е м м а 1. *Множество M, $M \subseteq L$, является S_0-системой в точности тогда, когда $F_+^{(2)} \in A(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M, $M \subseteq L$, является S_0-системой. Тогда по лемме 1 из параграфа 2, $F_+^{(3)} \in A(M)$. По определению S_0-системы, $0^\infty \in A(M)$. Поэтому $F_+^{(2)}(x_1, x_2) = F_+^{(3)}(x_1, x_2, 0^\infty)$ принадлежит $A(M)$ и достаточность утверждения леммы доказана.

Необходимость. Пусть $F_{+}^{(2)} \in A(M)$. Тогда $M \nsubseteq V_1$ и M содержит существенную функцию. Кроме того, $0^\infty = F^{(2)}(x, x)$ принадлежит $A(M)$. Следовательно, множество M является S_0-системой.

Лемма доказана.

Сначала рассмотрим вопрос об A-выразимости через конечные вырожденные S_0-системы, т. е. S_0-системы M, удовлетворяющие соотношениям:

1. $|M| < \infty$;
2. $U(M) \subseteq E_2$.

Для множества C', $C' \subseteq L_c$, через $\Sigma(C')$ обозначим замыкание множества C' по операции сложения.

Теорема 1. *Пусть M — конечная вырожденная S_0-система и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$. Включение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A(M)$ выполнено в точности тогда, когда*

1. $U(f) \subseteq E_2$;
2. $C(f) \in \Sigma(C(M))$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим конечную вырожденную S_0-систему M. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A(M)$. Для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет место разложение (23). Если $U(f) \nsubseteq E_2$, то найдется i_0, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, такое, что $\mu_{i_0} \notin E_2$ и для некоторого натурального числа k_0 и некоторого μ', $\mu' \in 1 + \{\xi\}L_1^0$, выполнено

$$\mu_{i_0}(\xi) + \mu_{i_0}(0) = \xi^{k_0}\mu'.$$

Если f A-выразимо через M, то в $S(M)$ найдется функция $f_{k_0+1}(x_1, \ldots, x_n)$, $(k_0 + 1)$-эквивалентная функции f. Нетрудно видеть, что $U\left(f_{k_0+1}\right) \nsubseteq E_2$, что невозможно. Свойство 1 доказано. Докажем теперь, что выполнено свойство 2. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что все константы из множества $C(M)$ и константа $C(f)$ имеют общую длину предпериода T_0 и общую длину периода T. Тогда любая константа из $\Sigma(M)$ имеет тоже длину предпериода T_0 и длину периода T. Из включения $f \in A(M)$ следует, что в $S(M)$ найдется функция g, $(T_0 + T)$-эквивалентная f. Поэтому первые T_0+T элементов последовательностей $C(f)$ и $C(g)$ совпадают. Отсюда следует, что $C(f) = C(g)$, т. е. $C(f) \in C(S(M))$. Нетрудно видеть также, что $C(S(M)) = \Sigma(C(M))$. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность. Пусть, как и раньше, M — конечная вырожденная S_0-система и для некоторой л.-а. функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнены свойства 1 и 2.

Из свойства 2 следует, что для некоторых γ_i, $\gamma_i \in C(M), j = 1, 2, \ldots s$, справедливо: $C(f) = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_s$. Используя операцию подстановки и константу 0^∞, из функций множества M получим константы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Из леммы следует: $F_{+}^{(2)} \in A(M)$. Из $F_{+}^{(2)}$ операциями суперпозиции получим $F_{+}^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Подставляя вместо каждой переменной x_j этого сумматора константу γ_j, получим константу $C(f)$. Далее, на $(n+1)$-й вход сумматора $F_{+}^{(n+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ подставим константу $C(f)$. Используя полученную функцию, константу 0^∞ и операцию подстановки, получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Достаточность утверждения теоремы доказана.

Теорема 1 доказана.

Далее будем рассматривать конечные невырожденные S_0-системы.

Пусть M — такая система, A-основанием множества $U(M)$ является μ_0, $\mu_0 \in \{\xi\} \cdot L_1^0$, $\mu_0 \neq 0$. Тогда для некоторого натурального числа r и л.-а. функции $\mu', \mu' \in 1 + \{\xi\} \cdot L_1^0$, выполнено: $\mu_0 = \xi^r \cdot \mu'$. Если для любого j, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, найдется целое неотрицательное число q_j такое, что для некоторой константы γ_j, $\gamma_j \in 1 + \{\xi\}L_c$, имеет место $\xi^{j+r\cdot q_j} \cdot \gamma_j \in A(M)$, то множество M называется *PS-системой*. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть M является PS-системой. Тогда существует целое неотрицательное число T_0 такое, что для любой константы γ, $\gamma \in L_c$, справедливо: $\xi^{T_0} \cdot \gamma \in A(M)$.*

Доказательство. По определению PS-системы для любого j, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, найдутся q_j и γ_j, $q_j \in Z_+$, $\gamma_j \in 1 + \{\xi\} \cdot L_c$, что

$$\xi^{j+r\cdot q_j} \cdot \gamma_j \in A(M).$$

Через q обозначим $\max\{q_j | j = 0, 1, \ldots, r-1\}$. Тогда для некоторого T_1, $T_1 \in Z_+$, и для любого j, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, константы γ'_j, $\gamma'_j = \mu_0^{T_1+(q-q_j)} \xi^{j+r\cdot q_j} \cdot \gamma_j$, содержатся в $A(M)$.

Для некоторых констант γ''_j, $\gamma''_j \in 1 + \{\xi\} \cdot L_c$, выполнено:

$$\gamma'_j = \xi^{j+r\cdot(q+T_1)} \cdot \gamma''_j, \quad j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Обозначим произведение $r \cdot (q + T_1)$ через T_0. Для любого целого неотрицательного числа T, $T \geqslant T_0$, найдутся s и s', $s \in Z_+$, $s' \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, такие, что $T = T_0 + r \cdot s + s'$. Отсюда следует, что для некоторой константы $\widetilde{\gamma}_T$, $\widetilde{\gamma}_T \in 1 + \{\xi\} \cdot L_c$, выполнено $\xi^T \cdot \widetilde{\gamma}_T \in A(M)$. Это вытекает из включения

$$\mu_0^s \cdot \gamma'_{s'} \in A(M).$$

Пусть γ — некоторая константа, $\gamma = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots$, и $\tau \in N$. Тогда для некоторых чисел $a'_0, a'_1, \ldots, a'_{\tau-1}$ из E_2 константа $a'_0\xi^{T_0}\widetilde{\gamma}_{T_0} + a'_1\xi^{T_0+1}\widetilde{\gamma}_{T_0+1} + a'_2\xi^{T_0+2}\widetilde{\gamma}_{T_0+2} + \ldots + a'_{\tau-1}\xi^{T_0+\tau-1}\widetilde{\gamma}_{T_0+\tau-1}$ является $(T_0+\tau)$-эквивалентной константе $\xi^{T_0}\gamma$ и содержится в $S(M)$ ввиду $F_+^{(2)} \in A(M)$. По определению A-замыкания, отсюда следует включение $\xi^{T_0}\gamma \in A(M)$.

Лемма 2 доказана.

В параграфе 3 введено отображение σ_r, $\sigma_r : S_r \to E_2^{r+1}$. Здесь нам понадобится отображение σ'_{T_0}, $\sigma'_{T_0} : L \to E_2^{T_0}$, определяемое следующим образом. Пусть $f \in L$ и для f выполнено разложение (23). Тогда для μ_0 найдутся числа $a_0, a_1, \ldots, a_{T_0-1}$, $a_t \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots, T_0-1$, для которых

$$\mu_0 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{T_0-1}\xi^{T_0-1} + \xi^{T_0} \cdot \mu'_0,$$

где μ'_0 — некоторая константа из L_c. Положим

$$\sigma'_{T_0}(f) = \left(a_0, a_1, \ldots, a_{T_0-1}\right).$$

Как обычно, для M', $M' \subseteq L$, через $\sigma'_{T_0}(M)$ обозначим

$$\left\{\sigma'_{T_0}(f) | f \in M'\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть M — PS-система и T_0 таково, что*

$$\{\xi^{T_0}\} \cdot L_c \subseteq A(M). \tag{39}$$

Тогда включение $f \in A(M)$ равносильно выполнению следующих двух свойств.

1. $U(f) \subseteq A^1(U(M))$,
2. $\sigma'_{T_0}(f) \in \sigma'_{T_0}(A(M))$.

Доказательство. Необходимость. Если $f \in A(M)$, то свойство 1 вытекает из леммы 2 параграфа 2, а свойство 2 следует из включения $f \in A(M)$. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность. Рассмотрим PS-систему M и л.-а. функцию f, для которых выполнены свойства 1 и 2. Так как $F_+^{(2)} \in A(M)$, следуя доказательству леммы 3 из параграфа 2, получаем включение

$$A^1(U(M)) \subseteq A(M).$$

Отсюда, если f, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, разложить на одноместные л.-а. функции согласно равенству (23), то

$$\mu_i\,(x_i) \in A(M). \tag{40}$$

Далее, для некоторых константы γ, $\gamma \in L_c$, и чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{T_0-1}$ выполнено

$$\mu_0 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{T_0-1}\xi^{T_0-1} + \xi^{T_0} \cdot \gamma.$$

Поэтому $\sigma'_{T_0}(f) = \big(a_0, a_1, \ldots, a_{T_0-1}\big)$. Но, по свойству 2, в $A(M)$ содержится такая л.-а. функция g, что $\sigma'_{T_0}(g) = \sigma'_{T_0}(f)$. Поэтому

$$c(g) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{T_0-1}\xi^{T_0-1} + \xi^{T_0}\gamma'$$

для некоторой константы γ', $\gamma' \in L_c$. Подставляя константу 0^∞ на все входы л.-а. функции g, получим

$$\gamma'' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{T_0-1}\xi^{T_0-1} + \xi^{T_0}\gamma'$$

принадлежит $A(M)$. Но, $\mu_0 + \gamma'' = \xi^{T_0}(\gamma + \gamma')$ принадлежит $A(M)$ по (39).

Поэтому $\mu_0 = \gamma'' + (\mu_0 + \gamma'')$ принадлежит $A(M)$. Отсюда, из (40), а также учитывая $F_+^{(2)} \in A(M)$, получаем включение

$$F_+^{(n+1)}\,\big(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n), \mu_0\big) \in A(M)$$

или $f \in A(M)$.

Необходимость утверждения теоремы доказана, Теорема доказана,

Теорема 3. *Для конечной невырожденной S_0-системы M и л.-а. функции f проверка включения*

$$\sigma'_{T_0}(f) \in \sigma'_{T_0}(A(M)) \tag{41}$$

алгоритмически разрешима.

Доказательство. Из $S(M) \subseteq A(M)$ получаем $\sigma'_{T_0}(S(M)) \subseteq \subseteq \sigma'_{T_0}(A(M))$. С другой стороны, для любой л.-а. функции f, $f \in A(M)$, найдется T_0-эквивалентная ей функция g, $g \in S(M)$. Поэтому

$$\sigma'_{T_0}(S(M)) = \sigma'_{T_0}(A(M)).$$

Таким образом, проверка (41) сводится к проверке включения

$$\sigma'_{T_0}(f) \in \sigma'_{T_0}(S(M)).$$

Учитывая равенство

$$\sigma'_{T_0}(S(M)) = \sigma'_{T_0}(C(S(M))),$$

рассмотрим множество констант $C(S(M))$. Нетрудно видеть, что

$$\sigma'_{T_0}(C(S(M))) = \sigma'_{T_0}\left(\sum_{\gamma \in C(M)} K^1_c(M)\cdot\gamma\right).$$

Пусть $U(M)$ имеет A-основание μ_0, $\mu_0 = \xi^r \cdot \mu'$, $\mu' \in 1 + \xi L_c$. Положим

$$M_{T_0} = \Big\{ u(\mu_0) \,|\, u(\mu_0) \in E_2[\mu_0], \deg u(\xi) < \frac{T_0}{r}, \text{ и найдется л.-а. функция } \mu,$$
$$\mu \in K^1_c(U(M)), \text{ такая, что } u(\mu_0) + \mu \in \mu_0^{]T_0/r[} \cdot L^0_1(\mu_0) \Big\}.$$

Утверждение теоремы вытекает из конечности множества M_{T_0} и равенства

$$\sigma'_{T_0}(C(S(M))) = \sigma'_{T_0}\left(\sum_{\gamma \in C(M)} M_{T_0}\cdot\gamma\right).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *Пусть M — конечная невырожденная S_0-система, μ_0 является A-основанием $U(M)$, $\mu_0 = \xi^2 + \xi^3\mu'$, для некоторого μ', $\mu' \in L^0_1$. Тогда задача A-выразимости через множество M алгоритмически разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $0^\infty \in A(M)$, сначала рассмотрим случай $C(M) = \{0^\infty\}$. Тогда $M \subseteq L^0$ и для любой f, $f \in A(M)$, справедливо $f \in L^0$. Поэтому найдется натуральное число n и найдутся л.-а. функции $\mu_i(x)$, $\mu_i(x) \in L^0_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что выполнено

$$f = F^{(n)}_+ (\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)),$$

и проверка включения $f \in A(M)$ сводится к проверке соотношений $\mu_i \in A^1(U(M))$ для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Далее рассмотрим случай $C(M) \setminus \{0^\infty\} \neq \varnothing$.

Тогда найдется константа γ, $\gamma \in C(M)$, $\gamma \neq \{0^\infty\}$. Существуют T_γ и γ', $T_\gamma \in Z_+$, $\gamma' \in 1 + \{\xi\} L_c$, удовлетворяющие равенству $\gamma = \xi^{T_\gamma} \cdot \gamma'$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для любой константы β, $\beta \in C(M) \setminus \{0^\infty\}$, выполнено $\beta = \xi^{T_\beta} \cdot \beta'$, $\beta' \in 1 + \{\xi\} \cdot L_c$, $T_\beta \in Z_+$, $T_\beta \geqslant T_\gamma$.

Нетрудно видеть, что для любой константы β, $\beta \in C(M) \setminus \{0^\infty, \gamma\}$ справедливо одно из следующих двух свойств.

1. $\beta \in A^1(\mu_0) \cdot \gamma$.

2. Найдутся числа $a_0, a_1, \ldots, a_s$, $a_j \in E_2$, $j = 0, 1, \ldots, s$, найдется натуральное число T', имеющее отличную от T_γ четность, и найдется константа $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma} \in 1 + \{\xi\} \cdot L_c$, удовлетворяющие равенству

$$\beta + a_0\gamma + a_1\mu_0\gamma + a_2\mu_0^2\gamma + \ldots + a_s\mu_0^s\gamma = \xi^{T'} \cdot \widetilde{\gamma}.$$

Включение

$$\beta \in A'(\{\mu_0\}) \cdot \gamma \tag{42}$$

можно проверить. Действительно, оно означает существование ряда $r(\mu_0)$ такого, что $\beta = r(\mu_0) \cdot \gamma$. Отсюда, $r(\mu_0) = \frac{\beta}{\gamma}$. Но $\frac{\beta}{\gamma}$ равно некоторой дроби из L^0_1. Поэтому, учитывая выбор μ_0, имеем, что $r(\mu_0)$ — периодический (с предпериодом) ряд. Таким образом, проверка включения (42) сводится к проверке включения $\frac{\beta}{\gamma} \in L^0_1(\mu_0)$, что алгоритмически разрешимо.

Далее, если хотя бы для одной константы β из $C(M)\setminus\{0^\infty, \gamma\}$ выполнено свойство 2, то множество M является PS-системой и по теореме 2 проверка A-выразимости через M алгоритмически разрешима.

В противном случае, сначала проверим включение

$$C(f) \in A^1\left(\{\mu_0\}\right) \cdot \gamma.$$

Как и выше, можно показать, что это включение равносильно соотношению

$$\frac{C(f)}{\gamma} \in L_1^0\left(\mu_0\right).$$

Если проверяемое включение не имеет места, то $f \notin A(M)$. В противном случае находим $\mu\left(\mu_0\right)$, $\mu\left(\mu_0\right) \in L_1^0\left(\mu_0\right)$, такую, что $C(f) = \mu\left(\mu_0\right)\gamma$.

Как следует из параграфа 2, найдется натуральное T такое, что для любого $\mu'\left(\mu_0\right)$, $\mu'\left(\mu_0\right) \in L_1^0\left(\mu_0\right)$, выполнено:

$$\mu_0^T \mu'\left(\mu_0\right) \in A^1(M).$$

Тогда найдется многочлен $g(\xi)$, $g(\xi) \in E_2[\xi]$, $\deg g(\xi) < T$, и найдется μ'', $\mu'' \in L_1^0(\xi)$, удовлетворяющие равенству

$$\mu\left(\mu_0\right) = g\left(\mu_0\right) + \mu_0^T \mu''\left(\mu_0\right).$$

Соотношение $C(f) \in C(A(M))$ выполнено в точности тогда, когда в $A^1(U(M))$ для любого γ, $\gamma \in C(M)$, найдутся л.-а. функции $h_\gamma\left(\mu_0\right)$ такие, что

$$\sum_{\gamma \in C(M)} h_\gamma\left(\mu_0\right) \cdot \gamma + g\left(\mu_0\right) \in \mu_0^T L_1^0\left(\mu_0\right),$$

что уже алгоритмически разрешимо. Теорема доказана.

§ 5. Об основанях систем с сумматором, для которых выразимость и A-выразимость равносильны

В настоящем параграфе рассматриваются системы л.-а. функций, содержащие сумматор в замыкании. Безусловно, выразимость какой-либо л.-а. функции через заданное множество л.-а. функций означает ее A-выразимость через эту же систему функций. Понятие A-выразимости возникло с целью увеличения выразительных возможностей конечных автоматов. С другой стороны, для некоторых множеств конечных автоматов переход от выразимости к A-выразимости не приводит к расширению их выразительных возможностей.

Рассмотрим множество M, $M \subseteq L$, удовлетворяющее соотношениям: $F^{(2)} \in K(M)$, $U(M) \setminus E_2 \neq \varnothing$. Как следует из [6, теорема 1], найдутся такие μ, u_0, T, $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$, $u_0 \in 1 + \{\xi\}E_2[\xi]$, $T \in N$, что выполнено одно из двух следующих соотношений:

$$M^{(1)}\left(\mu, (\xi u_0)^T\right) \subseteq K^1(U(M)) \subseteq M^{(1)}\left(\mu, u_0\right), \tag{43}$$

$$P^{(1)}\left(\mu, (\xi u_0)^T\right) \subseteq K^1(U(M)) \subseteq M_0^{(1)}(\mu) \cap M^{(1)}\left(\mu, u_0\right), \tag{44}$$

Л.-а. функцию μ будем называть *основанием множества M*.

В настоящем параграфе приведен критерий, позволяющий определить основания, что для любого множества л.-а. функций с таким основанием его замыкание и A-замыкание совпадают.

Таким образом, необходимо распознать те μ, $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$, для которых справедливо равенство $K(M) = A(M)$ лишь только $M \subseteq L$, $|M| < \infty$, $F_+^{(2)} \in K(M)$ и M имеет основание μ.

Лемма 1. *Пусть $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$ и для любого множества л.-а. функций M,*

$$M \subseteq L, \quad F_+^{(2)} \in K(M), \quad U(M) \setminus E_2 \neq \varnothing, \tag{45}$$

с основанием μ выполнено:

$$K(M) = A(M). \tag{46}$$

Тогда найдется натуральное число k и найдется многочлен $v(\xi)$, $v(\xi) \in 1 + \{\xi\}E_2[\xi]$, $\deg v(\xi) \leqslant k$, такие, что $\frac{\xi^k}{v(\xi)}$ является основанием множества M.

Доказательство. Пусть $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$ и для любого M со свойствами (45) и основанием μ выполнено равенство (46).

При этом для основания μ найдутся натуральное число k и л.-а. функция μ', $\mu' \in 1 + \{\xi\}L_1^0$, такие, что $\mu = \xi^k \cdot \mu'$.

Через C' обозначим множество констант $\{1, \xi, \xi^2 \ldots, \xi^{k-1}\}$. Если множество M обладает свойствами (45), имеет основание μ и $C' = C(M)$, то по теореме 1 из параграфа 3 множество M является S-системой, т. е.

$$L_c \subseteq A(M). \tag{47}$$

С другой стороны, при $\deg \mu > k$ справедливо

$$L_c \nsubseteq K(M). \tag{48}$$

Действительно,

$$C(K(M)) \subseteq \sum_{\gamma \in C(M)} L_1^0(\mu) \cdot \gamma = \sum_{i=0}^{k-1} L_1^0(\mu)\xi^i.$$

При этом множество $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{\deg \mu - 1}\}$ линейно независимо над полем $E_2(\mu)$ [2]. Поэтому ξ^k нельзя представить в виде $\sum_{i=0}^{k-1} L_1^0(\mu)\xi^i$. Соотношение (48) доказано.

Из соотношений (47) и (48) получаем противоречие с (46).

Таким образом, $\deg \mu = k$. Поэтому найдется многочлен $v(\xi)$, $v(\xi) \in 1 + \{\xi\} \cdot E_2[\xi]$, $\deg v(\xi) \leqslant k$, удовлетворяющий равенству $\mu' = \frac{1}{v(\xi)}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если выполнены соотношения* (45) *и для некоторых k и $v(\xi)$, $k \in N$, $v(\xi) \in 1 + \{\xi\}E_2[\xi]$, $\deg v(\xi) \leqslant k$, дробь μ, $\mu = \frac{\xi^k}{v(\xi)}$ является основанием M, то найдется натуральное число T, для которого*

$$\mu^T \cdot L_1^0(\mu) \subseteq U(K(M)) \subseteq L_1^0(\mu). \tag{49}$$

Доказательство. Основанием множества M, удовлетворяющим соотношениям (45), является л.-а. функция μ из L_1^0, не содержащаяся в $M_i^{(1)}$ для любого i, $i = 0, 2, 3, \ldots$.

Из $\mu \notin M_0^{(1)}$ следует, что для некоторого T, $T \in N$, имеет место (43).

Из $\mu \notin M_i^{(1)}$, $i=2,3,\ldots$, получим равенство $u_0=1$. Поэтому

$$M^{(1)}\left(\mu, \xi^T\right) \subseteq K^1(U(M)) \subseteq M^{(1)}(\mu, 1),$$

что в точности и означает соотношение (49). Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Пусть выполнены соотношения* (45) *и для некоторых k и $v(\xi)$ справедливы*:

$$k \in N, \quad v(\xi) \in 1 + \{\xi\}E_2[\xi], \quad \deg v(\xi) \leqslant k, \quad \mu = \frac{\xi^k}{v(\xi)}. \tag{50}$$

Если при этом μ является основанием M, то μ является также A-основанием множества M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для μ найдутся k и $v(\xi)$, удовлетворяющие соотношениям (50), и μ — основание для M, удовлетворяющей условиям (45). И пусть μ_0 — A-основание для M. Тогда по теореме 2 из параграфа 1 имеем: $\deg \mu_0 \leqslant k$ и, если $\mu_0 = \xi^s \cdot \mu_0'$ для некоторых s и μ_0', $s \in N$, $\mu_0' \in 1 + \{\xi\} \cdot L_1^0$, то $s=k$ (из свойства 2 теоремы 2 параграфа 1). Отсюда, $\deg \mu_0 = k$. Поэтому μ — л.-а. функция минимальной степени, для которой выполнены свойства 1 и 2 теоремы 2 параграфа 1. Следовательно, μ также является A-основанием множества M. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Пусть для множества M выполнены соотношения* (45) *и μ является A-основанием для M. Тогда*

1. *найдется s, $s \in N$, и найдутся γ_i, $\gamma_i \in C(M)$, $i=1,2,\ldots,s$ такие, что для любой γ, $\gamma \in C(A(M))$, найдутся r_i, $r_i \in R_2(\mu)$, $i = 1,2\ldots,s$, и выполнено*:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{s} r_i \gamma_i;$$

2. *найдутся s', T, $s' \in N$, $T \in N$, найдутся γ_i', $\gamma_i' \in C(M)$, $i=1,2,\ldots$ $\ldots,k'$, $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{s'}'$ — линейно независимы над $R_2(\mu)$ и найдется C', $C' \subseteq C(S(M))$, $|C'| < \infty$, такие, что*

$$C(A(M)) = C' + \left(\sum_{i=1}^{s'} \mu^T R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = \xi^k \mu'$, $\mu' \in 1 + \{\xi\}L_1^0$.

Рассмотрим множество пар целых неотрицательных чисел Π,

$$\begin{aligned}\Pi = \Big\{ \left(j, T_j\right) | j \in \{0,1,\ldots,k-1\}, T_j \in Z_+, \ &\text{найдутся } l_j,\ l_j \in N,\\ \beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{l_j,j},\ \beta_{i,j} \in C(M), \quad & u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots, u_{l_j,j},\ u_{i,j} \in E_2[\mu],\\ \beta_{1,j}u_{1,j} + \beta_{2,j}u_{2,j} + \ldots \beta_{l_j,j}u_{l_j,j} &\in \xi^{j+T_j \cdot k}\left(1 + \{\xi\}L_c\right) \Big\}.\end{aligned}$$

Обозначим через Π_1 проекцию множества Π на первую компоненту:

$$\Pi_1 = \{j | \text{ найдется } T, (j,T) \in \Pi\}.$$

Каждому j, $j \in \Pi_1$, сопоставим число $T(j)$ такое, что $T(j) = \min\{T | (j,T) \in \Pi\}$, а также наборы $\bar\beta(j), \bar u(j)$,

$$\bar\beta(j) = \left(\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{l_j,j}\right), \bar u(j) = \left(u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots, u_{l_j,j}\right),$$

такие, что

$$\left(\bar{u}(j), \bar{\beta}(j)\right) \in \xi^{j+T(j)\cdot k}\left(1+\{\xi\}L_c\right).$$

Нетрудно видеть, что для любой γ, $\gamma \in C(A(M))$, найдутся r_j, $j \in \Pi_1$, $r_j \in R_2(\mu)$, что

$$\sum_{j\in\Pi_1} r_j\left(\bar{u}(j), \bar{\beta}(j)\right) = \gamma. \tag{51}$$

Действительно, предположим противное. Тогда для некоторого j_0, $j_0 \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \setminus \Pi_1$, некоторого T', $T' \in Z_+$, и некоторых u'_j, $u'_j \in E_2[\xi]$, $j \in \Pi_1$, выполнено:

$$\gamma + \sum_{j\in\Pi_1} u'_j\left(\bar{u}(j), \bar{\beta}(j)\right) \in \xi^{j_0+T'\cdot k}\cdot\left(1+\{\xi\}E_2[\xi]\right).$$

Из включения $\mu^{\bar{T}}L_1^0(\mu) \subseteq U(A(M))$ для $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} = \left(\mu^{\bar{T}}\right)^2\gamma + \sum_{j\in\Pi_1}\left(\mu^{\bar{T}}\cdot u'_j\right)\left(\left(\mu^{\bar{T}}\cdot\bar{u}(j)\right), \bar{\beta}(j)\right)$, следует

$$\bar{\gamma} \in \xi^{j_0+\left(T'+2\bar{T}\right)k}\cdot\left(1+\{\xi\}E_2[\xi]\right) \quad \text{и} \quad \bar{\gamma} \in C(A(M)).$$

Отсюда, $j_0 \in \Pi_1$. Полученное противоречие означает справедливость утверждения (51), из которого непосредственно вытекает равенство $\gamma = \sum_{i=1}^{s} r_i\gamma_i$ для некоторых γ_i и r_i, $\gamma_i \in C(M)$, $r_i(\mu) \in R_2(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. При этом γ_i не зависит от γ. П. 1 леммы 4 доказан.

Докажем п. 2. Утверждение п. 1 леммы означает, что

$$C(A(M)) \subseteq \sum_{i=1}^{s} R_2(\mu)\gamma_i.$$

Пусть Γ', $\Gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{s'}\}$ — максимальное линейно независимое над $R_2(\mu)$ множество, содержащееся в множестве Γ, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$. Тогда для любого γ, $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$, найдутся ряды $r_\gamma, r_1, r_2, \ldots, r_{s'}$ из $R_2(\mu)$ и $r_\gamma \neq 0$, для которых

$$r_\gamma\gamma + r_1\gamma'_1 + \gamma'_2 + \ldots + r_{s'}\gamma_{s'} = 0.$$

Поэтому найдется натуральное число T', такое, что для любого γ, $\gamma \in \Gamma\setminus\Gamma'$,

$$\mu^{T'}\gamma \in \sum_{i=1}^{s'} R_2(\mu)\gamma'_i.$$

Найдется такое T'', $T'' \in N$, что любая константа из $\sum_{i=1}^{s} R_2(\mu)\mu^{T''}\gamma$ содержится в $C(A(M))$. Положим $T = T' + T''$. Тогда для любого γ, $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$, имеем: $\mu^T\gamma \in C(A(M))$.

Через $E_2^{(T)}[\xi]$ обозначим множество всех многочленов над E_2 от переменной ξ, имеющих степень меньше T,

$$E_2^{(T)}[\xi] = \left\{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{T-1}\xi^{T-1} | a_i \in E_2,\ i = 0, 1, \ldots, T-1\right\}.$$

Тогда $R_2(\mu)=E_2^{(T)}[\mu]+\mu^T R_2(\mu)$ и

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} R_2(\mu)\gamma_i &= \sum_{\gamma\in\Gamma'} R_2(\mu)\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} R_2(\mu)\gamma = \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma'} R_2(\mu)\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} E_2^{(T)}[\mu]\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} R_2(\mu)\left(\mu^T\gamma\right) = \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma'} R_2(\mu)\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} E_2^{(T)}[\mu]\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_2^{(T)}[\mu]\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \mu^T R_2(\mu)\gamma.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{\gamma\in\Gamma'} \mu^T R_2(\mu)\gamma\right)\cap L_c \subseteq C(A(M)) \subseteq \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} E_2^{(T)}[\mu]\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \mu^T R_2(\mu)\gamma\right)\cap L_c =$$
$$= \sum_{\gamma\in\Gamma} E_2^{(T)}[\mu]\gamma + \left(\sum_{\gamma\in\Gamma'} \mu^T R_2(\mu)\gamma\right)\cap L_c,$$

откуда получаем утверждение п. 2 леммы 4. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* μ, $\mu=\dfrac{\xi^k}{u(\xi)}$, $u(\xi)\in 1+\{\xi\}E_2[\xi]$, $\deg u(\xi)\leqslant k$, *является A-основанием некоторого множества M, для которого выполнены соотношения* (45). *Тогда*

$$U(K(M))=U(A(M)) \tag{52}$$

и

$$C(K(M))=C(A(M)). \tag{53}$$

Доказательство. Сначала докажем равенство (52).

По лемме 2 для некоторого T, $T\in N$, имеет место (49). По теореме 1 из параграфа 1 для некоторого T_1, $T_1\in N$, выполнено

$$\mu^{T_1}L_1^0(\mu)\subseteq U(A(M))\subseteq L_1^0(\mu).$$

Положим $\bar T=\max(T,T_1)$. Имеем,

$$\mu^{\bar T}L_1^0(\mu)\subseteq U(K(M))\subseteq L_1^0(\mu),$$
$$\mu^{\bar T}L_1^0(\mu)\subseteq U(A(M))\subseteq L_1^0(\mu).$$

Обозначим через M_1 множество

$$\Big\{u(\mu)\,|\,\deg u(\xi)<\bar T,\ \text{найдется } \widetilde\mu(\xi),\ \widetilde\mu(\xi)\in U(K(M)),$$
$$\text{найдется } \widetilde{\widetilde\mu}, \widetilde{\widetilde\mu}\in L_1^0,\ \widetilde\mu(\mu)=u(\mu)+\mu^{\bar T}\cdot\widetilde{\widetilde\mu}(\mu)\Big\},$$

а через M_2 множество

$$\Big\{u(\mu)\,|\,\deg u(\xi)<\bar T,\ \text{найдется } \widetilde\mu(\xi),\ \widetilde\mu(\xi)\in U(K(M)),$$
$$\text{найдется } \widetilde{\widetilde\mu}, \widetilde{\widetilde\mu}\in L_1^0,\ \widetilde\mu(\mu)=u(\mu)+\mu^{\bar T}\cdot\widetilde{\widetilde\mu}(\mu)\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$U(K(M)) = M_1 + \mu^{\bar{T}} L_1^0(\mu),$$
$$U(A(M)) = M_2 + \mu^{\bar{T}} L_1^0(\mu)$$

и $M_1 = M_2$.

Отсюда получаем равенство (52).

Теперь докажем равенство (53).

Ввиду справедливости включения $K(M) \subseteq A(M)$, получаем $C(K(M)) \subseteq C(A(M))$. Таким образом, требуется доказать соотношение $C(A(M)) \subseteq C(K(M))$.

Пусть Γ', $\Gamma' = \{\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{k'}'\}$, — множество констант, линейно независимое над $R_2(\mu)$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{k'} R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c = \sum_{i=1}^{k'} L_1^0(\mu)\gamma_i'.$$

Докажем последнее утверждение. Включение

$$\sum_{i=1}^{k'} L_1^0(\mu)\gamma_i' \subseteq \sum_{i=1}^{k'} R_2(\mu)\gamma_i',$$

очевидно, выполнено. Поэтому для доказательства рассматриваемого утверждения требуется показать справедливость соотношения

$$\left(\sum_{i=1}^{k'} R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c \subseteq \sum_{i=1}^{k'} L_1^0(\mu)\gamma_i'. \tag{54}$$

Рассмотрим сначала случай, когда из того, что множество $\{\gamma, \gamma_i' | i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k'\}$ линейно зависимо над $R_2(\mu)$ следует, что множество $\{\gamma, \gamma_i' | i = 1, 2, \ldots, k'\}$ линейно зависимо над $L_1^0(\mu)$. В этом случае пусть $\gamma \in \sum_{i=1}^{k'} R_2(\mu)\gamma_i'$. Тогда найдутся ряды $r_1(\mu)$, $r_2(\mu)$, $\ldots$, $\mu_{k'}(\mu)$ из $R_2(\mu)$, что

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k'} r_i(\mu)\gamma_i',$$

т. е. множество $\{\gamma, \gamma_1', \gamma_1', \ldots, \gamma_{k'}'\}$ линейно зависимо над $R_2(\mu)$.

Тогда по предположению найдутся $\mu_0(\mu)$, $\mu_1(\mu)$, $\ldots$, $\mu_{k'}(\mu)$, — функции из L_1^0, не все равные 0, что

$$\mu_0(\mu)\gamma + \sum_{i=1}^{k'} \mu_i(\mu)\gamma_i' = 0.$$

Так как множество $\{\gamma_i | i = 1, 2, \ldots, k'\}$ линейно независимо над $L_1^0(\mu)$, $\mu_0(\mu) \neq 0$. Поэтому

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k'} \frac{\mu_i(\mu)}{\mu_0(\mu)}\gamma_i'.$$

Получили еще одно разложение константы γ через константы γ_i' над полем $\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\mu^{-j}\} \cdot R_2(\mu)$. Ввиду однозначности такого разложения, заключаем:

$$r_i(\mu) = \frac{\mu_i(\mu)}{\mu_0(\mu)}.$$

Это означает, что $r_i(\mu)\in L_1^0(\mu)$ и включение (54) в рассматриваемом случае доказано.

Пусть теперь найдется константа γ такая, что множество Γ, $\Gamma=\{\gamma,\gamma_i'|i=1,2,\ldots,k'\}$, линейно зависимо над множеством $R_2(\mu)$, но не является линейно зависимым над $L_1^0(\mu)$. Тогда Γ не является линейно зависимым над полем $E_2(\mu)$. Так как $\deg\mu=k$, то множество Γ можно дополнить до линейного базиса в $E_2(\xi)$, добавив $k-\bigl(k'+1\bigr)$ констант $\gamma_{k'+1}',\gamma_{k'+2}',\ldots,\gamma_{k-1}'$. Тогда константы множества $\{\gamma_i'|i=1,2,\ldots,k-1\}$ образуют базис в $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{\xi^{-j}\}\,R_2(\xi)$ над полем $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{\mu^{-j}\}\,R_2(\mu)$. Но базисом в $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{\xi^{-j}\}\,R_2(\xi)$ над полем $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{\mu^{-j}\}\,R_2(\mu)$ является множество $\{1,\xi,\xi^2,\ldots,\xi^{k-1}\}$, состоящее из k констант. Полученное противоречие означает, что рассматриваемый случай невозможен.

Отсюда и из леммы 4 получаем для некоторого конечного множества констант Γ и максимального линейно независимого подмножества в нем Γ':

$$\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^T L_1^0(\mu)\gamma\subseteq C(A(M))\subseteq\sum_{\gamma\in\Gamma}E_2^{(T)}[\mu]\gamma+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^T L_1^0(\mu)\gamma,$$

т. е. для любого T', $T'\geqslant T$, найдется $R_{T'}$, $R_{T'}\subseteq\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}E_2^{(T)}[\mu]\gamma$, и

$$C(A(M))=R_{T'}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^{T'}L_1^0(\mu)\gamma.$$

Но, для некоторого T'' справедливо:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^{T''}L_1^0(\mu)\gamma\subseteq C(K(M)),$$

поэтому найдется $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}\in N$, и найдутся $R_{\tilde{T}}$, $R'_{\tilde{T}}$, $R_{\tilde{T}}\subseteq\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}E_2^{\tilde{T}}[\mu]\gamma$, $R'_{\tilde{T}}\subseteq$ $\subseteq\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}E_2^{\tilde{T}}[\mu]\gamma$, для которых

$$C(A(M))=R_{\tilde{T}}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^{\tilde{T}}L_1^0(\mu)\gamma\quad\text{и}$$

$$C(K(M))=R'_{\tilde{T}}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\mu^{\tilde{T}}L_1^0(\mu)\gamma.$$

Далее, равенство $R_{\tilde{T}}=R'_{\tilde{T}}$ следует из (52). Поэтому (53) справедливо.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mu\in\xi L_1^0\setminus\{0\}$. Равенство $K(M)=A(M)$ имеет место для любого M со свойствами* (45) *и с основанием μ в точности тогда, когда $\mu\notin M_i^{(1)}$, $i=0,2,3,\ldots$.*

Доказательство. Пусть $\mu\in\xi L_1^0\setminus\{0\}$, и, кроме того, для любого M со свойствами (45) и основанием μ выполнено соотношение (46). Тогда по лемме 1 для некоторого k, $k\in N$, и для некоторого $v(\xi)$, $v(\xi)\in 1+\{\xi\}\cdot E_2[\xi]$, $\deg v(\xi)\leqslant k$, справедливо: $\mu=\dfrac{\xi^k}{v(\xi)}$. Нетрудно видеть, что $\mu\notin M_i^{(1)}$ для каждого i, $i=0,2,3,\ldots$. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность. Пусть для μ, $\mu\in\xi L_1^0\setminus\{0\}$, выполнены соотношения $\mu\notin M_i^{(1)}$, $i=0,2,3,\ldots$. Отсюда следует, что для некоторого k, $k\in N$, и некоторого $v(\xi)$, $\deg v(\xi) \leqslant k$, выполнено равенство: $\mu = \dfrac{\xi^k}{v(\xi)}$. Пусть при этом μ является основанием множества M, обладающего свойствами (45). По лемме 3 дробь μ также является A-основанием M. Тогда по лемме 5 выполнены равенства (52) и (53), а это, с учетом $F_+^{(2)} \in K(M)$, означает равенство $K(M) = A(M)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если для некоторого M со свойствами* (45) *и для любого i, $i = 0, 2, 3, \ldots$, имеет место $U(M) \nsubseteq M_i^{(1)}$, то справедливо равенство* (46).

Доказательство. Пусть для множества M л.-а. функций выполнены свойства (45) и

$$U(M) \nsubseteq M_i^{(1)} \quad \text{при } i = 0, 2, 3, \ldots. \tag{55}$$

Тогда для основания μ множества M имеем:

$$\mu \notin M_i^{(1)}, \quad i = 0, 2, 3, \ldots.$$

По доказанной теореме для множества M получаем (46). Следствие доказано.

Заметим, что проверка счетного числа свойств (55) согласно [5] может быть осуществлена алгоритмически.

§ 6. Структура A-замкнутых множеств л.-а. функций, содержащих сумматор

Обратим внимание на то, что лемму 4 из предыдущего параграфа можно обобщить следующим образом.

Лемма. *Пусть для множества M имеют место следующие соотношения.*

$$\begin{gathered} M \subseteq L, \quad F_+^{(2)} \in A(M), \quad U(M) \setminus E_2 \neq \varnothing \\ \text{и } \mu \text{ является } A\text{-основанием для } M. \end{gathered} \tag{56}$$

Тогда найдутся s', T, $s' \in N$, $T \in N$, найдутся γ_i', $\gamma_i' \in C(M)$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k'$, $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_{s'}'$ — линейно независимы над $R_2(\mu)$ и найдется C', $C' \subseteq$ $\subseteq C(S(M))$, $|C'| < \infty$, такие, что

$$C(A(M)) = C' + \left(\sum_{i=1}^{s'} \mu^T R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c.$$

Доказательство приведенной леммы без труда можно получить из доказательства упомянутой выше леммы 4 предыдущего параграфа.

Заметим также, что найдется натуральное число T_0 такое, что для любых констант γ_i', $\gamma_i' \in A(M)$, выполено:

$$\left(\sum_{i=1}^{s'} \mu^{T_0} R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c \subseteq C(A(M)).$$

Отсюда и из приведенной леммы получаем для некоторого конечного множества констант C'', $C'' \subseteq C(S(M))$, следующее равенство

$$C(A(M)) = C'' + \left(\sum_{i=1}^{s'} \mu^{T+T_0} R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c.$$

Нетрудно видеть, что множество $U(A(M))$ является A^1-замкнутым. Поэтому по теореме 4 из параграфа 1 множество $U(A(M))$ порождено некоторым своим конечным подмножеством M', которое содержится в $A(M)$, потому что ввиду свойств (56), выполнено $U(M) \subseteq A(M)$. Множество

$$\left(\sum_{i=1}^{s'} \mu^{T+T_0} R_2(\mu)\gamma_i'\right) \cap L_c$$

порождается множеством $U(M) \cup \Gamma'$, где через Γ' обозначено множество $\{\gamma_i' | i=1,2,\ldots,s'\}$. Поэтому множество $C(A(M))$ порождается множеством $C'' \cup M' \cup \Gamma'$.

Учитывая равенство

$$A(M) = A\left(\left\{F_+^{(2)}\right\} \cup U(M) \cup C(M)\right) = A\left(\left\{F_+^{(2)}\right\} \cup M' \cup C'' \cup \Gamma'\right),$$

получаем конечнопорожденность множества $A(M)$.

Таким образом, доказана первая часть следующей теоремы.

Теорема. 1. *Если для множества M имеют место свойства* (56), *то $A(M)$ является конечнопорожденным.*

2. *Множество, состоящее из всех A-замкнутых классов M, удовлетворяющих свойствам* (56), *счетно.*

Доказательство части 2 теоремы вытекает из первого ее утверждения и существования счетного числа попарно различных A-замкнутых классов M_i, со свойствами

$$M_i \subseteq L, \quad F_+^{(2)} \in A(M_i), \quad U(M_i) \setminus E_2 \neq \varnothing, \quad i=1,2,\ldots.$$

Для этого положим $M_i = A\left(\left\{F_+^{(2)}, \xi^i(x)\right\}\right)$, и необходимый пример получен.

Теорема доказана.

Вырожденные системы л.-а. функций, содержащие сумматор в A-замыкании, не всегда конечнопорождены. Так, A-замыкание никакого конечного подмножества множества

$$M, \quad M = A\left(\left\{F_+^{(2)}(x_1, x_2), \xi^i | i=0,1,\ldots\right\}\right),$$

где, как и ранее, через ξ^i обозначена константа $\underbrace{0,\ldots,0}_{i \text{ нулей}}, 1, 0, 0, \ldots$, не совпадает с M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Элементы теории автоматов. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
4. Часовских А. А. О выразимости систем с сумматором в классе линейных автоматов // Вестник МГУ. Математика. Механика.— 1990.— №4. — С. 31–34.
5. Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3.— М.: Наука, 1991. — С. 140–166.
6. Часовских А. А. Замкнутые классы линейно-автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13.— М.: Физматлит, 2004. — С. 113–136.

Поступило в редакцию 21 VIII 2007