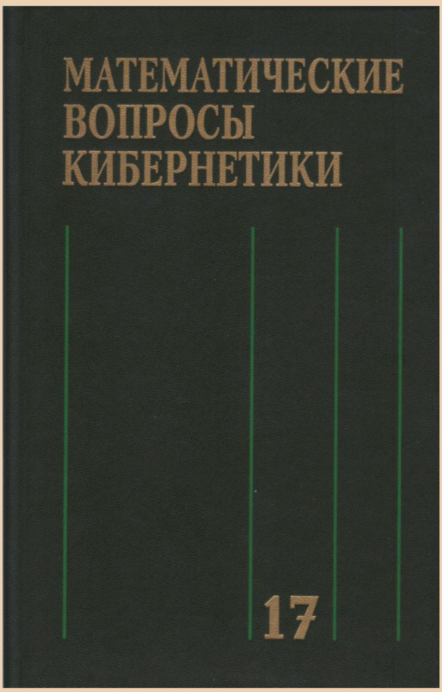

О. С. Дудакова

О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

О. С. ДУДАКОВА

(МОСКВА)

Оглавление

Введение

Данная работа относится к теории функциональных систем. В ней изучаются свойства предполных классов функций многозначной логики. Рассматривается задача о конечной порожденности предполных классов монотонных функций.

В теории функций многозначной логики важное место занимают задачи классификационного характера. Одной из наиболее естественных и хорошо изученных классификаций является разбиение множества P_k всех функций k-значной логики на классы, замкнутые относительно операции суперпозиции (см. [11, 13, 24]). Все замкнутые классы функций двузначной логики были описаны Э. Постом [41, 42], который показал, что число таких классов

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00863), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

счетно. В книге [25] дано более простое изложение этих результатов. Описание классов Поста содержится также в работах [16, 18–20, 34, 36, 44]. Некоторые важные свойства замкнутых классов булевых функций изучены в [5–7, 15].

Несмотря на то, что многозначные логики во многом похожи на двузначную, имеют место и принципиальные различия. К их числу относится пример континуального семейства замкнутых классов в P_k при $k \geqslant 3$, приведенный в работе Ю. И. Янова и А. А. Мучника [28]. Континуальность семейства всех замкнутых классов P_k при $k \geqslant 3$ приводит к значительным трудностям при их изучении. К настоящему времени изучены только некоторые семейства замкнутых классов в P_k. К числу таких семейств относятся предполные классы функций. Из теоремы А. В. Кузнецова [12] (см. также [23, 24]) следует, что при любом $k \geqslant 2$ в P_k существует конечное число предполных классов. При $k = 3$ описание всех предполных классов было получено С. В. Яблонским [21, 22]. Отдельные семейства предполных в P_k классов при $k \geqslant 4$ были найдены в работах [14, 22, 37–40]. Полное описание предполных классов в P_k было получено И. Розенбергом [45, 46] (см. также [4, 11, 17, 26, 27]), который выделил шесть семейств предполных классов: классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$, классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$, классы функций, сохраняющих разбиения множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — классы типа $\mathbb{E}$, классы функций, сохраняющих центральные отношения — классы типа $\mathbb{C}$, классы функций, сохраняющих сильно голоморфные прообразы h-адических элементарных отношений — классы типа $\mathbb{B}$, и классы функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами — классы типа $\mathbb{O}$ (мы пользуемся обозначениями из [27]).

Одной из наиболее важных проблем, связанных с семействами замкнутых классов функций многозначной логики, является задача о конечной порожденности, т. е. задача о выразимости всех функций из замкнутого класса формулами над некоторым конечным множеством функций, принадлежащих этому же классу. Из результатов Поста [41, 42] следует, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис. В многозначных логиках этот результат не имеет места: для любого $k \geqslant 3$ в P_k существуют замкнутые классы как со счетным базисом, так и не имеющие базиса (см. [28]). К настоящему времени отсутствует полное описание всех конечно-порожденных классов в P_k при $k \geqslant 3$ даже для семейства предполных классов. Д. Лау [35] показала, что любой предполный класс в P_k из семейств $\mathbb{P}, \mathbb{L}, \mathbb{E}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ порождается конечным числом функций. Для предполных классов всех функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств (классов из семейства $\mathbb{O}$), этот результат верен, вообще говоря, лишь при $k \leqslant 7$ (см. [35]). Г. Тардошем [47] приведен пример такого частично упорядоченного множества из восьми элементов, что предполный класс всех функций, монотонных на этом множестве, не имеет конечного базиса (см. рис. 1).

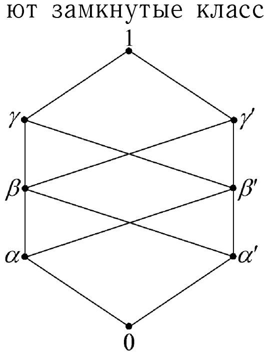

Рис. 1

К настоящему времени получен ряд достаточных условий конечной порожденности предполных классов монотонных функций. Из интерполяционной теоремы К. Бейкера и А. Пиксли [29] (см. также [30–32]) следует, что если в замкнутом классе содержится мажоритарная функция, то класс является конечно-порожденным. В работе [31] приводится следующее условие: предполный класс всех функций, монотонных на частично упорядоченном множестве $\mathscr{P}$, имеет конечный базис, если множество $\mathscr{P}$ представляется в виде $\mathscr{L} \setminus \mathscr{K}$, где $\mathscr{L}$ — решетка, а $\mathscr{K}$ — выпуклое подмножество $\mathscr{L}$, не содержащее наименьшего и наибольшего элементов $\mathscr{L}$ (определения см. в [3]). Отсюда, в частности, следует конечная порожденность классов функций, монотонных относительно решеток и линейно упорядоченных множеств. В [32] показано, что это условие эквивалентно отсутствию в множестве $\mathscr{P}$ четверки элементов a, b, c, d, таких что $a, b < c$, элементы a и b не имеют точной верхней грани и элементы c и d не имеют точной верхней грани. Доказательство конечной порожденности класса монотонных функций, приведенное в работе [31], опирается на существование в классе мажоритарных функций. Отметим, что условие существования мажоритарных функций в классе не является необходимым для конечной порожденности этого класса даже для замкнутых классов булевых функций (см. [42]). Примеры частично упорядоченных множеств, таких что классы всех функций, монотонных относительно этих множеств, являются конечно-порожденными, но не содержат мажоритарных функций, приведены в работе [33], однако эти классы не являются предполными.

В данной работе исследуются предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два (см. также [8–10]). Для всех множеств ширины два в терминах свойств этих множеств получены необходимые и достаточные условия конечной порожденности соответствующих предполных классов монотонных функций.

Дадим некоторые определения.

Обозначим через $\mathbb{A}$ семейство всех конечных частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами. Число элементов множества $\mathscr{P}$ обозначается через $|\mathscr{P}|$. *Шириной* частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ (обозначение $w_{\mathscr{P}}$) называется максимальное число попарно несравнимых элементов $\mathscr{P}$. Обозначим через $\mathbb{A}_2$ подсемейство семейства $\mathbb{A}$, состоящее из всех множеств $\mathscr{P}$, для которых выполняются неравенства $|\mathscr{P}| \geqslant 2$ и $w_{\mathscr{P}} \leqslant 2$; множества из $\mathbb{A}_2$ будем называть *множествами ширины два*.

Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$, $a, b \in \mathscr{P}$, элементы a и b несравнимы. Точная верхняя грань элементов a и b обозначается через $\sup(a, b)$. Пусть несравнимые элементы a и b не имеют точной верхней грани, пусть c и d — две минимальные верхние грани элементов a и b, и существует e — точная верхняя грань элементов c и d. Тогда e называется *точной верхней гранью второго порядка* элементов a и b и обозначается через $\sup^2(a, b)$.

Функция $\mu : \mathscr{P}^n \to \mathscr{P}$, где $n \geqslant 3$, называется *мажоритарной*, если для любых a и b из $\mathscr{P}$ выполняются равенства

$$\mu(a, b, \ldots, b) = \mu(b, a, b, \ldots, b) = \ldots = \mu(b, \ldots, b, a) = b.$$

Класс всех функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$, будем обозначать через $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

В работе получены следующие основные результаты (в скобках указаны номера теорем в тексте).

Теорема 1 (теорема 2.3). *Пусть $\mathscr{P}$ — частично упорядоченное множество из семейства $\mathbb{A}_2$, такое что для любых двух несравнимых элементов a и b в $\mathscr{P}$ существует либо* $\sup(a, b)$, *либо* $\sup^2(a, b)$. *Тогда класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ является конечно-порожденным.*

Теорема 2 (теорема 3.1). *Пусть $\mathscr{P}$ — частично упорядоченное множество из семейства $\mathbb{A}_2$, такое что найдутся два несравнимых элемента a и b, для которых в $\mathscr{P}$ не существует ни* $\sup(a, b)$, *ни* $\sup^2(a, b)$. *Тогда класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ не имеет конечного базиса.*

Из теорем 1 и 2 следует критерий конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

Теорема 3 (теорема 3.2). *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$. Класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ всех функций, монотонных относительно множества $\mathscr{P}$, является конечно-*

порожденным тогда и только тогда, когда для любых двух несравнимых элементов a и b в $\mathscr{P}$ существует либо $\sup(a,b)$, *либо* $\sup^2(a,b)$.

Этот результат можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4 (теорема 3.3). *Пусть $\mathscr{P}\in\mathbb{A}_2$. Класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда он содержит некоторую мажоритарную функцию.*

Из теоремы 3 следует алгоритмическая разрешимость задачи распознавания конечной порожденности предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

Теорема 5 (теорема 3.4). *Для любого частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ ширины два с наименьшим и наибольшим элементами существует алгоритм распознавания конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.*

Нетрудно показать, что этот алгоритм имеет полиномиальную сложность (см. [1, 2]).

Следует отметить, что семейству $\mathbb{A}_2$ принадлежит множество, приведенное в работе [47]. Отметим также, что начиная с $k=10$ в $\mathbb{A}_2$ существуют множества из k элементов, которым соответствуют конечно-порожденные предполные классы монотонных функций, но для которых не выполняются условия, приведенные в [31] и [32] (см. рис. 2).

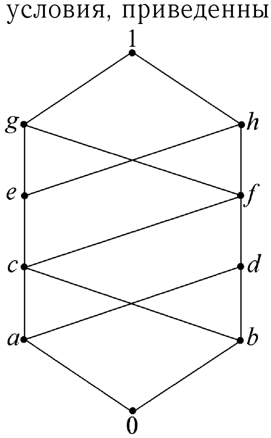

Рис. 2

Опишем кратко содержание работы.

В параграфе 1 приводятся основные определения и доказывается ряд свойств частично упорядоченных множеств из семейств $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_2$, а также некоторые свойства монотонных функций и отображений.

В параграфе 2 устанавливается достаточное условие существования конечного базиса в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ всех функций, монотонных относительно некоторого частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ ширины два с наименьшим и наибольшим элементами (теорема 2.3). Рассматривается семейство $\mathbb{A}_2^{(1)}$ частично упорядоченных множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами, состоящее из всех таких множеств $\mathscr{P}$, что для любой пары несравнимых элементов a и b в $\mathscr{P}$ существует либо $\sup(a,b)$, либо $\sup^2(a,b)$. В п. 2.1 устанавливается ряд соотношений для элементов произвольного множества $\mathscr{P}$ из $\mathbb{A}_2^{(1)}$. В п. 2.2 определяются операторы φ и ψ специального вида, и доказывается ряд свойств этих операторов. В п. 2.3 рассматриваются отображения $f'\colon\mathscr{Q}'\to\mathscr{P}$, где $\mathscr{Q}'$ — некоторое подмножество произвольного частично упорядоченного множества $\mathscr{Q}$, а $\mathscr{P}$ — произвольное множество из семейства $\mathbb{A}_2^{(1)}$, и с помощью ранее определенных операторов φ и ψ задается доопределение отображения f' на множество $\mathscr{Q}$. Основным результатом п. 2.3 является теорема о необходимых и достаточных условиях существования монотонного доопределения отображения $f'\colon\mathscr{Q}'\to\mathscr{P}$ на множество $\mathscr{Q}$ (теорема 2.1). В п. 2.4 на основе полученного критерия существования монотонного доопределения не всюду определенного отображения доказана теорема (теорема 2.2) о существовании в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$, где $\mathscr{P}\in\mathbb{A}_2^{(1)}$, некоторой мажоритарной функции, число переменных которой зависит только от $|\mathscr{P}|$. Из этого результата с помощью теоремы Бейкера и Пиксли (см. [29]) получено утверждение о конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ для любого множества $\mathscr{P}$ из семейства $\mathbb{A}_2^{(1)}$ (теорема 2.3).

В параграфе 3 устанавливается критерий конечной порожденности класса всех функций, монотонных относительно множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. В п. 3.1 приводится семейство $\mathbb{A}_2^{(2)}$ всех частично упорядоченных множеств ширины два, которым соответствуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса. Основной результат сформулирован в теореме 3.1. Для доказательства используется метод Тардоша из работы [47], а именно, рассматривается произвольное множество $\mathscr{P}$ из $\mathbb{A}_2^{(2)}$, для каждого значения n, $n \geqslant 4$, строится множество $\mathscr{R}_{\mathscr{P},n}$ наборов элементов множества $\mathscr{P}$, устанавливается ряд свойств наборов из этого множества, с помощью этих свойств показывается, что при всех значениях k, $k < \frac{n}{2}$, множество $\mathscr{R}_{\mathscr{P},n}$ сохраняется всеми функциями из класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$, зависящими от k переменных, и далее, что существует функция $f(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathscr{M}_{\mathscr{P}}$, которая не сохраняет множество $\mathscr{R}_{\mathscr{P},n}$. В настоящей работе при доказательстве лемм 3.2 и 3.3 метод Тардоша обобщается для семейства множеств $\mathbb{A}_2^{(2)}$ произвольной мощности. В п. 3.2 на основе результатов предыдущего пункта и параграфа 2 приводится критерий конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$, где $\mathscr{P}$ — произвольное множество из семейства $\mathbb{A}$ (теоремы 3.2 и 3.3).

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся основные определения и обозначения, а также ряд свойств элементов частично упорядоченных множеств и монотонных отображений.

1.1. Основные определения и обозначения. Пусть A — некоторое конечное множество. Через A^n будем обозначать n-ю декартову степень множества A, т. е. множество всех упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где все $a_i \in A$. Пусть $|A| = k$, $k \geqslant 2$. Обозначим через $\boldsymbol{P}_A$ множество всех функций вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, аргументы которых определены на множестве A и таких, что $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ при $a_1, \ldots, a_n \in A$. Функции из множества $\boldsymbol{P}_A$ будем называть *функциями k-значной логики* (см. [24, 27]). Обозначим через $\widetilde{\boldsymbol{P}}_A$ множество всех функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) : \widetilde{A}^n \to A^n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\widetilde{A}^n$ — некоторое подмножество множества A^n. Функции из множества $\widetilde{\boldsymbol{P}}_A$ будем называть *частичными функциями k-значной логики*.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — произвольная система функций из $\boldsymbol{P}_A$. Через $[\boldsymbol{A}]$ обозначим замыкание системы $\boldsymbol{A}$ относительно операции суперпозиции (см. [24]). Множество $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{P}_A$ называется *замкнутым классом*, если $[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{A}$. Замкнутый класс функций $\boldsymbol{A}$ называется *предполным классом в* $\boldsymbol{P}_A$, если $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{P}_A$, и для любой функции f из $\boldsymbol{P}_A \setminus \boldsymbol{A}$ выполняется равенство $[\boldsymbol{A} \cup \{f\}] = \boldsymbol{P}_A$. Система функций $\boldsymbol{A}$ *порождает класс* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{P}_A$, если $[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{C}$. Система функций $\boldsymbol{A}$ называется *базисом в классе* $\boldsymbol{C}$, если $[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{C}$ и $[\boldsymbol{A}_0] \neq \boldsymbol{C}$ для любого подмножества $\boldsymbol{A}_0 \subset \boldsymbol{A}$, такого что $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{A}$. Замкнутый класс $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{P}_A$ называется *конечно-порожденным*, если существует конечная система функций, порождающая $\boldsymbol{C}$.

Пусть A — некоторое множество, а $\circ$ — бинарное отношение на этом множестве, удовлетворяющее условиям рефлексивности ($a \circ a$), транзитивности (из соотношений $a \circ b$ и $b \circ c$ следует $a \circ c$) и антисимметричности (из соотношений $a \circ b$ и $b \circ a$ следует равенство $a = b$). Множество $\mathscr{A} = (A, \circ)$ называется *частично упорядоченным множеством*, а отношение $\circ$ — *отношением частичного порядка на* A (см. [3]).

Пусть $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$ и $\mathscr{Q} = (Q, \ll)$ — некоторые конечные частично упорядоченные множества. Отображение $f : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ называется *монотонным*, если для любых элементов $a, b \in \mathscr{P}$, таких что $a \leqslant b$, выполняется неравенство $f(a) \ll f(b)$. В частности, функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{P}_{\mathscr{P}}$ называется *моно-*

тонной относительно множества $\mathscr{P}$, если для любых наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, таких что $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$, выполняется неравенство $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$. Через $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ будем обозначать замкнутый класс всех функций, монотонных относительно $\mathscr{P}$.

Пусть $\mathscr{P}$ — некоторое частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$. Если для элементов a, b множества $\mathscr{P}$ выполнено одно из соотношений $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, то эти элементы называются *сравнимыми*, в противном случае — *несравнимыми*; если выполняются неравенства $a \leqslant b$ и $a \neq b$, будем говорить, что a *меньше* b (обозначение $a < b$). Пусть $a_1, a_2 \in \mathscr{P}$, элементы a_1 и a_2 несравнимы. Элемент b множества $\mathscr{P}$ называется *верхней гранью элементов* a_1, a_2, если выполняются неравенства $b \geqslant a_1$ и $b \geqslant a_2$. Верхняя грань b элементов a_1, a_2 называется *минимальной верхней гранью* этих элементов, если ни для какой другой верхней грани x этих элементов не выполняется неравенство $b > x$; b называется *точной верхней гранью* a_1, a_2 (обозначение $\sup(a_1, a_2)$), если для любой верхней грани x этих элементов выполняется неравенство $b \leqslant x$. Так, например, в множестве, приведенном на рис. 2, элементы $c, d, e, f, g, h, 1$ являются верхними гранями элементов a, b, элементы c и d — минимальными верхними гранями элементов a и b; элемент f является одновременно и минимальной, и точной верхней гранью элементов c и d; элементы a и b не имеют точной верхней грани. Далее, пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}$, $b \in \mathscr{A}$. Элемент b называется *максимальным элементом множества* $\mathscr{A}$, если в $\mathscr{A}$ не найдется такого элемента x, что выполняется неравенство $x > b$; если в множестве $\mathscr{A}$ содержится ровно один максимальный элемент, то он называется *наибольшим элементом множества* $\mathscr{A}$. Аналогичным образом определяются нижняя, максимальная нижняя и точная нижняя грани элементов, а также минимальный и наименьший элементы множества $\mathscr{A}$; точная нижняя грань элементов a_1, a_2 обозначается $\inf(a_1, a_2)$. Далее, пусть a и b — несравнимые элементы множества $\mathscr{P}$. Будем говорить, что элементы a и b 1-*несравнимы*, если они несравнимы и не имеют точной верхней грани. Будем говорить, что элементы a и b 2-*несравнимы*, если они 1-несравнимы, и найдутся две их минимальные верхние грани, которые являются 1-несравнимыми. Так, в множестве, приведенном на рис. 2, элементы a и b 1-несравнимы, элементы e и d 1-несравнимы, и элементы e и f 1-несравнимы; 2-несравнимых элементов в этом множестве нет. А в множестве, приведенном на рис. 1, 2-несравнимыми являются элементы α и α'.

Пусть $\mathscr{P}$ — некоторое частично упорядоченное множество. Определим ряд отношений между элементами и подмножествами $\mathscr{P}$.

Пусть $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m \in \mathscr{P}$. Будем говорить, что выполняется неравенство $x_1, \ldots, x_k \leqslant y_1, \ldots, y_m$ (соответственно, $x_1, \ldots, x_k < y_1, \ldots, y_m$), если для любых $x \in \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $y \in \{y_1, \ldots, y_m\}$ выполняется неравенство $x \leqslant y$ (соответственно $x < y$). Будем говорить, что выполняется неравенство $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство $x_i \leqslant y_i$; будем говорить, что выполняется неравенство $(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n)$, если $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$, и найдется такой номер i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, что выполняется неравенство $x_i < y_i$.

Пусть $x \in \mathscr{P}$, $A \subseteq \mathscr{P}$. будем говорить, что выполняется неравенство $x \leqslant A$ (соответственно, $x < A$), если для любого y из A выполняется неравенство $x \leqslant y$ (соответственно, $x < y$).

Пусть $A, B \subseteq \mathscr{P}$. Будем говорить, что выполняется неравенство $A \leqslant B$ (соответственно, $A < B$), если для любых элементов x, y, $x \in A$, $y \in B$, выполняется неравенство $x \leqslant y$ (соответственно $x < y$). Будем говорить, что выполняется отношение $A \preceq B$, если для любого элемента x из $\mathscr{P}$, такого что $x \leqslant A$, выполняется неравенство $x \leqslant B$.

Обозначим через $\widetilde{\mathscr{P}}^2$ множество всех неупорядоченных пар несравнимых элементов частично упорядоченного множества $\mathscr{P} = (P, \leqslant)$. Элементы $\widetilde{\mathscr{P}}^2$ будем обозначать через $\{x_1, x_2\}$. Определим на $\widetilde{\mathscr{P}}^2$ отношение порядка $\ll$ следующим образом: $\{x_1, x_2\} \ll \{y_1, y_2\}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из неравенств $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ или $(x_2, x_1) \leqslant (y_1, y_2)$.

Пусть $\mathscr{P}$ — частично упорядоченное множество, $x_1, x_2 \in \mathscr{P}$, элементы x_1 и x_2 1-несравнимы. Обозначим через y_1 и y_2 две минимальные верхние грани элементов x_1, x_2. Тогда $\{y_1, y_2\} \in \widetilde{\mathscr{P}}^2$, будем обозначать элемент $\{y_1, y_2\}$ через $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$. Пусть элементы x_1 и x_2 1-несравнимы, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, и существует $z = \sup(y_1, y_2)$. Тогда будем говорить, что элемент z — *точная верхняя грань второго порядка элементов* x_1 *и* x_2, и обозначать этот элемент через $\sup^2(x_1, x_2)$. Пусть элементы x_1 и x_2 2-несравнимы, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, $\{z_1, z_2\} = \overrightarrow{\sup}(y_1, y_2)$. Тогда будем обозначать элемент $\{z_1, z_2\}$ через $\overrightarrow{\sup}^2(x_1, x_2)$. Так, например, для элементов множества, приведенного на рис. 2, выполняются соотношения $\{c, d\} = \overrightarrow{\sup}(a, b)$ и $f = \sup^2(a, b)$, а для элементов множества на рис. 1 выполняется соотношение $\{\gamma, \gamma'\} = \overrightarrow{\sup}^2(\alpha, \alpha')$.

Будем говорить, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2 из $\mathscr{P}$ образуют *неполный квадрат*, если элементы a_1 и a_2 несравнимы, b_1 и b_2 несравнимы, и найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются следующие соотношения: $a_1 < b_{\pi(1)}$, $a_2 < b_{\pi(2)}$, элементы a_1 и $b_{\pi(2)}$ несравнимы и элементы a_2 и $b_{\pi(1)}$ несравнимы. Будем говорить, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2 из $\mathscr{P}$ образуют *квадрат*, если элементы a_1 и a_2 несравнимы, b_1 и b_2 несравнимы, выполняется неравенство $a_1, a_2 < b_1, b_2$, и не существует такого элемента c из $\mathscr{P}$, что выполняются неравенства $a_1, a_2 < c < b_1, b_2$. Будем говорить, что элементы $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ образуют *двойной квадрат*, если элементы a_1 и a_2 2-несравнимы, $\{b_1, b_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$, $\{c_1, c_2\} = \overrightarrow{\sup}^2(a_1, a_2)$. Так, например, элементы a, b, c, d множества, приведенного на рис. 2, образуют квадрат, элементы a, b, e, d этого множества также образуют квадрат; элементы $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ множества $\mathscr{P}_8$ на рис. 1 образуют двойной квадрат.

Последовательность $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$, элементов частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ называется *цепью*, если выполняются неравенства $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Пусть I — цепь из n элементов, положим $l_I = n - 1$, величина l_I называется *длиной цепи* I. Положим $l_{\mathscr{P}} = \max l_I$, где максимум берется по всем цепям I из $\mathscr{P}$; величина $l_{\mathscr{P}}$ называется *длиной частично упорядоченного множества* $\mathscr{P}$. Подмножество J частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ называется *антицепью*, если все элементы из J попарно несравнимы. Положим $w_{\mathscr{P}} = \max |J|$, где максимум берется по всем антицепям J из $\mathscr{P}$; величина $w_{\mathscr{P}}$ называется *шириной частично упорядоченного множества* $\mathscr{P}$.

Обозначим через $\mathscr{P}^{(0)}$ семейство всех непустых подмножеств $\mathscr{P}'$ частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$, таких что $l_{\mathscr{P}'} = 0$.

Обозначим через $\mathbb{A}$ семейство всех частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами. Наименьший и наибольший элементы множества $\mathscr{P}$ из $\mathbb{A}$ будем обозначать через 0 и 1 соответственно. Следует отметить, что для любого множества $\mathscr{P}$ из семейства $\mathbb{A}$ класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ является предполным [27, 46]. Далее, обозначим через $\mathbb{A}_2$ семейство всех множеств $\mathscr{P}$ из $\mathbb{A}$, для которых выполняются неравенства $l_{\mathscr{P}} \geqslant 2$ и $w_{\mathscr{P}} \leqslant 2$. Множества из семейства $\mathbb{A}_2$ будем называть множествами *ширины два*.

Пусть $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$ — частично упорядоченные множества, $\mathscr{Q}' \subset \mathscr{Q}$, f — некоторое отображение $\mathscr{Q} \to \mathscr{R}$. Обозначим через $f|_{\mathscr{Q}'}$ отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{R}$, совпадающее с f на всех элементах множества $\mathscr{Q}'$. Пусть f' — некоторое отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{R}$. Отображение $f : \mathscr{Q} \to \mathscr{R}$ будем называть *доопределением отображения* f' *на множество* $\mathscr{Q}$, если отображение $f|_{\mathscr{Q}'}$ совпадает с f'.

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое множество, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция из $\boldsymbol{P}_{\mathscr{A}}$. Говорят, что функция f *сохраняет множество* $\mathscr{B}$, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов множества $\mathscr{B}$ выполняется соотношение $f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{B}$. Далее, пусть $\mathfrak{X} \subset \mathscr{A}^k$. Говорят, что функция f *сохраняет множество наборов* $\mathfrak{X}$, если для любых n наборов $(x_1^1, \ldots, x_k^1)$, $(x_1^2, \ldots, x_k^2), \ldots, (x_1^n, \ldots, x_k^n) \in \mathfrak{X}$ набор $(f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n), f(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n), \ldots, f(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n))$ принадлежит множеству $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое множество, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{A}^n$. Для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, положим $\widetilde{x}[i] = x_i$.

Пусть $\mathscr{Q}$ - некоторое частично упорядоченное множество, $\mathscr{Q}' \subset \mathscr{Q}$, $\mathscr{P} \in \mathbb{A}$, $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{P}' = \{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', 1\}$, элементы $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ образуют двойной квадрат, f' — некоторое отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}'$. Следуя [47], назовем последовательность $X_m, \ldots, X_{m'}$ различных элементов множества $\mathscr{Q}$ *зигзагом* для f', если выполняются следующие условия:

a) $m = 0$ или $m = 1$, $m' \geqslant m + 2$;

b) $X_m, X_{m'} \in \mathscr{Q}'$, $X_i \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ для всех $i = m+1, \ldots, m'-1$;

c) $f'(X_m) = \beta$, $f'(X_{m'}) = \beta'$;

d) $X_{2i} > X_{2i-1}$ для всех i, таких что $m < 2i \leqslant m'$;

e) $X_{2i} > X_{2i+1}$ для всех i, таких что $m \leqslant 2i < m'$;

f) для каждого i, такого что $m < 2i < m'$, найдутся различные $Y, Y' \in \mathscr{Q}'$, такие что Y, $Y' > X_{2i}$, и выполняются равенства $f'(Y) = \gamma$, $f'(Y') = \gamma'$;

g) для каждого i, такого что $m < 2i + 1 < m'$, найдутся различные $Z, Z' \in \mathscr{Q}'$, такие что Z, $Z' < X_{2i+1}$, и выполняются равенства $f'(Z) = \alpha$, $f'(Z') = \alpha'$.

Пусть $n \geqslant 1$, $\mathscr{R} = \{A, A', B, B', C_1, \ldots, C_n, C', D_1, \ldots, D_{2n+1}\}$ — некоторое частично упорядоченное множество. Назовем $\mathscr{R}$ *T-множеством ранга n* (см. [47]), если выполняются следующие условия:

1) A и A' несравнимы, $A, A' < D_{2i+1}$ для каждого $i = 0, \ldots, n$;

2) выполняются неравенства $B > D_1$ и $B' > D_{2n+1}$, элемент B не сравним ни с одним из элементов $D_2, \ldots, D_{2n+1}$, элемент B' не сравним ни с одним из элементов $D_1, \ldots, D_{2n}$;

3. $D_{2i} > D_{2i+1}, D_{2i-1}$ для каждого $i = 1, \ldots, n$; D_{2i} не сравним с D_j для всех $j \in \{1, \ldots, 2n+1\} \setminus \{2i-1, 2i, 2i+1\}$;

4. $C_i > D_{2i}$, $C' > D_{2i}$ для каждого $i = 1, \ldots, n$; C_i не сравним с D_j для всех $j \in \{1, \ldots, 2n+1\} \setminus \{2i-1, 2i, 2i+1\}$;

5. C_i не сравним с B, B', C' для каждого $i = 1, \ldots, n$; C' не сравним с B, B'.

1.2. Свойства частично упорядоченных множеств.

Утверждение 1.1 (свойства множеств из семейства $\mathbb{A}_2$). *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$. Тогда*

(a) *если ни один из элементов $a_1, \ldots, a_n$ не сравним с элементом b, то все элементы $a_1, \ldots, a_n$ сравнимы между собой, и среди элементов $a_1, \ldots, a_n$ существуют наименьший и наибольший элементы;*

(b) *если x_1, x_2 — несравнимые элементы, y_1, y_2 — несравнимые элементы, то существует такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что элементы $x_{\pi(1)}$ и y_1 сравнимы и элементы $x_{\pi(2)}$ и y_2 сравнимы;*

(c) *пусть a_1, a_2 — несравнимые элементы. Хотя бы один из элементов $\sup(a_1, a_2)$, $\sup^2(a_1, a_2)$ существует в $\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда в $\mathscr{P}$ не найдется шестерки элементов, образующих двойной квадрат.*

Эти утверждения следуют из определения семейства $\mathbb{A}_2$.

Утверждение 1.2 (свойства верхних граней). *Пусть $\mathscr{P}$ — произвольное частично упорядоченное множество, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathscr{P}$, элементы a_1 и a_2 несравнимы, и элементы b_1 и b_2 несравнимы. Тогда*

(a) *если* c_1 *— минимальная верхняя грань элементов* a_1, a_2, d *— верхняя грань элементов* a_1, a_2, *и элементы* c_1 *и* d *несравнимы, то существует* c_2 *— минимальная верхняя грань элементов* a_1, a_2, *такая что* $c_2 \leqslant d$, *а элементы* c_2 *и* c_1 *несравнимы;*

(b) *если* $\{a_1, a_2\} \ll \{b_1, b_2\}$, *существует* $c = \sup(a_1, a_2)$, *и если* d *— минимальная верхняя грань элементов* b_1, b_2, *то выполняется неравенство* $c \leqslant d$;

(c) *если элементы* a_1 *и* a_2 1*-несравнимы, выполняется неравенство* $a_1, a_2 < b_1, b_2$, *существует* $c = \sup^2(a_1, a_2)$, *и если* d *— минимальная верхняя грань элементов* b_1, b_2, *то выполняется неравенство* $c \leqslant d$;

(d) *если* $\{a_1, a_2\} \ll \{b_1, b_2\}$, *если* c *— минимальная верхняя грань элементов* a_1 *и* a_2, d *— минимальная верхняя грань элементов* b_1 *и* b_2, *и элементы* c *и* d *сравнимы, то выполняется неравенство* $c \leqslant d$.

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Покажем, что справедливо утверждение (b). Действительно, неравенство $d < c$ не может выполняться в силу соотношения $c = \sup(a_1, a_2)$. А если элементы d и c несравнимы, то согласно утверждению 1 существует минимальная верхняя грань элементов a_1, a_2, не сравнимая с элементом c, что также противоречит соотношению $c = \sup(a_1, a_2)$. Следовательно, выполняется неравенство $c \leqslant d$. Покажем теперь справедливость утверждения (c). Положим $\{x_1, x_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$. Из неравенства $a_1, a_2 < b_2, b_2$ следует, что выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{b_1, b_2\}$. И тогда в силу соотношения $c = \sup(x_1, x_2)$ неравенство $c \leqslant d$ следует из утверждения (b). Наконец, утверждение (d) очевидно.

Утверждение 1.3. *Пусть* $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2, \mathscr{A} \in \mathscr{P}^{(0)}$. *Тогда множество* $\mathscr{A}$ *состоит либо из одного, либо из двух несравнимых элементов.*

Утверждение следует из определения семейства $\mathbb{A}_2$ и определения длины частично упорядоченного множества.

Утверждение 1.4 (свойства квадратов). *Пусть* $\mathscr{P}$ *— произвольное частично упорядоченное множество,* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathscr{P}$. *Тогда*

(a) *если* (a_1, a_2, b_1, b_2) *— квадрат, то в* $\mathscr{P}$ *не существует элементов* $\sup(a_1, a_2)$ *и* $\inf(b_1, b_2)$;

(b) *если* (a_1, a_2, b_1, b_2) *— квадрат, то элементы* a_1 *и* a_2 1*-несравнимы, и для минимальных верхних граней* x_1, x_2 *элементов* a_1, a_2 *найдется такая перестановка* π *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняется неравенство* $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}) \leqslant (b_1, b_2)$, *элементы* $x_{\pi(1)}$ *и* b_2 *несравнимы, и элементы* $x_{\pi(2)}$ *и* b_1 *несравнимы;*

(c) *если* a_1, a_2 *—* 1*-несравнимые элементы,* $\{b_1, b_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$ *и* (b_1, b_2, c_1, c_2) *— неполный квадрат, то* (a_1, a_2, c_1, c_2) *— квадрат;*

(d) *если* $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$, (a_1, a_2, b_1, b_2) *— квадрат,* (b_1, b_2, c_1, c_2) *— неполный квадрат, и найдется такой элемент* x *из* $\mathscr{P}$, *что выполняются неравенства* $a_1, a_2 < x < c_1, c_2$, *то существует такая перестановка* π *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняется неравенство* $x < b_{\pi(1)}$, *а элементы* x *и* $b_{\pi(2)}$ *несравнимы.*

Доказательство. Утверждения (a)–(c) очевидны. Докажем утверждение (d). Так как (b_1, b_2, c_1, c_2) — неполный квадрат, элементы b_1 и c_2 несравнимы, и элементы b_2 и c_1 несравнимы. Поэтому ни одно из неравенств $x \geqslant b_1$ и $x \geqslant b_2$ выполняться не может. Очевидно, что элемент x сравним по крайней мере с одним из элементов b_1, b_2, и тогда выполняется по крайней мере одно из неравенств $x < b_1$ и $x < b_2$. Будем считать, что выполняется неравенство $x < b_1$. Неравенство $x < b_2$ противоречит тому, что (a_1, a_2, b_1, b_2) — квадрат. Значит элементы x и b_2 несравнимы.

Следующая лемма (см. [43, 47]) описывает множества, которые сохраняются классом всех монотонных функций.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Q}$ — частично упорядоченные множества, $q_1, \ldots, q_k \in \mathscr{Q}$, элементы $q_1, \ldots, q_k$ различны, пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех монотонных отображений $\mathscr{Q} \to \mathscr{R}$. Тогда множество наборов длины k элементов из $\mathscr{R}$*

$$\{(f(q_1), f(q_2), \ldots, f(q_k)) | f \in \mathfrak{F}\}$$

сохраняется всеми функциями из класса $\mathscr{M}_{\mathscr{R}}$.

Доказательство. Пусть $\{(f(q_1), f(q_2), \ldots, f(q_k)) | f \in \mathfrak{F}\} = \mathscr{S}$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция из $\mathscr{M}_{\mathscr{R}}$, а $f_1, \ldots, f_n$ — произвольные отображения из множества $\mathfrak{F}$. Положим $G_i = g(f_1(q_i), f_2(q_i), \ldots, f_n(q_i))$, $i = 1, \ldots, k$. Покажем, что набор $G = (G_1, \ldots, G_k)$ принадлежит множеству $\mathscr{S}$. Действительно, рассмотрим отображение $\xi : \mathscr{Q} \to \mathscr{R}^n$, такое что $\xi(q) = (f_1(q), \ldots, f_n(q))$ для каждого $q \in \mathscr{Q}$. Так как все отображения $f_1, \ldots, f_n$ монотонны, отображение ξ также монотонно. Тогда набор G можно записать следующим образом: $G = (g(\xi(q_1)), g(\xi(q_2)), \ldots, g(\xi(q_k)))$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathscr{Q} \to \mathscr{R}$, такое что $\varphi(q) = g(\xi(q))$ для каждого $q \in \mathscr{Q}$. Так как функция g является монотонным отображением $\mathscr{R}^n \to \mathscr{R}$, отображение φ монотонно, а значит выполняется соотношение $G = (\varphi(q_1), \ldots, \varphi(q_k)) \in \mathscr{S}$. Лемма доказана.

1.3. Доопределение частичных функций и монотонных отображений. Три следующих леммы обобщают некоторые утверждения из работы [47]. Леммы 1.2 и 1.3 являются обобщениями леммы 2, а лемма 1.4 — обобщением леммы 5 из [47].

Будем рассматривать некоторое множество $\mathscr{P}$ из семейства $\mathbb{A}$, содержащее шестерку элементов $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, образующих двойной квадрат. Положим $\mathscr{P}' = \{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', 1\}$.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathscr{Q}$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathscr{Q}' \subset \mathscr{Q}$, f' — некоторое монотонное отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}'$, и в $\mathscr{Q}$ не существует зигзага для f'. Тогда существует монотонное доопределение отображения f' на множество $\mathscr{Q}$.*

Доказательство. Построим монотонное отображение f, определив для каждого $\varepsilon \in \mathscr{P}$ множество $\mathscr{H}_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon)$.

Для каждого $q \in \mathscr{Q}$ положим $f^*(q) = \{f'(y) \mid y \in \mathscr{Q}', y \geqslant q\}$, $f_*(q) = \{f'(y) | y \in \mathscr{Q}', y \leqslant q\}$. Заметим, что $f^*(q), f_*(q) \subseteq \mathscr{P}$. Далее положим

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_0 &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f_*(q) \subset \{0\}\},\\
\mathscr{H}_1 &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f^*(q) \subset \{1\}\} \setminus \mathscr{H}_0,\\
\mathscr{H}_\alpha &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f_*(q) \subset \{0, \alpha\}\} \setminus (\mathscr{H}_0 \cup \mathscr{H}_1),\\
\mathscr{H}_{\alpha'} &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f_*(q) \subset \{0, \alpha'\}\} \setminus (\mathscr{H}_0 \cup \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_\alpha),\\
\mathscr{H}_\gamma &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f^*(q) \subset \{1, \gamma\}\} \setminus (\mathscr{H}_0 \cup \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_\alpha \cup \mathscr{H}_{\alpha'}),\\
\mathscr{H}_{\gamma'} &= \{q \in \mathscr{Q} \mid f^*(q) \subset \{1, \gamma'\}\} \setminus (\mathscr{H}_0 \cup \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_\alpha \cup \mathscr{H}_{\alpha'} \cup \mathscr{H}_\gamma),\\
\mathscr{H} &= \mathscr{Q} \setminus (\mathscr{H}_0 \cup \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_\alpha \cup \mathscr{H}_{\alpha'} \cup \mathscr{H}_\gamma \cup \mathscr{H}_{\gamma'}).
\end{aligned}$$

Далее, определим граф G следующим образом: вершинами графа являются элементы множества $\mathscr{H}$, а для любой пары элементов y, z из $\mathscr{H}$ ребро (y, z) существует тогда и только тогда, когда элементы y и z сравнимы. Обозначим через $\mathscr{H}_\beta$ объединение связных компонент графа, содержащих хотя бы один элемент из множества $\{f'^{-1}(\beta)\}$, положим $\mathscr{H}_{\beta'} = \mathscr{H} \setminus \mathscr{H}_\beta$. Таким образом, построено разбиение множества $\mathscr{Q}$ на непересекающиеся подмножества $\mathscr{H}_\varepsilon$.

Определим отображение $f : \mathscr{Q} \to \mathscr{P}$: для каждого элемента $q \in \mathscr{Q}$ положим $f(q) = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $q \in \mathscr{H}_\varepsilon$ (заметим, что так как подмножества $\mathscr{H}_\varepsilon$ не пересекаются, определение корректно). Из определения f следует, что если для элемента $z\in\mathscr{Q}$ выполняется равенство $f(z)=\alpha$, то $\alpha\in f_*(z)$, так как в этом случае $z\in\mathscr{H}_\alpha$, а значит выполняются соотношения $f_*(z)\subset\{0,\alpha\}$ и $f_*(z)\not\subset\{0\}$. Аналогично, если $f(z)=\alpha'$, то $\alpha'\in f_*(z)$, если $f(z)=\gamma$, то $\gamma\in f^*(z)$, если $f(z)=\gamma'$, то $\gamma'\in f^*(z)$. Пользуясь этими соотношениями, а также в силу того, что для любых элементов z_1,z_2 из $\mathscr{Q}$, таких что $z_1<z_2$, выполняются соотношения $f_*(z_1)\subseteq f_*(z_2)$ и $f^*(z_2)\subseteq f^*(z_1)$, нетрудно показать, что отображение f монотонно. Кроме того, легко видеть, что для каждого $z\in\mathscr{Q}'$, такого что $f(z)\neq\beta'$, выполняется равенство $f(z)=f'(z)$. Покажем, что $f(z)=f'(z)$ для тех $z\in\mathscr{Q}'$, для которых $f'(z)=\beta'$. Для этого достаточно показать, что в графе G нет компоненты, одновременно содержащей элементы из множеств $\{f'^{-1}(\beta)\}$ и $\{f'^{-1}(\beta')\}$.

Из определения $\mathscr{H}$ следует, что для каждого элемента $z\in\mathscr{H}$ выполняются соотношения $f_*(z)\not\subset\{0,\alpha\}$, $\{0,\alpha'\}$ и $f^*(z)\not\subset\{1,\gamma\}$, $\{1,\gamma'\}$. В силу монотонности f' это эквивалентно тому, что выполняются следующие два условия:

(1) $\beta\in f_*(z)$ или $\beta'\in f_*(z)$ или $\{\alpha,\alpha'\}\subset f_*(z)$,

(2) $\beta\in f^*(z)$ или $\beta'\in f^*(z)$ или $\{\gamma,\gamma'\}\subset f^*(z)$.

Предположим, что в графе G найдется компонента, содержащая и элемент X_m из $\{f'^{-1}(\beta)\}$, и элемент $X_{m'}$ из $\{f'^{-1}(\beta')\}$. Это значит, что в графе существует путь (цепочка ребер) между этими элементами. Рассмотрим кратчайший из таких путей (т. е. проходящий через наименьшее число вершин). Если x,y,z — последовательные вершины этого пути, то не выполняется ни одно из соотношений $x<y<z$ и $x>y>z$, так как в противном случае существовал бы более короткий путь, не проходящий через вершину y. Следовательно, если обозначить последовательность вершин этого пути через $X_m,\ldots,X_{m'}$, то для этих элементов будут выполнены условия a), c), d), e) из определения зигзага. Так как $X_m,\ldots,X_{m'}$ — кратчайший путь между элементами X_m и $X_{m'}$, то в последовательности $X_m,\ldots,X_{m'}$ нет элементов множества $\mathscr{Q}'$, отличных от X_m и $X_{m'}$. Отсюда следует, что выполняется условие b). Далее, в силу того, что мы рассматриваем кратчайший путь, для всех X_{2i}, $m<2i<m'$, из трех возможных соотношений в (2) выполняется только $\{\gamma,\gamma'\}\subset f^*(z)$, следовательно, выполняется условие f). Аналогично, для всех X_{2i+1}, $m<2i+1<m'$, из трех возможных соотношений в (1) выполняется только $\{\alpha,\alpha'\}\subset f_*(z)$, значит выполняется условие g). Таким образом, последовательность $X_m,\ldots,X_{m'}$ является зигзагом для f', что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathscr{Q}$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathscr{Q}'\subset\mathscr{Q}$, $\mathscr{P}\in\mathbb{A}_2$, f' — некоторое монотонное отображение $\mathscr{Q}'\to\mathscr{P}$, и в $\mathscr{Q}$ существует зигзаг для f'. Тогда монотонного доопределения отображения f' на множество $\mathscr{Q}$ не существует.*

Доказательство. Пусть $X_m\ldots,X_{m'}$ — зигзаг для f' в $\mathscr{Q}$. Предположим, что существует f — монотонное доопределение отображения f' на множество $\mathscr{Q}$. Обозначим через k наименьшее число из $m,m+1,\ldots,m'$, такое что значение $f(X_k)$ не сравнимо с β. В силу равенств $f(X_m)=\beta$, $f(X_{m'})=\beta'$, выполняется неравенство $m<k\leqslant m'$. Положим $f_k=f(X_k)$, $f_{k-1}=f(X_{k-1})$. Так как элементы f_k и β несравнимы, то в силу свойства (a) множеств ширины два элемент f_k сравним с β'. В силу монотонности отображения f выполняются неравенства $\alpha,\alpha'<f_i<\gamma,\gamma'$, где $i=k-1,k$. Возможны два случая : $f_k\leqslant\beta'$ и $f_k>\beta'$.

Пусть $f_k\leqslant\beta'$. Так как β' — минимальная верхняя грань элементов α,α', то из неравенства $f_k>\alpha,\alpha'$ следует $f_k=\beta'$. Предположим, что k четно. Тогда $f_{k-1}\leqslant f_k$, значение f_{k-1} согласно выбору k сравнимо с β, и если $f_{k-1}\geqslant\beta$, получим, что $f_k\geqslant f_{k-1}\geqslant\beta$, что противоречит выбору номера k. Поэтому

$f_{k-1} < \beta$. Но тогда, в силу неравенства $f_{k-1} > \alpha, \alpha'$, получаем противоречие с тем, что β — минимальная верхняя грань элементов α, α'. Пусть теперь k нечетно. Тогда $f_{k-1} \geqslant f_k$, и если выполняется $f_{k-1} \leqslant \beta$, то $f_k \leqslant f_{k-1} \leqslant \beta$, что противоречит выбору номера k. Поэтому $f_{k-1} > \beta$. Получили, что выполняются неравенства $\beta, \beta' < f_{k-1} < \gamma, \gamma'$, которые противоречат тому, что γ, γ' — минимальные верхние грани элементов β, β'. Таким образом, неравенство $f_k \leqslant \beta'$ выполняться не может. Аналогично можно показать, что неравенство $f_k > \beta'$ выполняться также не может. Полученное противоречие показывает, что монотонного доопределения отображения f' на множество $\mathscr{Q}$ не существует. Лемма доказана.

Пусть $n \geqslant 3$. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{P}}^{2n}$ подмножество множества $\mathscr{P}^{2n}$, состоящее из следующих наборов:

$$\widetilde{\alpha} = \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{2n}, \quad \widetilde{\alpha}' = \underbrace{\alpha', \ldots, \alpha'}_{2n},$$

$$\widetilde{\beta} = \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, \quad \widetilde{\beta}' = \underbrace{\beta', \ldots, \beta'}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n},$$

$$\widetilde{\gamma}_1 = \underbrace{1, \gamma, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{1, \beta, \gamma, \ldots, \gamma, \beta'}_{n}, \quad \widetilde{\gamma}' = \underbrace{\gamma, \ldots, \gamma}_{2n},$$

$$\widetilde{\gamma}_2 = \underbrace{\gamma, 1, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{\beta', 1, \beta, \gamma, \ldots, \gamma, \gamma}_{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\widetilde{\gamma}_i = \underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, \overset{i}{\to} 1, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, \beta', \overset{i}{\to} 1, \beta, \gamma, \ldots, \gamma}_{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\widetilde{\gamma}_n = \underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, 1}_{n}, \underbrace{\beta, \gamma, \ldots, \gamma, \beta', 1}_{n}.$$

Другими словами, для каждого i, $i = 2, \ldots, n-1$, наборы $\widetilde{\gamma}_i$ определяются следующим образом: $\widetilde{\gamma}_i[i] = \widetilde{\gamma}_i[i+n] = 1$, $\widetilde{\gamma}_i[i+n-1] = \beta'$, $\widetilde{\gamma}_i[i+n+1] = \beta$, $\widetilde{\gamma}_i[j] = \gamma$ для всех остальных значений j, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$.

Далее, обозначим через $\widetilde{\varphi}^{2n}$ частичную функцию, зависящую от $2n$ переменных, определенную на множестве $\widetilde{\mathscr{P}}^{2n}$ следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}) = \alpha, \ \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}') = \alpha',$$
$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}) = \beta, \ \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}') = \beta',$$
$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_1) = \ldots = \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_n) = \gamma, \ \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}') = \gamma'.$$

Л е м м а 1.4. *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$. Тогда в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ существует функция, являющаяся доопределением частичной функции $\widetilde{\varphi}^{2n}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что частичная функция $\widetilde{\varphi}^{2n}$ монотонна на множестве $\widetilde{\mathscr{P}}^{2n}$. Предположим, что ее невозможно доопределить до монотонной функции на множество $\mathscr{P}^{2n}$. В этом случае в силу леммы 1.2 в $\mathscr{P}^{2n}$ существует зигзаг для $\widetilde{\varphi}^{2n}$. Обозначим элементы зигзага через $x_m, \ldots, x_{m'}$. Согласно определению зигзага, выполняются следующие условия: $x_m = \widetilde{\beta}$, $x_{m'} = \widetilde{\beta}'$, для каждого i, такого что $m < 2i+1 < m'$, выполняется неравенство $x_{2i+1} > \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}'$, для каждого i, такого что $m < 2i < m'$, выполняется неравенство $x_{2i} < \widetilde{\gamma}_{k_i}, \widetilde{\gamma}'$, где $k_i \in \{1, \ldots, n\}$. Из вида последних n компонент элементов $\widetilde{\beta}, \widetilde{\beta}', \widetilde{\gamma}_i, \widetilde{\gamma}'$ следует, что $m=0$ и m' четно. Следовательно, в зигзаге имеется ровно $\frac{m'}{2}-1$ четных элементов, отличных от x_0 и $x_{m'}$; обозначим число $\frac{m'}{2}-1$ через M.

Пусть $x_2<\widetilde{\gamma}_{k_1}, x_4<\widetilde{\gamma}_{k_2}, \ldots, x_{m'-2}<\widetilde{\gamma}_{k_M}$. Из вида первых n компонент наборов из $\widetilde{\mathscr{P}}^{2n}$ следует, что множество $\{\widetilde{\gamma}_{k_i}|\widetilde{\gamma}_{k_i}>x_{2i},\ i=1,\ldots,M\}$ совпадает с множеством $\{\widetilde{\gamma}_1,\ldots,\widetilde{\gamma}_n\}$. Обозначим через r тот номер из $1,2,\ldots,n$, который в первый раз появляется последним в последовательности $k_1\ldots,k_M$. Тогда в последовательности $k_1\ldots,k_M$ найдется участок, начинающийся с $r-1$ и заканчивающийся $r+1$ (индексы берутся по модулю n), или наоборот, причем между номерами $r-1$ и $r+1$ номер r не встречается. Для определенности пусть в последовательности $\widetilde{\gamma}_{k_1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{k_M}$ есть отрезок $\widetilde{\gamma}_{r-1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{r+1}$. Без ограничения общности будем считать, что этот отрезок кратчайший, т. е. в нем нет элементов $\widetilde{\gamma}_{r-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{r+1}$, отличных от первого и последнего. Пусть $r-1=k_i,\ r+1=k_j$. Рассмотрим последовательность $(n+r)$-х компонент наборов из этого отрезка: она имеет вид $\beta,\gamma,\ldots,\gamma,\beta'$ (действительно, в силу выбора отрезка в этой последовательности между β и β' не встречается ни 1, ни β, ни β', так как набора $\widetilde{\gamma}_r$ в отрезке $\widetilde{\gamma}_{r-1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{r+1}$ нет, а у всех остальных наборов $\widetilde{\gamma}_i$, $i\neq r, r-1, r+1$, $(n+r)$-е компоненты равны γ).

Рассмотрим отображение $e=e^{2n}_{n+r}:\mathscr{P}^{2n}\to\mathscr{P}$, которое каждому набору из $\mathscr{P}^{2n}$ ставит в соответствие его $(n+r)$-ю компоненту. Очевидно, что это отображение монотонно на множестве $\mathscr{P}^{2n}$. Далее, рассмотрим множество $\mathscr{R}=\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}',\widetilde{\gamma}_{r-1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{r+1},\widetilde{\gamma}'\}$ и отображение $e'=e|_{\mathscr{R}}$. Из проведенных рассуждений следует, что последовательность $\widetilde{\gamma}_{r-1},x_{2i+1},x_{2i+2},\ldots,x_{2j-2},x_{2j-1},\widetilde{\gamma}_{r+1}$ является зигзагом в $\mathscr{P}^{2n}$ для отображения e'. В силу леммы 1.3 это означает, что отображение e' невозможно доопределить до монотонного отображения на множество $\mathscr{P}^{2n}$, что противоречит тому, что e' — ограничение монотонного отображения e. Следовательно, зигзага в $\mathscr{P}^{2n}$ для функции $\widetilde{\varphi}^{2n}$ не существует, а значит функцию $\widetilde{\varphi}^{2n}$ можно доопределить до монотонной функции φ^n на множество $\mathscr{P}^{2n}$. Лемма доказана.

§ 2. Достаточные условия конечной порожденности классов всех функций, монотонных относительно множеств ширины два

В этом параграфе устанавливается достаточное условие существования конечного базиса в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ всех функций, монотонных относительно некоторого частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ ширины два с наименьшим и наибольшим элементами (теорема 2.3). Доказательство этого утверждения основано на доказательстве существования в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ некоторой мажоритарной функции (теорема 2.2).

Обозначим через $\mathbb{A}_2^{(1)}$ семейство всех таких частично упорядоченных множеств $\mathscr{P}$ из семейства $\mathbb{A}_2$ (частично упорядоченных множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами), для которых выполняется следующее условие:

$(*)$ для любой пары несравнимых элементов x_1, x_2 в $\mathscr{P}$ существует либо $\sup(x_1,x_2)$, либо $\sup^2(x_1,x_2)$.

2.1. Вспомогательные утверждения. В леммах 2.1–2.12 рассматривается некоторое множество $\mathscr{P}\in\mathbb{A}_2^{(1)}$ и устанавливается ряд соотношений для элементов этого множества.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\} \in \widetilde{\mathscr{P}}^2$, *элементы* $\{x_1, x_2\}$ *и* $\{y_1, y_2\}$ *несравнимы относительно частичного порядка* $\ll$. *Тогда найдутся такие перестановки* π *и* σ *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняются соотношения* $x_{\pi(1)} < y_{\sigma(1)}$, $x_{\pi(2)} > y_{\sigma(2)}$, *элементы* $x_{\pi(1)}$ *и* $y_{\sigma(2)}$ *несравнимы и элементы* $x_{\pi(2)}$ *и* $y_{\sigma(1)}$ *несравнимы.*

Доказательство. Утверждение следует из определения частичного порядка $\ll$ и свойства (a) множеств ширины два.

Лемма 2.2. *Пусть элементы* u_1, u_2 *несравнимы, элементы* x_1, x_2 *несравнимы, выполняется неравенство* $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ *и существуют элементы* $w = \sup^2(u_1, u_2)$ *и* $z = \sup^2(x_1, x_2)$. *Тогда выполняется неравенство* $w \leqslant z$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что элементы u_1 и u_2 1-несравнимы, и элементы x_1 и x_2 1-несравнимы. Пусть $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$. Из соотношения $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ следует, что элементы y_1 и y_2 являются верхними гранями элементов u_1, u_2. Поэтому выполняется неравенство $\{v_1, v_2\} \ll \{y_1, y_2\}$. Тогда $z = \sup(y_1, y_2)$ является верхней гранью элементов v_1, v_2, следовательно, выполняется неравенство $z \geqslant w = \sup(v_1, v_2)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть элементы* u_1, u_2 1*-несравнимы, элементы* x_1, x_2 1*-несравнимы, элементы* $\{u_1, u_2\}$ *и* $\{x_1, x_2\}$ *несравнимы относительно* $\ll$, *причем выполняются неравенства* $(x_1, u_2) > (u_1, x_2)$. *Пусть* $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$. *Тогда найдутся такие перестановки* π *и* σ *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняются неравенства* $\{y_{\pi(1)}, v_{\sigma(2)}\} \ll \{y_1, y_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ *и* $\{y_1, y_2\}$, $\{v_1, v_2\} \ll \{v_{\sigma(1)}, y_{\pi(2)}\}$ *и соотношения* $\{y_{\pi(1)}, v_{\sigma(2)}\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, x_2)$ *и* $\{v_{\sigma(1)}, y_{\pi(2)}\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что элементы x_1 и u_2 несравнимы и элементы x_2 и u_1 несравнимы, а также, что выполняются неравенства $y_1, y_2 > u_1$ и $v_1, v_2 > x_2$. В силу свойства (b) множеств ширины два без ограничения общности будем считать, что элементы v_1 и x_1 сравнимы, и элементы v_2 и x_2 сравнимы, элементы y_1 и u_1 сравнимы, и элементы y_2 и u_2 сравнимы, и, наконец, элементы v_1 и y_1 сравнимы, и элементы v_2 и y_2 сравнимы. Так как элементы x_1 и u_2 несравнимы, то неравенства $v_1 \leqslant x_1$ и $y_2 \leqslant u_2$ выполняться не могут, поэтому выполняются неравенства $v_1 > x_1$ и $y_2 > u_2$.

Элементы x_1 и u_2 несравнимы, поэтому неравенство $x_1 \geqslant v_2$ выполняться не может, и тогда возможны два случая: либо выполняется неравенство $v_2 > x_1$, либо элементы x_1 и v_2 несравнимы. Нетрудно показать, что если $v_2 > x_1$, то $v_2 = y_2$, а если элементы v_2 и x_1 несравнимы, то $v_2 < y_2$ а элементы v_2 и y_1 несравнимы.

Далее, так как по условию элементы x_1 и u_2 несравнимы, то неравенство $u_2 \geqslant y_1$ выполняться не может, поэтому возможны два случая: либо выполняется неравенство $y_1 > u_2$, либо элементы y_1 и u_2 несравнимы. Рассуждая так же, как для элементов v_2 и x_1, нетрудно показать, что из соотношения $y_1 > u_2$ следует равенство $y_1 = v_1$, а если элементы y_1 и u_2 несравнимы, то выполняется неравенство $y_1 < v_1$, а элементы y_1 и v_2 несравнимы.

Таким образом, возможны четыре случая.

1. Выполняются неравенства $v_2 > x_1$, $y_1 > u_2$. Тогда $v_1 = y_1$, $v_2 = y_2$.

2. Выполняется неравенство $v_2 > x_1$, а элементы y_1 и u_2 несравнимы. Тогда $v_1 > y_1$, $v_2 = y_2$, а элементы y_1 и v_2 несравнимы.

3. Элементы v_2 и x_1 несравнимы, и выполняется неравенство $y_1 > u_2$. Тогда $v_1 = y_1$, $v_2 < y_2$, а элементы y_1 и v_2 несравнимы.

4. Элементы v_2 и x_1 несравнимы, и элементы y_1 и u_2 несравнимы. Тогда $v_1 > y_1$, $v_2 < y_2$, а элементы y_1 и v_2 несравнимы. В этом случае нетрудно показать, что элементы v_1 и y_2 также несравнимы.

Очевидно, что во всех четырех случаях выполняются неравенства $\{y_1, v_2\} \ll \{y_1, y_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ и $\{y_1, y_2\}, \{v_1, v_2\} \ll \{v_1, y_2\}$. Покажем теперь, что выполняются соотношения $\{y_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, x_2)$ и $\{v_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$. Проведем подробные рассуждения для случая 4, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Покажем, что $\{v_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$. Очевидно, что элементы v_1 и y_2 являются верхними гранями элементов x_1, u_2. Пусть r_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1, u_2, такая что $r_1 \leqslant v_1$. Так как r_1 является верхней гранью элементов u_1, u_2, неравенство $r_1 < v_1$ выполняться не может, а значит выполняется равенство $r_1 = v_1$. Тогда в силу свойства (a) верхних граней существует r_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1, u_2, несравнимая с v_1, такая, что $r_2 \leqslant y_2$. В силу свойства (a) множеств ширины два элементы r_2 и v_2 сравнимы. Так как элементы x_1 и v_2 несравнимы, неравенство $r_2 \leqslant v_2$ выполняться не может, значит выполняется неравенство $r_2 > v_2$. Отсюда следует, что выполняются неравенства $r_2 > u_2 > x_2$, а значит r_2 является верхней гранью элементов x_1, x_2. Поэтому неравенство $r_2 < y_2$ выполняться не может, следовательно, выполняется равенство $r_2 = y_2$.

Далее, покажем, что $\{y_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, x_2)$. Очевидно, что элементы y_1 и v_2 являются верхними гранями элементов u_1 и x_2. Пусть s_1 — минимальная верхняя грань элементов u_1, x_2, такая что $s_1 \leqslant y_1$. Так как элементы u_1 и u_2 несравнимы, неравенство $s_1 \leqslant u_2$ выполняться не может. Так как элементы y_1 и u_2 несравнимы, неравенство $s_1 > u_2$ выполняться не может. Значит элементы s_1 и u_2 несравнимы. Тогда элементы s_1 и x_1 сравнимы, и так как элементы x_1 и x_2 несравнимы, неравенство $s_1 \leqslant x_1$ выполняться не может, значит выполняется неравенство $s_1 > x_1$. Получили, что s_1 является верхней гранью элементов x_1, x_2, значит неравенство $s_1 < y_1$ выполняться не может, следовательно, выполняется равенство $s_1 = y_1$. Тогда в силу свойства (a) верхних граней существует s_2 — минимальная верхняя грань элементов u_1, x_2, несравнимая с y_1, такая что $s_2 \leqslant v_2$. Так как элементы y_1 и u_2 несравнимы, то элементы s_2 и u_2 сравнимы, и тогда выполняется неравенство $s_2 > u_2$. Это значит, что элемент s_2 является верхней гранью элементов u_1, u_2, тогда неравенство $s_2 < v_2$ выполняться не может, а значит выполняется равенство $s_2 = v_2$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть элементы u_1, u_2 несравнимы, элементы x_1, x_2 несравнимы, элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ несравнимы относительно частичного порядка $\ll$, и существуют элементы $w = \sup^2(u_1, u_2)$ и $z = \sup^2(x_1, x_2)$. Тогда элементы w и z сравнимы.*

Доказательство. Без ограничения общности (см. лемму 2.1) будем считать, что выполняются соотношения $(u_1, x_2) < (x_1, u_2)$, элементы x_1 и u_2 несравнимы и элементы u_1 и x_2 несравнимы. Из условия следует, что элементы u_1, u_2 1-несравнимы и элементы x_1, x_2 1-несравнимы. Пусть $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$. Без ограничения общности (см. лемму 2.3) будем считать, что выполняются неравенства $\{y_1, v_2\} \ll \{y_1, y_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ и $\{y_1, y_2\}, \{v_1, v_2\} \ll \{v_1, y_2\}$, причем $y_1 \leqslant v_1$ и $y_2 \geqslant v_2$, а также соотношения $\{y_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, x_2)$, $\{v_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$.

Пусть $z = \sup(y_1, y_2) = \sup^2(x_1, x_2)$ и $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$. Из неравенства $z > y_2$ следует $z > v_2$. Так как элементы v_1 и v_2 несравнимы, неравенство $z \leqslant v_1$ выполняться не может. Поэтому либо выполняется неравенство $z > v_1$, либо элементы z, v_1 несравнимы. Если выполняется неравенство $z > v_1$, то из соотношений $z > v_1, v_2$ и $w = \sup(v_1, v_2)$ следует $z \geqslant w$, и утверждение леммы доказано. Аналогично, из неравенства $w > v_1$ следует $w > y_1$, и так как элементы y_1 и y_2 несравнимы, неравенство $w \leqslant y_2$ выполняться не может. Поэтому либо выполняется неравенство $w > y_2$, либо элементы w и y_2 несравнимы. Если выполняется неравенство $w > y_2$, то из соотношений $w > y_1, y_2$ и $z = \sup(y_1, y_2)$ следует $w \geqslant z$, и утверждение леммы также доказано.

Предположим теперь, что элементы z и v_1 несравнимы, и элементы w и y_2 несравнимы. Тогда элементы z и w несравнимы: действительно, из неравенства $z \geqslant w$ следует $z > v_1$, а из неравенства $z \leqslant w$ следует $w > y_2$, что противоречит предположениям.

Покажем, что $\{w, z\} = \overrightarrow{\sup}(y_1, v_2)$. Элементы w, z — верхние грани элементов y_1, v_2. Поэтому существует r_1 — минимальная верхняя грань элементов y_1, v_2, такая что $r_1 \leqslant w$. Так как элементы y_1 и y_2 несравнимы, неравенство $r_1 \leqslant y_2$ выполняться не может. Из неравенства $r_1 > y_2$ получаем $w \geqslant r_1 > y_2$, что противоречит предположению о том, что w, y_2 несравнимы. Значит элементы r_1 и y_2 несравнимы. Тогда элементы r_1 и v_1 сравнимы. Так как элементы v_1, v_2 несравнимы, неравенство $r_1 \leqslant v_1$ выполняться не может, а значит выполняется неравенство $r_1 > v_1$. Отсюда в силу соотношений $v_1, v_2 < r_1 \leqslant w = \sup(v_1, v_2)$ получаем, что выполняется равенство $r_1 = w$. Тогда существует r_2 — минимальная верхняя грань элементов y_1, v_2, не сравнимая с w, такая что $r_2 \leqslant z$. Элементы r_2 и y_2 сравнимы, а значит выполняется неравенство $r_2 > y_2$, и тогда из соотношений $y_1, y_2 < r_2 \leqslant z = \sup(y_1, y_2)$ получаем равенство $r_2 = z$.

Таким образом, выполняется равенство $\{z, w\} = \overrightarrow{\sup}(y_1, v_2)$, которое в силу соотношения $\{y_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, x_2)$ противоречит свойству $(*)$ множества $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$. Поэтому случай, когда элементы z и v_1 несравнимы и элементы w и y_2 несравнимы, невозможен. Лемма доказана.

Л е м м а 2.5. *Пусть элементы u_1, u_2 1-несравнимы, элементы x_1 и x_2 1-несравнимы, элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ несравнимы относительно $\ll$. Пусть выполняются неравенства $\{y_1, v_2\} \ll \{y_1, y_2\}, \{v_1, v_2\}$ и $\{y_1, y_2\}, \{v_1, v_2\} \ll \{v_1, y_2\}$, где $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$. И пусть существуют элементы $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $z = \sup^2(x_1, x_2)$. Тогда выполняется по крайней мере одно из равенств $w = \sup(v_1, y_2)$ и $z = \sup(v_1, y_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.3 выполняется соотношение $\{v_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$, значит по свойству $(*)$ множества $\mathscr{P}$ существует $\sup(v_1, y_2)$; обозначим $\sup(v_1, y_2)$ через r. Из леммы 2.4 следует, что элементы z и w сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $z \geqslant w$. Тогда выполняется неравенство $z > v_1, v_2$. Поэтому элемент z является верхней гранью элементов v_1, y_2, следовательно, выполняется неравенство $r = \sup(v_1, y_2) \leqslant z$. Далее, из неравенства $r > v_1, y_2$ следует $r > y_1, y_2$, откуда получаем $z = \sup(y_1, y_2) \leqslant r$. Следовательно, $z = r$. Аналогичными рассуждениями можно получить равенство $w = r$ в случае, когда выполняется неравенство $w \geqslant z$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.6. *Пусть a_1 и a_2 — несравнимые элементы, c — их минимальная верхняя грань, пусть y_1, y_2 — несравнимые элементы, причем $(y_1, y_2) < (a_1, a_2)$, пусть z — минимальная верхняя грань элементов y_1, y_2, и пусть элементы c и z несравнимы.*

Тогда либо $\{c, z\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$, либо существует такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения: элементы $a_{\pi(1)}$ и z несравнимы, $z > a_{\pi(2)}$, элементы $y_{\pi(1)}$ и $a_{\pi(2)}$ несравнимы, $y_{\pi(1)} < a_{\pi(1)}$, и $\{c, z\} = \overrightarrow{\sup}(y_{\pi(1)}, a_{\pi(2)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как элементы c и z несравнимы, то не может выполняться ни одно из неравенств $z \leqslant a_1$ или $z \leqslant a_2$. Поэтому возможны два случая: либо выполняются оба неравенства $z > a_1$ и $z > a_2$, либо выполняется только одно из них. Если выполняется соотношение $z > a_1, a_2$, то элемент z является верхней гранью элементов a_1, a_2. Так как любая верхняя грань элементов a_1, a_2 является также верхней гранью элементов y_1, y_2, то в силу того, что z — минимальная верхняя грань элементов y_1, y_2, элемент z будет также минимальной верхней гранью элементов a_1, a_2. Таким образом, выполняется соотношение $\{c, z\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$.

Пусть теперь выполняется только одно из неравенств $z > a_1$ или $z > a_2$. Без ограничения общности будем считать, что выполняется неравенство $z > a_2$, а элементы z и a_1 несравнимы. Неравенство $a_2 \leqslant y_1$ выполняться не может, а если выполняется неравенство $a_2 > y_1$, то a_2 — верхняя грань элементов y_1, y_2, что в силу неравенства $z > a_2$ противоречит предположению о том, что z — минимальная верхняя грань y_1, y_2. Поэтому элементы y_1 и a_2 несравнимы. По условию леммы выполняется неравенство $y_1 \leqslant a_1$. Так как z не является верхней гранью элементов a_1, a_2, то равенство $y_1 = a_1$ невозможно, значит выполняется неравенство $y_1 < a_1$. Легко видеть, что z — это минимальная верхняя грань элементов y_1 и a_2. Покажем, что c — минимальная верхняя грань элементов y_1 и a_2. Элемент c является верхней гранью элементов y_1, a_2. Поэтому найдется c_1 — минимальная верхняя грань этих элементов, несравнимая с элементом z и такая, что выполняется неравенство $c_1 \leqslant c$. Но тогда, так как элементы a_1 и z несравнимы, элементы a_1 и c_1 сравнимы. Так как элементы a_1 и a_2 несравнимы, неравенство $c_1 \leqslant a_1$ выполняться не может, значит выполняется неравенство $c_1 > a_1$. И тогда из неравенств $a_1, a_2 < c_1 \leqslant c$ в силу того, что c — минимальная верхняя грань элементов a_1 и a_2 следует равенство $c_1 = c$. Таким образом, $\{z, c\} = \overrightarrow{\sup}(y_1, a_2)$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть a_1 и a_2 — несравнимые элементы, c — их минимальная верхняя грань, пусть y_1, y_2 — несравнимые элементы, выполняется неравенство $(y_1, y_2) < (a_1, a_2)$, и пусть z — минимальная верхняя грань элементов y_1, y_2. Тогда либо выполняется неравенство $c \geqslant z$, либо элементы c и z несравнимы и в этом случае существут элементы $\sup(c, z)$ и $\sup^2(y_1, y_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как любая верхняя грань элементов a_1, a_2 является также верхней гранью элементов y_1, y_2, то в силу того, что z — минимальная верхняя грань элементов y_1, y_2, соотношение $c < z$ невозможно. Если же элементы c и z несравнимы, то по лемме 2.6 найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что $\{c, z\} = \overrightarrow{\sup}(y_{\pi(1)}, a_{\pi(2)})$, а значит в силу свойства $(*)$ множества $\mathscr{P}$ существует $\sup(c, z)$. Кроме того, если элементы c и z несравнимы, то элемент c является верхней гранью элементов y_1, y_2, и тогда, по свойству (a) верхних граней, элементы y_1, y_2 имеют минимальную верхнюю грань z_1, не сравнимую с z, такую что $z_1 \leqslant c$. А значит существует $\sup^2(y_1, y_2)$. Таким образом, утверждение доказано.

Л е м м а 2.7. *Пусть a_1, a_2 — несравнимые элементы, b_1 — их минимальная верхняя грань, и пусть для некоторого элемента c выполняются соотношения $c > a_1, a_2$, элементы b_1 и c несравнимы.*

Тогда элементы a_1, a_2 имеют минимальную верхнюю грань $b_2 \neq b_1$, выполняется неравенство $c \geqslant b_2$, существует элемент $d = \sup^2(a_1, a_2)$ и либо элементы c и d несравнимы, либо выполняется неравенство $d > c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству (a) верхних граней элементы a_1 и a_2 имеют две минимальные верхние грани, а значит либо элемент c — минимальная верхняя грань элементов a_1, a_2, либо $\overrightarrow{\sup}(a_1, a_2) = \{b_1, b_2\}$, где $b_2 < c$. В обоих случаях по свойству $(*)$ множества $\mathscr{P}$ существует элемент $d = \sup^2(a_1, a_2)$. Неравенство $c \geqslant d$ противоречит тому, что элементы c и b_1 несравнимы. Значит либо выполняется неравенство $d > c$, либо элементы d и c несравнимы. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть* a_1 *и* a_2 — 1*-несравнимые элементы,* $\{b_1, b_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$, $c = \sup^2(a_1, a_2)$, *пусть для некоторого элемента* d *выполняется неравенство* $d > a_1, a_2$, *а элементы* d *и* c *несравнимы.*

Тогда существует такая перестановка π *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняются соотношения* $d > b_{\pi(1)}$, *элементы* d *и* $b_{\pi(2)}$ *несравнимы, и множества минимальных верхних граней элементов* d *и* $b_{\pi(2)}$ *и минимальных верхних граней элементов* d *и* c *совпадают.*

Доказательство. Так как по условию элементы $c = \sup(b_1, b_2)$ и d несравнимы, ни одно из неравенств $d \leqslant b_1$ или $d \leqslant b_2$, а также неравенство $d > b_1, b_2$ выполняться не может. Поэтому найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения $d > b_{\pi(1)}$, а элементы d и $b_{\pi(2)}$ несравнимы. Далее, для любого элемента x — верхней грани элементов d и $b_{\pi(2)}$ будет выполнено $x > b_1, b_2$, а значит $x \geqslant c = \sup(b_1, b_2)$. То есть любая верхняя грань элементов d и $b_{\pi(2)}$ также является верхней гранью элементов d и c. Обратно: любая верхняя грань элементов d и c также является верхней гранью элементов d и $b_{\pi(2)}$. Следовательно минимальные верхние грани элементов d и $b_{\pi(2)}$ совпадают с минимальными верхними гранями элементов d и c. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть* a_1 *и* a_2 — 1*-несравнимые элементы,* $\{b_1, b_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$, $c = \sup^2(a_1, a_2) = \sup(b_1, b_2)$, *пусть* $d > b_1$, *элементы* d *и* c *несравнимы, и пусть* e — *не сравнимый с* d *элемент, такой что выполняются неравенства* $a_1, a_2 < e < c$.

Тогда множества минимальных верхних граней элементов d *и* e *и минимальных верхних граней элементов* d *и* c *совпадают.*

Доказательство. Из условия следует, что элементы d и b_2 несравнимы. Легко видеть, что выполняется неравенство $e \geqslant b_2$, а элементы e и b_1 несравнимы. Пусть x — верхняя грань элементов d и e. Очевидно, что x является также верхней гранью элементов d и b_2, а значит, по лемме 2.8, верхней гранью элементов d и c. Обратно, любая верхняя грань элементов d и c является верхней гранью элементов d и e. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *Пусть элементы* x_1 *и* x_2 1*-несравнимы,* $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, *элементы* v_1, v_2 *несравнимы, существует* $w = \sup(v_1, v_2)$, *и выполняются следующие соотношения:* $v_2 > x_2$, *элементы* v_2 *и* y_1 *несравнимы, элементы* w *и* y_1 *несравнимы, и элементы* v_1 *и* x_2 *несравнимы. Тогда* $\{y_1, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, x_2)$.

Доказательство. По условию элементы v_1 и v_2 несравнимы и элементы y_1 и v_2 несравнимы, поэтому элементы y_1 и v_1 сравнимы, легко видеть, что выполняется неравенство $y_1 > v_1$. Далее, по условию элементы v_1 и x_2 несравнимы, и элементы x_1 и x_2 несравнимы, поэтому элементы x_1 и v_1 сравнимы. Покажем, что если выполняется неравенство $x_1 > v_1$, то элементы x_1 и v_2 несравнимы. Действительно, из неравенства $x_1 > v_2$ в силу соотношения $v_2 > x_2$ следует неравенство $x_1 > x_2$, которое противоречит тому, что элементы x_1 и x_2 несравнимы. А из неравенства $x_1 \leqslant v_2$ следует неравенство $v_2 > v_1$, которое противоречит тому, что элементы v_1 и v_2 несравнимы. Таким образом, либо выполняется неравенство $x_1 \leqslant v_1$, либо неравенство $x_1 > v_1$, и в этом случае элементы x_1 и v_2 несравнимы.

Легко видеть, что элементы w и y_1 являются верхними гранями x_2, v_1. Пусть q — минимальная верхняя грань элементов x_2, v_1. Рассмотрим два случая.

Пусть элементы q и v_2 сравнимы. Тогда, так как выполняется неравенство $q > v_1$, легко видеть, что выполняется неравенство $q > v_2$, поэтому $q \geqslant w = \sup(v_1, v_2)$. Так как w — верхняя грань элементов x_2, v_1, из неравенства $q \geqslant w$ следует равенство $q = w$.

Пусть теперь элементы q и v_2 несравнимы. По условию v_2 и y_1 несравнимы, значит элементы q и y_1 сравнимы. Покажем, что выполняется неравенство $q > x_1$. Действительно, как было показано выше, возможны два случая: либо выполняется неравенство $x_1 \leqslant v_1$, либо неравенство $x_1 > v_1$. В первом случае из неравенства $q > v_1$ следует неравенство $q > x_1$. Во втором случае, как было показано выше, элементы x_1 и v_2 несравнимы, поэтому элементы q и x_1 сравнимы, и тогда легко видеть, что из неравенства $q > x_2$ следует неравенство $q > x_1$. Таким образом, выполняется неравенство $q > x_1, x_2$, поэтому, учитывая, что элементы q и y_1 сравнимы, а y_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, получаем неравенство $q \geqslant y_1$. Из последнего неравенства в силу того, что y_1 — верхняя грань элементов x_2 и v_1, следует равенство $q = y_1$. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Пусть элементы x_1 и x_2 несравнимы, элементы y_1 и y_2 несравнимы, выполняются неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \geqslant y_2$. Тогда элементы x_1 и y_2 несравнимы и элементы x_2 и y_1 несравнимы.*

Доказательство. Покажем, что элементы x_1 и y_2 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $x_1 \geqslant y_2$, то в силу неравенства $x_1 \leqslant y_1$ выполняется неравенство $y_1 \geqslant y_2$, что невозможно, так как по условию элементы y_1 и y_2 несравнимы. Если же выполняется неравенство $x_1 \leqslant y_2$, то в силу неравенства $x_2 \geqslant y_2$ выполняется неравенство $x_1 \leqslant x_2$, что невозможно, так как по условию элементы x_1 и x_2 несравнимы. Таким образом, элементы x_1 и y_2 несравнимы. Для элементов x_2 и y_1 рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Лемма 2.12. *Пусть элементы x_1 и x_2 несравнимы, элементы y_1 и y_2 несравнимы, выполняются неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \geqslant y_2$. Пусть z — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x_2, такая что элементы z и y_1 несравнимы. Тогда z является минимальной верхней гранью элементов x_1 и y_2.*

Доказательство. По лемме 2.11 элементы x_1 и y_2 несравнимы и элементы x_2 и y_1 несравнимы. В силу неравенств $z > x_1$ и $z > x_2 \geqslant y_2$ элемент z является верхней гранью элементов x_1 и y_2. Поэтому существует минимальная верхняя грань q элементов x_1 и y_2, такая что $q \leqslant z$. Предположим, что элементы q и y_1 сравнимы. Если выполняется неравенство $q \leqslant y_1$, то из неравенства $q > y_2$ следует неравенство $y_1 > y_2$, что противоречит условию. Поэтому выполняется неравенство $q > y_1$. Тогда в силу неравенства $q \leqslant z$ выполняется неравенство $z > y_1$, что противоречит условию леммы. Следовательно, элементы q и y_1 несравнимы. Тогда, так как по условию элементы y_1 и x_2 несравнимы, то элементы q и x_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $q \leqslant x_2$, то из неравенства $q > x_1$ следует неравенство $x_2 > x_1$, что противоречит условию. Поэтому выполняется неравенство $q > x_2$. Из этого неравенства в силу того, что по условию z — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x_2, следует, что выполняется неравенство $q \geqslant z$. Таким образом, $q = z$. Лемма доказана.

2.2. Операторы φ и ψ и их свойства. Всюду в п. 2.2 рассматривается некоторое множество $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$.

Пусть a_1, a_2 — несравнимые элементы, c — их минимальная верхняя грань. Пусть для каждого значения $i = 1, \ldots, m$ $(m \geqslant 1)$ элементы y_1^i, y_2^i несравнимы, выполняется неравенство $(y_1^i, y_2^i) < (a_1, a_2)$, z^i — минимальная верхняя грань элементов y_1^i, y_2^i, элементы c и z^i несравнимы, z^i не является верхней гранью элементов a_1, a_2. Множество всех таких пар элементов (y_1^i, y_2^i) обозначим через $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$.

Утверждение 2.1 (свойства множества $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$).

1. *Для каждого $i = 1, \ldots, m$ существуют $\sup(c, z^i)$ и $\sup^2(y_1^i, y_2^i)$.*

2. *Найдется такая перестановка $\pi = \pi(a_1, a_2, c)$ на множестве $\{1, 2\}$, что для каждого i, $i = 1, \ldots, m$, выполняются следующие соотношения:*

элементы z^i *и* $a_{\pi(1)}$ *несравнимы,* $z^i > a_{\pi(2)}$*, элементы* $a_{\pi(2)}$ *и* $y^i_{\pi(1)}$ *несравнимы,* $y^i_{\pi(1)} < a_{\pi(1)}$*,* $\{z^i, c\} = \overrightarrow{\sup}(y^i_{\pi(1)}, a_{\pi(2)})$.

3. *Все элементы* $z^1, \ldots, z^m$ *сравнимы между собой, и все элементы* $y^1_{\pi(1)}, \ldots, y^m_{\pi(1)}$*, где* $\pi = \pi(a_1, a_2, c)$*, сравнимы между собой.*

Доказательство. Первое утверждение выполнено в силу следствия из леммы 2.6. Далее, по лемме 2.6 для каждого i, $i = 1, \ldots, m$, найдется такая перестановка $\pi = \pi(i)$ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения: элементы z^i и $a_{\pi(1)}$ несравнимы, $z^i > a_{\pi(2)}$, элементы $a_{\pi(2)}$ и $y^i_{\pi(1)}$ несравнимы, $y^i_{\pi(1)} < a_{\pi(1)}$, $\{z^i, c\} = \overrightarrow{\sup}(a_{\pi(2)}, y^i_{\pi(1)})$. Покажем, что все перестановки $\pi(1), \ldots, \pi(m)$ совпадают. Действительно, предположим, что перестановки $\pi(1)$ и $\pi(2)$ различны, пусть элемент z^1 не сравним с a_1, а элемент z^2 не сравним с a_2. Тогда выполняются неравенства $z^1 > a_2$ и $z^2 > a_1$. Так как каждый из z^1, z^2 не сравним с элементом c, то элементы z^1 и z^2 сравнимы между собой, пусть, например, выполняется неравенство $z^1 \geqslant z^2$. Из этого неравенства следует $z^1 > a_1$, что противоречит предположению о том, что элементы z^1 и a_1 несравнимы. Таким образом, все перестановки $\pi(1), \ldots, \pi(m)$ совпадают, и второе утверждение доказано. Для каждого номера i, $i = 1, \ldots, m$, элементы z^i и c несравнимы, значит в силу свойства (a) множеств ширины два все z^i сравнимы между собой. Для каждого i, $i = 1, \ldots, m$, элементы $y^i_{\pi(1)}$ и $a_{\pi(2)}$ несравнимы, значит в силу свойства (a) множеств ширины два все $y^i_{\pi(1)}$ сравнимы между собой. Утверждение доказано.

Определения. Обозначим через $\mathscr{P}^\varphi$ множество всех таких троек (a_1, a_2, A), что $a_1, a_2 \in \mathscr{P}$, элементы a_1, a_2 несравнимы, $A \in \mathscr{P}^{(0)}$, $A > a_1, a_2$. Пусть $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, A)$ принадлежит $\mathscr{P}^\varphi$, тогда множество всех таких элементов c, что c — минимальная верхняя грань элементов a_1, a_2, и выполняется неравенство $c \leqslant A$, будем обозначать через $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ или $\mathscr{C}(a_1, a_2, A)$. Заметим, что так как $\mathscr{P}$ — это множество ширины два, выполняется неравенство $|\mathscr{C}(a_1, a_2, A)| \leqslant 2$. Обозначим через $\mathscr{P}^\varphi_1$ множество всех таких троек (a_1, a_2, A) из $\mathscr{P}^\varphi$, для которых $|\mathscr{C}(a_1, a_2, A)| = 1$.

Пусть $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, A)$ принадлежит $\mathscr{P}^\varphi_1$, $\mathscr{C}(\mathfrak{A}) = \{c\}$, и пусть $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c) = \{(y^1_1, y^1_2), \ldots, (y^m_1, y^m_2)\}$, $m \geqslant 1$. Обозначим через $\mathscr{Z}(\mathfrak{A})$ множество всех элементов z, не сравнимых с элементом c, таких что выполняется неравенство $z < A$, и найдется такая пара элементов (y_1, y_2) из $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$, что z — их минимальная верхняя грань. Пусть $z \in \mathscr{Z}(\mathfrak{A})$, и пусть $\pi = \pi(a_1, a_2, c)$, т. е. π — такая перестановка на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения $z > a_{\pi(2)}$ и элементы z и $a_{\pi(1)}$ несравнимы. Обозначим через $\mathscr{Y}(z)$ множество всех элементов y, из множества $\{y^1_1, y^1_2, \ldots, y^m_1, y^m_2\}$, для которых выполняются следующие соотношения: $y < a_{\pi(1)}$, элементы y и $a_{\pi(2)}$ несравнимы, $\overrightarrow{\sup}(y, a_{\pi(2)}) = \{c, z\}$. Положим $\mathscr{Y}(\mathfrak{A}) = \cup_{z \in \mathscr{Z}(\mathfrak{A})} \mathscr{Y}(z)$. Заметим, если множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ непусто, то и множество $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$ непусто; обратное неверно.

Пусть $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, A)$ принадлежит $\mathscr{P}^\varphi_1$, $\mathscr{C}(a_1, a_2, A) = \{c\}$. По свойству 1 множества $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$ для каждого элемента $z \in \mathscr{Z}(\mathfrak{A})$ существует $\sup(c, z)$, и по определению точной верхней грани выполняется неравенство $\sup(c, z) \leqslant A$. Далее, по свойству 3 множества $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$ все элементы множества $\mathscr{Z}(\mathfrak{A})$ сравнимы между собой, обозначим через $\zeta(\mathfrak{A})$ наибольший из них. Для каждого $z \in \mathscr{Z}(\mathfrak{A})$ все элементы множества $\mathscr{Y}(z)$ сравнимы между собой, кроме того, все элементы множества $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ сравнимы между собой. Обозначим через $\gamma(\mathfrak{A})$ наибольший элемент множества $\mathscr{Y}(\zeta(\mathfrak{A}))$, легко видеть, что $\gamma(\mathfrak{A})$ будет наибольшим элементом множества $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$. Обозначим через $\alpha(\mathfrak{A})$ тот элемент из $\{a_1, a_2\}$, который не сравним с $\gamma(\mathfrak{A})$. Тогда по свойству 1 множества $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1,a_2,c)$ существует $\sup(c,\zeta(\mathfrak{A}))$, а в силу леммы 2.6 выполняется соотношение $\overrightarrow{\sup}(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}))=\{c,\zeta(\mathfrak{A})\}$.

О п р е д е л е н и е. Определим оператор $\varphi:\mathscr{P}^{\varphi}\to\mathscr{P}$. Для каждой тройки $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$ из $\mathscr{P}^{\varphi}$, такой что множество $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ непусто, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по следующим правилам.

($\varphi1$) Если $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1,c_2\}$, то положим $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,c_2)$.

($\varphi2$) Если $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1\}$, и если $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})\neq\varnothing$, то положим $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))$.

($\varphi3$) Если $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1\}$, и $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})=\varnothing$, то положим $\varphi(\mathfrak{A})=c_1$.

В противном случае, т. е. если для тройки $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$ из $\mathscr{P}^{\varphi}$ множество $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ пусто, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ будем считать неопределенным.

Покажем, что в каждом из трех случаев значение φ определено. Действительно, в случае ($\varphi3$) это очевидно. В случае ($\varphi1$), если $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1,c_2\}$, элемент $\sup(c_1,c_2)$ существует в силу свойства $(*)$ множества $\mathscr{P}$. Наконец, в случае ($\varphi2$), если $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1\}$, $\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))$ существует также по свойству $(*)$ множества $\mathscr{P}$ в силу установленного выше соотношения $\{c_1,\zeta(\mathfrak{A})\}=\overrightarrow{\sup}(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}))$.

С в о й с т в а о п е р а т о р а φ.

1. *Пусть $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$. Если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi1$), то $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(a_1,a_2)$. Если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi2$), то $\varphi(\mathfrak{A})=\varphi(\mathfrak{A}_1)$, где $\mathfrak{A}_1=(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}),A)$, значение $\varphi(\mathfrak{A}_1)$ определяется по правилу ($\varphi1$), и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi1$), то утверждение очевидно. Если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi2$), то, по определению, $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))$, а как было показано выше, выполняется соотношение $\{c_1,\zeta(\mathfrak{A})\}=\overrightarrow{\sup}(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}))$.

2. *Если $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$ принадлежит $\mathscr{P}^{\varphi}$, то значение $\varphi(\mathfrak{A})$ не определено тогда и только тогда, когда $|A|=2$, и (a_1,a_2,p_1,p_2), где $\{p_1,p_2\}=A$, — квадрат.*

3. *Если значение $\varphi((a_1,a_2,A))$ определено, то выполняются неравенства $a_1,a_2<\varphi((a_1,a_2,A))\leqslant A$.*

4. *Пусть значение $\varphi((a_1,a_2,A))$ определено, пусть $c_1\in\mathscr{C}(a_1,a_2,A)$, тогда выполняется неравенство $\varphi((a_1,a_2,A))\geqslant c_1$.*

5. *Пусть $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, пусть $c_1\in\mathscr{C}(\mathfrak{A})$, множество $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1,a_2,c_1)$ непусто, и пусть $(y_1,y_2)\in\mathscr{Y}^{(2)}(a_1,a_2,c_1)$ и z — минимальная верхняя грань элементов y_1,y_2, $z<A$, элементы z и c_1 несравнимы. Тогда существуют $\sup^2(y_1,y_2)$ и $\sup(c_1,z)$, и выполняются неравенства $\varphi(\mathfrak{A})\geqslant\sup^2(y_1,y_2)$ и $\varphi(\mathfrak{A})\geqslant\sup(c_1,z)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия из леммы 2.6 элементы $\sup^2(y_1,y_2)$ и $\sup(c_1,z)$ существуют. Так как значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, то выполняется неравенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|\geqslant 1$.

Пусть $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, положим $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1,c_2\}$. В этом случае значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi1$). Тогда выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(a_1,a_2)\geqslant\sup^2(y_1,y_2)$, где неравенство выполняется по лемме 2.2 в силу соотношения $\{y_1,y_2\}\ll\{a_1,a_2\}$. И в силу неравенства $z\leqslant c_2$ выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,c_2)\geqslant\sup(c_1,z)$.

Если же $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, то, так как $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1,a_2,c_1)\neq\varnothing$, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi2$). Тогда в силу свойства 1 оператора φ имеют место соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}))\geqslant\sup^2(y_1,y_2)$, где неравенство выполняется в силу леммы 2.2, так как по определению элементов $\alpha(\mathfrak{A})$ и $\gamma(\mathfrak{A})$ выполняется соотношение $\{y_1,y_2\}\ll\{\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A})\}$. Далее, по определению ($\varphi 2$), выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A}) = \sup(c_1, \zeta(\mathfrak{A}))$, и тогда в силу неравенства $z \leqslant \zeta(\mathfrak{A})$ получаем $\varphi(\mathfrak{A}) \geqslant \sup(c_1, z)$. Утверждение доказано.

6. *Пусть $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, A)$ принадлежит $\mathscr{P}^\varphi$, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, пусть для некоторого элемента x_1 найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения $x_1 < a_{\sigma(1)}$, и элементы x_1 и $a_{\sigma(2)}$ несравнимы. Тогда определено значение $\varphi(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X} = (x_1, a_{\sigma(2)}, A)$, и выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{A}) \geqslant \varphi(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{X} \in \mathscr{P}^\varphi$. Так как значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, то $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| \geqslant 1$, и тогда легко видеть, что $|\mathscr{C}(\mathfrak{X})| \geqslant 1$, поэтому значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определено. Положим $x_2 = a_{\sigma(2)}$. Заметим, что выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{a_1, a_2\}$. Рассмотрим три случая.

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi 1$), тогда по свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A}) = \sup^2(a_1, a_2)$. Если значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 3$), т. е. $\varphi(\mathfrak{X}) = r$, где r — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, то неравенство $r \leqslant \sup^2(a_1, a_2)$ очевидно. Если значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 1$), то имеют место соотношения $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup^2(x_1, x_2) \leqslant \sup^2(a_1, a_2) = \varphi(\mathfrak{A})$ (оба равенства выполняются по свойству 1 оператора φ, неравенство — по лемме 2.2). Если значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 2$), то по свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup^2(\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}))$, и тогда из неравенств $\{\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X})\} \ll \{x_1, x_2\} \ll \{a_1, a_2\}$ и леммы 2.2 следуют соотношения $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup^2(\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X})\} \leqslant \sup^2(a_1, a_2) = \varphi(\mathfrak{A})$.

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi 2$), пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A}) = \{c\}$. Рассмотрим отдельно три случая.

1. Значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 1$), тогда по свойству 1 оператора φ $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup^2(x_1, x_2)$. Пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{X}) = \{r_1, r_2\}$. Если найдется элемент r из множества $\{r_1, r_2\}$, не сравнимый с элементом c, то $(x_1, x_2) \in \mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$, и тогда в силу свойства 5 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{A}) \geqslant \sup^2(x_1, x_2) = \varphi(\mathfrak{X})$. Если же оба элемента r_1, r_2 сравнимы с элементом c, то выполняется неравенство $r_1, r_2 < c$, откуда следуют соотношения $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup(r_1, r_2) \leqslant c \leqslant \varphi(\mathfrak{A})$ (последнее неравенство выполнено по свойству 4 оператора φ).

2. Значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 2$). Тогда по свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{X}) = \varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$, причем значение $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$ определяется по правилу ($\varphi 1$). И тогда, так как выполняется неравенство $\{\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X})\} \ll \{x_1, x_2\}$, рассуждая так же, как в первом случае, можно показать, что выполняется неравенство $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A)) \leqslant \varphi(\mathfrak{A})$.

3. Значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 3$), т. е. $\varphi(\mathfrak{X}) = r$, где r — единственная минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, для которой выполняется неравенство $r < A$. Если элементы r и c несравнимы, то $(x_1, x_2) \in \mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c)$, и по определению элемента $\zeta(\mathfrak{A})$ выполняется неравенство $r \leqslant \zeta(\mathfrak{A})$. Поэтому выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{X}) = r \leqslant \zeta(\mathfrak{A}) < \sup(c, \zeta(\mathfrak{A})) = \varphi(\mathfrak{A})$. Если же элементы r и c сравнимы, то выполняется неравенство $r \leqslant c$, и тогда $\varphi(\mathfrak{X}) = r \leqslant c \leqslant \varphi(\mathfrak{A})$ (последнее неравенство выполняется по свойству 4 оператора φ).

Пусть теперь значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi 3$), $\varphi(\mathfrak{A}) = c$, где c — минимальная верхняя грань элементов a_1, a_2, и $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c) = \varnothing$. Если значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 1$), то $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup(r_1, r_2)$, где $\{r_1, r_2\} = \mathscr{C}(\mathfrak{X})$. Так как $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1, a_2, c) = \varnothing$, оба элемента r_1, r_2 сравнимы с элементом c, тогда выполняются неравенства $r_1, r_2 < c$, следовательно, $\sup(r_1, r_2) \leqslant c$. Если значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу ($\varphi 2$), то в силу свойства 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{X}) = \varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$, где $\{\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X})\} \ll \{x_1, x_2\}$ и значение $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$ определяется по правилу (φ1). И тогда, рассуждая так же, как в предыдущем случае ($\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу (φ3), а $\varphi(\mathfrak{X})$ — по правилу (φ1)), можно показать, что выполняется неравенство $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}),\gamma(\mathfrak{X}),A))\leqslant c$. Если же значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу (φ3), т. е. $\varphi(\mathfrak{X})=r$, где r — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, то, так как $\mathscr{Y}^{(2)}(a_1,a_2,c)=\varnothing$, элементы r и c сравнимы, а значит выполняется неравенство $r\leqslant c$. Утверждение доказано.

7. *Пусть $A,B\in\mathscr{P}^{(0)}$, выполняется неравенство $A\preceq B$, и пусть определено значение $\varphi((a_1,a_2,A))$. Тогда определено значение $\varphi((a_1,a_2,B))$, и выполняется неравенство $\varphi((a_1,a_2,A))\leqslant\varphi((a_1,a_2,B))$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$, $\mathfrak{B}=(a_1,a_2,B)$. Из неравенства $A\preceq B$ следует соотношение $\mathscr{C}(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{C}(\mathfrak{B})$. Так как значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, то выполняется неравенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|\geqslant 1$, и тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{B})\geqslant 1$, т. е. значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определено.

Пусть $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1,c_2\}$. Тогда значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу (φ1), и тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\mathscr{C}(\mathfrak{B})$, и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=\varphi(\mathfrak{B})=\sup^2(a_1,a_2)$.

Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1\}$. Тогда $c_1\in\mathscr{C}(\mathfrak{B})$. Если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу (φ3), то выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=c_1\leqslant\varphi(\mathfrak{B})$, где неравенство выполняется в силу свойства 4 оператора φ. Пусть теперь значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу (φ2). Тогда $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))$. И тогда возможны два случая: либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=2$, либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=1$.

Пусть $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=2$, положим $\mathscr{C}(\mathfrak{B})=\{c_1,c_2\}$. Тогда элементы c_2 и $\zeta(\mathfrak{A})$ сравнимы, и так как $\zeta(\mathfrak{A})$ не является верхней гранью элементов a_1 и a_2, то выполняется неравенство $c_2>\zeta(\mathfrak{A})$. И тогда выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))\leqslant\sup(c_1,c_2)=\varphi(\mathfrak{B})$.

Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=1$. В силу неравенства $A\preceq B$ имеет место соотношение $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{Y}(\mathfrak{B})$, откуда следует, что множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{B})$ непусто, а значит значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу (φ2). Из $A\preceq B$ следует $\zeta(\mathfrak{A})\in\mathscr{Z}(\mathfrak{B})$, откуда следует неравенство $\zeta(\mathfrak{B})\geqslant\zeta(\mathfrak{A})$. Поэтому выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{A})=\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{A}))\leqslant\sup(c_1,\zeta(\mathfrak{B}))=\varphi(\mathfrak{B})$. Утверждение доказано.

8. *Пусть a_1,a_2 — несравнимые элементы, $\{b_1,b_2\}=\overrightarrow{\sup}(a_1,a_2)$, $c=\sup^2(a_1,a_2)$. Пусть d — не сравнимый с элементами b_2 и c элемент, такой что выполняется неравенство $d>b_1$. И пусть $A\in\mathscr{P}^{(0)}$, $A>c,d$.*

Тогда значение $\varphi((c,d,A))$ определено тогда и только тогда, когда определено значение $\varphi((b_2,d,A))$. Кроме того, если значения $\varphi((b_2,d,A))$ и $\varphi((c,d,A))$ определены, то они определяются по одному и тому же правилу из (φ1)–(φ3) и выполняется равенство $\varphi((b_2,d,A))=\varphi((c,d,A))$.

Доказательство. Обозначим тройки (b_2,d,A) и (c,d,A) через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. В силу леммы 2.8 выполняется равенство $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\mathscr{C}(\mathfrak{B})$. Поэтому если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, то множество $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$ непусто, а значит и множество $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ непусто, следовательно, значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определено. Аналогично можно показать, что если значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определено, то и значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено.

Покажем теперь, что если значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено, то значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по тому же правилу, что и значение $\varphi(\mathfrak{A})$, и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=\varphi(\mathfrak{B})$.

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу (φ1). Тогда $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{r_1,r_2\}$. Тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{B})=\{r_1,r_2\}$. Поэтому значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется также по правилу (φ1), и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{B})=\sup(r_1,r_2)=\varphi(\mathfrak{A})$.

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi2)$. В этом случае $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{r\}$. Тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{B})=\{r\}$. Рассмотрим два случая: $\alpha(\mathfrak{A})=d$ и $\alpha(\mathfrak{A})=b_2$.

1) $\alpha(\mathfrak{A})=d$, $\gamma(\mathfrak{A})<b_2$. В этом случае элементы d и $\gamma(\mathfrak{A})$ имеют несравнимую с r минимальную верхнюю грань $\zeta(\mathfrak{A})$. Легко видеть, что $\gamma(\mathfrak{A})\in\mathscr{Y}(c,d,A)$. Отсюда следует, что элементы $\gamma(\mathfrak{B})$ и d несравнимы, а значит элементы $\gamma(\mathfrak{B})$ и b_2 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $\gamma(\mathfrak{B})\geqslant b_2$. Тогда $\zeta(\mathfrak{B})$ будет верхней гранью элементов d и b_2, а так как элементы $\zeta(\mathfrak{B})$ и r несравнимы, будет выполнено равенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, что противоречит предположению. Следовательно, $\gamma(\mathfrak{B})<b_2$. Но тогда легко видеть, что $\gamma(\mathfrak{B})=\gamma(\mathfrak{A})$, а значит в силу свойства 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(d,\gamma(\mathfrak{A}))=\varphi(\mathfrak{B})$.

2) $\alpha(\mathfrak{A})=b_2$, $\gamma(\mathfrak{A})<d$. Элементы $\gamma(\mathfrak{A})$ и b_2 несравнимы, поэтому элементы $\gamma(\mathfrak{A})$ и b_1 сравнимы. Если выполняется неравенство $\gamma(\mathfrak{A})\leqslant b_1$, то для $\zeta(\mathfrak{A})$ — минимальной верхней грани элементов $\gamma(\mathfrak{A})$ и b_2 выполняется неравенство $\zeta(\mathfrak{A})\leqslant c=\sup(b_1,b_2)$, что невозможно, так как по определению $\zeta(\mathfrak{A})$ элементы $\zeta(\mathfrak{A})$ и r несравнимы. Следовательно выполняется неравенство $\gamma(\mathfrak{A})>b_1$. Тогда для $\zeta(\mathfrak{A})$ выполняется неравенство $\zeta(\mathfrak{A})>c$, и легко видеть, что $\zeta(\mathfrak{A})$ является минимальной верхней гранью элементов $\gamma(\mathfrak{A})$ и c. Отсюда следует, что $\gamma(\mathfrak{A})\in\mathscr{Y}(c,d,A)$, и легко видеть, что $\gamma(\mathfrak{B})=\gamma(\mathfrak{A})$. В силу леммы 2.8 минимальные верхние грани элементов $\gamma(\mathfrak{A})$ и b_2 совпадают с минимальными верхними гранями элементов $\gamma(\mathfrak{A})$ и c. Поэтому, пользуясь свойством 1 оператора φ, получаем, что выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=\sup^2(b_2,\gamma(\mathfrak{A}))=\sup^2(c,\gamma(\mathfrak{A}))=\varphi(\mathfrak{B})$.

Пусть теперь значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi3)$. В этом случае $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$, пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{r\}$. Тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{B})=\{r\}$. Предположим, что значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу $(\varphi2)$. Возможны два случая: $\alpha(\mathfrak{B})=d$ и $\alpha(\mathfrak{B})=c$. Предположим, что $\alpha(\mathfrak{B})=d$, $\gamma(\mathfrak{B})<c$. Легко видеть, что элементы $\gamma(\mathfrak{B})$ и b_2 сравнимы. Неравенство $\gamma(\mathfrak{B})\geqslant b_2$ приводит к противоречию с предположением $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$. А из неравенства $\gamma(\mathfrak{B})<b_2$, следует соотношение $\gamma(\mathfrak{B})\in\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$, что противоречит предположению о том, что $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi3)$. Пусть теперь $\alpha(\mathfrak{B})=c$. Тогда легко видеть, что $\gamma(\mathfrak{B})\in\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$, что снова противоречит предположению. Следовательно, множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{B})$ пусто, и значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу $(\varphi3)$. И тогда выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=r=\varphi(\mathfrak{B})$. Таким образом, утверждение доказано.

Лемма 2.13. *Пусть* $\mathfrak{A}=(a_1,a_2,A)$, $\mathfrak{B}=(b_1,b_2,B)\in\mathscr{P}^{\varphi}$, *пусть выполняются неравенства* $(a_1,a_2)\leqslant(b_1,b_2)$, $A\preceq B$, *и пусть определены значения* $\varphi(\mathfrak{A})$ *и* $\varphi(\mathfrak{B})$. *Тогда* $\varphi(\mathfrak{A})\leqslant\varphi(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Так как значения $\varphi(\mathfrak{A})$ и $\varphi(\mathfrak{B})$ определены, то выполняются неравенства $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|\geqslant 1$ и $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|\geqslant 1$. Возможны два случая: либо выполняется соотношение $a_1,a_2<b_1,b_2$, либо найдутся несравнимые элементы $a\in\{a_1,a_2\}$ и $b\in\{b_1,b_2\}$.

Пусть $a_1,a_2<b_1,b_2$. Рассмотрим три случая.

Если $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi1)$, то $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=2$, пусть $\mathscr{C}(\mathfrak{A})=\{c_1,c_2\}$, и тогда выполняется неравенство $\{c_1,c_2\}\ll\{b_1,b_2\}$. Пусть $d_1\in\mathscr{C}(\mathfrak{B})$. Тогда выполняются неравенства $d_1>c_1,c_2$, а значит $d_1\geqslant\sup(c_1,c_2)=\varphi(\mathfrak{A})$. В силу свойства 4 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B})\geqslant d_1$, откуда получаем $\varphi(\mathfrak{B})\geqslant\varphi(\mathfrak{A})$.

Если $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi2)$, то в силу свойства 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi((a_1,a_2,A))=\varphi((\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}),A))$, где значение $\varphi((\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A}),A))$ определяется по правилу $(\varphi1)$, и из неравенства $\{\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A})\}\ll\{a_1,a_2\}$ следует неравенство $\alpha(\mathfrak{A}),\gamma(\mathfrak{A})<b_1,b_2$.

Поэтому согласно предыдущим рассуждениям, выполняется неравенство $\varphi((\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$, т. е. $\varphi(\mathfrak{A}) \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$.

Если $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi3$), то для элемента c, такого что $\{c\} = \mathscr{C}(\mathfrak{A})$, выполняется по крайней мере одно из неравенств $c \leqslant b_1$ или $c \leqslant b_2$, и, так как в силу свойства 3 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) > b_1, b_2$, получаем $\varphi(\mathfrak{A}) = c \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$.

Пусть теперь найдутся несравнимые элементы a из $\{a_1, a_2\}$ и b из $\{b_1, b_2\}$, без ограничения общности будем считать, что элементы b_1 и a_2 несравнимы. Тогда в силу свойств 6 и 7 оператора φ определены значения $\varphi((b_1, a_2, B))$ и $\varphi((a_1, a_2, B))$, и выполняются неравенства $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant \varphi((b_1, a_2, B)) \geqslant \varphi((a_1, a_2, B)) \geqslant \varphi(\mathfrak{A})$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, A)$, $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, B)$ — *элементы* $\mathscr{P}^{\varphi}$, *пусть выполняются неравенства* $\{a_1, a_2\} \ll \{b_1, b_2\}$, $A \preceq B$, *и пусть определены значения* $\varphi(\mathfrak{A})$ *и* $\varphi(\mathfrak{B})$. *Тогда* $\varphi(\mathfrak{A}) \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$.

Определения. Положим $\mathscr{P}^{\psi} = \{(a, A) \mid a \in \mathscr{P},\ A \in \mathscr{P}^{(0)},\ a < A\}$.

Пусть $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, обозначим через $\mathscr{U}_1(a, A)$ множество всех таких пар несравнимых элементов $\{u_1, u_2\}$, что выполняется неравенство $u_1, u_2 < a$ и существует минимальная верхняя грань v элементов u_1, u_2, такая что элементы a и v несравнимы и выполняется неравенство $v < A$.

Обозначим через $\mathscr{V}(a, A)$ множество всех элементов v, таких что v и a несравнимы, и найдется такая пара $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что v — минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2. Пусть $v \in \mathscr{V}(a, A)$, обозначим через $\mathscr{U}_1^v(a, A)$ множество всех таких пар $\{u_1, u_2\}$ из $\mathscr{U}_1(a, A)$, для которых v — минимальная верхняя грань.

Свойства множества $\mathscr{U}_1(a, A)$.

1. *Если* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, *то элементы* u_1, u_2 *имеют две минимальные верхние грани* v_1, v_2, *найдется такая перестановка* π *на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняются соотношения* $v_{\pi(1)} \leqslant a$, *а элементы* $v_{\pi(2)}$ *и* a *несравнимы, существует* $w = \sup^2(u_1, u_2)$, *и выполняется неравенство* $w \leqslant A$.

Доказательство. Существование двух минимальных верхних граней, для которых выполняются такие соотношения, следует из леммы 2.7. Элемент w существует в силу свойства ($*$) множества $\mathscr{P}$, а неравенство $w \leqslant A$ выполняется по определению точной верхней грани.

2. *Если* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, *то* $(u_1, u_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$ *и значение* $\varphi((u_1, u_2, A))$ *определяется по правилу* ($\varphi1$).

3. *В множестве* $\mathscr{V}(a, A)$ *существует наибольший элемент.*

Это утверждение следует из свойства (а) множеств ширины два.

4. *Для каждого* v *из* $\mathscr{V}(a, A)$ *в множестве* $\mathscr{U}_1^v(a, A)$ *существует наибольший относительно частичного порядка* $\ll$ *элемент.*

Доказательство. Предположим, что $\{p_1, p_2\}$, $\{q_1, q_2\}$ — максимальные относительно частичного порядка $\ll$ элементы множества $\mathscr{U}_1^v(a, A)$. Так как $\{p_1, p_2\}$ и $\{q_1, q_2\}$ несравнимы относительно $\ll$, то по лемме 2.1 найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения $p_{\pi(1)} \geqslant q_1$, элементы $p_{\pi(1)}$ и q_2 несравнимы, $p_{\pi(2)} \leqslant q_2$, элементы $p_{\pi(2)}$ и q_1 несравнимы. Тогда легко видеть, что $\{p_{\pi(1)}, q_2\} \in \mathscr{U}_1^v(a, A)$, и так как выполняются неравенства $\{p_1, p_2\}$, $\{q_1, q_2\} \ll \{p_{\pi(1)}, q_2\}$, получаем противоречие с тем, что $\{p_1, p_2\}$, $\{q_1, q_2\}$ — максимальные элементы множества $\mathscr{U}_1^v(a, A)$.

5. *Пусть* v_0 — *наибольший элемент множества* $\mathscr{V}(a, A)$. *Тогда наибольший элемент множества* $\mathscr{U}_1^{v_0}(a, A)$ *является одновременно наибольшим элементом множества* $\mathscr{U}_1(a, A)$.

6. *Пусть* u_1, u_2 — *несравнимые элементы,* $\{u_1, u_2\} \notin \mathscr{U}_1(a, A)$. *Тогда возможно несколько случаев. Либо не выполняется неравенство*

$u_1, u_2 < a$. Либо $u_1, u_2 < a$, но для любого элемента v, такого что v — минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2, выполняется неравенство $v \leqslant a$. Либо $u_1, u_2 < a$, существует v — минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2, не сравнимая с a, но не выполняется неравенство $v \leqslant A$.

Обозначим через $\chi(a, A)$ наибольший относительно частичного порядка $\ll$ элемент множества $\mathcal{U}_1(a, A)$.

Определение. Пусть $(a, A) \in \mathcal{P}^{\psi}$, обозначим через $\mathcal{U}_2(a, A)$ множество всех пар $\{u_1, u_2\}$ из $\mathcal{U}_1(a, A)$, таких что элементы w и a, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$, несравнимы (заметим, что если $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$, то $\sup^2(u_1, u_2)$ существует по свойству 1 множества $\mathcal{U}_1(a, A)$).

Свойства множества $\mathcal{U}_2(a, A)$.

1. *Пусть $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, тогда найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются соотношения: $v_{\pi(1)} < a$, элементы $v_{\pi(2)}$ и a несравнимы, и выполняется неравенство $w < A$.*

Доказательство. Существование перестановки π, для которой выполняются соотношения $v_{\pi(1)} < a$, элементы $v_{\pi(2)}$ и a несравнимы, следует из леммы 2.8. Далее, по определению точной верхней грани выполняется неравенство $w \leqslant A$, и так как элементы w и a несравнимы, из неравенства $a < A$ следует неравенство $w < A$.

2. *Пусть $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, пусть элементы a и v_2 несравнимы. Тогда (a, v_2, A), (a, w, A) принадлежат $\mathcal{P}^{\varphi}$, значения $\varphi(a, v_2, A)$ и $\varphi(a, w, A)$ определены или не определены одновременно, и если эти значения определены, то они определяются по одному и тому же правилу из $(\varphi1)$–$(\varphi3)$, и выполняется равенство $\varphi(a, v_2, A) = \varphi(a, w, A)$.*

Это утверждение следует из свойства 8 оператора φ.

3. *Пусть $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A) \setminus \mathcal{U}_2(a, A)$, пусть $w = \sup^2(u_1, u_2)$. Тогда выполняются неравенства $a < w \leqslant A$.*

Доказательство. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$ элемент $w = \sup^2(u_1, u_2)$ действительно существует, и выполняется неравенство $w \leqslant A$. Далее, пусть $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$. Из неравенства $w \leqslant a$ следует $a > v_1, v_2$, что невозможно, так как в силу соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$ найдется минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2, несравнимая с a. Если элементы a и w несравнимы, то $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, выполняется неравенство $a < w$.

4. *Пусть $\mathcal{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\chi(a, A) = \{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, и пусть $A \preceq B$. Тогда $\chi(a, B) = \{x_1, x_2\}$.*

Доказательство. Пусть $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, $z = \sup(y_1, y_2)$, элементы a и z несравнимы, будем считать (см. свойство 1 множества $\mathcal{U}_2$), что выполняется неравенство $a > y_1$, а элементы a и y_2 несравнимы. По определению множества $\mathcal{U}_2(a, A)$ выполняются неравенства $y_2 < A$, $z \leqslant A$, откуда в силу соотношения $A \preceq B$ следует, что выполняются неравенства $y_2 < B$, $z \leqslant B$.

Так как выполняются неравенства $x_1, x_2 < a$ и $y_2 < B$, а элементы y_2 и a несравнимы, то $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_1(a, B)$. Пусть утверждение неверно, т. е. $\chi(a, B) = \{x^1, x^2\} \neq \{x_1, x_2\}$. Тогда выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{x^1, x^2\}$. И тогда $\{x^1, x^2\} \notin \mathcal{U}_1(a, A)$, иначе получилось бы противоречие с соотношением $\{x_1, x_2\} = \chi(a, A)$. Пусть $\{y^1, y^2\} = \overrightarrow{\sup}(x^1, x^2)$, элементы a и y^2 несравнимы. Так как $\{x^1, x^2\} \notin \mathcal{U}_1(a, A)$, из свойства 6 множества $\mathcal{U}_1$ следует, что неравенство $y^2 < A$ не выполняется.

Элементы y^2 и z сравнимы, так как оба они не сравнимы с элементом a. Если выполняется неравенство $y^2 \leqslant z$, то $y^2 < A$, что, как было показано выше, невозможно. Значит $y^2 > z$.

Легко видеть, что один из элементов x^1, x^2 не сравним с y_2. Пусть элементы x^1 и y_2 несравнимы. Тогда элементы x^2 и y_2 сравнимы, неравенство $x^2 \geqslant y_2$ в силу соотношения $x^2 < a$ противоречит тому, что элементы a и y_2 несравнимы, поэтому выполняется неравенство $x^2 < y_2$. Элементы x^1 и y_1 сравнимы, так как оба они не сравнимы с y_2. Если выполняется неравенство $x^1 \leqslant y_1$, то $x^1, x^2 < z$, что в силу неравенства $y^2 > z$ противоречит тому, что y^2 — минимальная верхняя грань элементов x^1, x^2. Поэтому выполняется неравенство $x^1 > y_1$. В силу неравенства $\{x_1, x_2\} \ll \{x^1, x^2\}$ ни одно из неравенств $x^2 < x_1, x^2 < x_2$ выполняться не может. Ни одно из равенств $x^2 = x_1$ и $x^2 = x_2$ выполняться не может, так как в противном случае будет выполняться неравенство $x^1 > x^2$. Неравенство $x^2 > x_1, x_2$ выполняться не может, так как y_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, и $y_2 > x^2$. Поэтому найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $x^2 > x_{\pi(1)}$, а элементы x^2 и $x_{\pi(2)}$ несравнимы. Пусть элементы x_1 и x^2 несравнимы и выполняется неравенство $x^2 > x_2$. Тогда очевидно, что y_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x^2, что противоречит выбору пары $(x_1, x_2) = \chi(a, A)$. Следовательно, $\{x^1, x^2\} = \{x_1, x_2\}$. Утверждение доказано.

5. *Пусть (a, A) — элемент типа $(\psi 2)$, и пусть x_1, x_2 — несравнимые элементы, такие что выполняется неравенство $x_1, x_2 < a$, и существует минимальная верхняя грань y этих элементов, такая что элементы y и a несравнимы. Тогда выполняется неравенство $y \leqslant w$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$.*

Доказательство. Разобьем доказательство этого утверждения на несколько этапов.

1. Так как по условию (a, A) — элемент типа $(\psi 2)$, то выполняются соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A) \subseteq \mathcal{U}_1(a, A)$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Это означает, что существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\overrightarrow{\sup}^2(u_1, u_2)$. Положим $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$. По определению множества $\mathcal{U}_2$ элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$ выполняется неравенство $w < A$, а также найдется такая перестановка π на множестве $\{0, 1\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

2. Так как по условию элементы a и y несравнимы и элементы a и w несравнимы (см. п. 1), то элементы y и w сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $y > w$.

3. По свойству (b) множеств ширины два найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что элементы v_1 и $x_{\sigma(1)}$ сравнимы, и элементы v_2 и $x_{\sigma(2)}$ сравнимы. Будем считать, что элементы x_1 и v_1 сравнимы, и элементы x_2 и v_2 сравнимы.

4. Покажем, что выполняется неравенство $x_2 < v_2$. Действительно, если выполняется неравенство $x_2 \geqslant v_2$, то в силу неравенства $a > x_2$ (см. условие) выполняется неравенство $a > v_2$, что невозможно, так как согласно предположению элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1). Следовательно, выполняется неравенство $x_2 < v_2$.

5. Покажем, что выполняется неравенство $x_1 > v_1$. Действительно, элементы x_1 и v_1 сравнимы (см. п. 3). Предположим, что выполняется неравенство $x_1 \leqslant v_1$. Тогда в силу неравенства $x_2 < v_2$ (см. п. 4) выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{v_1, v_2\}$. И тогда по свойству (d) верхних граней выполняется неравенство $y \leqslant w$, что противоречит предположению п. 2. Поэтому выпол-

няется неравенство $x_1 > v_1$.

6. Покажем, что элементы x_1 и w несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $x_1 \geqslant w$, то в силу неравенства $a > x_1$ (см. условие) выполняется неравенство $a > w$, что невозможно, так как согласно п. 1 элементы a и w несравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $x_1 < w$. Тогда, так как выполняется неравенство $x_2 < v_2 < w$ (см. пп. 4 и 1), так как элементы y и w сравнимы и y является минимальной верхней гранью элементов x_1 и x_2, легко видеть, что выполняется неравенство $y \leqslant w$, что противоречит предположению п. 2. Следовательно, элементы x_1 и w несравнимы.

7. Таким образом, выполняются неравенства $v_1 < x_1$ (см. п. 5) и $v_2 > x_2$ (см. п. 4), элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и v_2 (см. п. 1), и элементы w и x_1 несравнимы (см. п. 6). Поэтому согласно лемме 2.12 элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2.

8. Элементы x_1 и x_2 несравнимы, поэтому в силу неравенств $x_1 > v_1 > u_1, u_2$ (см. пп. 5 и 1) ни одно из неравенств $x_2 \leqslant u_1$ и $x_2 \leqslant u_2$ выполняться не может. Тогда найдется номер i, $i \in \{1, 2\}$, такой что выполняется неравенство $x_2 > u_i$. Легко видеть, что выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{v_1, x_2\}$. Таким образом, выполняется неравенство $v_1, x_2 < a$ (см. п. 1 и условие леммы), элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2 (см. п. 7), элементы a и w несравнимы, и выполняется неравенство $w < A$ (см. п. 1). Следовательно, выполняется соотношение $\{v_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что в силу установленного выше неравенства $\{u_1, u_2\} \ll \{v_1, x_2\}$ противоречит соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Поэтому неравенство $y > w$ (см. п. 2) выполняться не может, а значит выполняется неравенство $y \leqslant w$. Утверждение доказано.

О п р е д е л е н и е. Пусть $(a, A) \in \mathscr{P}^\psi$. Обозначим через $\mathscr{U}_3(a, A)$ множество всех таких пар $\{u_1, u_2\}$ из $\mathscr{U}_2(a, A)$, что множество $\mathscr{C}(a, w, A)$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$, непусто (напомним, что $\mathscr{C}(a, w, A)$ — это множество всех элементов c, таких что c — минимальная верхняя грань a, w, и выполняется неравенство $c \leqslant A$).

С в о й с т в а м н о ж е с т в а $\mathscr{U}_3(a, A)$.

1. *Если* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$, *то значение* $\varphi((a, w, A))$, *где* $w = \sup^2(u_1, u_2)$, *определено.*

2. *Если* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A) \setminus \mathscr{U}_3(a, A)$, *то* $|A| = 2$ *и* (a, w, p_1, p_2), *где* $A = \{p_1, p_2\}$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, *— квадрат.*

3. *Если* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$, $|A| = 2$ *и* (a, w, p_1, p_2), *где* $\{p_1, p_2\} = A$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, *— квадрат, то* $\{u_1, u_2\} \notin \mathscr{U}_3(a, A)$.

О п р е д е л е н и я. Пусть $(a, A) \in \mathscr{P}^\psi$. Назовем (a, A) *элементом типа* $(\psi 2)$, если множество $\mathscr{U}_1(a, A)$ непусто и для $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ выполняется $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$ (другими словами, если для элемента $w = \sup^2(u_1, u_2)$ выполняется неравенство $w < A$, и элементы w и a несравнимы). Пусть (a, A) — элемент типа $(\psi 2)$, назовем (a, A) *элементом типа* $(\psi 3)$, если для $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A) \setminus \mathscr{U}_3(a, A)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $(a, A) \in \mathscr{P}^\psi$, обозначим через $\mathscr{U}_4(a, A)$ множество всех таких пар $\{u_1, u_2\}$ из $\mathscr{U}_3(a, A)$, что множество $\mathscr{C}(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A} = (a, w, A)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, непусто, и либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 2$, либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, и в этом случае множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ непусто, и выполняется неравенство $\gamma(\mathfrak{A}) > u_1, u_2$ (напомним, что $\gamma(\mathfrak{A})$ — это наибольший элемент множества $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$).

С в о й с т в а м н о ж е с т в а $\mathscr{U}_4(a, A)$.

1. *Пусть* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$, *пусть* $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\mathfrak{A} = (a, w, A)$. *Тогда элементы* w *и* a *несравнимы, значение* $\varphi(\mathfrak{A})$ *определено, и либо оно опре-*

деляется по правилу ($\varphi 1$), *либо по правилу* ($\varphi 2$), *и тогда выполняется неравенство* $\gamma(\mathfrak{A}) > u_1, u_2$.

2. *Пусть* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, *элементы* a *и* v_2 *несравнимы. Пусть* $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, *где* $\mathfrak{A} = (a, w, A)$. *Тогда выполняются следующие соотношения:* $\alpha(\mathfrak{A}) = w$, $v_1 < \gamma(\mathfrak{A}) < a$, *элементы* $\gamma(\mathfrak{A})$ *и* v_2 *несравнимы, и элементы* $\gamma(\mathfrak{A})$ *и* w *несравнимы.*

Доказательство. Из соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$ и определения семейств $\mathscr{U}_4(a, A)$ и $\mathscr{U}_3(a, A)$ следуют соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$ и $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$ в силу того, что элементы a и v_2 по условию несравнимы, выполняется неравенство $a > v_1$. По определению множества $\mathscr{U}_2$ элементы a и w несравнимы. Из условия следует, что множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ непусто, поэтому определены элементы $\alpha(\mathfrak{A})$ и $\gamma(\mathfrak{A})$. Обозначим $\gamma(\mathfrak{A})$ через γ. По определению множества $\mathscr{U}_4$ выполняется неравенство $\gamma > u_1, u_2$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_4$ значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определено. Так как по условию $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, то согласно свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A}) = \varphi((\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A))$.

Покажем, что элементы γ и w несравнимы. Действительно, в силу определения элемента $\gamma = \gamma(\mathfrak{A})$ неравенство $\gamma \geqslant w$ выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $\gamma < w$. Тогда выполняется равенство $\alpha(\mathfrak{A}) = a$, и элементы a и γ несравнимы. Так как элементы a и v_2 по условию несравнимы, то элементы γ и v_2 сравнимы. В силу неравенства $\gamma > u_1, u_2$ и в силу того, что v_2 является минимальной верхней гранью элементов u_1, u_2, выполняется неравенство $\gamma \geqslant v_2$. В силу следствия из леммы 2.8 минимальные верхние грани элементов a и γ совпадают с минимальными верхними гранями элементов a и w. Далее, в силу свойства 1 оператора φ значение $\varphi((a, \gamma, A)) = \varphi((\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A))$ определяется по правилу ($\varphi 1$). По определению оператора φ выполняется равенство $|\mathscr{C}(a, \gamma, A)| = 2$. Следовательно, выполняется равенство $|\mathscr{C}(a, w, A)| = |\mathscr{C}(a, \gamma, A)| = 2$, что противоречит условию. Таким образом, элементы γ и w несравнимы.

Элементы $\gamma = \gamma(\mathfrak{A})$ и w несравнимы, поэтому выполняются соотношения $w = \alpha(\mathfrak{A})$ и $\gamma < a$. Далее, в силу неравенства $\gamma > u_1, u_2$, ни одно из неравенств $\gamma < v_1$ и $\gamma < v_2$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $\gamma \geqslant v_2$, то выполняются соотношения $a > \gamma \geqslant v_2$, что противоречит условию. Поэтому элементы γ и v_2 несравнимы. Тогда элементы γ и v_1 сравнимы, как было показано, неравенство $\gamma < v_1$ выполняться не может, поэтому выполняется неравенство $\gamma \geqslant v_1$. Если выполняется равенство $\gamma = v_1$, то выполняется неравенство $\gamma < w$, что невозможно, так как, по доказанному выше, эти элементы несравнимы. Значит выполняется неравенство $\gamma > v_1$. Таким образом, утверждение полностью доказано.

3. *Пусть* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$. *Положим* $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\mathfrak{A} = (a, w, A)$. *Тогда* $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, *и либо* $\mathscr{Y}(\mathfrak{A}) = \varnothing$, *либо* $\mathscr{Y}(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$, *и в этом случае выполняется по крайней мере одно из неравенств* $\gamma(\mathfrak{A}) < v_1$ *и* $\gamma(\mathfrak{A}) < v_2$.

4. *Пусть* $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, *пусть* $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, *пусть* $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$ *и выполняется равенство* $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 1$, *где* $w = \sup^2(u_1, u_2)$. *Тогда* $\chi(a, A) = \chi(\gamma(\mathfrak{A}), A)$, *где* $\mathfrak{A} = (a, w, A)$.

Доказательство. По условию $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$,поэтому в силу свойства 1 множества $\mathscr{U}_1$ существует $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$. Из условия следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$ найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $\pi(1, 2) = (1, 2)$, т. е. выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2

несравнимы. По определению множества $\mathscr{U}_2$ элементы a и w несравнимы.

Обозначим $\gamma(\mathfrak{A})$ через γ. Очевидно, что $(\gamma, A) \in \mathscr{P}^\psi$. В силу свойства 2 множества $\mathscr{U}_4$ выполняется неравенство $\gamma > v_1$, элементы γ и v_2 несравнимы и элементы γ и w несравнимы. Отсюда следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(\gamma, A)$. Далее, пусть $\{x_1, x_2\}$ — некоторый элемент из множества $\mathscr{U}_1(\gamma, A)$. Согласно определению множества $\mathscr{U}_1$ существует y — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x_2, несравнимая с γ и такая что выполняется неравенство $y \leqslant A$. Так как элементы γ и v_2 несравнимы, то элементы y и v_2 сравнимы.

Покажем, что если выполняется неравенство $y \geqslant v_2$, то элементы a и y несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $y \leqslant a$, то из неравенства $y \geqslant v_2$ следует неравенство $v_2 \leqslant a$, что невозможно, так как согласно исходным предположениям элементы a и v_2 несравнимы. А если выполняется неравенство $y > a$, то в силу неравенства $a > \gamma$ выполняется неравенство $y > \gamma$, что также невозможно, так как элементы y и γ несравнимы. Поэтому элементы y и a несравнимы.

Предположим, что элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ несравнимы относительно частичного порядка $\ll$. Согласно лемме 2.1 найдутся такие перестановки π и σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $(x_{\pi(1)}, u_{\sigma(2)}) > (u_{\sigma(2)}, x_{\pi(2)})$. Будем считать, что выполняется неравенство $(x_1, u_2) > (u_1, x_2)$. Обозначим наибольший элемент из y, v_2 через z. Тогда из леммы 2.3 следует, что z является минимальной верхней гранью элементов x_1 и u_2. Нетрудно показать, что элементы z и a несравнимы. Далее, легко видеть, что выполняются неравенства $x_1, u_2 < a$ и $z \leqslant A$. Поэтому в силу того, что z является минимальной верхней гранью элементов x_1 и u_2, выполняется соотношение $\{x_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что в силу неравенства $x_1 > u_1$ противоречит соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Следовательно, элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ не могут быть несравнимыми относительно частичного порядка $\ll$.

Предположим, что выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$, и при этом $\{u_1, u_2\} \neq \{x_1, x_2\}$. Легко видеть, что в этом случае выполняется неравенство $v_2 \leqslant y$. Как было показано выше, элементы a и y несравнимы. И тогда из неравенств $x_1, x_2 < \gamma \leqslant a$ и $y \leqslant A$ следует соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что невозможно, так как по условию $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Следовательно, неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ при том, что $\{u_1, u_2\} \neq \{x_1, x_2\}$, выполняться не может.

Таким образом, выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{u_1, u_2\}$. Поэтому в силу соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_1(\gamma, A)$ выполняется равенство $\{u_1, u_2\} = \chi(\gamma, A)$. Утверждение доказано.

Определение. Определим оператор $\psi : \mathscr{P}^\psi \to \mathscr{P}$. Для каждой пары (a, A) из $\mathscr{P}^\psi$ значение $\psi((a_1, A))$ определяется по следующим правилам:

(ψ1) если $\mathscr{U}_1(a, A) = \varnothing$, то положим $\psi((a, A)) = a$.

Пусть теперь $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$ и пусть $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ ($\chi(a, A)$ — это максимальный элемент множества $\mathscr{U}_1(a, A)$ относительно частичного порядка $\ll$).

(ψ2) если $\{u_1, u_2\} \notin \mathscr{U}_2(a, A)$, то положим $\psi((a, A)) = \sup^2(u_1, u_2)$;

(ψ3) если $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A) \setminus \mathscr{U}_3(a, A)$, то положим $\psi((a, A)) = a$;

(ψ4) если $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$, то положим $\psi((a, A)) = \varphi((a, w, A))$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$;

(ψ5) если $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$, то положим $\psi((a, A)) = c$, где c — минимальная верхняя грань элементов a и w, $w = \sup^2(u_1, u_2)$, такая что выполняется неравенство $c \leqslant A$.

Покажем, что в каждом случае значение $\psi((a, A))$ определено. Действительно, в случаях (ψ1) и (ψ3) это очевидно. В случае (ψ2)

$\mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$ существует в силу свойства 1 множества $\mathcal{U}_1(a, A)$. В случае ($\psi 4$) значение $\varphi((a, w, A))$ определено в силу соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_4(a, A)$ и свойства 1 множества $\mathcal{U}_4$. Наконец, в случае ($\psi 5$) в силу свойства 3 множества $\mathcal{U}_4$ выполняется равенство $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 1$, т. е. элемент c определяется единственным образом.

Свойства оператора ψ.

1. *Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 2$), то выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi((u_1, u_2, A))$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$.*

Доказательство. По условию, $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$, и выполняется равенство $\psi((a, A)) = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$. По свойству 2 множества $\mathcal{U}_1$ значение $\varphi((u_1, u_2, A))$ определено и определяется по правилу ($\varphi 1$), т. е. в силу свойства 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi((u_1, u_2, A)) = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$.

2. *Если $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, то выполняется неравенство $a \leqslant \psi((a, A)) \leqslant A$.*

Доказательство. Для случаев ($\psi 1$) и ($\psi 3$) утверждение очевидно. Далее, пусть $\mathcal{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$. В случае ($\psi 2$) неравенство $a < \psi(a, A) = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2) \leqslant A$ выполняется по свойству 3 множества $\mathcal{U}_2$. В случае ($\psi 4$) требуемое неравенство следует из свойства 3 оператора φ, а в случае ($\psi 5$) оно выполняется в силу выбора элемента c — минимальной верхней грани элементов a и w, такой что $c \leqslant A$.

3. *Если $\psi((a, A))$ определяется по правилам ($\psi 4$) или ($\psi 5$), то выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((a, w, A))$, где $w = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = (a, w, A)$. Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 4$), то, по определению, $\psi((a, A)) = \varphi(\mathfrak{A})$. Пусть теперь значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 5$). Тогда выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_3(a, A) \setminus \mathcal{U}_4(a, A)$. В силу свойства 3 множества $\mathcal{U}_4$ выполняется равенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, положим $\mathscr{C}(\mathfrak{A}) = \{c\}$. По определению, $\psi((a, A)) = c$. В силу свойства 4 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{A}) \geqslant c$. Следовательно, $\psi((a, A)) \leqslant \varphi(\mathfrak{A})$.

4. *Пусть $\psi((a, A))$ определяется по правилам ($\psi 4$) или ($\psi 5$), пусть $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$ и пусть $r \in \mathscr{C}(a, w, A)$. Тогда $\psi(a, A) \geqslant r$.*

Доказательство. Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 4$), т. е. $\psi((a, A)) = \varphi((a, w, A))$, то неравенство $\varphi((a, w, A)) \geqslant r$ выполняется в силу свойства 4 оператора φ. Если же значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 5$), то в силу свойства 3 множества $\mathcal{U}_4$ $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 1$, т. е. $\mathscr{C}(a, w, A) = \{r\}$ и $\psi((a, A)) = r$.

5. *Пусть значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 4$). Пусть $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$, $\mathfrak{A} = (a, w, A)$. Пусть выполняется равенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$. Тогда $\psi((a, A)) = \psi((\gamma(\mathfrak{A}), A))$, значение $\psi((\gamma(\mathfrak{A}), A))$ определяется по правилу ($\psi 4$) и выполняется равенство $|\mathscr{C}(\gamma(\mathfrak{A}), w, A)| = 2$.*

Доказательство. Так как значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi 4$), то, согласно определению оператора ψ, выполняется включение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_4(a, A)$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, и выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A} = (a, w, A)$, $w = \mathrm{sup}^2(u_1, u_2)$. Кроме того, по условию $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$, поэтому, согласно определению множества $\mathcal{U}_4$, множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ непусто. Согласно определению оператора φ, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу ($\varphi 2$). По свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A}) = \varphi((\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A))$, кроме того, $|\mathscr{C}(\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)| = 2$.

Обозначим $\gamma(\mathfrak{A})$ через γ. Так как $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, то $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$ существует $\overrightarrow{\mathrm{sup}}(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\mathrm{sup}}(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$ найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что элементы a и $v_{\pi(1)}$ несравнимы. В силу свойства 4 множества $\mathscr{U}_4$ выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A) = \chi(\gamma, A)$. В силу свойства 2 множества $\mathscr{U}_4$ элементы γ и $v_{\pi(1)}$ несравнимы, и элементы γ и w несравнимы. Поэтому $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(\gamma, A)$. Далее, как было показано выше, $|\mathscr{C}(\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)| = 2$. Поэтому выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(\gamma, A)$. Следовательно, по определению оператора ψ значение $\psi((\gamma, A))$ определяется по правилу (ψ4), и выполняется равенство $\psi((\gamma, A)) = \varphi((\gamma, w, A))$. Так как, согласно свойству 2 множества $\mathscr{U}_4$, выполняется равенство $\alpha(\mathfrak{A}) = w$, то выполняется равенство $(\gamma, w, A) = (\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)$. Таким образом, в силу проведенных выше рассуждений выполняются следующие соотношения: $\psi((a, A)) = \varphi((\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)) = \psi((\gamma(\mathfrak{A}), A))$. Утверждение доказано.

Лемма 2.14. *Пусть* $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, (a, A) *не является элементом типа* (ψ3), *пусть* $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. *Тогда значение* $\varphi((u_1, u_2, A))$ *определено, и выполняется неравенство* $\psi((a, A)) \geqslant \varphi((u_1, u_2, A))$.

Доказательство. По свойству 2 множества $\mathscr{U}_1$ значение $\varphi((u_1, u_2, A))$ определено и определяется по правилу (φ1), т. е. $\varphi((u_1, u_2, A)) = w$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$. Из условия $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$ следует, что значение $\psi((a, A))$ определяется либо по правилу (ψ2), либо (ψ4), либо (ψ5). Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу (ψ2), то по свойству 1 оператора ψ выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi((u_1, u_2, A))$. Пусть теперь значение $\psi((a, A))$ определяется по правилам (ψ4), или (ψ5). В этом случае $\mathscr{C}(a, w, A) \neq \varnothing$. Пусть $r \in \mathscr{C}(a, w, A)$, т. е. r — некоторая минимальная верхняя грань элементов a и w, такая что $r \leqslant A$. Тогда по свойству 4 оператора ψ выполняется неравенство $\psi((a, A)) \geqslant r$. И тогда выполняются следующие соотношения: $\varphi((u_1, u_2, A)) = w < r \leqslant \varphi((a, w, A))$. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Пусть элементы* x_1 *и* x_2 *несравнимы, пусть* $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, (a, A) *не является элементом типа* (ψ3), *пусть выполняется неравенство* $x_1, x_2 < a$. *Тогда значение* $\varphi((x_1, x_2, A))$ *определено, и выполняется неравенство* $\varphi((x_1, x_2, A)) \leqslant \psi((a, A))$.

Доказательство. Очевидно, что $(x_1, x_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$. Так как элемент a является верхней гранью элементов x_1, x_2, то из неравенства $a \leqslant A$ следует, что значение $\varphi((x_1, x_2, A))$ определено. Обозначим (x_1, x_2, A) через $\mathfrak{X}$ и рассмотрим три случая.

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу (φ1). Тогда $|\mathscr{C}(\mathfrak{X})| = 2$, положим $\mathscr{C}(\mathfrak{X}) = \{c_1, c_2\}$. По определению оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{X}) = \sup(c_1, c_2)$. Если $\{x_1, x_2\} \notin \mathscr{U}_1(a, A)$, то в силу соотношений $x_1, x_2 < a$ и $c_1, c_2 < A$, а также в силу свойства 6 множества $\mathscr{U}_1$ выполняется неравенство $c_1, c_2 < a$. Тогда $\sup(c_1, c_2) \leqslant a$, откуда $\varphi(\mathfrak{X}) \leqslant a \leqslant \psi((a, A))$ (второе неравенство выполнено по свойству 2 оператора ψ). Если $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, то выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{u_1, u_2\}$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. И тогда требуемое неравенство следует из соотношений $\varphi((x_1, x_2, A)) \leqslant \varphi((u_1, u_2, A)) \leqslant \psi((a, A))$ (первое неравенство выполняется по следствию из леммы 2.13, второе — по лемме 2.14).

Пусть значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу (φ2). Тогда по свойству 1 оператора φ выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{X}) = \varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$, причем значение $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A))$ определяется по правилу (φ1). И тогда, так как из неравенства $\{\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X})\} \ll \{x_1, x_2\}$ следует неравенство $\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}) < a$, то, рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно получить соотношение $\varphi((\alpha(\mathfrak{X}), \gamma(\mathfrak{X}), A)) \leqslant \psi((a, A))$, т. е. $\psi(\mathfrak{X}) \leqslant \psi((a, A))$.

Пусть теперь значение $\varphi(\mathfrak{X})$ определяется по правилу (φ3). Тогда $|\mathscr{C}(\mathfrak{X})| = 1$, положим $\mathscr{C}(\mathfrak{X}) = \{c\}$. По определению, $\varphi(\mathfrak{X}) = c$. Если $\{x_1, x_2\} \notin \mathscr{U}_1(a, A)$, то в силу свойства 6 множества $\mathscr{U}_1$ выполняется неравенство $c \leqslant a$, откуда в силу свойства 2 оператора ψ получаем соотношения $\varphi(\mathfrak{X}) = c \leqslant a \leqslant \psi((a,A))$. Если $\{x_1,x_2\} \in \mathcal{U}_1(a,A)$, то выполняется неравенство $\{x_1,x_2\} \ll \{u_1,u_2\}$, где $\{u_1,u_2\} = \chi(a,A)$, и тогда так же, как и в первом случае в силу лемм 2.13 и 2.14 получаем $\varphi((\mathfrak{X})) \leqslant \varphi((u_1,u_2,A)) \leqslant \psi((a,A))$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $(x_1,x_2,X) \in \mathcal{P}^\varphi$, и значение $\varphi((x_1,x_2,X))$ определено, пусть $(a,A) \in \mathcal{P}^\psi$, (a,A) не является элементом типа (ψ3), пусть выполняются неравенства $x_1,x_2 < a$ и $X \preceq A$. Тогда выполняется неравенство $\varphi((x_1,x_2,X)) \leqslant \psi((a,A))$.*

Это утверждение следует из лемм 2.13 и 2.15.

Лемма 2.16. *Пусть выполняются следующие условия:*

(1) (a,A), $(b,B) \in \mathcal{P}^\psi$, $a \leqslant b$, $A \preceq B$;

(2) $\mathcal{U}_1(b,B) \neq \varnothing$, $\{x_1,x_2\} = \chi(b,B)$, $\{y_1,y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1,x_2)$, $z = \sup(y_1,y_2) = \sup^2(x_1,x_2)$, π — *такая перестановка на множестве* $\{1,2\}$, *что элементы b и $y_{\pi(1)}$ несравнимы;*

(3) $\mathcal{C}(b,y_{\pi(1)},B) \neq \varnothing$, $|\mathcal{C}(b,y_{\pi(1)},B)| = 1$, $\mathcal{C}(b,y_{\pi(1)},B) = \{r\}$;

(4) $\mathcal{U}_1(a,A) \neq \varnothing$, $\{u_1,u_2\} = \chi(a,A)$, $\{u_1,u_2\} \in \mathcal{U}_3(a,A)$, $,\{v_1,v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1,u_2)$, $w = \sup(v_1,v_2) = \sup^2(u_1,u_2)$, σ — *такая перестановка на множестве* $\{1,2\}$, *что выполняется неравенство* $a > v_{\sigma(1)}$;

(5) g — *такой элемент, что выполняется неравенство* $v_{\sigma(1)} < g \leqslant a$, *а элементы g и w несравнимы;*

(6) *существует s — минимальная верхняя грань элементов g и w, такая что $s \leqslant A$;*

(7) *элементы b и w несравнимы;*

(8) *выполняется неравенство $z > w$.*

Тогда выполняется неравенство $s \leqslant r$.

Доказательство. Установим ряд свойств рассматриваемых элементов и множеств (пп. 1–11).

1. Из условия (4) следует, что $\{u_1,u_2\} \in \mathcal{U}_2(a,A)$. Согласно определению множества $\mathcal{U}_3$ элементы a и w несравнимы. Будем считать, что $\sigma(1,2) = (1,2)$, т. е. выполняется неравенство $a > v_1$. Тогда по свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$ элементы a и v_2 несравнимы. Легко видеть, что так как, по условию, элементы g и w несравнимы, и выполняется неравенство $g > v_1$, то элементы g и v_2 несравнимы. Будем считать, что $\pi(1,2) = (2,1)$, т. е. элементы b и y_2 несравнимы. Так как $\{x_1,x_2\} \in \mathcal{U}_1(b,B)$ и элементы b и y_2 несравнимы, то по свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$ выполняется неравенство $b \geqslant y_1$. В силу свойства (b) множеств ширины два найдется такая перестановка ϱ на множестве $\{1,2\}$, что элементы v_1 и $x_{\varrho(1)}$ сравнимы и элементы v_2 и $x_{\varrho(2)}$ сравнимы. Будем считать, что $\varrho(1,2) = (1,2)$, т. е. элементы v_1 и x_1 сравнимы, и элементы v_2 и x_2 сравнимы.

2. Элементы b и v_2 несравнимы. Действительно, из неравенства $b \leqslant v_2$ следует неравенство $a \leqslant v_2$, что невозможно (см. п. 1). А из неравенства $b > v_2$ следует неравенство $b \geqslant w = \sup(v_1,v_2)$, которое противоречит условию (7).

3. Элементы u_1, u_2, для которых выполняется неравенство $u_1,u_2 < a \leqslant b$, имеют не сравнимую с b минимальную верхнюю грань v_2, такую что выполняется неравенство $v_2 < A$, а значит и неравенство $v_2 < B$. Следовательно, выполняется соотношение $\{u_1,u_2\} \in \mathcal{U}_1(b,B)$. Поэтому в силу соотношения $\{x_1,x_2\} = \chi(b,B)$ выполняется неравенство $\{u_1,u_2\} \ll \{x_1,x_2\}$. А из неравенства $z = \sup^2(x_1,x_2) > w = \sup^2(u_1,u_2)$ следует, что выполняется соотношение $\{u_1,u_2\} \neq \{x_1,x_2\}$.

4. Элементы g и y_1 сравнимы. Действительно, предположим, что элементы g и y_1 несравнимы. Тогда g и y_2 сравнимы. Так как выполняются неравенства $b \geqslant a \geqslant g$, а элементы b и y_2 несравнимы (см. п. 1), то нера-

венство $g \geqslant y_2$ выполняться не может, а значит $g < y_2$. Далее, так как элемент g не сравним с элементами y_1 (согласно предположению) и w (по условию (5)), то элементы w и y_1 сравнимы. Тогда, так как выполняется неравенство $b > y_1$ (см. п. 1), а элементы b и w по условию несравнимы, неравенство $w \leqslant y_1$ выполняться не может. Поэтому выполняется неравенство $w > y_1$. Так как элемент b не сравним с элементами y_2 (см. п. 1) и w (по условию), то элементы y_2 и w сравнимы. Тогда, так как элементы g и w по условию несравнимы, и выполняется неравенство $g < y_2$ (установленное выше), неравенство $w \geqslant y_2$ выполняться не может. Поэтому выполняется неравенство $w < y_2$. Последнее неравенство вместе с установленным выше неравенством $w > y_1$ противоречит тому, что элементы y_1 и y_2 несравнимы. Таким образом, элементы g и y_1 сравнимы.

5. Выполняется неравенство $g < y_1$. Действительно, предположим, что выполняется неравенство $g \geqslant y_1$. Тогда выполняется неравенство $a \geqslant y_1$. Так как элементы y_1 и y_2 несравнимы, неравенство $a < y_2$ выполняться не может. Так как элементы b и y_2 несравнимы (см. п. 1), и выполняется неравенство $b \geqslant a$, то неравенство $a \geqslant y_2$ выполняться также не может. Следовательно, элементы a и y_2 несравнимы. По свойству 4 множества $\mathcal{U}_2$ выполняется равенство $\{u_1, u_2\} = \chi(a, B)$. Так как элементы a и y_2 несравнимы, из неравенств $x_1, x_2 < y_1 \leqslant a$ и $y_2 < B$ следует включение $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_1(a, B)$, что в силу соотношений $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$, $\{u_1, u_2\} \neq \{x_1, x_2\}$ (см. п. 3) противоречит соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(a, B)$. Поэтому неравенство $g \geqslant y_1$ выполняться не может.

6. Элементы w и v_2 не сравнимы с y_1. Действительно, так как выполняется неравенство $g < y_1$ (см. п. 5), а элементы g и w по условию несравнимы, неравенство $w \geqslant y_1$ выполняться не может. Так как выполняется неравенство $b > y_1$ (см. п. 1), а элементы b и w по условию несравнимы, неравенство $w < y_1$ выполняться также не может. Поэтому элементы w и y_1 несравнимы. Для элемента v_2 рассуждения аналогичны.

7. Выполняется неравенство $v_2 > x_2$. Действительно, элементы v_2 и x_2 сравнимы (см. п. 1), а так как выполняется неравенство $b > x_2$ (см. условие (2)), а элементы v_2 и b несравнимы (см. п. 2), то неравенство $v_2 \leqslant x_2$ выполняться не может.

8. Элементы v_1 и x_2 несравнимы. Действительно, так как выполняется неравенство $v_2 > x_2$ (см. п. 7), то неравенство $v_1 \leqslant x_2$ выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $v_1 > x_2$. Элементы v_1 и x_1 сравнимы (см. п. 1). Легко видеть, что неравенство $v_1 \leqslant x_1$ выполняться не может. Поэтому выполняется неравенство $v_1 > x_1$. Таким образом, выполняются неравенства $v_1 > x_1, x_2$, т. е. v_1 — верхняя грань элементов x_1 и x_2, что в силу неравенств $v_1 < g < y_1$ (см. условие (5) и п. 5) противоречит тому, что y_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2.

9. Элементы g и x_2 несравнимы. Действительно, так как по условию выполняется неравенство $g > v_1$, а элементы v_1 и x_2 несравнимы (см. п. 8), то неравенство $x_2 \geqslant g$ выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $g > x_2$. Тогда, так как элементы x_1 и x_2 несравнимы, неравенство $g \leqslant x_1$ выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $g > x_1$. Тогда g является верхней гранью элементов x_1, x_2, что в силу неравенства $g < y_1$ (см. п. 5) противоречит тому, что y_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2. Поэтому элементы g и x_1 несравнимы. Тогда, так как элементы g и v_2 несравнимы (см. п. 1), элементы v_2 и x_1 сравнимы. Выполняется неравенство $v_2 > x_2$ (см. п. 7), поэтому легко видеть, что выполняется неравенство $v_2 > x_1$. Из несравнимости элементов v_1 и x_2 (см. п. 8) следует, что элементы v_1 и x_1 сравнимы. Так как выполняется неравенство $v_1 < g$ (см. п. 1), а элементы g и x_1, как показано выше, несравнимы, неравенство

$v_1 > x_1$ выполняться не может. Значит выполняется неравенство $v_1 \leqslant x_1$, которое вместе с установленным выше неравенством $v_2 > x_1$ противоречит тому, что элементы v_1 и v_2 несравнимы (см. условие (4)).

10. Выполняется соотношение $\{y_1, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, x_2)$. Действительно, так как выполняются неравенства $v_1 < g < y_1$ (см. пп. 1 и 5) и $v_2 > x_2$ (см. п. 7), элементы v_1 и x_2 несравнимы (см. п. 8), и элементы v_2 и w не сравнимы с y_1 (см. п. 6), то требуемое равенство следует из леммы 2.10.

11. Существует $\sup(y_1, w)$, и выполняется неравенство $\sup(y_1, w) \leqslant z$. Действительно, в силу свойства $(*)$ множества $\mathscr{P}$ из соотношений $\{y_1, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, x_2)$ следует, что $\sup(y_1, w)$ существует. Пусть $\sup(y_1, w) = q$. Тогда, так как в силу неравенств $z > y_1$ (см. условие (2)) и $z > w$ (см. условие (8)) элемент z является верхней гранью элементов y_1 и w, выполняется неравенство $q \leqslant z$.

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения леммы. Согласно п. 11, выполняется неравенство $q > w$, кроме того, по условию, элементы b и w несравнимы, поэтому неравенство $q \leqslant b$ выполняться не может. Таким образом, возможны два случая: либо элементы q и b несравнимы, либо выполняется неравенство $q > b$.

(A) Предположим, что элементы q и b несравнимы. Тогда, так как элементы b и y_2 несравнимы (см. п. 1), элементы q и y_2 сравнимы. Так как выполняется неравенство $q > y_1$ (см. п. 11), то выполняется неравенство $q > y_2$. Поэтому выполняется неравенство $q \geqslant z = \sup(y_1, y_2)$. Следовательно, $q = z$.

Так как элементы b и $z = q$ несравнимы, то в силу леммы 2.8 выполняется равенство $\mathscr{C}(b, y_2, B) = \mathscr{C}(b, z, B)$, т. е. элемент r (см. условие (3)) является минимальной верхней гранью элементов b и z.

Предположим, что элементы s и z несравнимы. Тогда, так как элементы $z = q$ и b несравнимы, элементы s и b сравнимы. Выполняется неравенство $s > w$ (см. условие (6)), и элементы b и w несравнимы (см. условие (7)), поэтому неравенство $s \leqslant b$ выполняться не может. Значит выполняется неравенство $s > b$. Отсюда следует неравенство $s > y_1$. Тогда из неравенства $s > y_1, w$ следует неравенство $s \geqslant z = q = \sup(y_1, w)$, что противоречит предположению. Поэтому элементы s и z сравнимы. В силу неравенств $z > y_1 > g$ (см. условие (2) и п. 5) и $z > w$ (см. условие (8)) элемент z является верхней гранью элементов g и w, поэтому выполняется неравенство $s \leqslant z$. Так как элемент r, как было показано выше, является верхней гранью элементов z и b, выполняется неравенство $z < r$. Следовательно, выполняется неравенство $s < r$. Таким образом, в случае, когда элементы q и b несравнимы, утверждение леммы доказано.

(B) Пусть теперь выполняется неравенство $q > b$. Покажем, что выполняется неравенство $s \leqslant z$. Так как выполняется неравенство $s > w$ (см. условие (6)), а элементы b и w несравнимы (см. условие (7)), неравенство $b \geqslant s$ выполняться не может. Поэтому возможны два случая: либо выполняется неравенство $s > b$, либо элементы s и b несравнимы.

(B1) Пусть $s > b$. Тогда из неравенств $s > b \geqslant y_1$ (см. п. 1) и $s > w$ (см. условие (6)) следует неравенство $s \geqslant q = \sup(y_1, w)$. А из неравенств $q > y_1 > g$ и $q > w$ (см. пп. 5 и 11) следует, что q является верхней гранью элементов g и w, поэтому неравенство $s > q$ выполняться не может. Следовательно, $s = q$. Поэтому в силу п. 11 выполняется неравенство $s \leqslant z$, что и требовалось показать.

(B2) Пусть теперь элементы s и b несравнимы.

Согласно п. 1 элементы b и y_2 несравнимы, поэтому элементы s и y_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $s \leqslant y_2$, то выполняется и неравенство $s < z = \sup(y_1, y_2)$, что и требовалось. Пусть теперь выполняется неравенство $s > y_2$. Установим ряд вспомогательных соотношений.

(a) Элементы s и y_1 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $s \leqslant y_1$, то в силу неравенства $y_1 \leqslant b$ (см. п. 1) выполняется неравенство $s \leqslant b$, что противоречит предположению п. (B2). А если выполняется неравенство $s > y_1$, то выполняется неравенство $s \geqslant z = \sup(y_1, y_2)$. И тогда из соотношений $z \geqslant q > b$ (см. п. 11 и предположение п. (B)) следует неравенство $s > b$, которое также противоречит предположению п. (B2).

(b) Элементы g и y_2 несравнимы. Действительно, как было показано в п. 6, элементы w и y_1 несравнимы. Поэтому элементы w и y_2 сравнимы. Рассмотрим два случая: $y_2 \leqslant w$ и $y_2 > w$.

Пусть выполняется неравенство $y_2 \leqslant w$. Тогда из неравенства $g \leqslant y_2$ следует неравенство $g \leqslant w$, что невозможно, так как в силу условия (5) элементы g и w несравнимы. А неравенство $g > y_2$ в силу неравенства $y_1 > g$ (см. п. 5) не может выполняться, так как элементы y_1 и y_2 несравнимы.

Пусть теперь выполняется неравенство $y_2 > w$. Так как элементы y_1 и y_2 несравнимы, неравенство $g \geqslant y_2$ в силу неравенства $y_1 > g$ (см. п. 5) выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $g < y_2$. Тогда элемент y_2 является верхней гранью элементов g и w, и так как s является минимальной верхней гранью этих элементов, то неравенство $s > y_2$ выполняться не может, что противоречит предположению рассматриваемого случая.

(c) Выполняется неравенство $g > x_1$. Действительно, элементы g и x_2 несравнимы (см. п. 9), поэтому элементы g и x_1 сравнимы. Из неравенства $g \leqslant x_1$ следует неравенство $g < y_2$, что невозможно, так как согласно п. (b) элементы g и y_2 несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $g > x_1$.

(d) Элемент s является минимальной верхней гранью элементов g и x_2. Действительно, из неравенств $s > g$ (см. условие (6)) и $s > w > v_2 > x_2$ (см. условия (6), (4) и п. 7) следует, что элемент s является верхней гранью элементов g и x_2. Поэтому существует t — минимальная верхняя грань элементов g и x_2, такая что выполняется неравенство $t \leqslant s$. Рассмотрим два случая.

Предположим, что элементы t и w сравнимы. Если выполняется неравенство $t \leqslant w$ то $g < t \leqslant w$, что невозможно, так как элементы g и w несравнимы (см. условие (5)). Поэтому выполняется неравенство $t > w$. И тогда, так как s по условию является минимальной верхней гранью элементов g и w, то из соотношений $g, w < t \leqslant s$ следует равенство $t = s$.

Пусть теперь элементы t и w несравнимы. Тогда, так как элементы y_1 и w несравнимы (см. п. 6), элементы t и y_1 сравнимы. Так как выполняется неравенство $g > x_1$ (см. п. (c)), то $t > x_1, x_2$, т. е. t является верхней гранью элементов x_1, x_2. Поэтому в силу того, что y_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, неравенство $t < y_1$ выполняться не может. Значит выполняется неравенство $t \geqslant y_1$, что вместе с неравенством $t \leqslant s$ невозможно, так как согласно п. (a) элементы y_1 и s несравнимы. Утверждение (d) доказано.

Таким образом, выполняются следующие соотношения:

(i) элементы g и x_2 несравнимы (см. п. 9),

(ii) $b \geqslant a \geqslant g$ (см. условия (1) и (5)),

(iii) $b \geqslant y_1 > x_2$ (см п. 1 и условие (2)),

(iv) минимальная верхняя грань s элементов g и x_2 несравнима с элементом b (см. п. (d) и предположение п. (B2)),

(v) $s \leqslant B$, что следует из неравенств $s \leqslant A$ и $A \preceq B$ (см. условия (1) и (6)).

Следовательно, $\{g, x_2\} \in \mathcal{U}_1(b, B)$. Последнее соотношение в силу установленного выше неравенства $g > x_1$ (см. п. (c)) противоречит соотношению $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$ (см. условие (2) леммы). Поэтому в случае (B2) неравенство $s > y_2$ выполняться не может.

Таким образом, если выполняется неравенство $q > b$ (т. е. выполняется предположение п. (B)), то выполняется неравенство $s \leqslant z$. Так как из неравенства $q > b$ следует неравенство $z \geqslant q > b$ (см. п. 11), и так как $z = \sup(y_1, y_2)$, то элемент z является верхней гранью элементов b и y_2. Легко видеть, что z является минимальной верхней гранью элементов b и y_2. Поэтому в силу п. 1 и условия (3) леммы выполняется равенство $z = r$. Следовательно, $s \leqslant z = r$, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 2.17. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) (a, A), $(b, B) \in \mathscr{P}^{\psi}$, $a \leqslant b$, $A \preceq B$;

(2) $\mathscr{U}_1(b, B) \neq \varnothing$, $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$, $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, $z = \sup(y_1, y_2) = \sup^2(x_1, x_2)$, π — *такая перестановка на множестве* $\{1, 2\}$, *что элементы* b *и* $y_{\pi(1)}$ *несравнимы*;

(3) $\mathscr{C}(b, y_{\pi(1)}, B) \neq \varnothing$, $|\mathscr{C}(b, y_{\pi(1)}, B)| = 1$, $\mathscr{C}(b, y_{\pi(1)}, B) = \{r\}$;

(4) *значение* $\psi((a, A))$ *определяется по правилам* $(\psi 4)$ *или* $(\psi 5)$;

(5) *элементы* b *и* w, *где* $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, *несравнимы*;

(6) *выполняется неравенство* $z > w$.

Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant r$.

Доказательство. Из условия следует, что для элементов (a, A) и (b, B) выполнены условия (1) — (3), (7) и (8) леммы 2.16. Так как значение $\psi((a, A))$ определяется по правилам $(\psi 4)$ или $(\psi 5)$, то $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$. Обозначим $\chi(a, A)$ через $\{u_1, u_2\}$. Пусть $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$. Из условия (4) следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$, а значит $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$, т. е. элементы a и w несравнимы, и в силу свойства 1 множества $\mathscr{U}_2$ найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\sigma(1)}$, а элементы a и $v_{\sigma(2)}$ несравнимы. Отсюда следует, что для элементов (a, A) и (b, B) выполнено условие (4) леммы 2.16.

Так как $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$, множество $\mathscr{C}(a, w, A)$ непусто. Обозначим (a, w, A) через $\mathfrak{A}$ и рассмотрим два случая.

Пусть $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 2$, положим $\{s_1, s_2\} = \mathscr{C}(\mathfrak{A})$. В силу леммы 2.16 выполняются неравенства $s_1, s_2 < r$ (условия (5) и (6) леммы 2.16 выполняются для элемента a). По определению множества $\mathscr{U}_4$, выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$. Тогда, согласно определению оператора ψ, значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу $(\psi 4)$, и выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi(\mathfrak{A})$. Далее, так как $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 2$, то значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi 1)$, и тогда, по определению, $\varphi(\mathfrak{A}) = s = \sup(s_1, s_2)$. Из неравенств $s_1, s_2 \leqslant r$ следует неравенство $s = \sup(s_1, s_2) \leqslant r$, т. е. $\psi((a, A)) = s \leqslant r$.

Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$. Возможны два случая: $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$ и $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$.

Предположим, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$. Тогда, по определению множества $\mathscr{U}_4$, $\mathscr{Y}(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$. Согласно свойству 2 множества $\mathscr{U}_4$, выполняются соотношения $\alpha(\mathfrak{A}) = w$ и $v_{\sigma(1)} < \gamma(\mathfrak{A}) < a$. Согласно определениям элементов $\alpha(\mathfrak{A})$ и $\gamma(\mathfrak{A})$, выполняется равенство $|\mathscr{C}(\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A)| = 2$. Положим $\mathscr{C}(\alpha(\mathfrak{A}), \gamma(\mathfrak{A}), A) = \{s_1, s_2\}$. Тогда по лемме 2.16 выполняется неравенство $s_1, s_2 \leqslant r$ (условия (5) и (6) леммы 2.16 выполняются для элемента $\gamma(\mathfrak{A})$). По определению оператора ψ, выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi(\mathfrak{A})$. Так как $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})| = 1$ и $\mathscr{Y}(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi 2)$. И тогда, по определению, $\varphi(\mathfrak{A}) = s = \sup(s_1, s_2)$. Из неравенств $s_1, s_2 < r$ следует неравенство $s = \sup(s_1, s_2) \leqslant r$, т. е. $\psi((a, A)) = s \leqslant r$.

Пусть теперь $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$. Положим $\{s\} = \mathscr{C}(a, w, A)$. По определению оператора ψ, в этом случае значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу $(\psi 5)$, и выполняется равенство $\psi((a, A)) = s$. Согласно лемме 2.16, выполняется неравенство $s \leqslant r$ (условия (5) и (6) леммы 2.16 выполняются для элемента a). Следовательно, $\psi((a, A)) \leqslant r$. Лемма доказана.

Лемма 2.18. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) $(a, A),\ (b, B) \in \mathscr{P}^{\psi},\ \ a \leqslant b,\ \ A \preceq B$;

(2) *значение* $\psi((b, B))$ *определяется по правилу* $(\psi 5)$;

(3) $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$, $,\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$, σ — *такая перестановка на множестве* $\{1, 2\}$, *что выполняется неравенство* $a > v_{\sigma(1)}$;

(4) g — *такой элемент, что выполняется неравенство* $v_{\sigma(1)} < g \leqslant a$, *элементы* g *и* w *несравнимы*;

(5) *существует* s — *минимальная верхняя грань элементов* g *и* w, *такая что* $s \leqslant A$;

(6) *элементы* b *и* w *несравнимы*;

(7) *выполняется равенство* $z = w$, *где* $z = \sup^2(x_1, x_2)$, $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$.

Тогда выполняется неравенство $s \leqslant \psi((b, B))$.

Доказательство. Так как значение $\psi((b, B))$ определяется по правилу $(\psi 5)$, то $\mathscr{U}_1(b, B) \neq \varnothing$. Обозначим $\chi(b, B)$ через $\{x_1, x_2\}$, пусть $\{y_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$, $z = \sup(x_1, x_2)$. Из условия (2) следует, что $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_3(b, B) \setminus \mathscr{U}_4(b, B)$, а значит $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_2(b, B)$. По определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы b и z несравнимы; в силу свойства 1 множества $\mathscr{U}_2$ найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $b > y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы. Без ограничения общности будем считать, что $\pi(1, 2) = (1, 2)$, т. е. выполняется неравенство $b > y_1$, а элементы b и y_2 несравнимы. Так как $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_3(b, B) \setminus \mathscr{U}_4(b, B)$, то $|\mathscr{C}(b, z, B)| = 1$. Обозначим множество $\mathscr{C}(b, z, B)$ через $\{r\}$. По определению оператора ψ, выполняется равенство $\psi((b, B)) = r$.

Покажем, что выполняется неравенство $g > y_1$. Действительно, если выполняется неравенство $g \leqslant y_1$, то выполняется неравенство $g < z = \sup(y_1, y_2)$, т. е. $g < w$ (см. условие (7)), что противоречит условию (4) леммы. Предположим теперь, что элементы g и y_1 несравнимы. Тогда элементы g и y_2 сравнимы. Из неравенства $g \leqslant y_2$ следует неравенство $g < z = w$, что невозможно в силу условия (4). А из неравенства $g > y_2$ в силу неравенств $b \geqslant a \geqslant g$ (см. условия (1) и (4)) следует неравенство $b > y_2$, что невозможно, так как элементы b и y_2, согласно исходным предположениям, несравнимы. Таким образом, выполняется неравенство $g > y_1$.

В силу неравенств $r > b \geqslant a \geqslant g$ и $r > z = w$ элемент r является верхней гранью элементов g и w. Предположим, что элементы s (см. условие (5)) и r несравнимы. Тогда элементы g и w имеют минимальную верхнюю грань s, не сравнимую с r — минимальной верхней гранью элементов b и $z = w$. Поэтому в силу неравенства $b \geqslant g$ выполняется включение $g \in \mathscr{Y}(b, z, B)$, а значит $\mathscr{Y}(b, z, B) \neq \varnothing$. Согласно определению элемента $\gamma(b, z, B)$, выполняется неравенство $\gamma(b, z, B) \geqslant g$. Из установленного выше неравенства $g > y_1$ следует неравенство $\gamma(b, z, B) > y_1 > x_1, x_2$. Тогда, согласно определению множества $\mathscr{U}_4$, выполняется включение $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_4(b, B)$. По определению оператора ψ, в этом случае значение $\psi((b, B))$ определяется по правилу $(\psi 4)$, что противоречит условию (2) леммы. Следовательно, элементы s и r сравнимы, и тогда, так как r — верхняя грань элементов g и w, а s — минимальная верхняя грань этих элементов, выполняется неравенство $s \leqslant r$. Лемма доказана.

Лемма 2.19. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) $(a, A),\ (b, B) \in \mathscr{P}^{\psi},\ \ a \leqslant b,\ \ A \preceq B$;

(2) *значение* $\psi((a, A))$ *определяется по правилам* $(\psi 4)$ *или* $(\psi 5)$;

(3) *значение* $\psi((b, B))$ *определяется по правилу* $(\psi 5)$;

(4) *элементы* b *и* w, *где* $w=\sup^2(u_1,u_2)$, $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$, *несравнимы.*
Тогда выполняется неравенство $\psi((a,A))\leqslant\psi((b,B))$.

Доказательство. Так как значение $\psi((b,B))$ определяется по правилу $(\psi5)$, $\mathcal{U}_1(b,B)\neq\varnothing$. Обозначим $\chi(b,B)$ через $\{x_1,x_2\}$, положим $\{y_1,y_2\}=\overrightarrow{\sup}(x_1,x_2)$, $z=\sup(y_1,y_2)=\sup^2(x_1,x_2)$. Из условия (3) следует, что $\{x_1,x_2\}\in\mathcal{U}_3(b,B)$, а значит $\{x_1,x_2\}\in\mathcal{U}_2(b,B)$. Поэтому, согласно определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы b и z несравнимы. В силу свойства 1 множества $\mathcal{U}_2$ найдется такая перестановка π на множестве $\{1,2\}$, что выполняется неравенство $b>y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $\pi(1,2)=(1,2)$, т. е. выполняется неравенство $b>y_1$, а элементы b и y_2 несравнимы. Из условия (3) следует, что $\{x_1,x_2\}\in\mathcal{U}_3(b,B)\setminus\mathcal{U}_4(b,B)$, поэтому в силу свойства 3 множества $\mathcal{U}_4$ выполняется равенство $|\mathcal{C}(b,z,B)|=1$. Обозначим множество $\mathcal{C}(b,z,B)$ через $\{r\}$. По определению оператора ψ, выполняется равенство $\psi((b,B))=r$. Заметим, что в силу леммы 2.8 выполняется равенство $\mathcal{C}(b,z,B)=\mathcal{C}(b,y_2,B)$.

Так как значение $\psi((a,A))$ определяется по правилам $(\psi4)$ или $(\psi5)$, $\mathcal{U}_1(a,A)\neq\varnothing$. Пусть $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$, $\{v_1,v_2\}=\overrightarrow{\sup}(u_1,u_2)$, $w=\sup(v_1,v_2)=$ $=\sup^2(u_1,u_2)$. Из условия (2) следует, что выполняется соотношение $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_3(a,A)$, а значит $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_2(a,A)$, т. е. элементы a и w несравнимы. В силу свойства 1 множества $\mathcal{U}_2$ найдется такая перестановка σ на множестве $\{1,2\}$, что выполняется неравенство $a>v_{\sigma(1)}$, а элементы a и $v_{\sigma(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $\sigma(1,2)=(1,2)$, т. е. выполняется неравенство $a>v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

Покажем, что элементы b и v_2 несравнимы. Действительно, так как выполняется неравенство $b\geqslant a$, а элементы a и v_2 несравнимы, неравенство $b\leqslant v_2$ выполняться не может. А из неравенства $b>v_2$ в силу неравенств $b\geqslant a>v_1$ следует соотношение $b\geqslant w=\sup(v_1,v_2)$, которое противоречит условию (4) леммы.

Покажем, что выполняется неравенство $w\leqslant z$. Действительно, выполняются неравенства $u_1,u_2<a\leqslant b$, далее, как показано выше, элементы u_1,u_2 имеют не сравнимую с b минимальную верхнюю грань v_2. При этом, согласно определению множества $\mathcal{U}_1$, выполняется неравенство $v_2<A$, а значит в силу соотношения $A\preceq B$ выполняется неравенство $v_2<B$. Поэтому $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_1(b,B)$. Тогда в силу соотношения $\{x_1,x_2\}=\chi(b,B)$ выполняется неравенство $\{u_1,u_2\}\ll\{x_1,x_2\}$. И тогда по лемме 2.2 выполняется неравенство $z\geqslant w$.

Предположим, что выполняется неравенство $w<z$. Из условий (1), (2) и (4) леммы и проведенных выше рассуждений следует, что выполняются условия (1), (2) и (5) леммы 2.17. Из условия (3) и проведенных выше рассуждений следует, что выполняются условия (3) и (4) леммы 2.17. Наконец, в силу неравенства $w<z$ выполняется условие (6) леммы 2.17. Следовательно, по лемме 2.17 выполняется соотношение $\psi((a,A))\leqslant r=\psi((b,B))$.

Пусть теперь выполняется равенство $z=w$. Из условий (1), (3) и (4) следует, что выполняются условия (1), (2) и (6) леммы 2.18. Из условия (2) и проведенных выше рассуждений следует, что выполняется условие (3) леммы 2.18. Согласно предположению, $z=w$, поэтому выполняется условие (7) леммы 2.18. Так как $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_3(a,A)$, $\mathcal{C}(a,w,A)\neq\varnothing$.

Обозначим (a,w,A) через $\mathfrak{A}$ и рассмотрим два случая.

Пусть $|\mathcal{C}(\mathfrak{A})|=2$, положим $\{s_1,s_2\}=\mathcal{C}(\mathfrak{A})$. Для элемента a и элементов s_1 и s_2 выполнены условия (4) и (5) леммы 2.18. Поэтому, в силу леммы 2.18, выполняется неравенство $s_1,s_2<\psi((b,B))$. Согласно определению множества $\mathcal{U}_4$, выполняется соотношение $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_4(a,A)$. Тогда, согласно определению оператора ψ, значение $\psi((a,A))$ определяется по правилу $(\psi4)$, и выполняется равенство $\psi((a,A))=\varphi(\mathfrak{A})$. Далее, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi1)$ и тогда, по определению, выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=s=\sup(s_1,s_2)$. Из неравенств $s_1,s_2<\psi((b,B))$ следует неравенство $s=\sup(s_1,s_2)\leqslant\psi((b,B))$, т. е. $\psi((a,A))=s\leqslant\psi((b,B))$.

Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$. Возможны два случая: $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_4(a,A)$ и $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_3(a,A)\setminus\mathscr{U}_4(a,A)$.

Предположим, что $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_4(a,A)$. Тогда, по определению множества $\mathscr{U}_4$, множество $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})$ непусто. Обозначим $\gamma(\mathfrak{A})$ через g. Согласно свойству 2 множества $\mathscr{U}_4$, выполняются соотношения $\alpha(\mathfrak{A})=w$ и $v_{\sigma(1)}<g<a$. Согласно определениям элементов $\alpha(\mathfrak{A})$ и $\gamma(\mathfrak{A})$, выполняется равенство $|\mathscr{C}(w,g,A)|=2$. Положим $\mathscr{C}(w,g,A)=\{s_1,s_2\}$. Тогда для элемента g и элементов s_1 и s_2 выполняются условия (4) и (5) леммы 2.18. Поэтому, в силу леммы 2.18, выполняется неравенство $s_1,s_2\leqslant\psi((b,B))$, а значит и неравенство $s_1,s_2<\mathscr{P}((b,B))$. Так как $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_4(a,A)$, значение $\psi((a,A))$ определяется по правилу $(\psi4)$ и, по определению, выполняется равенство $\psi((a,A))=\varphi(\mathfrak{A})$. Так как $|\mathscr{C}(\mathfrak{A})|=1$ и $\mathscr{Y}(\mathfrak{A})\neq\varnothing$, значение $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется по правилу $(\varphi2)$. По определению, выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{A})=s=\sup(s_1,s_2)$. Из неравенства $s_1,s_2<\psi((b,B))$ следует неравенство $s=\sup(s_1,s_2)\leqslant\psi((b,B))$, т. е. $\psi((a,A))=s\leqslant\psi((b,B))$.

Пусть теперь $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_3(a,A)\setminus\mathscr{U}_4(a,A)$. Пусть $\mathscr{C}(a,w,A)=\{s\}$. По определению оператора ψ, в этом случае значение $\psi((a,A))$ определяется по правилу $(\psi5)$, и выполняется равенство $\psi((a,A))=s$. Для элементов a и s выполнены условия (4) и (5) леммы 2.18. Поэтому, в силу леммы 2.18, выполняется неравенство $s\leqslant\psi((b,B))$. Следовательно, $\psi((a,A))\leqslant\psi((b,B))$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.20. *Пусть* $(a,A),(b,B)\in\mathscr{P}^{\psi}$, $a\leqslant b$, $A\preceq B$, *пусть* (a,A) *и* (b,B) *не являются элементами типа* $(\psi3)$. *Тогда выполняется неравенство* $\psi((a,A))\leqslant\psi((b,B))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как (a,A) не является элементом типа $(\psi3)$, значение $\psi((a,A))$ не может определяться по правилу $(\psi3)$. Если значение $\psi((a,A))$ определяется по правилу $(\psi1)$, то утверждение леммы очевидно. Если значение $\psi((a,A))$ определяется по правилу $(\psi2)$, то, по свойству 1 оператора ψ, выполняется равенство $\psi((a,A))=\varphi((u_1,u_2,A))$, где $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$. И тогда из соотношений $u_1,u_2<a\leqslant b$ и следствия из леммы 2.15 получаем $\varphi((u_1,u_2,A))\leqslant\psi((b,B))$.

Пусть теперь значение $\psi((a,A))$ определяется по правилам $(\psi4)$ или $(\psi5)$, пусть $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$, $w=\sup^2(u_1,u_2)$. Тогда $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_2(a,A)$, поэтому элементы a и w несравнимы. Легко видеть, что неравенство $b\leqslant w$ выполняться не может. Поэтому возможны два случая: либо выполняется неравенство $b>w$, либо элементы b и w несравнимы.

Пусть выполняется неравенство $b>w$. Тогда, так как элементы a и w несравнимы, то из неравенства $b\geqslant a$ следует неравенство $b>a$. Поэтому, в силу следствия из леммы 2.15, выполняется неравенство $\varphi((a,w,A))\leqslant\psi((b,B))$. По свойству 3 оператора ψ выполняется неравенство $\psi((a,A))\leqslant\varphi((a,w,A))$. Таким образом, выполняется соотношение $\psi((a,A))\leqslant\varphi((a,w,A))\leqslant\psi((b,B))$, и утверждение леммы доказано.

Пусть теперь элементы b и w несравнимы. Легко видеть, что в этом случае $\{u_1,u_2\}\in\mathscr{U}_2(b,B)$. Это значит, что $\mathscr{U}_2(b,B)\neq\varnothing$, поэтому $\mathscr{U}_1(b,B)\neq\varnothing$. Обозначим $\chi(b,B)$ через $\{x_1,x_2\}$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$ существуют $\overrightarrow{\sup}(x_1,x_2)$ и $\sup^2(x_1,x_2)$. Положим $\{y_1,y_2\}=\overrightarrow{\sup}(x_1,x_2)$, $z=\sup(y_1,y_2)$. В силу свойства 1 множества $\mathscr{U}_1$ найдется такая перестановка π на множестве $\{1,2\}$, что выполняется неравенство $y_{\pi(1)}\leqslant b$, а элементы $y_{\pi(2)}$ и b несравнимы. Будем считать, $\pi(1,2)=(1,2)$, т. е. элементы b и y_2 несравнимы. Из неравенства $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ в силу леммы 2.2 следует, что выполняется неравенство $w \leqslant z$. Возможны два случая: либо $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_1(b, B) \setminus \mathcal{U}_2(b, B)$, либо $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B)$.

Пусть $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{U}_2(b, B)$. Тогда, согласно определению оператора ψ, значение $\psi((b, B))$ определяется по правилу ($\psi2$), и выполняется равенство $\psi((b, B)) = z$. В силу свойства 3 множества $\mathcal{U}_2$ выполняется неравенство $z > b$. Поэтому, так как $z = \sup(y_1, y_2)$, элемент z является верхней гранью элементов b и y_2. Легко видеть, что $z = \sup(b, y_2)$. Следовательно, $|\mathcal{C}(b, y_2, B)| = 1$, $\mathcal{C}(b, y_2, B) = \{z\}$. Так как элементы b и w несравнимы, равенство $z = w$ выполняться не может, поэтому выполняется неравенство $z > w$. Таким образом, для элементов (a, A) и (b, B) выполняются условия леммы 2.17, а значит выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant z = \psi((b, B))$.

Пусть теперь $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B)$. Тогда, так как (b, B) не является элементом типа ($\psi3$), значение $\psi((b, B))$ определяется либо по правилу ($\psi4$), либо по правилу ($\psi5$). Если значение $\psi((b, B))$ определяется по правилу ($\psi5$), то утверждение леммы следует из леммы 2.19. Пусть теперь значение $\psi((b, B))$ определяется по правилу ($\psi4$). Тогда, по определению, $\psi((b, B)) = \varphi((b, z, B))$. Так как выполняются неравенства $b \geqslant a$ и $z \geqslant w$, то по лемме 2.13 выполняется неравенство $\varphi((b, z, B)) \geqslant \varphi((a, w, A))$. В силу свойства 3 оператора ψ выполняется неравенство $\varphi((a, w, A)) \geqslant \psi((a, A))$. Таким образом, выполняется неравенство $\psi((b, B)) \geqslant \psi((a, A))$. Лемма доказана.

Лемма 2.21. *Пусть $(a, A) \in \mathcal{P}^{\psi}$, $(b_1, b_2, B) \in \mathcal{P}^{\varphi}$, выполняются неравенства $a < b_1, b_2$ и $A \preceq B$, и пусть значение $\varphi((b_1, b_2, B))$ определено. Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$.*

Доказательство. По свойству 3 оператора φ, выполняется неравенство $\varphi((b_1, b_2, B)) > b_1, b_2$. Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилам ($\psi1$) или ($\psi3$), т. е. $\psi((a, A)) = a$, то выполняются соотношения $\varphi((b_1, b_2, B)) > b_1, b_2 > a = \psi((a, A))$. Если значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу ($\psi2$), то в силу свойства 1 оператора ψ выполняется равенство $\psi((a, A)) = \varphi((u_1, u_2, A))$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Тогда выполняются соотношения $u_1, u_2 < a < b_1, b_2$, и требуемое неравенство следует из леммы 2.13. Если же значение $\psi((a, A))$ определяется по правилам ($\psi4$) или ($\psi5$), то, по свойству 3 оператора ψ, выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((a, w, A))$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Так как $\mathcal{P}$ — это множество ширины два, найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы w и b_i сравнимы. Элементы a и w несравнимы, и выполняется неравенство $b_i > a$, значит неравенство $b_i \leqslant w$ выполняться не может, поэтому выполняется неравенство $b_i > w$. Таким образом, выполняется соотношение $\{a, w\} \ll \{b_1, b_2\}$, следовательно, по лемме 2.13, выполняется неравенство $\varphi((a, w, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$, т. е. $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$. Лемма доказана.

Лемма 2.22. *Пусть выполняются следующие условия:*

(1) *$(a, A) \in \mathcal{P}^{\psi}$, $(b_1, b_2, A) \in \mathcal{P}^{\varphi}$, $a \leqslant b_1$, элементы a и b_2 несравнимы, значение $\varphi((b_1, b_2, A))$ определено;*

(2) *$\mathcal{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, элементы a и v_2 несравнимы;*

(3) *$\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_3(a, A)$;*

(4) *выполняется неравенство $b_2 < v_2$.*

Пусть $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $s \in \mathcal{C}(a, w, A)$, $r \in \mathcal{C}(b_1, b_2, A)$.

Тогда

(a) *элементы b_1 и v_2 несравнимы, элементы b_1 и w несравнимы, и элементы b_2 и v_1 несравнимы;*

(b) *элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2;*

(c) *не выполняется неравенство* $b_1 \geqslant s$;

(d) *если элементы* b_1 *и* s *несравнимы, то* s *является минимальной верхней гранью элементов* a *и* b_2;

(e) *если выполняется неравенство* $r < s$, *то элементы* r *и* w *несравнимы*;

(f) *если выполняется неравенство* $r < s$, *то выполняются соотношения* $\{r, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, b_2)$ *и* $s = \sup(r, w)$.

Доказательство. Обозначим (b_1, b_2, A) через $\mathfrak{B}$. Доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

1. Из условия (3) следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$, следовательно, выполняется включение $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существует $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$, и выполняется неравенство $w \leqslant A$. По определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы w и a несравнимы. В силу условия (2) элементы a и v_2 несравнимы, и тогда, по свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$, выполняется неравенство $a > v_1$.

2. В силу условия (1) выполняется соотношение $(b_1, b_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$, поэтому элементы b_1 и b_2 несравнимы. Кроме того, согласно условию (1), значение $\varphi((b_1, b_2, A))$ определено, следовательно, по определению оператора φ, множество $\mathscr{C}(b_1, b_2, A)$ непусто. Из неравенства $a > v_1$ (см. п. 1) в силу неравенства $b_1 \geqslant a$ (см. условие (1)) следует неравенство $b_1 > v_1$.

3. Покажем, что элементы b_1 и v_2 несравнимы, элементы b_1 и w несравнимы, и элементы b_2 и v_1 несравнимы.

Если выполняется неравенство $b_1 \geqslant v_2$, то в силу условия (4) леммы выполняется неравенство $b_1 > b_2$, что невозможно, так как элементы b_1 и b_2 несравнимы (см. п. 2). А если выполняется неравенство $b_1 < v_2$, то в силу установленного в п. 2 неравенства $b_1 > v_1$ выполняется неравенство $v_1 < v_2$, что невозможно, так как элементы v_1 и v_2 несравнимы (см. условие (2)). Поэтому элементы b_1 и v_2 несравнимы.

Если выполняется неравенство $b_1 \geqslant w$, то в силу соотношения $w = \sup(v_1, v_2)$, выполняется неравенство $b_1 > v_2$, что невозможно, так как, как было показано выше, элементы b_1 и v_2 несравнимы. А если выполняется неравенство $b_1 < w$, то в силу неравенства $b_1 \geqslant a$ (см. условие (1)) выполняется неравенство $a < w$, что невозможно, так как элементы a и w несравнимы (см. п. 1). Поэтому элементы b_1 и w несравнимы.

Если выполняется неравенство $b_2 > v_1$, то в силу условия (4) леммы выполняется неравенство $v_2 > v_1$, что невозможно, так как элементы v_1 и v_2 несравнимы. А если выполняется неравенство $b_2 \leqslant v_1$, то в силу неравенства $b_1 > v_1$ (см. п. 2) выполняется неравенство $b_1 > b_2$, что невозможно, так как элементы b_1 и b_2 несравнимы. Поэтому элементы b_2 и v_1 несравнимы.

4. Покажем, что w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2. Действительно, в силу неравенств $w > v_1$ и $w > v_2 > b_2$ (см. п. 1 и условие (4)) элемент w является верхней гранью элементов v_1 и b_2. Далее, элементы v_1 и v_2 несравнимы (см. условие (2)), элементы b_1 и b_2 несравнимы (см. п. 2). Кроме того, выполняется неравенство $v_1 < b_1$ (см. п. 2), и в силу условия (4) выполняется неравенство $v_2 > b_2$. Согласно п. 3, элементы v_1 и b_2 несравнимы, и элементы b_1 и v_2 несравнимы. Тогда, так как w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и v_2 (см. п. 1), а элементы w и b_1 несравнимы (см. п. 3), выполнены условия леммы 2.12. А значит элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2.

5. Пусть $s \in \mathscr{C}(a, w, A)$. Покажем, что неравенство $b_1 \geqslant s$ выполняться не может. Действительно, пусть $b_1 \geqslant s$. Тогда, так как s — минимальная верхняя грань элементов a и w, выполняется неравенство $b_1 > w$, что невозможно, так как, согласно п. 3, элементы b_1 и w несравнимы.

6. Предположим, что элементы b_1 и s несравнимы. Покажем, что элемент s является минимальной верхней гранью элементов a и b_2. В силу выбора элемента s выполняется неравенство $s > a, w$. Из неравенств $s > w > v_2$ (см. п. 1) и $v_2 > b_2$ (см. условие (4)) следует неравенство $s > b_2$. Поэтому s является верхней гранью элементов a и b_2. Далее, элементы a и w несравнимы (см. п. 1), элементы b_1 и b_2 несравнимы (см. п. 2). Выполняется неравенство $b_1 \geqslant a$ (см. условие (1)), далее, из условия (4) и из неравенства $v_2 < w$ следует неравенство $b_2 < w$. Кроме того, элементы a и b_2 несравнимы (см. условие (1)), элементы b_1 и w несравнимы (см. п. 3). Тогда, так как s является минимальной верхней гранью элементов a и w, и, согласно предположению п. 6, элементы b_1 и s несравнимы, то выполнены все условия леммы 2.12. А значит s является минимальной верхней гранью элементов a и b_2.

7. Пусть $r \in \mathscr{C}(b_1, b_2, A)$, и пусть выполняется неравенство $r < s$. Покажем, что элементы r и w несравнимы. Действительно, так как r — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, выполняется неравенство $r > b_1$. Тогда в силу неравенства $b_1 \geqslant a$ (см. условие (1)) выполняется неравенство $r > a$. Если выполняется неравенство $r > w$, то элемент r является верхней гранью элементов a и w. Поэтому в силу того, что s — минимальная верхняя грань элементов a и w, неравенство $r < s$ выполняться не может, что противоречит предположению п. 7. А если выполняется неравенство $r \leqslant w$, то в силу неравенства $r > b_1$ выполняется неравенство $w > b_1$, что невозможно, так как, согласно п. 3, элементы b_1 и w несравнимы. Следовательно, элементы w и r несравнимы.

Покажем, что элементы r и v_2 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $r \leqslant v_2$, то выполняется неравенство $r < w$, что, как было показано, невозможно. А если выполняется неравенство $r > v_2$, то в силу соотношений $r > b_1 \geqslant a > v_1$ (см. условие (1) и п. 1) выполняется неравенство $r > v_1, v_2$. Поэтому выполняется неравенство $r \geqslant w = \sup(v_1, v_2)$, что, как было показано, невозможно.

8. Пусть $r \in \mathscr{C}(b_1, b_2, A)$, и пусть $r < s$. Покажем, что выполняются соотношения $\{r, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, b_2)$ и $s = \sup(r, w)$. Действительно, согласно п. 3, элементы v_1 и b_2 несравнимы. Согласно п. 4, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2. Далее, согласно п. 7, элементы r и w несравнимы. Покажем, что элемент r является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2. Действительно, элементы v_1 и v_2 несравнимы (см. условие (2)), элементы b_1 и b_2 несравнимы (см. п. 2), выполняются неравенства $b_1 > v_1$ (см. п. 2) и $b_2 < v_2$ (см. условие (4)), элемент r является минимальной верхней гранью элементов b_1 и b_2, и элементы r и v_2 несравнимы (см. п. 7). Таким образом, выполнено условие леммы 2.12, поэтому элемент r является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2.

Так как выполняется соотношение $\{r, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, b_2)$, то в силу свойства $(*)$ множества $\mathscr{P}$ существует $\sup(r, w)$. Покажем, что $\sup(r, w) = s$. Действительно, пусть $\sup(r, w) = q$. Из неравенств $s > w$ (см. условие леммы) и $s > r$ (см. предположение п. 8) следует, что элемент s является верхней гранью элементов r и w. Поэтому выполняется неравенство $q = \sup(r, w) \leqslant s$. Далее, из неравенств $q > r > b_1 \geqslant a$ и $q > w$ следует, что q является верхней гранью элементов a и w. Поэтому, так как s — минимальная верхняя грань этих элементов, неравенство $q < s$ выполняться не может. Таким образом, выполняется равенство $s = q$. Лемма доказана.

Лемма 2.23. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, $(b_1, b_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$, $a \leqslant b_1$, *элементы* a *и* b_2 *несравнимы, значение* $\varphi((b_1, b_2, A))$ *определено*;

(2) $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, *элементы* a *и* v_2 *несравнимы;*

(3) *значение* $\psi((a, A))$ *определяется по правилу* (ψ5);

(4) *выполняется неравенство* $b_2 < v_2$.

Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$.

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на несколько этапов.

1. Из условий (1), (2) и (4) леммы следует, что выполняются условия (1), (2) и (4) леммы 2.22. Из условия (3) следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A) \setminus \mathscr{U}_4(a, A)$, следовательно, выполняется условие (3) леммы 2.22.

2. Из соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$ следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существует $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$, и выполняется неравенство $w \leqslant A$. По определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы w и a несравнимы. В силу условия (2) элементы a и v_2 несравнимы, поэтому, по свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$, выполняется неравенство $a > v_1$. Из соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$ следует, что $\mathscr{C}(a, w, A) \neq \varnothing$, а из соотношения $\{u_1, u_2\} \notin \mathscr{U}_4(a, A)$ следует равенство $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 1$. Обозначим $\mathscr{C}(a, w, A)$ через s. Тогда, по определению оператора ψ, выполняется равенство $\psi((a, A)) = s$.

3. Обозначим (b_1, b_2, A) через $\mathfrak{B}$. Так как, согласно условию (1), $(b_1, b_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$, элементы b_1 и b_2 несравнимы. Кроме того, согласно условию (1), значение $\varphi((b_1, b_2, A))$ определено, поэтому, согласно определению оператора ψ, множество $\mathscr{C}(b_1, b_2, A)$ непусто.

4. Покажем, что выполняется неравенство $s \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$. Согласно утверждению (c) леммы 2.22, неравенство $b_1 \geqslant s$ выполняться не может. Поэтому возможны два случая: либо элементы b_1 и s несравнимы, либо выполняется неравенство $b_1 < s$.

4.1. Пусть элементы b_1 и s несравнимы. Так как множество $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ непусто (см. п. 3), возможны два случая: либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 1$, либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 2$.

4.1.1. Предположим, что $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 1$. Обозначим $\mathscr{C}(b_1, b_2, A)$ через $\{r\}$. Если выполняется неравенство $s \geqslant r$, то в силу того, что r — минимальная верхняя грань элементов b_1, b_2, выполняется неравенство $s > b_1$, что противоречит предположению п. 4.1. Если выполняется неравенство $s < r$, то, по свойству 4 оператора φ, выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant r > s$.

Пусть теперь элементы s и r несравнимы. Согласно утверждению (d) леммы 2.22, элемент s является минимальной верхней гранью элементов a и b_2. Элементы s и r, по предположению п. 4.1, несравнимы, кроме того, согласно условию (1) леммы, выполняется неравенство $a \leqslant b_1$, поэтому, по определению множества $\mathscr{Y}^{(2)}(b_1, b_2, r)$, выполняется включение $(a, b_2) \in \mathscr{Y}^{(2)}(b_1, b_2, r)$. И тогда в силу неравенства $s < A$ (см. п. 2), по свойству 5 оператора φ, выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant \sup(s, r)$. Следовательно, $\varphi(\mathfrak{B}) > s$.

4.1.2. Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 2$. Обозначим $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ через $\{r_1, r_2\}$. Так как $\mathscr{P}$ — это множество ширины два, и элементы r_1 и r_2 несравнимы, найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы s и r_i сравнимы. Если выполняется неравенство $s \geqslant r_i$, то в силу того, что r_i — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, выполняется неравенство $s > b_1$, что противоречит предположению п. 4.1. Поэтому выполняется неравенство $r_i > s$. И тогда в силу свойства 4 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant r_i > s$.

4.2. Пусть выполняется неравенство $b_1 < s$. Заметим, что в этом случае в силу неравенств $s > w > v_2 > b_2$ (см. п. 2 и условие (4)) элемент s является верхней гранью элементов элементов b_1 и b_2.

Так как множество $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ непусто (см. п. 3), возможны два случая: либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=1$, либо $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=2$.

4.2.1. Пусть $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=1$. Обозначим $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ через $\{r\}$. Так как s — верхняя грань элементов b_1 и b_2, выполняется неравенство $s\geqslant r$. Если выполняется равенство $s=r$, то в силу свойства 4 оператора φ выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{B})\geqslant r=s$.

Пусть теперь выполняется неравенство $s>r$. Тогда, согласно утверждению (e) леммы 2.2, элементы r и w несравнимы. Согласно утверждению (f) леммы 2.2, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и b_2. Легко видеть, что в силу неравенств $b_1\geqslant a$ и $a>v_1$ (см. условие (4) и п. 2) выполняется неравенство $v_1<b_1$. Поэтому выполняется соотношение $(v_1,b_2)\in\mathscr{Y}^{(2)}(b_1,b_2,r)$. И тогда, так как выполняется неравенство $w<A$ (см. п. 2), то в силу свойства 5 оператора φ существует $\sup(r,w)$, и выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B})\geqslant\sup(r,w)$. Согласно утверждению (f) леммы 2.22, выполняется равенство $\sup(r,w)=s$. Следовательно, выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B})\geqslant s$.

4.2.2. Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})|=2$. Обозначим $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ через $\{r_1,r_2\}$. В этом случае, по определению оператора φ, значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу (φ1), и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{B})=\sup(r_1,r_2)$. Так как s — верхняя грань элементов b_1,b_2, ни одно из неравенств $r_1>s$ и $r_2>s$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $r_1,r_2<s$, то, согласно утверждению (e) леммы 2.22, оба элемента r_1 и r_2 не сравнимы с w, что невозможно, так как сами они несравнимы. Поэтому найдется такая перестановка π на множестве $\{1,2\}$, что выполняются соотношения $r_{\pi(1)}\leqslant s$, а элементы $r_{\pi(2)}$ и s несравнимы. Будем считать, что $\pi(1,2)=(1,2)$, т. е. выполняется неравенство $r_1\leqslant s$, а элементы r_2 и s несравнимы.

Если выполняется равенство $r_1=s$, то выполняются следующие соотношения: $\varphi(\mathfrak{B})=\sup(r_1,r_2)>r_1=s$.

Пусть теперь выполняется неравенство $r_1<s$. Согласно утверждению (e) леммы 2.22, элементы r_1 и w несравнимы. Тогда элементы r_2 и w сравнимы. Если выполняется неравенство $r_2\leqslant w$, то в силу того, что r_2 — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, выполняется неравенство $b_1<w$, что невозможно, так как, согласно утверждению (a) леммы 2.22, элементы b_1 и w несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $r_2>w$. Из неравенств $r_2>b_1$ и $b_1\geqslant a$ (см. условие (1)) следует неравенство $r_2>a$. Таким образом, элемент r_2 является верхней гранью элементов a и w. Согласно предположению, элементы r_2 и s несравнимы, и тогда, по свойству (a) верхних граней, существует t — минимальная верхняя грань элементов a и w, не сравнимая с s, такая что выполняется неравенство $t\leqslant r_2$. Далее, в силу неравенства $r_2<A$ выполняется неравенство $t<A$, что противоречит установленному в п. 2 равенству $|\mathscr{C}(a,w,A)|=1$. Следовательно, случай, когда выполняется неравенство $r_1<s$, а элементы r_2 и s несравнимы, выполняться не может.

5. Таким образом, выполняется неравенство $s\leqslant\varphi(\mathfrak{B})$. Согласно рассуждениям, проведенным в п. 2, выполняется равенство $\psi((a,A))=s$. Следовательно, выполняется неравенство $\psi((a,A))\leqslant\varphi(\mathfrak{B})$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.24. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) $(a,A)\in\mathscr{P}^{\psi}$, $(b_1,b_2,A)\in\mathscr{P}^{\varphi}$, $a\leqslant b_1$, *элементы* a *и* b_2 *несравнимы, значение* $\varphi((b_1,b_2,A))$ *определено*;

(2) $\mathscr{U}_1(a,A)\neq\varnothing$, $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$, $\{v_1,v_2\}=\overrightarrow{\sup}(u_1,u_2)$, *элементы* a *и* v_2 *несравнимы*;

(3) *значение* $\psi((a,A))$ *определяется по правилу* (ψ4), *причем* $|\mathscr{C}(a,w,A)|=2$, *где* $w=\sup^2(u_1,u_2)$;

(4) *выполняется неравенство* $b_2<v_2$.

Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$.

Доказательство. Из условий (1), (2) и (4) леммы следует, что выполнены условия (1), (2) и (4) леммы 2.22. Из условия (3) следует, что $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_4(a, A)$, следовательно, по определению множества $\mathcal{U}_4(a, A)$, выполняются включения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_3(a, A)$ и $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$. Таким образом, выполнено условие (3) леммы 2.22. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, выполняется неравенство $w \leqslant A$, где $w = \sup(v_1, v_2) = \sup^2(u_1, u_2)$. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы w и a несравнимы. В силу условия (2) элементы a и v_2 несравнимы, поэтому, по свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $a > v_1$. Обозначим $\mathcal{C}(a, w, A)$ через $\{s_1, s_2\}$ (см. условие (3)). Тогда, согласно определению операторов ψ и φ, выполняется соотношение $\psi((a, A)) = \varphi((a, w, A)) = \sup(s_1, s_2)$.

Обозначим (b_1, b_2, A) через $\mathfrak{B}$. Из условия леммы следует, что элементы b_1 и b_2 несравнимы и множество $\mathcal{C}(b_1, b_2, A)$ непусто.

Согласно утверждению (c) леммы 2.22, ни одно из неравенств $b_1 \geqslant s_1$ и $b_1 \geqslant s_2$ выполняться не может. Поэтому возможны два случая: либо найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что $s_{\pi(1)} > b_1$, а элементы $s_{\pi(2)}$ и b_1 несравнимы, либо выполняется неравенство $s_1, s_2 > b_1$.

1. Пусть существует перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, такая что выполняется неравенство $s_{\pi(1)} > b_1$, а элементы $s_{\pi(2)}$ и b_1 несравнимы. Без ограничения общности будем считать, что выполняется неравенство $s_1 > b_1$, а элементы s_1 и b_2 несравнимы. Тогда из неравенств $s > w > v_2 > b_2$ (см. п. 1 и условие (4)) следует, что элемент s_1 является верхней гранью элементов b_1 и b_2. Поэтому возможны два случая: либо s_1 — это минимальная верхняя грань этих элементов, либо элементы b_1 и b_2 имеют минимальную верхнюю грань r_1, такую что выполняется неравенство $r_1 < s_1$.

1.1. Пусть s_1 — минимальная верхняя грань b_1, b_2.

Предположим, что $|\mathcal{C}(\mathfrak{B})| = 2$. Обозначим $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ через $\{r_1, r_2\}$. Согласно предположению, s_1 — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, а значит s_1 совпадает с одним из элементов r_1, r_2. Будем считать, что выполняется равенство $r_1 = s_1$. По определению оператора φ, выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{B}) = \sup(r_1, r_2)$. Так как элементы s_2 и s_1 несравнимы, и элементы r_2 и $r_1 = s_1$ несравнимы, элементы s_2 и r_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $s_2 \geqslant r_2$, то в силу того, что r_2 — минимальная верхняя грань элементов b_1, b_2, выполняется неравенство $s_2 > b_1$, что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому выполняется неравенство $s_2 < r_2$. Таким образом, выполняется неравенство $\{s_1, s_2\} \ll \{r_1, r_2\}$, следовательно, по свойству (b) верхних граней, выполняется неравенство $\sup(s_1, s_2) \leqslant \sup(r_1, r_2)$ (согласно выбору элементов s_1, s_2 и r_1, r_2, в силу свойства $(*)$ множества $\mathcal{P}$ элементы $\sup(s_1, s_2)$ и $\sup(r_1, r_2)$ существуют). И тогда выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{B}) = \sup(r_1, r_2) \geqslant \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$, и утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $|\mathcal{C}(\mathfrak{B})| = 1$, тогда $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \{s_1\}$. Согласно утверждению (d) леммы 2.22, элемент s_2 является минимальной верхней гранью элементов a и b_2. Поэтому, так как элементы s_1 и s_2 несравнимы, и выполняется неравенство $a \leqslant b_1$ (см. условие (1)), то, по определению множества $\mathcal{Y}^{(2)}(b_1, b_2, s_1)$, выполняется включение $(a, b_2) \in \mathcal{Y}^{(2)}(b_1, b_2, s_1)$. И тогда в силу свойства 5 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$, и утверждение леммы доказано.

1.2. Пусть теперь существует r_1 — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, такая что $r_1 < s_1$. Покажем, что элементы r_1 и s_2 несравнимы. Действительно, из неравенства $r_1 \geqslant s_2$ следует неравенство $s_1 > s_2$, что невозможно, так как элементы s_1 и s_2 несравнимы. А из неравенства $r_1 < s_2$ в силу того, что r_1 — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, следует неравенство $s_2 > b_1$, что противоречит предположению п. 1. Далее, для элементов s_1 и r_1 выполняются утверждения (e) и (f) леммы 2.22, поэтому элементы r_1 и w несравнимы, и выполняются соотношения $\{r_1, w\} = \overrightarrow{\sup}(v_1, b_2)$ и $s_1 = \sup(r_1, w)$.

1.2.1. Пусть выполняется равенство $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 2$. Обозначим $\mathscr{C}(\mathfrak{B})$ через $\{r_1, r_2\}$. Покажем, что выполняется неравенство $r_2 \geqslant s_2$. Так как элементы r_1 и w несравнимы, элементы r_2 и w сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $r_2 \leqslant w$. Тогда в силу того, что r_2 — минимальная верхняя грань элементов b_1 и b_2, выполняется неравенство $b_1 \leqslant w$, что невозможно, так как, согласно утверждению (a) леммы 2.22, элементы b_1 и w несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $r_2 > w$. Далее, так как элементы r_1 и s_2 несравнимы, элементы r_2 и s_2 сравнимы. В силу неравенств $r_2 > w$ и $r_2 > b_1 \geqslant a$ элемент r_2 является верхней гранью элементов a и w. Поэтому, так как s_2 — минимальная верхняя грань этих элементов, неравенство $r_2 < s_2$ выполняться не может. Следовательно, выполняется неравенство $r_2 \geqslant s_2$.

Из соотношения $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 2$, по определению оператора φ, следует равенство $\varphi(\mathfrak{B}) = \sup(r_1, r_2)$. Обозначим $\sup(r_1, r_2)$ через r. Из неравенств $r > r_2 \geqslant s_2$ в силу того, что s_2 — это минимальная верхняя грань элементов a и w, следует неравенство $r > w$. Отсюда в силу неравенства $r > r_1$ следует неравенство $r > s_1 = \sup(r_1, w)$ (см. п. 1.2). Из последнего неравенства и из соотношений $r > r_2 \geqslant s_2$ следует неравенство $r \geqslant \sup(s_1, s_2)$. Таким образом, выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) = r \geqslant \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$, и утверждение леммы доказано.

1.2.2. Пусть теперь $|\mathscr{C}(\mathfrak{B})| = 1$, тогда $\mathscr{C}(\mathfrak{B}) = \{r_1\}$. Как было показано в п. 1.2, элементы r_1 и s_2 несравнимы. Согласно утверждению (d) леммы 2.22, элемент s_2 является минимальной верхней гранью элементов a и b_2. Поэтому выполняется включение $(a, b_2) \in \mathscr{Y}^{(2)}(b_1, b_2, r_1)$. Тогда в силу свойства 5 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant \sup(r_1, s_2)$. Обозначим $\sup(r_1, s_2)$ через r. Тогда из неравенства $r > s_2$ в силу того, что s_2 — это минимальная верхняя грань элементов a и w, следует неравенство $r > w$. Отсюда в силу неравенства $r > r_1$ и в силу установленного в п. 1.2 соотношения $s_1 = \sup(r_1, w)$ следует неравенство $r \geqslant s_1$. Таким образом, выполняется неравенство $r > s_1, s_2$, следовательно, $r \geqslant \sup(s_1, s_2)$. То есть выполняется неравенство $\psi(\mathfrak{B}) = r \geqslant \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$, и утверждение леммы доказано.

2. Пусть теперь выполняется неравенство $s_1, s_2 > b_1$. В силу соотношений $s_1, s_2 > w > v_2 > b_2$ (см. определение элементов s_1, s_2 и условие (4)) элементы s_1 и s_2 являются верхними гранями элементов b_1 и b_2. Если выполняется равенство $\{s_1, s_2\} = \overrightarrow{\sup}(b_1, b_2)$, то значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу ($\varphi 1$), и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{B}) = \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$, т. е. утверждение леммы доказано.

Предположим теперь, что существует r_1 — минимальная верхняя грань элементов b_1, b_2, такая что для некоторого i, $i \in \{1, 2\}$, выполняется неравенство $r_1 < s_i$. Будем считать, что $i = 1$, т. е. выполняется неравенство $r_1 < s_1$. Тогда для элементов r_1 и s_1 выполняются утверждения (e) и (f) леммы 2.22, поэтому элементы r_1 и w несравнимы и выполняется равенство $s_1 = \sup(r_1, w)$.

Покажем, что элементы r_1 и s_2 несравнимы. Действительно, пусть выполняется неравенство $r_1 < s_2$. В силу того, что s_2 — минимальная верхняя грань элементов a и w, выполняется неравенство $s_2 > w$. Следовательно, элемент s_2 является верхней гранью элементов r_1 и w, что в силу того, что элементы s_1 и s_2 несравнимы, противоречит соотношению $s_1 = \sup(r_1, w)$. Если же выполняется неравенство $r_1 \geqslant s_2$, то в силу неравенства $s_1 > r_1$ выполняется неравенство $s_1 > s_2$, что невозможно, так как элементы s_1 и s_2 несравнимы.

Покажем, что s_2 является минимальной верхней гранью элементов b_1 и b_2. Действительно, так как s_2 — верхняя грань элементов b_1, b_2, существует r_2 — минимальная верхняя грань этих элементов, такая что $r_2 \leqslant s_2$. Элементы r_1, w несравнимы и элементы r_1, r_2 несравнимы, поэтому элементы r_2 и w сравнимы. Если выполняется неравенство $w \geqslant r_2$, то выполняется неравенство $w \geqslant b_1$, что невозможно, так как, согласно утверждению (а) леммы 2.22, элементы b_1 и w несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $r_2 > w$. Из этого неравенства и из соотношений $r_2 > b_1 \geqslant a$ следует, что r_2 является верхней гранью элементов a и w. Следовательно, так как s_2 — минимальная верхняя грань элементов a и w, неравенство $r_2 < s_2$ выполняться не может. Поэтому выполняется равенство $r_2 = s_2$.

Таким образом, выполняется соотношение $\{r_1, s_2\} = \overrightarrow{\sup}(b_1, b_2)$. Тогда, по определению оператора φ, значение $\varphi(\mathfrak{B})$ определяется по правилу (φ1), и выполняется равенство $\varphi(\mathfrak{B}) = \sup(r_1, s_2)$. Обозначим $\sup(r_1, s_2)$ через r. Из неравенств $r > s_2 > w$ и $r > r_1$ в силу установленного выше соотношения $s_1 = \sup(r_1, w)$ следует неравенство $r \geqslant s_1$. И тогда выполняется неравенство $r \geqslant \sup(s_1, s_2)$, т. е. $\varphi(\mathfrak{B}) \geqslant \sup(s_1, s_2) = \psi((a, A))$. Лемма доказана.

Лемма 2.25. *Пусть выполняются следующие условия*:

(1) $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, $(b_1, b_2, A) \in \mathscr{P}^{\varphi}$, $a \leqslant b_1$, *элементы* a *и* b_2 *несравнимы, значение* $\varphi((b_1, b_2, A))$ *определено*;

(2) $\mathscr{U}_1(a, A) \neq \varnothing$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, *элементы* a *и* v_2 *несравнимы*;

(3) *значение* $\psi((a, A))$ *определяется по правилу* (ψ4);

(4) *выполняется неравенство* $b_2 < v_2$.

Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$.

Доказательство. Из условия (3) следует, что выполняются включения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$, $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_3(a, A)$ и $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существует $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\sup^2(u_1, u_2)$ через w. Согласно определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы w и a несравнимы. Согласно определению множества $\mathscr{U}_3$, множество $\mathscr{C}(a, w, A)$ непусто. Если выполняется равенство $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 2$, то утверждение леммы следует из леммы 2.24.

Предположим теперь, что выполняется равенство $|\mathscr{C}(a, w, A)| = 1$. Обозначим (a, w, A) через $\mathfrak{A}$. Из соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_4(a, A)$, по определению множества $\mathscr{U}_4$, следует неравенство $\gamma(\mathfrak{A}) > u_1, u_2$. Обозначим $\gamma(\mathfrak{A})$ через γ. По свойству 5 оператора ψ, выполняется равенство $\psi((a, A)) = \psi((\gamma, A))$.

Покажем, что для элементов (γ, A) и (b_1, b_2, B) выполнены все условия леммы 2.24. Действительно, по свойству 2 множества $\mathscr{U}_4$, в силу того, что элементы a и v_2 несравнимы (см. условие (2)), выполняются следующие соотношения: $v_1 < \gamma < a$, элементы γ и v_2 несравнимы. По свойству 4 множества $\mathscr{U}_4$, выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} = \chi(\gamma, A)$. Поэтому выполнено условие (2) леммы 2.24. Очевидно также, что выполнено условие (4) леммы 2.24. Далее, по свойству 5 оператора ψ, значение $\psi((\gamma, A))$ определяется по правилу (ψ4), и выполняется равенство $|\mathscr{C}(\gamma, w, A)| = 2$. Поэтому выполнено условие (3) леммы 2.24. Покажем, что элементы γ и b_2 несравнимы. Если выполняется неравенство $\gamma \geqslant v_2$, то в силу неравенства $a > \gamma$ выполняется неравенство $a > v_2$, что противоречит условию (2) леммы. Если выполняется неравенство $\gamma < v_2$, то в силу неравенства $\gamma > v_1$ выполняется неравенство $v_1 < v_2$, что невозможно, так как элементы v_1 и v_2 несравнимы. Поэтому элементы γ и b_2 несравнимы. Далее, согласно условию (1) леммы, выполняется неравенство $b_1 \geqslant a$, кроме того, по свойству 2 множества $\mathcal{U}_4$, выполняется неравенство $\gamma < a$. Поэтому выполняется неравенство $\gamma < b_1$.Следовательно, выполняется условие (1) леммы 2.24.

Таким образом, по лемме 2.24 выполняется неравенство $\psi((\gamma, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$. Следовательно, $\psi((a, A)) = \psi((\gamma, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$. Лемма доказана.

Лемма 2.26. *Пусть $(a, A) \in \mathcal{P}^\psi$, $(b_1, b_2, A) \in \mathcal{P}^\varphi$, $a \leqslant b_1$, элементы a и b_2 несравнимы и пусть значение $\varphi((b_1, b_2, A))$ определено. Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, A))$.*

Доказательство. Обозначим (b_1, b_2, A) через $\mathfrak{B}$, а $\psi((a, A))$ — через ψ_a. Если значение ψ_a определяется по правилам (ψ1) или (ψ3), то выполняется равенство $\psi_a = a$. В силу свойства 3 оператора φ выполняется неравенство $\varphi(\mathfrak{B}) > b_1$. И тогда, так как, по условию, выполняется неравенство $b_1 \geqslant a$, то выполняются соотношения $\varphi(\mathfrak{B}) > b_1 \geqslant a = \psi_a$, и утверждение леммы доказано.

Пусть значение ψ_a определяется по правилу (ψ2). По свойству 1 оператора ψ, выполняется равенство $\psi_a = \varphi((u_1, u_2, A))$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Тогда, так как, по условию, выполняется неравенство $b_1 \geqslant a$, то выполняются соотношения $u_1, u_2 < a \leqslant b_1$. Так как $\mathcal{P}$ — это множество ширины два, найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы b_2 и u_i сравнимы. По условию, элементы b_2 и a несравнимы, поэтому легко видеть, что выполняется неравенство $u_i < b_2$. Таким образом, выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{b_1, b_2\}$. Значит в силу следствия из леммы 2.13 выполняется неравенство $\varphi((u_1, u_2, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, A))$. Следовательно, $\psi_a \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$, и утверждение леммы доказано.

Пусть теперь значение ψ_a определяется по правилам (ψ4) или (ψ5). Тогда для $\{u_1, u_2\}$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, выполняется включение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_3(a, A)$, а значит, по определению множества $\mathcal{U}_3(a, A)$, включение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$. Положим $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, существует такая перестановка π на множестве $\{0, 1\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы. В силу соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_3(a, A)$, по свойству 1 множества $\mathcal{U}_3$, значение $\varphi((a, w, A))$ определено.

Так как элементы a и v_2 несравнимы, элементы b_2 и v_2 сравнимы. Рассмотрим два случая.

Пусть выполняется неравенство $b_2 \geqslant v_2$. По свойству 3 оператора ψ, выполняется неравенство $\psi_a \leqslant \varphi((a, w, A))$. В силу свойства 8 оператора φ выполняется равенство $\varphi((a, w, A)) = \varphi((a, v_2, A))$. Так как, по условию, выполняется неравенство $a \leqslant b_1$, и, согласно предположению, выполняется неравенство $b_2 \geqslant v_2$, то, по лемме 2.13, выполняется неравенство $\varphi((a, v_2, A)) \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$. Таким образом, выполняются соотношения $\psi_a \leqslant \varphi((a, w, A)) = \varphi((a, v_2, A)) \leqslant \varphi(\mathfrak{B})$, т. е. утверждение леммы доказано.

Пусть теперь выполняется неравенство $b_2 < v_2$. Тогда если значение ψ_a определяется по правилу (ψ5), то утверждение леммы следует из леммы 2.23, а если по правилу (ψ4), то из леммы 2.25. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $(a, A) \in \mathcal{P}^\psi$, $(b_1, b_2, B) \in \mathcal{P}^\varphi$, $a \leqslant b_1$, элементы a и b_2 несравнимы, $A \preceq B$ и пусть значение $\varphi((b_1, b_2, B))$ определено. Тогда выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$.*

Доказательство. По лемме 2.20, в силу соотношения $A \preceq B$ выполняется неравенство $\psi((a, A)) \leqslant \psi((a, B))$. По лемме 2.26, выполняется неравенство $\psi((a, B)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$. Утверждение доказано.

Лемма 2.27. *Пусть* $(a, A), (b, B)$ — *элементы типа* $(\psi 2)$, *пусть* $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$. *Тогда элементы* $\{u_1, u_2\}$ *и* $\{x_1, x_2\}$ *сравнимы относительно частичного порядка* $\ll$.

Доказательство. Так как, по условию, $(a, A), (b, B)$ — элементы типа $(\psi 2)$, выполняются соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$ и $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $\sup^2(u_1, u_2)$, $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ через $\{v_1, v_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$ соответственно, $\sup^2(u_1, u_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$ — через w и z соответственно.

Предположим, что элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ несравнимы относительно частичного порядка $\ll$. В силу леммы 2.1 без ограничения общности будем считать, что имеют место следующие соотношения: $(x_1, u_2) > (u_1, x_2)$, элементы x_1 и u_2 несравнимы, элементы u_1 и x_2 несравнимы. Далее, в силу леммы 2.3 без ограничения общности будем считать, что выполняются следующие соотношения: $y_1 \leqslant v_1$, $y_2 \geqslant v_2$, элементы y_1 и v_2 несравнимы, элементы v_1 и y_2 несравнимы, $\{v_1, y_2\} = \overrightarrow{\sup}(x_1, u_2)$.

В силу леммы 2.4 выполняется одно из неравенств $w \leqslant z$ или $z \leqslant w$. Предположим, что выполняется неравенство $w \leqslant z$. Тогда, по лемме 2.5, выполняется соотношение $z = \sup(v_1, y_2)$. Так как $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B)$, то, согласно определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы b и z несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $b > y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы. Рассмотрим два случая: $\pi(1, 2) = (1, 2)$ и $\pi(1, 2) = (2, 1)$.

Предположим, что $\pi(1, 2) = (1, 2)$, т. е. выполняется неравенство $b > y_1$, и элементы b и y_2 несравнимы. Тогда, так как элементы y_2 и v_1 несравнимы, элементы b и v_1 сравнимы. Пусть выполняется неравенство $b \leqslant v_1$. Тогда из неравенств $v_1 < w \leqslant z$ следует неравенство $b < z$, что невозможно, так как элементы b и z, как показано выше, несравнимы. Пусть теперь выполняется неравенство $b > v_1$. Так как v_1 — минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2, выполняется неравенство $b > u_2$. Поэтому выполняется неравенство $b > x_1, u_2$. Как было показано выше, элемент y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1 и u_2. Кроме того, согласно предположению рассматриваемого случая, элементы b и y_2 несравнимы. Следовательно, выполняется соотношение $\{x_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(b, B)$, что в силу неравенства $u_2 > x_2$ противоречит соотношению $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$.

Пусть теперь $\pi(1, 2) = (2, 1)$, т. е. элементы b и y_1 несравнимы, и выполняется неравенство $b > y_2$. Покажем, что элементы b и v_1 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $b \leqslant v_1$, то в силу неравенства $b > y_2$ выполняется неравенство $v_1 > y_2$, что невозможно, так как элементы v_1 и y_2 несравнимы. А если выполняется неравенство $b > v_1$, то в силу установленного выше соотношения $z = \sup(v_1, y_2)$ выполняется неравенство $b \geqslant z$, что невозможно, так как элементы b и z, согласно проведенным выше рассуждениям, несравнимы. Таким образом, элементы b и v_1 несравнимы. Далее, из неравенства $v_1 < z$ следует неравенство $v_1 < B$. Так как, согласно предположению, выполняется неравенство $b > y_2$, то в силу установленного выше неравенства $y_2 \geqslant v_2$ выполняется неравенство $b > u_1, u_2$. Поэтому выполняется неравенство $b > x_1, u_2$. Как было показано выше, элемент v_1 является минимальной верхней гранью элементов x_1 и u_2. Следовательно, выполняется соотношение $\{x_1, u_2\} \in \mathcal{U}_1(b, B)$, что в силу неравенства $u_2 > x_2$ противоречит соотношению $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$.

Таким образом, если элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ несравнимы относительно частичного порядка $\ll$, то неравенство $z \geqslant w$ выполняться не может. Проводя аналогичные рассуждения для элемента (a, A), можно показать, что неравенство $w \geqslant z$ выполняться также не может. Получилось противоречие с утверждением леммы 2.4, следовательно, элементы $\{u_1, u_2\}$ и $\{x_1, x_2\}$ сравнимы относительно частичного порядка $\ll$. Лемма доказана.

Лемма 2.28. *Пусть* $(a, A), (b, B)$ — *элементы типа* $(\psi 2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$. *Пусть выполняется неравенство* $(u_1, u_2) < (x_1, x_2)$. *Тогда либо элементы* a *и* b *сравнимы, либо* a *и* b *несравнимы, и в этом случае для любых несравнимых элементов* q_1, q_2, *таких что* $q_1, q_2 < a, b$, *найдется элемент* p, *такой что* $q_1, q_2 < p < a, b$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

1. Так как, по условию, $(a, A), (b, B)$ — элементы типа $(\psi 2)$, выполняются соотношения $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$ и $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_2(b, B)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, $\sup^2(u_1, u_2)$, $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(v_1, v_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ через $\{v_1, v_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$ соответственно, $\sup^2(u_1, u_2)$ и $\sup^2(v_1, v_2)$ — через w и z соответственно. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, выполняются неравенства $w \leqslant A$ и $z \leqslant b$. По определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы a и w несравнимы, и элементы b и z несравнимы. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$, найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\sigma(1)}$, а элементы a и $v_{\sigma(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $\sigma(1, 2) = (1, 2)$, т. е. выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы. Далее, по свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$, найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $b > y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы.

2. Так как, по условию, выполняется неравенство $(u_1, u_2) < (x_1, x_2)$, то, согласно лемме 2.2, выполняется неравенство $w \leqslant z$.

3. Далее рассмотрим четыре случая.

3.1. Пусть выполняется неравенство $a > y_1, y_2$. Тогда выполняется неравенство $a \geqslant z = \sup(y_1, y_2)$. И тогда в силу неравенства $z \geqslant w$ (см. п. 2) выполняется неравенство $a \geqslant w$, что невозможно, так как, согласно рассуждениям, проведенным в п. 1, элементы a и w несравнимы. Таким образом, неравенство $a > y_1, y_2$ выполняться не может.

3.2. Пусть выполняется неравенство $a < y_1, y_2$. Тогда в силу неравенства $b > y_{\pi(1)}$ (см. п. 1) выполняется неравенство $b > a$, т. е. утверждение леммы доказано.

3.3. Пусть для некоторой перестановки σ на множестве $\{1, 2\}$ выполняется неравенство $a \geqslant y_{\sigma(1)}$, а элементы a и $y_{\sigma(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $\sigma(1, 2) = (1, 2)$, т. е. выполняется неравенство $a \geqslant y_1$, а элементы a и y_2 несравнимы. Установим ряд вспомогательных соотношений (пп. 3.3.1–3.3.6).

3.3.1. Покажем, что выполняется неравенство $w < y_2$. Действительно, согласно п. 1, элементы a и w несравнимы, кроме того, согласно п. 3.3, элементы a и y_2 несравнимы, поэтому элементы w и y_2 сравнимы. Тогда возможны два случая: $w \geqslant y_2$ и $w < y_2$. Предположим, что выполняется неравенство $w \geqslant y_2$. Тогда в силу неравенства $w \leqslant A$ (см. п. 1) выполняется неравенство $y_2 < A$. В силу неравенства $a > y_1$ выполняется неравенство $a > x_1, x_2$. Следовательно, $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что в силу неравенства $(x_1, x_2) > (u_1, u_2)$ (см. условие леммы) противоречит соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Таким образом, выполняется неравенство $w < y_2$.

3.3.2. Покажем, что элементы w и y_1 несравнимы. Действительно, предположим, что выполняется неравенство $w \leqslant y_1$. Тогда из неравенства $a \geqslant y_1$ (см. п. 3.3) следует $a \geqslant w$, что невозможно, так как, согласно п. 1.1, элементы a и w несравнимы. Пусть теперь выполняется неравенство $w > y_1$. В этом случае, в силу неравенства $w < y_2$ (см. п. 3.3.1), выполняется неравенство $y_2 > y_1$, что невозможно, так как элементы y_1 и y_2 несравнимы. Следовательно, элементы w и y_1 несравнимы.

3.3.3. По свойству (b) множеств ширины два, найдется такая перестановка τ на множестве $\{1, 2\}$, что элементы x_1 и $v_{\tau(1)}$ сравнимы, и элементы x_2 и $v_{\tau(2)}$ сравнимы. Будем считать, что $\tau(1, 2) = (1, 2)$, т. е. элементы v_1 и x_1 сравнимы, и элементы v_2 и x_2 сравнимы.

3.3.4. Покажем, что выполняются неравенства $x_2 < v_2$ и $x_1 > v_1$. Действительно, согласно п. 3.3.3, элементы x_2 и v_2 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $x_2 \geqslant v_2$. Тогда в силу неравенств $a \geqslant y_1 > x_2$ (см. пп. 3.3 и 1) выполняется неравенство $a > v_2$, что невозможно, так как, согласно рассуждениям, проведенным в п. 1, элементы a и v_2 несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $x_2 < v_2$. Далее, согласно п. 3.3.3, элементы x_1 и v_1 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $x_1 \leqslant v_1$. Тогда в силу неравенств $x_2 < v_2 < w$ и $x_1 \leqslant v_1 < w$ выполняется неравенство $w > x_1, x_2$, т. е. элемент w является верхней гранью элементов x_1, x_2. Так как y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1, x_2, неравенство $y_2 > w$ выполняться не может, что противоречит п. 3.3.1. Таким образом, выполняется неравенство $x_1 > v_1$.

3.3.5 Покажем, что элементы x_1 и w несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $x_1 \geqslant w$, то из неравенств $w > v_2 > x_2$ (см. пп. 1 и 3.3.4) следует $x_1 > x_2$, что невозможно. Пусть теперь выполняется неравенство $x_1 < w$. Тогда в силу неравенств $w > v_2 > x_2$ (см. пп. 1 и 3.3.4) элемент w является верней гранью элементов x_1, x_2. И тогда, так как y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1, x_2, неравенство $y_2 > w$ выполняться не может, что противоречит п. 3.3.1.

3.3.6 Покажем, что элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2. Действительно, имеют место следующие соотношения: элементы v_1 и v_2 несравнимы, $w = \sup(v_1, v_2)$, элементы x_1 и x_2 несравнимы, выполняются неравенства $x_1 > v_1$ и $x_2 < v_2$ (см. п. 3.3.4), элементы w и x_1 несравнимы (см. п. 3.3.5). Следовательно, по лемме 2.12, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2.

3.3.7 Из полученных соотношений и неравенств $v_1 < a$ (см. п. 1) и $x_2 < y_1 \leqslant a$ (см. п. 3.3) следует, что $\{v_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, а это в силу неравенств $v_1 > u_1$ и $x_2 \geqslant u_2$ (см. условие леммы) противоречит соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Таким образом, предположение п. 3.3 выполняться не может.

3.4. Найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a < y_{\sigma(1)}$, а элементы a и $y_{\sigma(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a < y_1$, а элементы a и y_2 несравнимы.

Если выполняется соотношение $\pi(1, 2) = (1, 2)$ (см. п. 1), т. е. выполняется неравенство $b > y_1$, то выполняется неравенство $b > a$, и утверждение леммы доказано. Пусть теперь выполняется соотношение $\pi(1, 2) = (2, 1)$, т. е. выполняется неравенство $b > y_2$, а элементы b и y_1 несравнимы. Если выполняется неравенство $b > a$, то утверждение леммы доказано. Если выполняется неравенство $b \leqslant a$, то, в силу неравенства $a < y_1$, выполняется неравенство $b < y_1$, что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому неравенство $b \leqslant a$ выполняться не может.

3.4.1. Таким образом, осталось рассмотреть следующий случай: выполняется неравенство $a < y_1$, элементы a и y_2 несравнимы, выполняется неравенство $b > y_2$, элементы b и y_1 несравнимы, элементы a и b несравнимы.

3.4.2. Покажем, что выполняется неравенство $b > w$. Действительно, так как элементы a и b несравнимы, и, согласно п. 1, элементы a и w несравнимы, элементы b и w сравнимы. Из неравенства $b \leqslant w$ в силу неравенства $w \leqslant z$ (см. п. 2) следует неравенство $b \leqslant z$, что невозможно, так как, согласно рассуждениям п. 1, элементы b и z несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $b > w$. Заметим, что в силу неравенства $w > v_1, v_2$ выполняется неравенство $b > v_1, v_2$.

3.4.3. Пусть q_1 и q_2 — несравнимые элементы, такие что выполняется неравенство $q_1, q_2 < a, b$. Согласно свойству (b) множеств ширины два, найдется такая перестановка τ на множестве $\{1, 2\}$, что элементы $q_{\tau(1)}$ и v_1 сравнимы, и элементы $q_{\tau(2)}$ и v_2 сравнимы. Будем считать, что $\tau(1, 2) = (1, 2)$, т. е. элементы q_1 и v_1 сравнимы, и элементы q_2 и v_2 сравнимы. Рассмотрим три случая:

(a) Пусть выполняется неравенство $\{q_1, q_1\} \ll \{u_1, u_2\}$. Тогда в силу неравенства $v_1 > u_1, u_2$ выполняется неравенство $q_1, q_2 < v_1$. Поэтому в силу неравенств $b > v_1$ (см. п. 3.4.2) и $a > v_1$ (см. п. 1) выполняются неравенства $q_1, q_2 < v_1 < a, b$, и утверждение леммы доказано.

(b) Пусть выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{q_1, q_2\}$, причем $\{u_1, u_2\} \neq \{q_1, q_2\}$.

(b1) Покажем, что выполняется неравенство $q_2 < v_2$. Действительно, согласно п. 3.4.3, элементы q_2 и v_2 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $q_2 \geqslant v_2$. Тогда из неравенства $a > q_2$ (см. п. 3.4.3) следует неравенство $a > q_2 \geqslant v_2$, что невозможно, так как, согласно рассуждениям п. 1, элементы a и v_2 несравнимы.

(b2) Выполняется неравенство $q_2 < v_2$ (см. п. (b1)), элементы v_1 и v_2 несравнимы, поэтому легко видеть, что неравенство $q_2 > v_1$ выполняться не может. Предположим, что выполняется неравенство $q_2 < v_1$. Тогда, так как элементы q_1 и q_2 несравнимы, а элементы q_1 и v_1, согласно п. 3.4.3, сравнимы, легко видеть, что выполняется неравенство $q_1 < v_1$. Следовательно, в силу неравенства $v_1 < a, b$ (см. пп. 1 и 3.4.2), выполняются неравенства $q_1, q_2 < v_1 < a, b$, т. е. утверждение леммы доказано.

(b3) Пусть теперь элементы q_2 и v_1 несравнимы. Из неравенств $w > v_1, v_2$ и $v_2 > q_2$ следует неравенство $w > v_1, q_2$, т. е. элемент w является верхней гранью элементов v_1 и q_2. Поэтому очевидно, что существует минимальная верхняя грань r этих элементов, такая что выполняется неравенство $r \leqslant w$. Возможны два случая: либо элементы r и v_2 сравнимы, либо они несравнимы.

Пусть элементы r и v_2 сравнимы. Так как выполняется неравенство $r > v_1$, легко видеть, что выполняется неравенство $r > v_2$. Следовательно, в силу соотношения $w = \sup(v_1, v_2)$ и неравенства $r \leqslant w$ выполняется равенство $r = w$. Таким образом, выполняются неравенства $v_1 < a$ (см. п. 1) и $q_2 < a$ (см. п. 3.4.3), элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и q_2, элементы a и w несравнимы (см. п. 1), и выполняется неравенство $w < A$ (см. п. 1). Поэтому выполняется соотношение $\{v_1, q_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$. Из неравенств $v_1 > u_1, u_2$ (см. п. 1) и $\{u_1, u_2\} \ll \{q_1, q_2\}$ (см. предположение случая (b)) следует неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{v_1, q_2\}$, причем $\{u_1, u_2\} \neq \{v_1, q_2\}$. Следовательно, соотношение $\{v_1, q_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$ противоречит равенству $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ (см. условие леммы).

Пусть теперь элементы r и v_2 несравнимы. Так как элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1), элементы r и a сравнимы. Так как выполняется неравенство $r \leqslant w$, а элементы w и a несравнимы (см. п. 1), легко видеть, что выполняется неравенство $r < a$. Покажем, что элемент r является верхней гранью элементов q_1 и q_2. Действительно, согласно п. 3.4.3, элементы q_1 и v_1 сравнимы. Если выполняется неравенство $v_1 > q_1$, то очевидно, что r является верхней гранью элементов q_1 и q_2. Предположим, что выполняется неравенство $v_1 \leqslant q_1$. Тогда, так как, согласно п. (b1), выполняется неравенство $v_2 > q_2$, то, по лемме 2.11, элементы q_1 и v_2 несравнимы. Так как, согласно предположению, элементы r и v_2 несравнимы, элементы r и q_1 сравнимы. Легко видеть, что в силу неравенства $r > q_2$ выполняется неравенство $r > q_1$. Таким образом, в обоих случаях элемент r является верхней гранью элементов q_1 и q_2. И тогда в силу установленного выше неравенства $r<a$ и неравенств $r\leqslant w<b$ (см. п. 3.4.2) выполняются неравенства $q_1,q_2<r<a,b$, т. е. утверждение леммы доказано.

(c) Пусть элементы $\{u_1,u_2\}$ и $\{q_1,q_2\}$ несравнимы относительно частичного порядка $\ll$. По лемме 2.1, найдутся такие перестановки π и σ на множестве $\{1,2\}$, что выполняются неравенства $(q_{\pi(1)},u_{\sigma(2)})<(u_{\sigma(1)},q_{\pi(2)})$. Без ограничения общности в силу свойства (b) множеств ширины два будем считать, что перестановки π и σ совпадают. Рассмотрим два случая.

(c1) Предположим, что выполняются неравенства $(u_1,q_2)<(q_1,u_2)$. Тогда в силу неравенства $v_1>u_1,u_2$ (см. п. 1) выполняется неравенство $q_2<v_1$. Согласно п. 3.4.3, элементы q_1 и v_1 сравнимы. Если выполняется неравенство $q_1\geqslant v_1$, то выполняются неравенства $q_1\geqslant v_1>q_2$, что невозможно, так как элементы q_1 и q_2 несравнимы (см. п. 3.4.3). Поэтому выполняется неравенство $q_1<v_1$. И тогда в силу неравенств $v_1<a$ (см. п. 1) и $v_1<w<b$ (см. п. 3.4.2) выполняются неравенства $q_1,q_2<v_1<a,b$, т. е. утверждение леммы доказано.

(c2) Пусть теперь выполняются неравенства $(q_1,u_2)<(u_1,q_2)$. В силу неравенства $v_2>u_1,u_2$ (см. п. 1) выполняется неравенство $q_1<v_2$. Согласно п. 3.4.3, элементы q_2 и v_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $q_2\geqslant v_2$, то выполняются неравенства $q_2\geqslant v_2>q_1$, что невозможно, так как элементы q_1 и q_2 несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $q_2<v_2$. Следовательно, элемент v_2 является верхней гранью элементов u_1 и q_2. Легко видеть, что так как выполняется неравенство $q_2>u_2$, и v_2 — минимальная верхняя грань элементов u_1 и u_2, то v_2 является минимальной верхней гранью элементов u_1,q_2. Таким образом, имеем следующие соотношения: выполняется неравенство $u_1,q_2<a$ (см. пп. 1 и 3.4.3), элементы v_2 и a несравнимы (см. п. 1), выполняется неравенство $v_2<A$ (см. п. 1). Следовательно, $\{u_1,q_2\}\in\mathcal{U}_1(a,A)$. Полученное соотношение в силу неравенства $q_2>u_2$ (см. предположение п. (c2)) противоречит соотношению $\{u_1,u_2\}=\chi(a,A)$ (см. условие леммы). Лемма доказана.

Л е м м а 2.29. *Пусть $(a,A),(b,B)$ — элементы типа $(\psi 2)$. Тогда либо элементы a и b сравнимы, либо a и b несравнимы, и в этом случае для любых несравнимых элементов q_1,q_2, таких что $q_1,q_2<a,b$, найдется элемент p, такой что $q_1,q_2<p<a,b$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия следует, что множества $\mathcal{U}_1(a,A)$ и $\mathcal{U}_1(b,B)$ непусты. Обозначим $\chi(a,A)$ через $\{u_1,u_2\}$, $\chi(b,B)$ — через $\{x_1,x_2\}$. Так как, по условию, $(a,A),(b,B)$ — элементы типа $(\psi 2)$, выполняются соотношения $\{u_1,u_2\}\in\mathcal{U}_2(a,A)$ и $\{x_1,x_2\}\in\mathcal{U}_2(b,B)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\sup^2(u_1,u_2)$ и $\sup^2(v_1,v_2)$. Обозначим $\sup^2(u_1,u_2)$ и $\sup^2(v_1,v_2)$ через w и z соответственно. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы, и элементы b и z несравнимы.

Согласно лемме 2.27, элементы $\{x_1,x_2\}$ и $\{u_1,u_2\}$ сравнимы относительно частичного порядка $\ll$. Если выполняется равенство $\{x_1,x_2\}=\{u_1,u_2\}$, то очевидно, что выполняется равенство $z=w$. Тогда, так как элементы a и w несравнимы, и элементы b и $z=w$ несравнимы, то в силу свойства (a) множеств ширины два элементы a и b сравнимы, т. е. утверждение леммы доказано. Пусть теперь $\{x_1,x_2\}\neq\{u_1,u_2\}$. Возможны два случая: либо выполняется неравенство $\{u_1,u_2\}\ll\{x_1,x_2\}$, либо неравенство $\{x_1,x_2\}\ll\{u_1,u_2\}$. Легко видеть, что в обоих случаях утверждение леммы следует из леммы 2.28. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть $a,b\in\mathcal{P}$ и пусть существуют такие множества $A,B\subseteq\mathcal{P}^{(0)}$, что (a,A) и (b,B) являются элементами типа $(\psi 2)$. Тогда в $\mathcal{P}$ не существует таких элементов x и y, что (x,y,a,b) — квадрат.*

Лемма 2.30. *Пусть* (a, A) — *элемент типа* $(\psi 3)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, *и пусть выполняется неравенство* $a < b < A$. *Тогда* (b, A) *также является элементом типа* $(\psi 3)$ *и выполняется равенство* $\chi(a, A) = \chi(b, A)$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

1. Из условия следует, что множество $\mathcal{U}_1(a, A)$ непусто, и для пары $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$, $\sup^2(u_1, u_2)$ — через w. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

2. По свойству 2 множества $\mathcal{U}_3$, выполняется равенство $|A| = 2$ и (a, w, p_1, p_2), где $A = \{p_1, p_2\}$, — квадрат. В силу леммы 2.8 множество минимальных верхних граней элементов a и v_2 совпадает с множеством минимальных верхних граней элементов a и w, поэтому легко видеть, что (a, v_2, p_1, p_2) также является квадратом.

3. Покажем, что элементы b и v_2 несравнимы и элементы b и w несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $b \leqslant w$, то в силу неравенства $b > a$ (см. условие леммы) выполняется неравенство $a > w$, что невозможно, так как, согласно п. 1, элементы a и w несравнимы. Поэтому неравенство $b \leqslant w$ выполняться не может. А значит, и неравенство $b \leqslant v_2$ выполняться не может. Далее, если выполняется неравенство $b > v_2$, то в силу неравенства $b < A$ (см. условие) и соотношения $A = \{p_1, p_1\}$ (см. п. 2) выполняются неравенства $a, v_2 < b < p_1, p_2$, что противоречит тому, что (a, v_2, p_1, p_2) — квадрат (см. п. 2). Поэтому неравенство $b > v_2$ выполняться не может. А значит, и неравенство $b > w$ выполняться не может.

4. Так как элементы b и v_2 несравнимы и элементы b и w несравнимы, то выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(b, A)$, а значит $\mathcal{U}_1(b, A) \neq \varnothing$. Пусть $\{x_1, x_2\} = \chi(b, A)$. Покажем, что выполняется равенство $\{x_1, x_2\} = \{u_1, u_2\}$.

4.1. Предположим, что $\{x_1, x_2\} \neq \{u_1, u_2\}$. Так как $\{x_1, x_2\} = \chi(b, A)$, выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ через $\{y_1, y_2\}$ и $\sup^2(x_1, x_2)$ — через z. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, выполняется неравенство $z \leqslant A$, и существует такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $b \geqslant y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что $b \geqslant y_1$, а элементы b и y_2 несравнимы.

4.2. По лемме 2.2 в силу соотношения $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ выполняется неравенство $w \leqslant z$.

4.3. Покажем, что выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, A)$. Действительно, предположим, что $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{U}_2(b, A)$. Тогда, по свойству 3 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $b < z$. По условию, выполняется неравенство $a < b$, поэтому $a < z$. И тогда, в силу неравенств $w \leqslant z$ (см. п. 4.2) и $z \leqslant A$ (см. п. 4.1), выполняется соотношение $a, w < z < A = \{p_1, p_2\}$, что невозможно, так как, согласно п. 2, (a, w, p_1, p_2) — квадрат. Следовательно, $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, A)$. А значит, по определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы b и z несравнимы.

4.4. Покажем, что выполняется неравенство $a > y_1$, а элементы a и y_2 несравнимы. Действительно, предположим, что элементы a и y_1 несравнимы. Тогда элементы a и y_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $a \geqslant y_2$, то из неравенства $b > a$ (см. условие) следует неравенство $b > y_2$, что в силу п. 4.1 невозможно. А если выполняется неравенство $a < y_2$, то в силу неравенств $y_2 < z$ (см. п. 4.1) и $w \leqslant z$ (см. п. 4.2) выполняется соотношение $a, w < z < A = \{p_1, p_2\}$, что невозможно в силу п. 2. Следовательно, элементы a и y_2 несравнимы. Поэтому элементы a и y_1 сравнимы. Если выполняется неравенство $a \leqslant y_1$, то в силу неравенств $y_1 < z$ и $w \leqslant z$ (см. п. 4.2) выполняется неравенство $a, w < z < A$, что в силу п. 2 невозможно. Поэтому выполняется неравенство $a > y_1$.

4.5. Из соотношений, установленных в п. 4.4, следует, что выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$. Согласно п. 4.1, выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$. Поэтому соотношение $\{u_1, u_2\} \neq \{x_1, x_2\}$ противоречит равенству $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ (см. п. 1). Следовательно, выполняется равенство $\{x_1, x_2\} = \{u_1, u_2\}$. Таким образом, утверждение п. 4 доказано.

5. Покажем, что (b, A) является элементом типа ($\psi 3$). Действительно, легко видеть, что если (b, w, p_1, p_2) не является квадратом, то в силу неравенства $b > a$ (см. условие) (a, w, p_1, p_2) также не является квадратом, что противоречит п. 2. Поэтому (b, w, p_1, p_2) — квадрат. Следовательно, $\mathscr{C}(b, w, A) = \varnothing$, а значит (b, A) является элементом типа ($\psi 3$). Лемма доказана.

Л е м м а 2.31. *Пусть $(a, A) \in \mathscr{P}^{\psi}$, (a, A) — элемент типа ($\psi 2$), пусть x_1 и x_2 — несравнимые элементы, такие что выполняется неравенство $x_1, x_2 < a$, и пусть существует такой элемент r, что (x_1, x_2, a, r) — квадрат. Тогда выполняется неравенство $r < w$, где $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем доказательство леммы на несколько этапов.

1. Так как (a, A) — элемент типа ($\psi 2$), то множество $\mathscr{U}_1(a, A)$ непусто и выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{U}_2(a, A)$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$ и w соответственно. По определению множества $\mathscr{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_2$, выполняется неравенство $w < A$, и найдется перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, такая что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

2. В силу свойства (b) квадратов элементы x_1 и x_2 имеют две минимальные верхние грани q_1, q_2, и найдется такая перестановка σ на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a \geqslant q_{\sigma(1)}$, а элементы a и $q_{\sigma(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a \geqslant q_1$, а элементы a и q_2 несравнимы.

3. Элементы q_2 и a несравнимы, поэтому в силу свойства 5 множества $\mathscr{U}_2$ выполняется неравенство $q_2 \leqslant w$. Тогда в силу неравенства $w < A$ (см. п. 1) выполняется неравенство $q_2 < A$. И тогда из неравенства $x_1, x_2 < a$ (см. условие) в силу того, что q_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1, x_2, не сравнимая с элементом a (см. п. 2), следует соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$. Поэтому в силу выбора пары $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ выполняется неравенство $\{x_1, x_2\} \ll \{u_1, u_2\}$.

4. Покажем, что выполняется неравенство $(q_1, q_2) \leqslant (v_1, v_2)$. Действительно, элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1), элементы a и q_2 несравнимы (см. п. 2), поэтому элементы v_2 и q_2 сравнимы. В силу неравенства $\{x_1, x_2\} \ll \{u_1, u_2\}$ (см. п. 3), по свойству (d) верхних граней, выполняется неравенство $q_2 \leqslant v_2$. Предположим, что элементы q_1 и v_1 несравнимы. Тогда элементы q_2 и v_1 сравнимы. Легко видеть, что в силу неравенства $q_2 \leqslant v_2$ выполняется неравенство $q_2 \leqslant v_1$. Тогда в силу неравенства $a > v_1$ (см. п. 1) выполняется неравенство $a > q_2$, что невозможно, так как элементы a и q_2

несравнимы (см. п. 2). Таким образом, элементы q_1 и v_1 сравнимы. И тогда, по свойству (d) верхних граней, выполняется неравенство $q_1 \leqslant v_1$.

5. Покажем теперь, что выполняется неравенство $r < w$. Действительно, так как, по условию, (x_1, x_2, a, r) — квадрат, элементы a и r несравнимы. Тогда, так как элементы a и w несравнимы (см. п. 1), элементы r и w сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $r \geqslant w$. В этом случае в силу неравенств $q_1 \leqslant v_1$ (см. п. 4), $a > v_1$ (см. п. 1) и $r > w > v_1$ выполняются соотношения $x_1, x_2 < q_1 \leqslant v_1 < a, r$, что невозможно, так как, по условию, (x_1, x_2, a, r) — квадрат. Следовательно, выполняется неравенство $r < w$. Лемма доказана.

Лемма 2.32. *Пусть (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, пусть b_1, b_2 — несравнимые элементы, такие что $b_1, b_2 < a$, и пусть существует такой элемент r, что (b_1, b_2, a, r) — квадрат. Пусть c — такой элемент, что $a < c < A$. Тогда (b_1, b_2, c, r) — квадрат.*

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на несколько этапов.

1. По условию, (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, поэтому (a, A) является также элементом типа $(\psi 2)$. Это значит, что множество $\mathcal{U}_1(a, A)$ непусто, и выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$ и w соответственно. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $w < A$, и найдется перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, такая что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

2. По условию, выполняются неравенства $a < c < A$, поэтому в силу леммы 2.30 (c, A) является элементом типа $(\psi 3)$, и выполняются равенства $\chi(c, A) = \chi(a, A) = \{u_1, u_2\}$. Легко видеть, что выполняется неравенство $c > v_1$, элементы c и v_2 несравнимы, и элементы c и w несравнимы.

3. Покажем, что если некоторый элемент z не сравним с элементом a, то он не сравним и с элементом c. Действительно, если выполняется неравенство $c \leqslant z$, то в силу неравенства $c > a$ выполняется неравенство $a < z$, что противоречит предположению о том, что a и z несравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $c > z$. Элементы a и z несравнимы, элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1), следовательно, элементы z и v_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $z \geqslant v_2$, то в силу неравенства $c > z$ выполняется неравенство $c > v_2$, что невозможно, так как элементы c и v_2 несравнимы (см. п. 2). Поэтому выполняется неравенство $z < v_2$.

Покажем, что элементы z и v_1 несравнимы. Действительно, легко видеть, что в силу неравенства $z < v_2$ неравенство $z \geqslant v_1$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $z < v_1$, то в силу неравенства $v_1 < a$ (см. п. 1) выполняется неравенство $a > z$, что, по предположению п. 3, невозможно. Поэтому элементы z и v_1 несравнимы.

Покажем, что элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и z. Действительно, выполняются следующие соотношения: элементы v_1 и v_2 несравнимы, элементы a и z несравнимы, выполняются неравенства $v_1 < a$ (см. п. 1) и $v_2 > z$, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и v_2, элементы a и w несравнимы (см. п. 1). Поэтому, согласно лемме 2.12, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и z.

Таким образом, элементы v_1 и z несравнимы, выполняются неравенства $c > z$ и $c > a > v_1$, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и z, элементы c и w несравнимы (см. п. 2) и выполняется неравенство $w < A$ (см. п. 1). Следовательно, $\{v_1, z\} \in \mathcal{U}_1(c, A)$. Легко видеть, что выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{v_1, z\}$, причем $\{u_1, u_2\} \neq \{v_1, z\}$. Поэтому соотношение $\{v_1, z\} \in \mathcal{U}_1(c, A)$ противоречит установленному в п. 2 соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(c, A)$. А значит, неравенство $c > z$ выполняться не может. Следовательно, элементы c и z несравнимы.

4. Покажем, что (b_1, b_2, c, r) — квадрат. Действительно, по условию, (b_1, b_2, a, r) — квадрат, поэтому элементы a и r несравнимы. Тогда элементы c и r несравнимы (см. п. 3). Предположим, что (b_1, b_2, c, r) не является квадратом. Это значит, что найдется такой элемент t, что выполняются неравенства $b_1, b_2 < t < c, r$.

Покажем, что элементы t и a несравнимы. Действительно, предположим, что выполняется неравенство $t \leqslant a$. Тогда в силу неравенств $b_1, b_2 < t$ и $t < r$ выполняется неравенство $b_1, b_2 < t < a, r$, что невозможно, так как (b_1, b_2, a, r) — квадрат (см. условие леммы). Пусть теперь выполняется неравенство $t > a$. В этом случае в силу неравенства $t < r$ выполняется неравенство $a < r$, что невозможно, так как, как было показано, элементы a и r несравнимы.

Так как элементы t и a несравнимы, то, согласно п. 3, элементы c и t несравнимы. Следовательно, элемента t, такого что $b_1, b_2 < t < c, r$, не существует, т. е. (b_1, b_2, c, r) — квадрат. Лемма доказана.

Лемма 2.33. *Пусть* (a, A) *— элемент типа* $(\psi 3)$, $A = \{A_1, A_2\}$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$. *Пусть* b *— такой элемент, что выполняются неравенства* $a < b < A_1$, *элементы* b *и* A_2 *несравнимы, элементы* b *и* w *несравнимы. Пусть* $\mathcal{U}_1(b, \{A_1\}) \neq \varnothing$, *и выполняется равенство* $\chi(a, A) = \chi(b, A_1)$. *И пусть* s *— не сравнимый с* a *элемент. Тогда элементы* s *и* b *несравнимы.*

Доказательство. По условию, (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, а значит, и элемент типа $(\psi 2)$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{U}_1(a, A)$ непусто, и выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$, где $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$ и w соответственно. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $w < A$, и существует перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, такая что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы. Так как (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, то $|A| = 2$. Обозначим элементы множества A через A_1 и A_2.

Нетрудно показать, что элементы b и v_2 несравнимы.

Из условия следует, что $(b, \{A_1\}) \in \mathcal{P}^\psi$ и выполняется равенство $\{u_1, u_2\} = \chi(b, \{A_1\})$.

Пусть s — не сравнимый с a элемент. Покажем, что элементы s и b несравнимы. Из неравенства $b \leqslant s$ в силу неравенства $b > a$ следует $a < s$, что противоречит условию. Предположим теперь, что выполняется неравенство $b > s$.

Покажем, что выполняется неравенство $s < v_2$. Действительно, так как элементы a и s несравнимы, и элементы a и v_2 несравнимы, элементы s и v_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $s \geqslant v_2$, то в силу неравенства $b > s$ выполняется неравенство $b > v_2$, что невозможно, потому что, как показано выше, элементы b и v_2 несравнимы. Поэтому выполняется неравенство $s < v_2$.

Покажем, что элементы s и v_1 несравнимы. Действительно, так как выполняется неравенство $s < v_2$, легко видеть, что неравенство $s \geqslant v_1$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $s < v_1$, то в силу неравенства $v_1 < a$ выполняется неравенство $a > s$, что невозможно, так как, по условию, элементы a и s несравнимы. Таким образом, элементы s и v_1 несравнимы.

Покажем, что элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и s. Действительно, выполняются следующие соотношения: элементы v_1 и v_2 несравнимы, элементы a и s несравнимы, выполняются неравенства $v_1 < a$ и $v_2 > s$, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и v_2, элементы a и w несравнимы. Поэтому, по лемме 2.12, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и s.

Таким образом, элементы v_1 и s несравнимы, выполняются неравенства $b > s$ и $b > a > v_1$, элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и s, элементы b и w несравнимы (по условию), и выполняется неравенство $w < A_1$. Следовательно, $\{v_1, s\} \in \mathcal{U}_1(b, \{A_1\})$. Легко видеть, что выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{v_1, s\}$, причем $\{u_1, u_2\} \neq \{v_1, s\}$. Поэтому соотношение $\{v_1, s\} \in \mathcal{U}_1(b, \{A_1\})$ противоречит установленному выше соотношению $\{u_1, u_2\} = \chi(b, \{A_1\})$. Это значит, что неравенство $b > s$ выполняться не может. Следовательно, элементы b и s несравнимы. Лемма доказана.

Л е м м а 2.34. *Пусть (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, $A = \{A_1, A_2\}$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$. Пусть b — такой элемент, что выполняются неравенства $a < b < A_1$, элементы b и A_2 несравнимы, элементы b и w несравнимы. Пусть r_1 и r_2 — несравнимые элементы, такие что $r_1, r_2 < a$, и существует s — минимальная верхняя грань элементов r_1 и r_2, не сравнимая с элементом a. Тогда элементы b и s несравнимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

1. По условию, (a, A) является элементом типа $(\psi 3)$, поэтому множество $\mathcal{U}_1(a, A)$ непусто, и для пары $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ через $\{v_1, v_2\}$, $\sup^2(u_1, u_2)$ — через w (см. свойство 1 множества $\mathcal{U}_1$). По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы a и w несравнимы. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $a > v_{\pi(1)}$, а элементы a и $v_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $a > v_1$, а элементы a и v_2 несравнимы.

2. По свойству 2 множества $\mathcal{U}_3$, выполняется равенство $|A| = 2$, и (a, w, A_1, A_2), где $\{A_1, A_2\} = A$, — квадрат. В силу свойства (b) квадрата элементы a и w 1-несравнимы. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(a, w)$ через $\{p_1, p_2\}$. В силу свойства (b) квадрата найдется перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, такая что выполняется неравенство $(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}) \leqslant (A_1, A_2)$. Без ограничения общности будем считать, что $(p_1, p_2) \leqslant (A_1, A_2)$. Заметим, что (a, w, p_1, p_2) — квадрат.

3. Покажем, что выполняется неравенство $b < p_1$, а элементы b и p_2 несравнимы. Действительно, так как выполняется неравенство $p_1, p_2 > w$ (см. п. 2), а элементы b и w, по условию, несравнимы, то ни одно из неравенств $b \geqslant p_1$ и $b \geqslant p_2$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $b < p_2$, то в силу неравенства $p_2 \leqslant A_2$ (см. п. 2) выполняется неравенство $b < A_2$, что противоречит условию леммы. Следовательно, элементы b и p_2 несравнимы. Тогда элементы b и p_1 сравнимы, а значит выполняется неравенство $b < p_1$.

4. Покажем, что элементы b и v_2 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $b \leqslant v_2$, то в силу неравенства $a < b$ (см. условие леммы) выполняется неравенство $a < v_2$, что невозможно (см. п. 1). Если выполняется неравенство $b > v_2$, то в силу неравенств $b > a > v_1$ выполняется неравенство $b > v_1, v_2$. Тогда выполняется неравенство $b \geqslant w = \sup(v_1, v_2)$, что

противоречит условию леммы. Таким образом, элементы b и v_2 несравнимы.

5. Рассмотрим пару (b, B), где $B = \{p_1\}$. В силу неравенства $b < p_1$ (см. п. 3) выполняется соотношение $(b, B) \in \mathscr{P}^{\psi}$. Элементы b и v_2 несравнимы, элементы b и w, по условию, несравнимы, выполняются неравенства $u_1, u_2 < a < b$, и $v_2, w < p_1$ (см. пп. 1 и 2), следовательно, $\{u_1 u_2\} \in \mathscr{U}_2(b, B)$. Поэтому $\mathscr{U}_1(b, B) \neq \varnothing$. Положим $\chi(b, B) = \{x_1, x_2\}$. Тогда выполняется неравенство $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$.

Если выполняется равенство $\{u_1, u_2\} = \{x_1, x_2\}$, то утверждение леммы следует из леммы 2.33. Далее будем считать, что $\{x_1, x_2\} \neq \{u_1, u_2\}$.

6. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$. Обозначим $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ через $\{y_1, y_2\}$ и $\sup^2(x_1, x_2)$ — через z. По свойству 1 множества $\mathscr{U}_1$, выполняется неравенство $z \leqslant B$, а также существует такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $b \geqslant y_{\pi(1)}$, а элементы b и $y_{\pi(2)}$ несравнимы. Будем считать, что выполняется неравенство $b \geqslant y_1$, а элементы b и y_2 несравнимы. Заметим, что из определения множества $\mathscr{U}_1$ следует, что выполняется неравенство $y_1, y_2 < B$. Таким образом, выполняются неравенства $y_1, y_2 < p_1$ и $z \leqslant p_1$ (см. п. 5). Заметим также, что, так как элементы b и y_2 несравнимы, и элементы b и w несравнимы (см. условие), то элементы w и y_2 сравнимы.

7. Покажем, что выполняется неравенство $y_2 < p_2$. Действительно, так как элементы y_2 и b несравнимы (см. п. 6), элементы p_2 и b несравнимы (см. п. 3), то элементы y_2 и p_2 сравнимы. Если выполняется неравенство $y_2 \geqslant p_2$, то в силу неравенства $y_2 < p_1$ (см. п. 6) выполняется неравенство $p_1 > p_2$, что невозможно (см. п. 2). Следовательно, выполняется неравенство $y_2 < p_2$.

8. Покажем, что найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы a и x_i несравнимы.

Предположим, что выполняется неравенство $x_1, x_2 > a$. Очевидно, что найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы x_i и w сравнимы. Так как элементы a и w несравнимы, то из неравенства $x_i > a$ следует, что выполняется неравенство $x_i > w$. Тогда выполняются неравенства $y_2 > x_i > a, w$, что вместе с неравенствами $y_2 < p_1, p_2$ (см. пп. 6 и 7) противоречит тому, что (a, w, p_1, p_2) — квадрат (см. п. 2).

Предположим, что выполняется неравенство $x_1, x_2 < a$. Элемент a является верхней гранью элементов x_1 и x_2, поэтому не выполняется ни одно из неравенств $y_1 > a$ и $y_2 > a$. Так как элементы b и y_2 несравнимы (см. п. 6), и, по условию, выполняется неравенство $b > a$, то неравенство $y_2 \leqslant a$ выполняться не может. Следовательно, элементы a и y_2 несравнимы. Из неравенства $y_2 < p_1, p_2$ (см. пп. 6 и 7) следует $y_2 < A$ (см. п. 2). И тогда выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathscr{U}_1(a, A)$, что невозможно в силу соотношения $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$ и предположения п. 5. о том, что выполняются соотношения $\{u_1, u_2\} \ll \{x_1, x_2\}$ и $\{x_1, x_2\} \neq \{u_1, u_2\}$.

Таким образом, ни одно из неравенств $x_1, x_2 > a$ и $x_1, x_2 < a$ выполняться не может. Так как элементы x_1 и x_2 несравнимы, ни одно из соотношений $x_1 \leqslant a \leqslant x_2$ и $x_1 \geqslant a \geqslant x_2$ выполняться также не может. Поэтому найдется такой номер i, $i \in \{1, 2\}$, что элементы a и x_i несравнимы.

Будем считать, что элементы a и x_2 несравнимы.

9. Покажем, что выполняются следующие соотношения: $x_2 < v_2$, элементы x_2 и v_1 несравнимы, и найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что элементы x_2 и $u_{\pi(1)}$ несравнимы, и выполняется неравенство $x_2 > u_{\pi(2)}$.

Действительно, элементы a и x_2 несравнимы (см. п. 8), элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1), поэтому элементы x_2 и v_2 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $x_2 \geqslant v_2$. Из соотношения $\{x_1, x_2\} = \chi(b, A)$

(см. п. 5) следует, что выполняются неравенства $x_1, x_2 < b$. И тогда в силу неравенства $x_2 < b$ выполняется неравенство $v_2 < b$, что в силу п. 4 невозможно. Следовательно, выполняется неравенство $x_2 < v_2$.

Элементы a и x_2 несравнимы (см. п. 8), выполняется неравенство $a > v_1$ (см. п. 1), поэтому неравенство $v_1 \geqslant x_2$ выполняться не может. Далее, элементы v_1 и v_2 несравнимы, поэтому из установленного выше неравенства $x_2 < v_2$ следует, что неравенство $x_2 > v_1$ выполняться также не может. Таким образом, элементы x_2 и v_1 несравнимы.

Из несравнимости элементов v_1 и x_2 и неравенства $u_1, u_2 < v_1$ (см. п. 1) следует, что ни одно из неравенств $x_2 \leqslant u_1$ и $x_2 \leqslant u_2$ выполняться не может. Из установленного выше неравенства $x_2 < v_2$ следует, что неравенство $x_2 > u_1, u_2$ выполняться также не может. Следовательно, найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что элементы x_2 и $u_{\pi(1)}$ несравнимы, и выполняется неравенство $x_2 > u_{\pi(2)}$. Будем считать, что элементы u_1 и x_2 несравнимы, и выполняется неравенство $u_2 < x_2$.

10. Покажем, что выполняется неравенство $x_1 < a$. Действительно, элементы a и x_2 несравнимы (см. п. 8), поэтому элементы a и x_1 сравнимы. Предположим, что выполняется неравенство $x_1 \geqslant a$. Тогда выполняется неравенство $y_2 > a$. Согласно п. 6, элементы y_2 и w сравнимы. Так как выполняется неравенство $y_2 > a$, и элементы a и w несравнимы, неравенство $y_2 \leqslant w$ выполняться не может. Поэтому выполняется неравенство $y_2 > w$. Таким образом, выполняется неравенство $y_2 > a, w$, что вместе с неравенствами $y_2 < p_1, p_2$ (см. пп. 6 и 7) противоречит тому, что (a, w, p_1, p_2) — квадрат (см. п. 2).

11. Пусть d — такой элемент, что элементы d и a несравнимы, и выполняется неравенство $d \leqslant x_2$. Покажем, что элементы v_1 и d несравнимы, и w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и d.

Действительно, так как элементы d и a несравнимы, и выполняется неравенство $a > v_1$ (см. п. 1), неравенство $v_1 \geqslant d$ выполняться не может. Если выполняется неравенство $d > v_1$, то в силу неравенств $v_2 > x_2$ (см. п. 9) и $x_2 \geqslant d$ (см. условие п. 11) выполняются неравенства $v_1 > d > v_1$, что невозможно, так как элементы v_1 и v_2 несравнимы. Следовательно, элементы d и v_1 несравнимы. Покажем теперь, что элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и d. Действительно, w является верхней гранью этих элементов, поэтому существует элемент t, такой что t — минимальная верхняя грань элементов v_1 и d, и выполняется неравенство $t \leqslant w$. Возможны два случая.

11.1. Пусть элементы t и v_2 сравнимы. Легко видеть, что в силу неравенства $t > v_1$ выполняется неравенство $t > v_2$. И тогда из неравенств $v_1, v_2 < t \leqslant w$ и соотношения $w = \sup(v_1, v_2)$ следует, что $t = w$.

11.2. Пусть теперь элементы t и v_2 несравнимы. Тогда, так как элементы a и v_2 несравнимы (см. п. 1), элементы a и t сравнимы. Если выполняется неравенство $t \leqslant a$, то в силу неравенства $t > d$ выполняется неравенство $a > d$, что противоречит условию п. 11. Поэтому $t > a$. И тогда из неравенства $t \leqslant w$, следует неравенство $w > a$, что в силу п. 1 невозможно.

Таким образом, выполняется равенство $t = w$, т. е. w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и d.

12. Покажем, что выполняются неравенства $x_1 \geqslant v_1$ и $y_2 \geqslant w$, а элементы y_1 и w несравнимы.

Предположим, что выполняется неравенство $x_1 < v_1$. Выполняются следующие соотношения: элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2 (см. п. 11), элементы v_1 и x_2 несравнимы (см. п. 9), выполняются неравенства $b > x_2$ (см. п. 5) и $b > a > v_1$ (см. условие леммы и п. 1). Поэтому в силу неравенства $w < p_1$ (см. п. 2) выполняется соотношение

$\{v_1, x_2\} \in \mathcal{U}_1(b, B)$, что противоречит соотношению $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$. Таким образом, выполняется неравенство $x_1 \geqslant v_1$.

Элемент y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1 и x_2 (см. п. 6), выполняется неравенство $x_1 \geqslant v_1$, элементы x_1 и x_2 несравнимы (см. п. 9), поэтому элемент y_2 является верхней гранью элементов v_1 и x_2. Тогда, так как y_2 и w сравнимы (см. п. 6), и элемент w является минимальной верхней гранью элементов v_1 и x_2 (см. п. 11), то выполняется неравенство $y_2 \geqslant w$.

Так как элементы y_1 и y_2 несравнимы, и выполняется неравенство $y_2 \geqslant w$, неравенство $y_1 \leqslant w$ выполняться не может. Так как выполняется неравенство $b > y_1$ (см. п. 6), а элементы b и w, по условию леммы, несравнимы, неравенство $y_1 > w$ выполняться также не может. Поэтому элементы y_1 и w несравнимы.

13. Пусть d — такой элемент, что элементы d и a несравнимы, и выполняется неравенство $d \leqslant x_2$ (так же, как и в п. 11). Покажем, что элементы d и v_1 1-несравнимы. Действительно, согласно п. 11, элементы d и v_1 несравнимы, и элемент w является их минимальной верхней гранью. Так как y_1 — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x_2 (см. п. 6), и выполняются неравенства $x_1 \geqslant v_1$ (см. п. 12) и $x_2 \geqslant d$, то элемент y_1 является верхней гранью элементов d и v_1. И тогда, так как элементы w и y_1 несравнимы (см. п. 12), то по свойству (a) верхних граней найдется минимальная верхняя грань элементов d и v_1, не сравнимая с элементом w. Это означает, что элементы d и v_1 1-несравнимы.

14. Пусть r_1, r_2 — несравнимые элементы, такие что $r_1, r_2 < a$, и существует s — минимальная верхняя грань элементов r_1, r_2, не сравнимая с элементом a. Покажем, что элементы s и b несравнимы.

14.1. По свойству 5 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $s \leqslant w$. Поэтому выполняется неравенство $s < A$ (см. п. 1), а значит, выполняется соотношение $\{r_1, r_2\} \in \mathcal{U}_1(a, A)$. Согласно выбору элементов u_1, u_2 (см. п. 1), выполняется неравенство $\{r_1, r_2\} \ll \{u_1, u_2\}$. Если выполняется равенство $\{u_1, u_2\} = \{r_1, r_2\}$, то легко видеть, что выполняется равенство $v_2 = s$. Элементы b и v_2 несравнимы (см. п. 4), поэтому в этом случае утверждение леммы доказано. Пусть теперь $\{r_1, r_2\} \neq \{u_1, u_2\}$.

14.2. Легко видеть, что неравенство $s \geqslant b$ выполняться не может.

14.3. Покажем, что неравенство $s < b$ выполняться также не может. Предположим, что оно выполняется, и установим ряд вспомогательных соотношений.

14.3.1. Покажем, что выполняется неравенство $s < v_2$. Действительно, элементы a и s несравнимы, элементы a и v_2 несравнимы, поэтому элементы s и v_2 сравнимы. Элементы b и v_2 несравнимы (см. п. 4), и, согласно предположению п. 14.3, выполняется неравенство $s < b$, поэтому неравенство $s \geqslant v_2$ выполняться не может.

14.3.2. Так как элементы a и s несравнимы, и элементы a и x_2 несравнимы (см. п. 8), элементы s и x_2 сравнимы. Рассмотрим два случая: $s > x_2$ и $s \leqslant x_2$.

(a) Пусть выполняется неравенство $s > x_2$.

Покажем, что элементы s и x_1 несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $s \leqslant x_1$, то в силу неравенства $a > x_1$ (см. п. 10) выполняется неравенство $a > s$, что противоречит условию п. 14. А если выполняется неравенство $s > x_1$, то в силу неравенства $x_1 \geqslant v_1$ (см. п. 12) выполняется неравенство $s > v_1$. Последнее неравенство вместе с неравенством $s < v_2$ (см. п. 14.3.1) противоречит тому, что элементы v_1 и v_2 несравнимы.

Покажем, что элемент y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1 и s. Действительно, в силу неравенств $y_2 > x_1$ (см. п. 6), $y_2 \geqslant w$ (см.

п. 12), $w > v_2$ (см. п. 1) и $v_2 > s$ (см. п. 14.3.1) элемент y_2 является верхней гранью элементов x_1 и s. И тогда легко видеть, что, так как выполняется неравенство $s > x_2$ (см. предположение случая (a)), и y_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1 и x_2, то y_2 — минимальная верхняя грань элементов x_1 и s.

Таким образом, элементы x_1 и s несравнимы, выполняется неравенство $b > x_1, s$ (см. пп. 5 и 14.3), и элемент y_2 является минимальной верхней гранью элементов x_1 и s. Поэтому выполняется соотношение $\{x_1, s\} \in \mathscr{U}_1(b, B)$, что в силу неравенства $s > x_2$ (см. предположение случая (a)) противоречит соотношению $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$ (см. п. 5). Следовательно, неравенство $s > x_2$ выполняться не может.

(b) Пусть выполняется неравенство $s \leqslant x_2$.

(b1)Покажем, что элементы s и u_1 несравнимы, и выполняется неравенство $s > u_2$. Действительно, так как элементы s и a, по условию, несравнимы, и выполняются неравенства $u_1, u_2 < a$, то ни одно из неравенств $s \leqslant u_1$ и $s \leqslant u_2$ выполняться не может. Так как выполняется неравенство $s \leqslant x_2$, а элементы x_2 и u_1 несравнимы (см. п. 9), неравенство $s > u_1$ выполняться не может. Следовательно, элементы s и u_1 несравнимы. Тогда элементы s и u_2 сравнимы, а значит, выполняется неравенство $s > u_2$.

(b2) В силу неравенства $\{r_1, r_2\} \ll \{u_1, u_2\}$ (см. п. 14.1) без ограничения общности будем считать, что выполняется неравенство $(r_1, r_2) \leqslant (u_1, u_2)$.

(b3) Покажем, что элементы r_1 и u_2 несравнимы. Действительно, так как s — минимальная верхняя грань элементов r_1 и r_2, и выполняется неравенство $s > u_2$, то неравенство $r_1, r_2 < u_2$ выполняться не может. Согласно п. (b2), выполняется неравенство $r_2 \leqslant u_2$. Поэтому неравенство $r_1 < u_2$ выполняться не может. Так как элементы r_1 и r_2 несравнимы, неравенство $r_1 \geqslant u_2$ выполняться также не может.

(b4) Покажем, что выполняется соотношение $\{v_1, s\} = \overrightarrow{\sup}(r_1, u_2)$. В силу неравенств $s > r_1$ и $s > u_2$ (см. п. (b1)) элемент s является верхней гранью элементов r_1 и u_2. Так как элемент s является минимальной верхней гранью элементов r_1 и r_2, и выполняется неравенство $r_2 \leqslant u_2$ (см. п. (b2)), легко видеть, что s является минимальной верхней гранью элементов r_1 и u_2.

Далее, в силу неравенств $v_1 > u_1 \geqslant r_1$ (см. п. (b2)) и $v_1 > u_2$ элемент v_1 является верхней гранью элементов r_1 и u_2. Так как элементы v_1 и s несравнимы (см. п. 11), то, по свойству (a) верхних граней, элементы r_1 и u_2 являются 1-несравнимыми, и существует t — минимальная верхняя грань этих элементов, не сравнимая с элементом s и такая, что выполняется неравенство $t \leqslant v_1$. Элементы s и u_1 несравнимы (см. п. (b1)), поэтому элементы t и u_1 сравнимы. Так как выполняется неравенство $t > u_2$, легко видеть, что выполняется неравенство $t > u_1$. Таким образом, выполняются соотношения $u_1, u_2 < t \leqslant v_1$, поэтому в силу того, что v_1 — минимальная верхняя грань элементов u_1, u_2, выполняется равенство $t = v_1$.

(b5) Согласно п. 13, элементы v_1 и s 1-несравнимы, что вместе с установленным в п. (b4) соотношением $\{v_1, s\} = \overrightarrow{\sup}(r_1, u_2)$ противоречит свойству $(*)$ множества $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2$. Следовательно, неравенство $s \leqslant x_2$ выполняться также не может.

14.3.3. Получилось противоречие с результатом п. 14.3.2, следовательно, неравенство $s < b$ выполняться не может, а значит, элементы s и b несравнимы. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* (a, A) *— элемент типа* $(\psi 3)$, $A = \{A_1, A_2\}$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $w = \sup^2(u_1, u_2)$. *Пусть* b *— такой элемент, что выполняются неравенства* $a < b < A_1$, *элементы* b *и* A_2 *несравнимы, элементы* b *и* w *несравнимы. Пусть* r_1, r_2 *— несравнимые элементы, такие что* $r_1, r_2 < a$, *и существует такой элемент* c, *что* (r_1, r_2, a, c) *— квадрат. Тогда* (r_1, r_2, b, c) *— квадрат.*

Доказательство. По условию, (r_1, r_2, a, c) — квадрат, и тогда, по свойству (b) квадрата, элементы r_1 и r_2 1-несравнимы, и (s_1, s_2, a, c), где $\{s_1, s_2\} = \overrightarrow{\sup}(r_1, r_2)$, — неполный квадрат. Это означает, что найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}) \leqslant (a, c)$, элементы $s_{\pi(1)}$ и c несравнимы, элементы $s_{\pi(2)}$ и a несравнимы. Тогда, по лемме 2.34, элементы $s_{\pi(2)}$ и b несравнимы. Следовательно, $(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, b, c)$ — неполный квадрат, а значит, по свойству (c) квадрата, (r_1, r_2, b, c) — квадрат. Утверждение доказано.

2.3. Теорема о существовании монотонного доопределения не всюду определенного отображения. Всюду в п. 2.3 будем рассматривать множество $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$, $\mathscr{Q}$ — произвольное частично упорядоченное множество, $\mathscr{Q}' \subset \mathscr{Q}$, f' — некоторое отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$.

Определение. Пусть $\alpha \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, положим

$$\xi_{f'}(\alpha) = \{f'(\gamma) \mid \gamma \in \mathscr{Q}',\ \gamma < \alpha \quad \Xi_{f'}(\alpha) = \{f'(\gamma) \mid \gamma \in \mathscr{Q}',\ \gamma > \alpha\}.$$

Обозначим через $\delta_{f'}(\alpha)$ множество максимальных элементов $\xi_{f'}(\alpha)$, а через $\Delta_{f'}(\alpha)$ — множество минимальных элементов $\Xi_{f'}(\alpha)$. Множества $\xi_{f'}(\alpha)$, $\Xi_{f'}(\alpha)$, $\delta_{f'}(\alpha)$, $\Delta_{f'}(\alpha)$ будем называть *окрестностями* элемента α.

Свойства окрестностей.

(a) Если $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, то $\delta_{f'}(\alpha) \subset \mathscr{P}^{(0)}$. Если $\Xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, то $\Delta_{f'}(\alpha) \subset \mathscr{P}^{(0)}$.

(b) Если $\xi_{f'}(\alpha), \neq \varnothing$, то выполняются неравенства $0 \leqslant |\delta_{f'}(\alpha)| \leqslant 2$. Если $\Xi_{f'}(\alpha), \neq \varnothing$, то выполняются неравенства $0 \leqslant |\Delta_{f'}(\alpha)| \leqslant 2$.

(c) Пусть отображение f' монотонно, и пусть $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$. Если $|\delta_{f'}(\alpha)| = |\Delta_{f'}(\alpha)| = 1$, то выполняется неравенство $\xi_{f'}(\alpha) \leqslant \Xi_{f'}(\alpha)$. Если же выполняется хотя бы одно из равенств $|\delta_{f'}(\alpha)| = 2$ или $|\Delta_{f'}(\alpha)| = 2$, то выполняется неравенство $\xi_{f'}(\alpha) < \Xi_{f'}(\alpha)$ (т. е. для любых элементов $x \in \xi_{f'}(\alpha)$ и $y \in \Xi_{f'}(\alpha)$ выполняется неравенство $x < y$).

(d) Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, $\alpha < \beta$, пусть отображение f' монотонно, тогда выполняются соотношения $\xi_{f'}(\alpha) \subseteq \xi_{f'}(\beta)$ и $\Xi_{f'}(\beta) \subseteq \Xi_{f'}(\alpha)$.

(e) Пусть отображение $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ монотонно, пусть $X \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, a — некоторый элемент из $\mathscr{P}$, такой что выполняются неравенства $\delta_{f'}(X) \leqslant a \leqslant \Delta_{f'}(X)$. Пусть f'' — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{X\} \to \mathscr{P}$, такое что $f''|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $f''(X) = a$. Тогда отображение f'' монотонно.

(f) Пусть $X, Y \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, пусть f_1 и g_1 — некоторые отображения $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, такие что $\delta_{f_1}(X) = \delta_{g_1}(X)$ и $\Delta_{f_1}(X) = \Delta_{g_1}(X)$. Пусть f_2 и g_2 — отображения $\mathscr{Q}' \cup \{Y\} \to \mathscr{P}$, такие что $f_2|_{\mathscr{Q}'} = f_1$, $g_2|_{\mathscr{Q}'} = g_1$ и $f_2(Y) = g_2(Y)$. Тогда выполняются равенства $\delta_{f_2}(X) = \delta_{g_2}(X)$ и $\Delta_{f_2}(X) = \Delta_{g_2}(X)$.

(g) Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, $\alpha \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, $\delta_{f'}(\alpha) = \{a\}$. Пусть $f'' : \mathscr{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathscr{P}$, $f''|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $f''(\alpha) = a$. Тогда для любого элемента β из $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ выполняется равенство $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$, и для любого элемента γ из $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, такого что либо элементы α и γ несравнимы, либо выполняется неравенство $\alpha < \gamma$, выполняется равенство $\Delta_{f'}(\gamma) = \Delta_{f''}(\gamma)$.

(h) Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, $\alpha, \beta \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, $\alpha < \beta$. Пусть f'' — монотонное доопределение отображения f' на элемент β, пусть $f''(\beta) = b$. И пусть $b \notin \Delta_{f''}(\alpha)$. Тогда $\Delta_{f'}(\alpha) = \Delta_{f''}(\alpha)$.

(i) Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, $\alpha, \beta \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$. Пусть f'' — монотонное доопределение отображения f' на элемент β, пусть $f''(\beta) = b$. И пусть выполняется одно из условий: (i1) $b \notin \Delta_{f''}(\alpha)$, (i2) $b \in \Delta_{f''}(\alpha)$, и при этом найдется такой элемент γ, $\gamma \in \mathscr{Q}'$, что выполняются соотношения $\gamma > \alpha$ и $f''(\gamma) = b$. Тогда $\Delta_{f'}(\alpha) = \Delta_{f''}(\alpha)$.

Определение. Будем говорить, что α, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, — *особый элемент* для отображения f', если $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, $|\Delta_{f'}(\alpha)| = 2$, и (a, A), где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$, является элементом типа $(\psi 3)$.

Утверждение 2.2 (свойства особых элементов). *Пусть элемент α из множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ — особый для отображения f', пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a\}$, $\Delta_{f'}(\alpha) = A = \{p_1, p_2\}$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$, $\{v_1, v_2\} = \overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$, элементы a и v_2 несравнимы, $w = \sup^2(u_1, u_2)$. Тогда*

1. *Значение $\varphi(a, w, A)$ не определено, т. е. (a, w, p_1, p_2) — квадрат. Заметим, что, по свойству 2 множества $\mathcal{U}_2$, (a, v_2, p_1, p_2) также является квадратом.*

2. *Значение $\psi(a, A)$ определяется по правилу $(\psi 3)$, т. е. $\psi(a, A) = a$.*

3. *Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_1$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_2$, f' — отображение $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{P}$, g' — отображение $\mathcal{Q}_2 \to \mathcal{P}$, α — особый элемент для отображения f', $\delta_{f'}(\alpha) = \delta_{g'}(\alpha)$, $\Delta_{f'}(\alpha) = \Delta_{g'}(\alpha)$. Тогда α — особый элемент для отображения g'.*

Определение. Пусть f' — отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, α — особый элемент для отображения f'. Пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a\}$, $\Delta_{f'}(\alpha) = A$. Обозначим через $\eta_{f'}(\alpha)$ значение $\psi((a, A))$.

Определение. Будем говорить, что элемент α, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, — *зигзаг длины* 1 для f', если $|\delta_{f'}(\alpha)| = 2$, $|\Delta_{f'}(\alpha)| = 2$ и (a_1, a_2, p_1, p_2), где $\{a_1, a_2\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $\{p_1, p_2\} = \Delta_{f'}(\alpha)$, — квадрат.

Утверждение 2.3 (свойство зигзага длины 1). *Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_1$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_2$, f' — отображение $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{P}$, g' — отображение $\mathcal{Q}_2 \to \mathcal{P}$, α — зигзаг длины 1 для отображения f', $\delta_{f'}(\alpha) = \delta_{g'}(\alpha)$, $\Delta_{f'}(\alpha) = \Delta_{g'}(\alpha)$. Тогда α — зигзаг длины 1 для отображения g'.*

Определения. Обозначим через $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$ множество всех элементов из $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, обладающих следующим свойством: для любого $\varepsilon \in \Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$ выполняются следующие соотношения: $|\delta_{f'}(\varepsilon)| = 1$, $|\Delta_{f'}(\varepsilon)| = 1$ и $\delta_{f'}(\varepsilon) = \Delta_{f'}(\varepsilon)$. Далее, пусть множество $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$ непусто, $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$, пусть для каждого ε_i, $i = 1, \ldots, m$, выполняется равенство $\delta_{f'}(\varepsilon_i) = \Delta_{f'}(\varepsilon_i) = \{a_i\}$, где $a_i \in \mathcal{P}$. Положим $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}' \cup \Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$. Обозначим через f_Υ отображение $\mathcal{Q}'' \to \mathcal{P}$, такое что $f_\Upsilon|_{\mathcal{Q}'} = f'$ и $f_\Upsilon(\varepsilon_i) = a_i$ для каждого $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 2.35. *Пусть $\mathcal{Q}$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ — монотонное отображение. Пусть $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') \neq \varnothing$. Тогда отображение f_Υ является монотонным.*

Это утверждение следует из определений множества $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$, отображения f_Υ и свойств окрестностей.

Лемма 2.36. *Пусть $\mathcal{Q}$ − некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ — монотонное отображение, пусть $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') = \varnothing$, и пусть в $\mathcal{Q}$ не существует особых элементов и зигзагов длины 1 для f'. Тогда существует монотонное доопределение f отображения f' на множество $\mathcal{Q}$.*

Доказательство. Положим $f|_{\mathcal{Q}'} = f'$, а для каждого $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ определим значение $f(\alpha)$ следующим образом:

(f1) если $\xi_{f'}(\alpha) = \varnothing$, то положим $f(\alpha) = 0$;

(f2) если $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\alpha) = \varnothing$, то положим $f(\alpha) = 1$;

(f3) если $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, и $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, то положим $f(\alpha) = \psi((a, A))$, где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$;

(f4) если $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, и $|\delta_{f'}(\alpha)| = 2$, то положим $f(\alpha) = \varphi((a_1, a_2, A))$, где $\{a_1, a_2\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$.

Покажем, что для каждого α, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, значение $f(\alpha)$ определено. Действительно, если значение $f(\alpha)$ определяется по правилам (f1) или (f2), то это очевидно. Если по правилу (f3), то в силу монотонности отображения f' и свойства (c) окрестностей выполняется неравенство $a \leqslant A$. Далее, по условию, $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') = \varnothing$, поэтому равенства $|A| = 1$, $A = \{a\}$ не выполняются, значит выполняется строгое неравенство $a < A$. Тогда $(a, A) \in \mathcal{P}^{\psi}$, и значение $\psi((a, A))$ определено. Заметим, что в этом случае (a, A) не является элементом типа (ψ3), так как иначе элемент α был бы особым для отображения f', что противоречит условию. Наконец, если значение $f(\alpha)$ выполняется по правилу (f4), то в силу свойства (a) окрестностей элементы a_1 и a_2 несравнимы, в силу монотонности отображения f' и свойства (c) окрестностей выполняется неравенство $a_1, a_2 < A$, и тогда $(a_1, a_2, A) \in \mathcal{P}^{\varphi}$. Далее, по свойству 2 оператора φ, значение $\varphi((a_1, a_2, A))$ не определено только тогда, когда $|A| = 2$ и (a_1, a_2, p_1, p_2), где $\{p_1, p_2\} = A$, — квадрат. Но это значит, что α является зигзагом длины 1 для f', что противоречит условию леммы. Следовательно, значение $\varphi((a_1, a_2, A))$ определено.

Покажем, что для каждого α, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, отображение f монотонно на множестве $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha\}$. Действительно, если значение $f(\alpha)$ определяется по правилам (f1) или (f2), то это очевидно, если по правилам (f3) или (f4), то это следует из свойства 2 оператора ψ и свойства 3 оператора φ соответственно.

Покажем теперь, что так построенное отображение f монотонно на всем множестве $\mathcal{Q}$, т. е. для любых двух элементов α и β множества $\mathcal{Q}$, таких что $\alpha < \beta$, выполняется неравенство $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Если $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}'$, то неравенство $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ выполняется в силу монотонности отображения f'. Если ровно один элемент $\varepsilon \in \{\alpha, \beta\}$ не принадлежит множеству $\mathcal{Q}'$, то требуемое неравенство верно в силу показанной выше монотонности f на множестве $\mathcal{Q}' \cup \{\varepsilon\}$. Пусть теперь $\alpha, \beta \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Если найдется такой элемент ε из $\mathcal{Q}'$, что $\alpha < \varepsilon < \beta$, то будут выполнены неравенства $f(\alpha) \leqslant f(\varepsilon) \leqslant f(\beta)$ (первое неравенство выполняется в силу монотонности отображения f на множестве $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha\}$, второе — в силу монотонности f на множестве $\mathcal{Q}' \cup \{\beta\}$).

2. Пусть теперь такого элемента ε не существует.

2.1. Пусть хотя бы одно из значений $f(\alpha)$ или $f(\beta)$ определяется по правилам (f1) или (f2). Предположим, что значение $f(\alpha)$ определяется по правилу (f1). Тогда выполняются соотношения $f(\alpha) = 0 \leqslant f(\beta)$. Пусть теперь значение $f(\alpha)$ определяется по правилу (f2), т. е. $\xi_{f'}(\alpha) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\alpha) = \varnothing$. Тогда, по свойству (d) окрестностей, выполняются соотношения $\xi_{f'}(\alpha) \subseteq \xi_{f'}(\beta)$ и $\Xi_{f'}(\beta) \subseteq \Xi_{f'}(\alpha)$, а значит, $\xi_{f'}(\beta) \neq \varnothing$, $\Xi_{f'}(\beta) = \varnothing$. Следовательно, значение $f(\beta)$ также определяется по правилу (f2), и тогда $f(\beta) = 1 = f(\alpha)$. Случаи, когда значение $f(\beta)$ определяется по правилам (f1) или (f2), рассматриваются аналогично.

2.2 Пусть теперь значения $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ определяются по правилам (f3) или (f4). Тогда множества $\xi_{f'}(\alpha), \Xi_{f'}(\alpha), \xi_{f'}(\beta), \Xi_{f'}(\beta)$ непусты. Положим $A = \Delta_{f'}(\alpha)$, $B = \Delta_{f'}(\beta)$. В силу свойства (d) окрестностей имеют место соотношения

(α) для каждого $x \in \delta_{f'}(\alpha)$ найдется $y \in \delta_{f'}(\beta)$, такой что $x \leqslant y$,

(β) выполняется неравенство $A \preceq B$.

Далее рассмотрим четыре случая.

1) $|\delta_{f'}(\alpha)| = |\delta_{f'}(\beta)| = 2$. Пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a_1, a_2\}$, $\delta_{f'}(\beta) = \{b_1, b_2\}$. Тогда, по определению, $f(\alpha) = \varphi((a_1, a_2, A))$, $f(\beta) = \varphi((b_1, b_2, B))$. В силу соотно-

шения (α) и в силу свойства (b) множеств ширины два выполняется неравенство $\{a_1, a_2\} \ll \{b_1, b_2\}$. И тогда в силу соотношения (β) неравенство $\varphi((a_1, a_2, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$ выполнено по следствию из леммы 2.13.

2) $|\delta_{f'}(\alpha)| = 2$, $|\delta_{f'}(\beta)| = 1$. Пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a_1, a_2\}$, $\delta_{f'}(\beta) = \{b_1\}$. По определению, $f(\alpha) = \varphi((a_1, a_2, A))$, $f(\beta) = \psi((b_1, B))$, причем, по условию, (b_1, B) не является элементом типа ($\psi3$). В силу соотношения (α) выполняется неравенство $a_1, a_2 < b_1$. И тогда в силу (β) неравенство $\varphi((a_1, a_2, A)) \leqslant \psi((b_1, B))$ выполнено по следствию из леммы 2.15.

3) $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, $|\delta_{f'}(\beta)| = 2$. Пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a_1\}$, $\delta_{f'}(\beta) = \{b_1, b_2\}$. По определению, $f(\alpha) = \psi((a_1, A))$, $f(\beta) = \varphi((b_1, b_2, B))$, при этом, по условию, (a_1, A) не является элементом типа ($\psi3$). Из соотношения (α) следует, что выполняется по крайней мере одно из неравенств $a_1 \leqslant b_1$ и $a_1 \leqslant b_2$, пусть, например, выполняется неравенство $a_1 \leqslant b_1$. Если выполняется неравенство $a_1 \leqslant b_2$, то в силу соотношения (β) неравенство $\psi((a_1, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$ выполняется по лемме 2.21. Пусть теперь неравенство $a_1 \leqslant b_2$ не выполняется. В этом случае из несравнимости элементов b_1 и b_2 следует, что неравенство $a_1 > b_2$ выполняться не может, а значит, элементы a_1 и b_2 несравнимы. И тогда в силу соотношения (β) неравенство $\psi((a_1, A)) \leqslant \varphi((b_1, b_2, B))$ выполняется по следствию из леммы 2.26.

4) $|\delta_{f'}(\alpha)| = |\delta_{f'}(\beta)| = 1$. Пусть $\delta_{f'}(\alpha) = \{a_1\}$, $\delta_{f'}(\beta) = \{b_1\}$. В этом случае $f(\alpha) = \psi((a_1, A))$, $f(\beta) = \psi((b_1, B))$, причем (a_1, A) и (b_1, B), по условию, не являются элементами типа ($\psi3$). Из соотношения (α) следует, что выполняется неравенство $a_1 \leqslant b_1$. И тогда в силу соотношения $A \preceq B$ неравенство $\psi((a_1, A)) \leqslant \psi((b_1, B))$ следует из леммы 2.20. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть $\mathcal{Q}$ − некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ — монотонное отображение, и пусть в $\mathcal{Q}$ не существует особых элементов и зигзагов длины 1 для f'. Тогда существует монотонное доопределение f отображения f' на множество $\mathcal{Q}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') = \varnothing$, то утверждение следует из леммы 2.36. Пусть теперь $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f') \neq \varnothing$. Рассмотрим отображение f_Υ, которое является доопределением отображения f' на множество $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}' \cup \Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', f')$. Согласно лемме 2.35, отображение f_Υ монотонно. Легко видеть, что в q не существует ни особых элементов, ни зигзагов длины 1 для f_Υ, а также, что множество $\Upsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'', f_\Upsilon)$ пусто. Поэтому в силу леммы 2.36 существует монотонное доопределение f отображения f_Υ на множество $\mathcal{Q}$, которое является также доопределением отображения f'. Утверждение доказано.

Л е м м а 2.37. *Пусть f' — монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, элемент α из $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ — особый для отображения f'. Пусть f'' — отображение $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathcal{P}$, такое что $f''|_{\mathcal{Q}'} = f'$, $f''(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$. Пусть $\beta \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, элемент β не является ни зигзагом длины 1, ни особым элементом для отображения f', и является либо зигзагом длины 1, либо особым элементом для отображения f''. Тогда выполняются следующие соотношения:*

(1) $\alpha > \beta$;

(2) $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$;

(3) $a > B_*$, *где* $B_* = \delta_{f'}(\beta)$;

(4) $\Delta_{f''}(\beta) = \{a, r\}$, *где r — элемент из множества $\Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимый с элементом a;*

(5) $r < w$, *где* $w = \sup^2(u_1, u_2)$, $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$;

(6) $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем доказательство леммы на несколько этапов.

1. Так как α — особый элемент для отображения f', то, по определению особого элемента, $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, $|\Delta_{f'}(\alpha)| = 2$, пара (a, A), где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$, — это элемент типа $(\psi 3)$, и выполняется равенство $\eta_{f'}(\alpha) = \psi((a, A))$. Из определений элемента типа $(\psi 3)$ и оператора ψ следует, что значение $\psi((a, A))$ определяется по правилу $(\psi 3)$. Поэтому выполняется равенство $f''(\alpha) = \psi((a, A)) = a$. Предположим, что утверждение (1) леммы неверно, т. е. либо элементы α и β несравнимы, либо выполняется неравенство $\beta > \alpha$. Тогда, по свойству (g) окрестностей, выполняются равенства $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$, $\Delta_{f'}(\beta) = \Delta_{f''}(\beta)$. Если β — особый элемент для отображения f'', то, по свойству 3 особых элементов, элемент β является особым для отображения f', что противоречит условию леммы. Если β — зигзаг длины 1 для f'', то, по свойству зигзагов длины 1, элемент β является зигзагом длины 1 для отображения f', что также противоречит условию. Следовательно, выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Доказано утверждение (1).

2. Из определения отображения f'', неравенства $\beta < \alpha$ и свойства (g) окрестностей следуют соотношения: $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$, $a \notin \Delta_{f'}(\beta)$ и $a \in \Delta_{f''}(\beta)$. Таким образом, доказано утверждение (2).

3. В силу свойства 2 оператора ψ и свойства (e) окрестностей отображение f'' монотонно. Так как β является либо особым элементом, либо зигзагом длины 1 для отображения f'', то выполняется равенство $|\Delta_{f''}(\beta)| = 2$. Обозначим $\delta_{f'}(\beta)$ через B_*. В силу свойства (c) окрестностей выполняется неравенство $\xi_{f''}(\beta) < \Xi_{f''}(\beta)$, следовательно, выполняется неравенство $\delta_{f''}(\beta) < \Delta_{f''}(\beta)$. Из последнего неравенства в силу соотношений $B_* = \delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$ и $a \in \Delta_{f''}(\beta)$ (см. п. 2) следует неравенство $a > B_*$. Доказано утверждение (3).

4. Так как выполняются соотношения $|\Delta_{f''}(\beta)| = 2$ (см. п. 3) и $a \in \Delta_{f''}(\beta)$ (см. п. 2), то $\Delta_{f''}(\beta) = \{a, r\}$, где r — элемент из множества $\Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимый с элементом a. Доказано утверждение (4).

5. Так как (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$ (см. п. 1), то (a, A) является также элементом типа $(\psi 2)$, и множество $\mathcal{U}_1(a, A)$ непусто. Положим $\{u_1, u_2\} = \chi(a, A)$. Тогда выполняется соотношение $\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_2(a, A)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(u_1, u_2)$ и $\sup^2(u_1, u_2)$. Обозначим $\sup^2(u_1, u_2)$ через w. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $w < A$. Так как (a, A) — элемент типа $(\psi 3)$, то, по свойству 2 множества $\mathcal{U}_3$, выполняется равенство $|A| = 2$. Положим $A = \{p_1, p_2\}$.

Далее, рассмотрим два случая.

5.1. Пусть β является особым элементом для отображения f''. По определению особого элемента, $|\delta_{f''}(\beta)| = 1$, $\Delta_{f''}(\beta) = 2$ и (b, B), где $\{b\} = \delta_{f''}(\beta)$, $B = \Delta_{f''}(\beta)$, является элементом типа $(\psi 3)$. По определению элемента типа $(\psi 3)$, множество $\mathcal{U}_1(b, B)$ непусто, и выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B) \setminus \mathcal{U}_3(b, B)$, где $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$. Обозначим $\sup^2(x_1, x_2)$ через z. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы b и z несравнимы, далее, по свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $z < B$. Из соотношений $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{U}_3(b, B)$ и $B = \{a, r\}$ (см. п. 4) в силу свойства 2 множества $\mathcal{U}_3$ следует, что (b, z, a, r) — квадрат. Поэтому выполняется неравенство $b, z < a$. И тогда, согласно лемме 2.31, выполняется неравенство $r < w$. Таким образом, в случае, когда β является особым элементом для отображения f'', утверждение (5) доказано.

Покажем, что $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$. Согласно п. 4, элементы a и r несравнимы, и выполняется соотношение $r \in \Delta_{f'}(\beta)$. Предположим, что $|\Delta_{f'}(\beta)| = 2$, пусть

$\Delta_{f'}(\beta)=\{r,t\}$. Так как элементы t и r несравнимы, элементы t и a сравнимы.

Покажем, что выполняется неравенство $a<t$. Действительно, если выполняется неравенство $a>t$, то выполняется соотношение $t\in\Delta_{f''}(\beta)$, что противоречит соотношению $a\in\Delta_{f''}(\beta)$ (см. п. 2). А равенство $a=t$ противоречит соотношению $a\notin\Delta_{f'}(\beta)$ (см. п. 2).

Покажем, что элементы t и w несравнимы. Действительно, если выполняется неравенство $t\leqslant w$, то в силу неравенства $a<t$ выполняется неравенство $a<w$, что невозможно, так как элементы a и w несравнимы. Если же выполняется неравенство $t>w$, то в силу неравенства $w>r$ выполняется неравенство $r<t$, что невозможно, так как элементы r и t несравнимы.

Возможны два случая: либо выполняется хотя бы одно из неравенств $t\geqslant p_1$ и $t\geqslant p_2$ (см. п. 5), либо ни одно из этих неравенств не выполняется.

5.1.1. Пусть не выполняется ни одно из неравенств $t\geqslant p_1$ и $t\geqslant p_2$. Так как элементы p_1 и p_2 несравнимы, ни одно из соотношений $p_1\leqslant t\leqslant p_2$ и $p_2\leqslant t\leqslant p_1$ выполняться не может. Поэтому либо выполняется неравенство $t<p_1,p_2$, либо найдется такая перестановка π на множестве $\{1,2\}$, что выполняется неравенство $t<p_{\pi(1)}$, а элементы t и $p_{\pi(2)}$ несравнимы. Покажем, что (b,z,t,r) — квадрат. Действительно, (b,z,a,r) — квадрат, и выполняется неравенство $a<t$. Тогда если выполняется неравенство $t<p_1,p_2$, то (b,z,t,r) является квадратом в силу леммы 2.32. А если выполняется неравенство $t<p_{\pi(1)}$, а элементы t и $p_{\pi(2)}$ несравнимы, то (b,z,t,r) является квадратом в силу следствия из леммы 2.34.

Так как, по доказанному выше, выполняется неравенство $a<t$, то выполняется неравенство $\{a,r\}\preceq\{t,r\}$. Тогда, согласно свойству 4 множества $\mathscr{U}_2$, выполняется соотношение $\{x_1,x_2\}=\chi(b,\{t,r\})$. И тогда, по свойству 3 множества $\mathscr{U}_3$, $(b,\{t,r\})$ — элемент типа ($\psi 3$). Следовательно, β — особый элемент для отображения f', что противоречит условию леммы.

5.1.2. Пусть теперь выполняется по крайней мере одно из неравенств $t\geqslant p_1$ или $t\geqslant p_2$, где $\{p_1,p_2\}=A$ (см. п. 5). Так как, согласно доказанному утверждению (5), выполняется неравенство $r<w$, и так как выполняется неравенство $w<A$ (см. п. 5), т. е. $w<p_1,p_2$, то выполняется неравенство $r<t$, что невозможно, поскольку элементы t и r несравнимы.

Таким образом, не существует элемента t из $\Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимого с элементом r, поэтому $\Delta_{f'}(\beta)=\{r\}$. Следовательно, в случае, когда β является особым элементом для отображения f'', утверждение (6) доказано.

5.2. Пусть теперь β является зигзагом длины 1 для отображения f''. Согласно определению зигзага длины 1, выполняется равенство $|\delta_{f''}(\beta)|=|\Delta_{f''}(\beta)|=2$, и (b_1,b_2,a,r), где $\{b_1,b_2\}=\delta_{f''}(\beta)$, $\{a,r\}=\Delta_{f''}(\beta)$ (см. п. 4), — квадрат. Поэтому выполняется неравенство $b_1,b_2<a$. И тогда, так как (a,A) является элементом типа ($\psi 3$) (см. п. 5), то, согласно лемме 2.31, выполняется неравенство $r<w$. Таким образом, для случая, когда β — зигзаг длины 1 для отображения f'', утверждение (5) леммы доказано.

Покажем, что $\Delta_{f'}(\beta)=\{r\}$. Так же, как и в предыдущем случае (см. п. 5.1), предположим, что $|\Delta_{f'}(\beta)|=2$, пусть $\Delta_{f'}(\beta)=\{r,t\}$. Элементы t и r несравнимы, элементы a и r несравнимы (см. п. 4), поэтому элементы t и a сравнимы. Легко видеть, что в силу соотношений $a\notin\Delta_{f'}(\beta)$ и $a\in\Delta_{f''}(\beta)$ (см. п. 2) выполняется неравенство $a<t$. Элементы t и r несравнимы, элементы a и w несравнимы, выполняются неравенства $t>a$ и $w>r$, поэтому легко видеть, что элементы t и w несравнимы. Рассмотрим два случая.

5.2.1. Пусть не выполняется ни одно из неравенств $t \geqslant p_1$ и $t \geqslant p_2$. Тогда, так же, как и в п. 5.1.1, либо выполняется неравенство $t < p_1, p_2$, либо найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняется неравенство $t < p_{\pi(1)}$, а элементы t и $p_{\pi(2)}$ несравнимы. Далее, (b, z, a, r) — квадрат, и выполняется неравенство $a < t$. Поэтому если выполняется неравенство $t < p_1, p_2$, то (b, z, t, r) является квадратом в силу леммы 2.32, а если выполняется неравенство $t < p_{\pi(1)}$, а элементы t и $p_{\pi(2)}$ несравнимы, то (b, z, t, r) является квадратом в силу следствия из леммы 2.34. Таким образом, (b_1, b_2, t, r) — квадрат. А значит, β является зигзагом длины 1 для отображения f', что противоречит условию леммы.

5.2.2. Пусть теперь выполняется по крайней мере одно из неравенств $t \geqslant p_1$ или $t \geqslant p_2$, где $\{p_1, p_2\} = A$ (см. п. 5). Так как, согласно доказанному утверждению (5), выполняется неравенство $r < w$, и так как выполняется неравенство $w < A$ (см. п. 5), т. е. $w < p_1, p_2$, то выполняется неравенство $r < t$, что невозможно, поскольку элементы t и r несравнимы.

Таким образом, не существует элемента $t \in \Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимого с элементом r, поэтому $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$. Следовательно, в случае, когда β является зигзагом длины 1 для отображения f'', утверждение (6) доказано. Лемма доказана.

Лемма 2.38. *Пусть f' — монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, α — особый элемент для отображения f'. Пусть f'' — отображение $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathcal{P}$, такое что $f''|_{\mathcal{Q}'} = f'$, $f''(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$. Пусть $\beta \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, элемент β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f', и является особым элементом для отображения f''. И пусть $c \in \mathcal{P}$ — такой элемент, что выполняются неравенства $a < c < A$, где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$, и g' — отображение $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathcal{P}$, такое что $g'|_{\mathcal{Q}'} = f'$, $g'(\alpha) = c$. Тогда β — особый элемент для отображения g'.*

Доказательство. Из условия следует, что выполняется условие леммы 2.37. Поэтому, согласно утверждению (1) леммы 2.37, выполняется неравенство $\alpha > \beta$. Обозначим $\delta_{f'}(\alpha)$ через $\{a\}$. По условию, β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f' и является особым элементом для отображения f'', поэтому легко видеть, что выполняются соотношения $a \notin \Xi_{f'}(\beta)$ и $a \in \Delta_{f''}(\beta)$. Согласно утверждению (2) леммы 2.37, выполняется равенство $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$. Так как β — особый элемент для отображения f'', то $|\delta_{f''}(\beta)| = 1$. Обозначим множество $\delta_{f''}(\beta)$ через $\{b\}$. Легко видеть, что из неравенства $\alpha > \beta$ и из определения отображения g' следует соотношение $\delta_{g'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta) = \{b\}$. Согласно утверждению (4) леммы 2.37, выполняется соотношение $\Delta_{f''}(\beta) = \{a, r\}$, где r — элемент из множества $\Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимый с элементом a. Согласно утверждению (6) леммы 2.37, $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$.

Так как β является особым элементом для отображения f'', то, по определению особого элемента, (b, B), где $B = \Delta_{f''}(\beta) = \{a, r\}$, является элементом типа (ψ3). Это означает, что множество $\mathcal{U}_1(b, B)$ непусто, и выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{U}_2(b, B) \setminus \mathcal{U}_3(b, B)$, где $\{x_1, x_2\} = \chi(b, B)$. По свойству 1 множества $\mathcal{U}_1$, существуют $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$ и $\sup^2(x_1, x_2)$. Обозначим $\sup^2(x_1, x_2)$ через z. По определению множества $\mathcal{U}_2$, элементы b и z несравнимы, далее, по свойству 1 множества $\mathcal{U}_2$, выполняется неравенство $z < B$, т. е. $z < a, r$. Из соотношений $\{x_1, x_2\} \notin \mathcal{U}_3(b, B)$ и $B = \{a, r\}$ в силу свойства 2 множества $\mathcal{U}_3$ следует, что (b, z, a, r) — квадрат.

Покажем, что $\Delta_{g'}(\beta) = \{c, r\}$. Действительно, по условию, α — особый элемент для отображения f', поэтому (a, A) является элементом типа (ψ3).

Следовательно, (a, A) является также элементом типа $(\psi 2)$. Далее, так как выполняется неравенство $b, z < a$, и так как, по условию, $a < c < A$, то в силу леммы 2.32 (b, z, c, r) — квадрат. Поэтому элементы c и r несравнимы. Из неравенства $\alpha > \beta$ и определения множества $\Xi_{g'}(\beta)$ следует соотношение $c \in \Xi_{g'}(\beta)$. И тогда, так как $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$, и элементы c и r несравнимы, то $c \in \Delta_{g'}(\beta)$. Таким образом, $\Delta_{g'}(\beta) = \{c, r\}$.

Рассмотрим элемент $(b, \{c, r\}) \in \mathscr{P}^{\psi}$. По условию, выполняется неравенство $c > a$, поэтому выполняется неравенство $B = \{c, a\} \preceq \{c, r\}$. Тогда, согласно свойству 4 множества $\mathscr{U}_2$, выполняется соотношение $\{x_1, x_2\} = \chi(b, \{c, r\})$. Как было показано выше, (b, z, c, r) — квадрат. Поэтому, по свойству 3 множества $\mathscr{U}_3$, $(b, \{c, z\})$ — это элемент типа $(\psi 3)$. И тогда из соотношений $\{b\} = \delta_{f''}(\beta) = \delta_{g'}(\beta)$ и $\{c, r\} = \Delta_{g'}(\beta)$ следует, что β является особым элементом для отображения g'. Лемма доказана.

Л е м м а 2.39. *Пусть f' — монотонное отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, $\alpha \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, α — особый элемент для отображения f'. Пусть f'' — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathscr{P}$, такое что $f''|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $f''(\alpha) = \eta(\alpha)$. Пусть $\beta \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, элемент β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f', и является зигзагом длины 1 для отображения f'. И пусть $c \in \mathscr{P}$ — такой элемент, что выполняются неравенства $a < c < A$, где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, $A = \Delta_{f'}(\alpha)$, и g' — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathscr{P}$, такое что $g'|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $g'(\alpha) = c$. Тогда β — зигзаг длины 1 для отображения g'.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия следует, что выполняется условие леммы 2.37. Поэтому, согласно утверждению (1) леммы 2.37, выполняется неравенство $\alpha > \beta$. Обозначим $\delta_{f'}(\alpha)$ через $\{a\}$. По условию, β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f' и является зигзагом длины 1 для отображения f'', поэтому легко видеть, что выполняются соотношения $a \notin \Xi_{f'}(\beta)$ и $a \in \Delta_{f''}(\beta)$. Согласно утверждению (2) леммы 2.37, выполняется равенство $\delta_{f'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta)$. Так как β — зигзаг длины 1 для отображения f'', выполняется равенство $|\delta_{f''}(\beta)| = 2$. Обозначим множество $\delta_{f''}(\beta)$ через $\{b_1, b_2\}$. Легко видеть, что в силу неравенства $\alpha > \beta$ и в силу определения отображения g' выполняется соотношение $\delta_{g'}(\beta) = \delta_{f''}(\beta) = \{b_1, b_2\}$. Согласно утверждению (4) леммы 2.37, выполняется соотношение $\Delta_{f''}(\beta) = \{a, r\}$, где r — элемент из множества $\Delta_{f'}(\beta)$, не сравнимый с элементом a. Согласно утверждению (6) леммы 2.37, $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$. Так как β является зигзагом длины 1 для отображения f'', то из соотношения $\{a, r\} = \Delta_{f''}(\beta)$ следует, что (b_1, b_2, a, r) — квадрат.

Покажем, что выполняется соотношение $\Delta_{g'}(\beta) = \{c, r\}$. Действительно, по условию, α — особый элемент для отображения f', поэтому (a, A) является элементом типа $(\psi 3)$. Следовательно, (a, A) является также элементом типа $(\psi 2)$. Из неравенств $b_1, b_2 < a$ и $a < c < A$ (см. условие) в силу леммы 2.32 следует, что (b_1, b_2, c, r) — квадрат. Поэтому элементы c и r несравнимы. Из неравенства $\alpha > \beta$ и определения множества $\Xi_{g'}(\beta)$ следует соотношение $c \in \Xi_{g'}(\beta)$. И тогда, так как $\Delta_{f'}(\beta) = \{r\}$, и элементы c и r несравнимы, то $c \in \Delta_{g'}(\beta)$. Таким образом, $\Delta_{g'}(\beta) = \{c, r\}$.

Как было показано выше, (b_1, b_2, c, r) — квадрат. И тогда из соотношений $\{b_1, b_2\} = \delta_{f''}(\beta) = \delta_{g'}(\beta)$ и $\{c, r\} = \Delta_{g'}(\beta)$ следует, что β является зигзагом длины 1 для отображения f'. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е. Пусть $n \geqslant 2$. Будем говорить, что последовательность $X_1, \ldots, X_n$ элементов множества $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ — *зигзаг длины n* для отображения $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, если выполняются следующие условия:

1) X_1 — особый элемент для f', остальные элементы последовательности не являются ни особыми элементами, ни зигзагами длины 1 для f';

2) положим $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}' \cup \{X_1\}$, f'' — отображение $\mathcal{Q}'' \to \mathcal{P}$, такое что $f''|_{\mathcal{Q}'} = f'$, $f''(X_1) = \eta_{f'}(X_1)$. Тогда последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом длины $n-1$ для отображения f''.

Определение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, — зигзаг для отображения $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$. Построим последовательность множеств $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{Q}_n$ и отображений $f_1, f_2, \ldots, f_n$ следующим образом: положим $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}'$, $f_1 = f'$. Далее, пусть $2 \leqslant k \leqslant n$. Положим $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_{k-1} \cup \{X_{k-1}\}$, $f_k : \mathcal{Q}_k \to \mathcal{P}$, $f_k|_{\mathcal{Q}_{k-1}} = f_{k-1}$, $f_k(X_{k-1}) = \eta_{f_{k-1}}(X_{k-1})$ (заметим, что для каждого значения $k = 2, \ldots, n$, согласно определению зигзага и отображения f_{k-1}, последовательность $X_{k-1}, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_{k-1}, поэтому элемент X_{k-1} — особый, и значение $\eta_{f_{k-1}}(X_{k-1})$ определено). Построенную таким образом последовательность отображений $f_1, \ldots, f_n$ будем называть *последовательностью ψ-доопределений* для зигзага $X_1, \ldots, X_n$.

Утверждение 2.4 (свойство зигзага). *Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}$, f' — отображение $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{P}$, g' — отображение $\mathcal{Q}_2 \to \mathcal{P}$, $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения f', $X_1, \ldots, X_n \notin \mathcal{Q}_2$, и для каждого $i = 1, \ldots, n$ выполняются равенства $\delta_{f'}(X_i) = \delta_{g'}(X_i)$, $\Delta_{f'}(X_i) = \Delta_{g'}(X_i)$. Тогда $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g'.*

Лемма 2.40. *Пусть отображение $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ монотонно, $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для f', $n \geqslant 2$, и $f_1, \ldots, f_n$ — последовательность ψ-доопределений для зигзага. Тогда выполняются следующие соотношения:*

(1) $X_1 > X_2 > \ldots > X_n$;

(2) *отображения $f_1, \ldots, f_n$ монотонны;*

(3) *для каждого $k = 1, \ldots, n$ и для каждого $j = k, k+1, \ldots, n$ выполняется равенство $\delta_{f_k}(X_j) = \delta_{f'}(X_j)$;*

(4) $|\delta_{f'}(X_1)| = \ldots = |\delta_{f'}(X_{n-1})| = 1$, $|\delta_{f'}(X_n)| = 2$;

(5) *выполняются неравенства $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n, a'_n$, где для каждого i, $i = 1, \ldots, n-1$, через a_i обозначается $\delta_{f'}(X_i)$, а через $\{a_n, a'_n\}$ обозначается $\delta_{f'}(X_n)$.*

Доказательство. Согласно определению зигзага и утверждению (1) леммы 2.37, выполняется неравенство $X_1 > X_2$. Далее, по определению зигзага, для каждого значения k, $k = 2, \ldots, n$, последовательность $X_k, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_k, а значит, выполняется неравенство $X_k > X_{k+1}$. Следовательно, утверждение (1) доказано.

Покажем индукцией по длине зигзага, что все отображения $f_1, \ldots, f_n$ монотонны. По условию, отображение f' монотонно, и так как, согласно определению последовательности ψ-доопределений, $f_1 = f'$, то отображение f_1 монотонно. Далее, предположим, что для некоторого номера k, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, отображение f_k монотонно, и покажем, что отображение f_{k+1} монотонно. Действительно, отображение f_k определено на множестве $\mathcal{Q}_k$, а отображение f_{k+1} — на множестве $\mathcal{Q}_{k+1}$, таком что $\mathcal{Q}_{k+1} = \mathcal{Q}_k \cup \{X_k\}$. Выполняются соотношения $f_{k+1}|_{\mathcal{Q}_k} = f_k$ и $f_{k+1}(X_k) = \psi((a_k, A_k))$, где $a_k = \delta_{f_k}(X_k)$, $A_k = \Delta_{f_k}(X_k)$. По свойству 2 оператора ψ, выполняются неравенства $a_k \leqslant \psi((a_k, A_k)) \leqslant A_k$. Поэтому, по свойству (e) окрестностей, отображение f_{k+1} монотонно. Таким образом, утверждение (2) доказано.

Покажем, что справедливо утверждение (3). Действительно, пусть $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Согласно определению последовательности ψ-доопределений, отображение f_k определено на множестве $\mathcal{Q}_k$, отображение f_{k+1} —

на множестве $\mathcal{Q}_{k+1} = \mathcal{Q}_k \cup \{X_k\}$, и выполняется равенство $f_{k+1}(X_k) = a_k$, где $\{a_k\} = \delta_{f_k}(X_k)$. Поэтому в силу свойства (g) окрестностей для каждого j, $j = k+1, \ldots, n$, выполняется равенство $\delta_{f_{k+1}}(X_j) = \delta_{f_k}(X_j)$. Следовательно, для каждого j, $j = k+1, \ldots, n$, выполняются равенства $\delta_{f_{k+1}}(X_j) = \delta_{f_k}(X_j) = \delta_{f_{k-1}}(X_j) = \ldots = \delta_{f_1}(X_j)$. По определению последовательности ψ-доопределений, выполняется равенство $f_1 = f'$. Таким образом, для каждого j, $j = k+1, \ldots, n$, выполняется равенство $\delta_{f_{k+1}}(X_j) = \delta_{f'}(X_j)$.

Покажем, что справедливы утверждения (4) и (5). Действительно, согласно определениям зигзага и последовательности ψ-доопределений, для каждого k, $k = 1, \ldots, n$, последовательность $X_k, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_k. Это означает, что для каждого k, $k = 1, \ldots, n-1$, элемент X_k — особый для отображения f_k, а значит, выполняется равенство $|\delta_{f_k}(X_k)| = 1$. Обозначим $\delta_{f_k}(X_k)$ через $\{a_k\}$. Согласно доказанному выше свойству (3) зигзага, выполняется равенство $\{a_k\} = \delta_{f'}(X_k)$. Так как X_n — зигзаг длины 1 для отображения f_n, то $|\delta_{f_n}(X_n)| = 2$. Обозначим $\delta_{f_n}(X_n)$ через $\{a_n, a'_n\}$. Согласно доказанному свойству (3) зигзага, выполняется равенство $\{a_n, a'_n\} = \delta_{f'}(X_n)$.

Для каждого k, $k = 1, \ldots, n$, последовательность $X_k, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_k, поэтому элемент X_k — особый для f_k, а элемент X_{k+1} не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_k и является либо особым элементом, либо (в случае $k = n-1$) зигзагом длины 1 для отображения f_{k+1}. Следовательно, согласно утверждению (3) леммы 2.37, для каждого значения k, $k = 1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство $a_k = \delta_{f_k}(X_k) > \delta_{f_k}(X_{k+1})$. В силу доказанного выше свойства (3) зигзага выполняются равенства $\delta_{f_k}(X_{k+1}) = \delta_{f_{k+1}}(X_{k+1}) = a_{k+1}$. Таким образом, для каждого k, $k = 1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство $a_k > a_{k+1}$, а значит, выполняются неравенства $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n, a'_n$. Лемма доказана.

Лемма 2.41. *Пусть отображение $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ монотонно, $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для f', $n \geqslant 2$, и $f_1, \ldots, f_n$ — последовательность ψ-доопределений для зигзага. Тогда выполняются следующие соотношения*:

(1) *для каждого i, $i = 2, \ldots, n$, $\Delta_{f_i}(X_i) = \{a_{i-1}, r_i\}$, где $\{a_{i-1}\} = \delta_{f'}(X_{i-1})$, а r_i — некоторый не сравнимый с a_{i-1} элемент*;

(2) *для каждого k, $k = 1, \ldots, n-1$, и для каждого j, $j = k+1, \ldots, n$, выполняется равенство $\Delta_{f_k}(X_j) = \{r_j\}$*;

(3) *обозначим $\Delta_{f'}(X_1)$ через $\{r_1, r'_1\}$, тогда выполняются неравенства $r_1, r'_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$.*

Доказательство. В силу утверждения (4) леммы 2.40 для каждого i, $i = 1, \ldots, n-1$, выполняется равенство $\delta_{f'}(X_i) = 1$. Обозначим $\delta_{f'}(X_i)$ через $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, n-1$. В силу утверждения (3) леммы 2.40 для каждого k, $k = 1, \ldots, n-1$, и для каждого j, $j = k, k+1, \ldots, n-1$, выполняется равенство $\delta_{f_k}(X_j) = \{a_j\}$.

Согласно определениям зигзага и последовательности ψ-доопределений, для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, последовательность $X_i, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_i. Поэтому для каждого i, $i = 2, \ldots, n-1$, элемент X_i не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{i-1} и является особым элементом для отображения f_i. Элемент X_n не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{n-1} и является зигзагом длины 1 для отображения f_n. Поэтому из определения отображений $f_2, \ldots, f_n$ и утверждения (4) леммы 2.37 следует, что для каждого i,

$i=2,\ldots,n$, выполняется равенство $\Delta_{f_i}(X_i)=\{a_{i-1},r_i\}$. Таким образом, доказано утверждение (1).

Покажем, что для каждого j, $j=2,\ldots,n$, и для каждого k, $k=1,\ldots,j-1$, выполняется равенство $\Delta_{f_k}(X_j)=\{r_j\}$. Рассмотрим два случая: $j=2$ и $j>2$.

Пусть $j=2$. Тогда, согласно доказанному утверждению (1), выполняется равенство $\Delta_{f_2}(X_2)=\{a_1,r_2\}$. В силу утверждения (6) леммы 2.37 $\Delta_{f_1}(X_2)=\{r_2\}$. Таким образом, требуемое утверждение доказано.

Пусть теперь $j\in\{3,\ldots,n\}$. Согласно доказанному утверждению (1), выполняется соотношение $\Delta_{f_j}(X_j)=\{a_{j-1},r_j\}$. В силу утверждения (6) леммы 2.37 выполняется соотношение

$$\Delta_{f_{j-1}}(X_j)=\{r_j\}. \tag{41.1}$$

Отметим, что из соотношения $\Delta_{f_j}(X_j)=\{a_{j-1},r_j\}$ следует, что элементы a_{j-1} и r_j несравнимы.

Покажем, что выполняется неравенство $a_{j-2}>r_j$. Действительно, согласно определению отображения f_{j-1}, выполняется соотношение $a_{j-2}\in\Delta_{f_{j-1}}(X_{j-1})$. Следовательно, так как в силу утверждения (1) леммы 2.40 выполняется неравенство $X_{j-1}>X_j$, то $a_{j-2}\in\Xi_{f_{j-1}}(X_j)$. Поэтому в силу соотношения (41.1) выполняется неравенство $a_{j-2}\geqslant r_j$. Кроме того, как было показано, элементы a_{j-1} и r_j несравнимы, и в силу утверждения (5) леммы 2.40 выполняется неравенство $a_{j-2}>a_{j-1}$. Поэтому равенство $a_{j-2}=r_j$ выполняться не может, а значит выполняется неравенство $a_{j-2}>r_j$.

Покажем, что для каждого k, $k=1,\ldots,j-2$, выполняется соотношение $r_j\in\Delta_{f_k}(X_j)$. В силу соотношения (41.1) это верно для $k=j-1$. Предположим, что требуемое соотношение доказано для некоторого $k\in\{2,\ldots,j-1\}$, и докажем его для номера $k-1$.

В силу утверждения (5) леммы 2.40 выполняются неравенства $a_1>a_2>\ldots>a_{j-2}$, поэтому для каждого k, $k=1,\ldots,j-2$, выполняется неравенство $a_k>r_j$. Далее, согласно определению последовательности ψ-доопределений, отображение f_{k-1} определено на множестве $\mathcal{Q}_{k-1}$, отображение f_k определено на множестве $\mathcal{Q}_k$, таком что $\mathcal{Q}_k=\mathcal{Q}_{k-1}\cup\{X_{k-1}\}$ и выполняется равенство $f_k(X_{k-1})=a_{k-1}$. В силу неравенств $X_{k-1}>X_j$ (см. утверждение (1) леммы 2.40) и $a_{k-1}>r_j$ и соотношения $r_j\in\Delta_{f_k}(X_j)$ выполняются соотношения $a_{k-1}\in\Xi_{f_{k-1}}(X_j)$ и $a_{k-1}\notin\Delta_{f_{k-1}}(X_j)$. Следовательно, в силу свойства (h) окрестностей выполняется соотношение $\Delta_{f_{k-1}}(X_j)=\Delta_{f_k}(X_j)=\{r_j\}$.

Предположим, что найдется номер k, $k\in\{1,\ldots,j-2\}$, такой что выполняется равенство $|\Delta_{f_k}(X_j)|=2$. Пусть $\Delta_{f_k}(X_j)=\{r_j,t\}$. Покажем, что выполняется неравенство $t\geqslant a_{j-2}$. Действительно, предположим противное, т. е. либо выполняется неравенство $t<a_{j-2}$, либо элементы t и a_{j-2} несравнимы. Тогда в силу неравенств $a_k>a_{k+1}>\ldots>a_{j-2}$ для каждого i, $i=k,\ldots,j-2$, либо выполняется неравенство $t<a_i$, либо элементы t и a_i несравнимы. Из определения отображений $f_{k+1},\ldots,f_{j-1}$ следует, что выполняется соотношение $t\in\Delta_{f_{j-1}}(X_j)$, что противоречит соотношению (41.1). Следовательно, выполняется неравенство $t\geqslant a_{j-2}$. Но тогда в силу неравенства $a_{j-2}>r_j$ выполняется неравенство $t>r_j$, что невозможно, поскольку, согласно выбору элемента t, элементы t и r_j несравнимы.

Таким образом, для каждого k, $k=1,\ldots,j-2$, выполняется соотношение $\Delta_{f_k}(X_j)=\{r_j\}$. Отсюда вместе с соотношением (41.1) получаем требуемое утверждение. Доказано утверждение (2).

Так как X_1 — особый элемент для отображения f', выполняется равенство $|\Delta_{f'}(X_1)|=2$. Обозначим множество $\Delta_{f'}(X_1)$ через $\{r_1, r_1'\}$. Покажем, что выполняется неравенство $r_1, r_1' > r_2$. Действительно, в силу неравенства $X_1 > X_2$ выполняется соотношение $r_1, r_1' \in \Xi_{f_1}(X_2)$. И тогда, так как, согласно доказанному утверждению (2), $\{r_2\}=\Delta_{f_1}(X_2)$, то выполняется неравенство $r_1, r_1' > r_2$.

Покажем теперь, что выполняются неравенства $r_2 > r_3 > \ldots > r_n$. Пусть $i \in \{3,\ldots,n\}$. Согласно доказанному утверждению (2), выполняется соотношение $\{r_{i-1}\}=\Delta_{f_{i-2}}(X_{i-1})$. В силу неравенства $X_{i-1} > X_i$ выполняется соотношение $r_{i-1} \in \Xi_{f_{i-2}}(X_i)$. Поэтому в силу соотношения $\{r_i\}=\Delta_{f_{i-2}}(X_i)$ выполняется неравенство $r_{i-1} \geqslant r_i$. Далее, в силу соотношений $\Delta_{f_{i-1}}(X_{i-1})=\{a_{i-2}, r_{i-1}\}$ и $\delta_{f_{i-1}}(X_{i-1})=\{a_{i-1}\}$ выполняется неравенство $r_{i-1} > a_{i-1}$. Следовательно, поскольку элементы r_i и a_{i-1} несравнимы, равенство $r_{i-1}=r_i$ выполняться не может, а значит выполняется неравенство $r_{i-1} > r_i$. Таким образом, утверждение (3) доказано. Лемма доказана.

Л е м м а 2.42. *Пусть отображение $f' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$ монотонно, $X_1,\ldots,X_n$ — зигзаг для f', $n \geqslant 2$. Пусть g' — отображение $\mathcal{Q}' \cup \{X_1\} \to \mathcal{P}$, такое что $g'|_{\mathcal{Q}'}=f'$, $g'(X_1)=c$, где c — некоторый элемент множества $\mathcal{P}$, такой что $a_1 < c < A$, $\{a_1\}=\delta_{f'}(X_1)$, $A=\Delta_{f'}(X_1)$. Тогда последовательность $X_2,\ldots,X_n$ является зигзагом для отображения g'.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем доказательство леммы на несколько этапов.

1. Пусть $n=2$. По определению зигзага, элемент X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f' и является зигзагом длины 1 для отображения $f'' : \mathcal{Q}' \cup \{X_1\} \to \mathcal{P}$, такого что $f''|_{\mathcal{Q}'}=f'$, $f''(X_1)=\eta_{f'}(X_1)$. И тогда утверждение леммы следует из леммы 2.39.

2. Пусть теперь $n \geqslant 3$. Пусть $f_1,\ldots,f_n$ — последовательность ψ-доопределений для зигзага $X_1,\ldots,X_n$. Обозначим через $\{a_1\}$ множество $\delta_{f'}(X_1)$, через $\{a_2\}$ — множество $\delta_{f'}(X_2)$. В силу утверждения (3) леммы 2.40 выполняется равенство $\{a_2\}=\delta_{f_2}(X_2)$.

3. В силу утверждения (2) леммы 2.41 для каждого i, $i=2,\ldots,n$, выполняется равенство $|\Delta_{f'}(X_i)|=1$. Обозначим множество $\Delta_{f'}(X_i)$ через $\{r_i\}$, $i=2,\ldots,n$. В силу утверждения (2) леммы 2.41 для каждого k, $k=1,\ldots,n-1$, и для каждого i, $i=k+1,\ldots,n$, выполняется равенство $\Delta_{f_k}(X_i)=\{r_i\}$.

4. В силу определений отображений f_2 и g' и в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i=2,\ldots,n$, выполняется равенство $\delta_{g'}(X_i)=\delta_{f_2}(X_i)$.

5. Покажем, что для каждого i, $i=3,\ldots,n$, выполняется равенство $\Delta_{g'}(X_i)=\Delta_{f_2}(X_i)$. Действительно, согласно утверждению (1) леммы 2.41, выполняется равенство $\Delta_{f_2}(X_2)=\{a_1, r_2\}$. В силу определения зигзага и последовательности ψ-доопределений последовательность $X_2,\ldots,X_n$ является зигзагом для отображения f_2. Поэтому, согласно утверждению (3) леммы 2.41, выполняются неравенства $a_1, r_2 > r_3 > \ldots > r_n$. Тогда в силу неравенства $c > a_1$ для каждого i, $i=3,\ldots,n$, выполняется неравенство $c > r_i$. И тогда из определения отображений g' и f_i и из соотношений $\{r_i\}=\Delta_{f_1}(X_i)$ следует, что для каждого i, $i=3,\ldots,n$, выполняются соотношения $\{r_i\}=\Delta_{g'}(X_i)$.

6. Покажем, что последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения g'.

6.1. Согласно определению зигзага и последовательности ψ-доопределений, элемент X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_1 и является особым элементом для отображения f_2. Поэтому в силу определения отображения g' и в силу соотношений $\delta_{f'}(X_1) < g'(X_1) < \Delta_{f'}(X_1)$ для отображений $f' = f_1, f_2$ и g' выполняется условие леммы 2.38. Следовательно, X_2 является особым элементом для отображения g'.

6.2. Далее, по определению зигзага, ни один из элементов $X_3, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_2. Следовательно,поскольку для каждого i, $i = 3, \ldots, n$, выполняются соотношения $\delta_{g'}(X_i) = \delta_{f_2}(X_i)$ (см. п. 4) и $\Delta_{g'}(X_i) = \Delta_{f_2}(X_i)$ (см. п. 5), в силу свойства 3 особых элементов и свойства зигзагов длины 1 ни один из элементов $X_3, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения g'.

6.3. По определению зигзага, последовательность $X_3, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_3. Рассмотрим отображение g'', которое является доопределением отображения g' на элемент X_2, таким что $g''(X_2) = \eta_{g'}(X_2)$ (так как элемент X_2 является особым для отображения g', значение $\eta_{g'}(X_2)$ определено). Покажем, что последовательность $X_3, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения g''. Действительно, из равенства $\delta_{f_2}(X_2) = \delta_{g'}(X_2)$ (см. п. 4) следует соотношение $\eta_{g'}(X_2) = \delta_{g'}(X_2) = \{a_2\}$. Таким образом, $g''(X_2) = f_3(X_2)$. Поэтому, так как для каждого i, $i = 3, \ldots, n$, выполняются равенства $\delta_{g'}(X_i) = \delta_{f_2}(X_i)$ (см. п. 4) и $\Delta_{g'}(X_i) = \Delta_{f_2}(X_i)$ (см. п. 5), то, по свойству (f) окрестностей, для каждого i, $i = 3, \ldots, n$, выполняются равенства $\delta_{g''}(X_i) = \delta_{f_3}(X_i)$ и $\Delta_{g''}(X_i) = \Delta_{f_3}(X_i)$. Следовательно, поскольку $X_3, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения f_3, по свойству зигзага, $X_3, \ldots, X_n$ — зигзаг и для отображения g''.

6.4. Таким образом, из результатов пп. 6.1–6.3 и определения зигзага следует, что $X_2, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g'. Лемма доказана.

Определение. Будем говорить, что элемент α из множества $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ — *квазиособый элемент* для отображения f', если $|\delta_{f'}(\alpha)| = 1$, и найдется такое множество A, $A \subseteq \mathscr{P}^{(0)}$, что (a, A), где $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$, является элементом типа ($\psi 2$).

Пусть f' — отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, α, $\alpha \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, — квазиособый элемент для отображения f'. Обозначим через $\zeta_{f'}(\alpha)$ элемент a множества $\mathscr{P}$, такой что $\{a\} = \delta_{f'}(\alpha)$.

Заметим, что если α — особый элемент для отображения f', то α является также квазиособым для f', и выполняется равенство $\eta_{f'}(\alpha) = \zeta_{f'}(\alpha)$.

Лемма 2.43. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ — квазиособые элементы для отображения $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$. Пусть f'' — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \to \mathscr{P}$, такое что $f''|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $f''(\alpha_i) = \zeta_{f'}(\alpha_i)$ для каждого i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\beta \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$, элемент β не является ни зигзагом длины 1, ни особым элементом для f', и является либо особым элементом, либо зигзагом длины 1 для отображения f''. Тогда найдется элемент α_k, $\alpha_k \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, такой что элемент β является либо особым элементом, либо зигзагом длины 1 для отображения $g_k : \mathscr{Q}' \cup \{\alpha_k\} \to \mathscr{P}$, такого что $g_k|_{\mathscr{Q}'} = f'$, $g_k(\alpha_k) = \zeta_{f'}(\alpha_k)$. При этом если элемент β — особый для отображения f'', то он является особым элементом для отображения g_k, а если β — зигзаг длины 1 для f'', то он является также зигзагом длины 1 для g_k.*

Доказательство. По определению квазиособого элемента, для каждого i, $i=1,\ldots,n$, выполняются равенства $|\delta_{f'}(\alpha_i)|=1$. Для каждого i, $i=1,\ldots,n$, положим $\{a_i\}=\delta_{f'}(\alpha_i)$. Так как элементы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — квазиособые для отображения f', то для каждого i, $i=1,\ldots,n$, найдется такое множество A_i, $A_i\subseteq\mathscr{P}^{(0)}$, что (a_i,A_i) является элементом типа $(\psi2)$.

Легко видеть, что в силу определения отображения f'' и в силу свойства (g) окрестностей выполняется соотношение $\delta_{f''}(\beta)=\delta_{f'}(\beta)$.

Предположим, что для каждого i, $i=1,\ldots,n$, либо выполняется неравенство $\alpha_i<\beta$, либо элементы α_i и β несравнимы. Тогда в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i=1,\ldots,n$, выполняются соотношения $\delta_{f'}(\beta)=\delta_{f''}(\beta)$ и $\Delta_{f'}(\beta)=\Delta_{f''}(\beta)$. И тогда, по свойству 3 особого элемента и по свойству зигзага длины 1, элемент β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f'', что противоречит условию леммы. Следовательно, найдется по крайней мере один элемент α_j, такой что выполняется неравенство $\alpha_j>\beta$.

Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_1,\ldots,\alpha_m>\beta$, $1\leqslant m\leqslant n$. Тогда $a_1,\ldots,a_m\in\Xi_{f''}(\beta)$. Так как β не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f' и является либо особым элементом, либо зигзагом длины 1 для отображения f'', и так как выполняется соотношение $\delta_{f''}(\beta)=\delta_{f'}(\beta)$, то равенство $\Delta_{f'}(\beta)=\Delta_{f''}(\beta)$ выполняться не может. Поэтому найдется по крайней мере один номер j, $j\in\{1,\ldots,m\}$, такой что $a_j\in\Delta_{f''}(\beta)$. Без ограничения общности будем считать, что $a_1,\ldots,a_l\in\Delta_{f''}(\beta)$, $1\leqslant l\leqslant m$. Обозначим через $\mathscr{A}$ множество элементов $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$, такое что $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}=\{a_1,\ldots,a_l\}$, и все элементы $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ различны. В силу свойства (b) окрестностей выполняется неравенство $1\leqslant|\Delta_{f''}(\beta)|\leqslant2$, поэтому выполняется неравенство $1\leqslant|\mathscr{A}|\leqslant2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|\mathscr{A}|=1$. Это означает, что найдется элемент α_j из множества $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$, такой что $a_j\in\Delta_{f''}(\beta)$. Так как β — либо особый элемент, либо зигзаг длины 1 для отображения f'', то $|\Delta_{f''}(\beta)|=2$. В силу утверждения (4) леммы 2.37 выполняется соотношение $\Delta_{f''}(\beta)=\{a_j,r\}$, где $r\in\Delta_{f'}(\beta)$ — некоторый элемент, не сравнимый с a_j. Рассмотрим отображение $g_j:\mathscr{Q}'\cup\{\alpha_j\}\to\mathscr{P}$, такое что $g_j|_{\mathscr{Q}'}=f'$, $g_j(\alpha_j)=\zeta_{f'}(\alpha_j)$. В силу неравенства $\alpha_j>\beta$, по свойству (g) окрестностей, выполняется соотношение $\delta_{g_j}(\beta)=\delta_{f'}(\beta)$. Поэтому выполняется соотношение $\delta_{g_j}(\beta)=\delta_{f''}(\beta)$. Далее, в силу свойства (i) окрестностей выполняется соотношение $\Delta_{g_j}(\beta)=\{a_j,r\}=\Delta_{f''}(\beta)$. Следовательно, если β является особым элементом для отображения f'', то, по свойству 3 особых элементов, β — особый элемент для отображения g_j, а если β является зигзагом длины 1 для f'', то, по свойству зигзагов длины 1, β — зигзаг длины 1 для g_j. Таким образом, в этом случае утверждение леммы доказано.

2. Пусть теперь $|\mathscr{A}|=2$. Это означает, что найдутся два элемента α_i,α_j из множества $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$, такие что выполняется соотношение $\Delta_{f''}(\beta)=\{a_i,a_j\}$. Далее рассмотрим два случая.

Пусть β — особый элемент для отображения f''. Тогда $|\delta_{f''}(\beta)|=1$. Обозначим множество $\delta_{f''}(\beta)$ через $\{b\}$, а множество $\Delta_{f''}(\beta)=\{a_i,a_j\}$ — через B. По определению особого элемента, (b,B) — элемент типа $(\psi3)$. Это означает, что множество $\mathscr{U}_1(b,B)$ непусто, и выполняется соотношение $\{x_1,x_2\}\in\mathscr{U}_2(b,B)\setminus\mathscr{U}_3(b,B)$, где $\{x_1,x_2\}=\chi(b,B)$. Так как $B=\{a_i,a_j\}$, то, по свойству 2 множества $\mathscr{U}_3$, (b,z,a_i,a_j), где $z=\sup^2(x_1,x_2)$, — квадрат.

Но поскольку (a_i, A_i) и (a_j, A_j) являются элементами типа $(\psi 2)$, в силу следствия из леммы 2.29 четверка (b, z, a_i, a_j) не может быть квадратом. Следовательно, в случае, когда β — особый элемент для отображения f'', равенство $|\mathscr{A}| = 2$ выполняться не может.

Пусть теперь β — зигзаг длины 1 для отображения f''. Тогда $|\delta_{f''}(\beta)| = 2$. Обозначим множество $\delta_{f''}(\beta)$ через $\{b_1, b_2\}$. По определению зигзага длины 1, в силу соотношения $\Delta_{f''}(\beta) = \{a_i, a_j\}$ (b_1, b_2, a_i, a_j) — квадрат. Но поскольку (a_i, A_i) и (a_j, A_j) являются элементами типа $(\psi 2)$, в силу следствия из леммы 2.29 четверка (b_1, b_2, a_i, a_j) не может быть квадратом. Следовательно, в случае, когда β — зигзаг длины 1 для отображения f'', равенство $|\mathscr{A}| = 2$ выполняться также не может. Лемма доказана.

Лемма 2.44. *Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, пусть в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов длины 1 для f'. Пусть α — особый элемент для отображения f', такой что ни для какого особого для f' элемента β не выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Пусть g' — доопределение отображения f' на элемент α, такое что $g'(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$. И пусть $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для g', и X_1 не является особым элементом для f'. Тогда последовательность $\alpha, X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом в $\mathscr{Q}$ для отображения f'.*

Доказательство. Покажем, что ни один из элементов $X_1, \ldots, X_n$ не является особым для отображения f'. Действительно, X_1 не является особым элементом для f' по условию. Далее, так как $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g', то X_1 — либо особый элемент для отображения g', если $n \geqslant 2$, либо зигзаг длины 1 для g', если $n = 1$. Поэтому, согласно утверждению (1) леммы 2.37, выполняется неравенство $\alpha > X_1$. И тогда в силу утверждения (1) леммы 2.40 выполняются неравенства $\alpha > X_1 > X_2 > \ldots > X_n$. Следовательно, согласно выбору элемента α, ни один из элементов $X_2, \ldots, X_n$ не является особым для отображения f'.

Таким образом, выполняются следующие условия:

1) α — особый элемент для отображения f',

2) ни один из элементов $X_1, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для f',

3) последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения g', такого что g' — доопределение отображения f' на элемент α, $g'(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$.

Следовательно, последовательность элементов $\alpha, X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f'. Лемма доказана.

Лемма 2.45. *Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, такое что в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов длины 1 для f'. Пусть α — квазиособый элемент для отображения f', такой что ни для какого особого для f' элемента β не выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Пусть g' — доопределение отображения f' на элемент α, такое что $g'(\alpha) = \zeta_{f'}(\alpha)$. И пусть $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для g', X_1 является особым элементом для f', выполняется неравенство $\alpha > X_2$, и не выполняется неравенство $\alpha > X_1$. Тогда последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом в $\mathscr{Q}$ для отображения f'.*

Доказательство. Обозначим через f_1 отображение f', через g_1 — отображение g', через f_2 — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{X_1\} \to \mathscr{P}$, такое что $f_2 |_{\mathscr{Q}'} = f_1$, $f_2(X_1) = \eta_{f_1}(X_1)$, через g_2 — отображение $\mathscr{Q}' \cup \{\alpha\} \cup \{X_1\}$, такое что $g_2 |_{\mathscr{Q}' \cup \{\alpha\}} = g_1$, $g_2(X_1) = \eta_{g_1}(X_1)$. Из свойства (e) окрестностей следует, что отображения g_1, g_2 и f_2 монотонны.

Так как α — квазиособый элемент для отображения f_1, то, согласно определению, $|\delta_{f_1}(\alpha)| = 1$. Обозначим $\delta_{f_1}(\alpha)$ через $\{c\}$. Выполняются равенства $g_1(\alpha)=\zeta_{f_1}(\alpha)=c$. Так как X_1 — особый элемент для отображения f_1, то $|\delta_{f_1}(X_1)|=1$. Обозначим $\delta_{f_1}(X_1)$ через $\{a_1\}$. Так как, по условию, $X_1,\ldots,X_n$ — зигзаг для отображения g_1, то X_1 — особый элемент для отображения g_1. Поэтому $|\delta_{g_1}(X_1)|=1$. В силу определения отображения g_1 и свойства (g) окрестностей выполняется равенство $\delta_{g_1}(X_1)=\delta_{f_1}(X_1)$. Таким образом, выполняются соотношения

$$g_2(X_1)=\eta_{g_1}(X_1)=f_2(X_1)=\eta_{f_1}(X_1)=a_1. \tag{45.1}$$

Далее рассмотрим два случая.

1. Пусть выполняется равенство $n=2$.

Покажем, что X_2 является зигзагом длины 1 для отображения f_2. Действительно, по условию, X_1, X_2 — зигзаг для отображения g_1, поэтому X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения g_1 и является зигзагом длины 1 для отображения g_2. Тогда выполняются следующие условия:

a) g_2 — монотонное отображение $\mathscr{Q}'\cup\{\alpha,X_1\}\to\mathscr{P}$, такое что $g_2|_{\mathscr{Q}'}=f_1$, $g_2(\alpha)=\zeta_{f_1}(\alpha)$, $g_2(X_1)=\eta_{f_1}(X_1)$ (последнее равенство выполняется в силу соотношений (45.1));

b) X_2 не является ни особым элементом (в силу выбора элемента α и соотношения $\alpha>X_2$), ни зигзагом длины 1 (по условию) для отображения f_1;

c) X_2 является зигзагом длины 1 для отображения g_2;

d) X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения $g_1:\mathscr{Q}'\cup\{\alpha\}\to\mathscr{P}$, такого что $g_1|_{\mathscr{Q}'}=f_1$, $g_1(\alpha)=\zeta_{f_1}(\alpha)$.

Следовательно, по лемме 2.43, элемент X_2 является зигзагом длины 1 для отображения $f_2:\mathscr{Q}'\cup\{X_1\}\to\mathscr{P}$, такого что $f_2|_{\mathscr{Q}'}=f_1$, $f_2(X_1)=\eta_{f_1}(X_1)$.

Таким образом, выполняются следующие соотношения:

1) X_1 — особый элемент для отображения f',

2) элемент X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_1,

3) X_2 является зигзагом длины 1 для отображения f_2, такого что f_2 — доопределение отображения f_1 на элемент X_1, $f_2(X_1)=\eta_{f_1}(X_1)$.

Следовательно, последовательность X_1, X_2 является зигзагом для отображения $f_1=f'$. Таким образом, в случае $n=2$ утверждение леммы доказано.

2. Пусть теперь $n>2$.

Так как, по условию, $X_1,\ldots,X_n$ — зигзаг для отображения g_1, то, согласно утверждению (1) леммы 2.40, выполняются неравенства $X_1>\ldots>X_n$. Следовательно, в силу неравенства $\alpha>X_2$ выполняются неравенства $\alpha>X_2>X_3>\ldots>X_n$.

Далее, так как $X_1,\ldots,X_n$ — зигзаг для отображения g_1, то в силу утверждения (2) леммы 2.41 для каждого i, $i=2,\ldots,n$, выполняется равенство $|\Delta_{g_1}(X_i)|=1$. Обозначим $\Delta_{g_1}(X_i)$ через $\{r_i\}$, $i=2,\ldots,n$. В силу утверждения (3) леммы 2.41 выполняются неравенства $r_2>\ldots>r_n$. В силу неравенства $\alpha>X_2$ и соотношения $g_1(\alpha)=c$ выполняется соотношение $c\in\Xi_{g_1}(X_2)$. Поэтому выполняется неравенство $c\geqslant r_2$. И тогда для каждого i, $i=3,\ldots,n$, выполняется неравенство $c>r_i$.

В силу выбора элемента α и в силу неравенств $\alpha>X_2>\ldots>X_n$ ни один из элементов $X_2,\ldots,X_n$ не является особым для отображения f_1.

Согласно определению зигзага, ни один из элементов $X_2,\ldots,X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения g_1. Далее, последовательность $X_2,\ldots,X_n$ является зигзагом для отображения g_2, при этом $n>2$. Следовательно, элемент X_2 является особым для отображения g_2.

Покажем теперь, что последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_2.

2.1 Покажем, что элемент X_2 является особым для отображения f_2. Действительно, выполняются следующие условия:

a) g_2 — монотонное отображение $\mathcal{Q}' \cup \{\alpha, X_1\} \to \mathcal{P}$, такое что $g_2|_{\mathcal{Q}'} = f_1$, $g_2(\alpha) = \zeta_{f_1}(\alpha)$, $g_2(X_1) = \eta_{f_1}(X_1)$ (последнее равенство выполняется в силу соотношений (45.1));

b) X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_1;

c) X_2 является особым элементом для отображения g_2;

d) X_2 не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения $g_1 : \mathcal{Q}' \cup \{\alpha\} \to \mathcal{P}$, такого что $g_1|_{\mathcal{Q}'} = f_1$, $g_1(\alpha) = \zeta_{f_1}(\alpha)$.

Следовательно, по лемме 2.43, элемент X_2 является особым для отображения $f_2 : \mathcal{Q}' \cup \{X_1\} \to \mathcal{P}$, такого что $f_2|_{\mathcal{Q}'} = f_1$, $f_2(X_1) = \eta_{f_1}(X_1)$.

2.2 Покажем, что ни один из элементов $X_3, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_2.

Так как $X_2, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_2, ни один из элементов $X_3, \ldots, X_n$ не является ни особым, ни зигзагом длины 1 для отображения g_2.

В силу определения отображений g_1, g_2 и f_2, по свойству (g) окрестностей, для каждого i, $i=3, \ldots, n$, выполняются соотношения

$$\delta_{f_1}(X_i) = \delta_{g_1}(X_i) = \delta_{f_2}(X_i) = \delta_{g_2}(X_i). \tag{45.2}$$

Таким образом, для каждого значения i, $i=3, \ldots, n$, выполняется равенство $\delta_{g_2}(X_i) = \delta_{f_2}(X_i)$. Далее, в силу утверждения (2) леммы 2.41 для каждого i, $i=3, \ldots, n$, выполняется соотношение $\{r_i\} = \Delta_{g_2}(X_i)$. И тогда для каждого i, $i=3, \ldots, n$, из соотношений $\alpha > X_i$ и $g_2(\alpha) = g_1(\alpha) = c > r_i$ в силу определений отображений g_2 и f_2 и свойства (h) окрестностей выполняется соотношение $\Delta_{g_2}(X_i) = \Delta_{f_2}(X_i)$. Таким образом, по свойству 3 особого элемента и по свойству зигзага длины 1, ни один из элементов $X_3, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_2.

2.3 Обозначим через f_3 доопределение отображения f_2 на элемент X_2, такое что $f_3(X_2) = \eta_{f_2}(X_3)$. Покажем, что последовательность $X_3, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_3.

Обозначим через g_3 доопределение отображения g_2 на элемент X_2, такое что $g_3(X_2) = \eta_{g_2}(X_2)$. Так как $X_2, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_2, то $X_3, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_3.

Обозначим $\eta_{g_2}(X_2)$ через a_2. В силу соотношения (45.2) выполняется равенство $\eta_{f_2}(X_2) = a_2$. В силу определения отображений g_3 и f_3 и в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i=3, \ldots, n$, выполняется равенство $\delta_{f_3}(X_i) = \delta_{g_3}(X_i)$. Далее, согласно утверждению (1) леммы 2.41, выполняется равенство $\Delta_{g_3}(X_3) = \{a_2, r_3\}$; согласно утверждению (2) леммы 2.41, для каждого i, $i=4, \ldots, n$, выполняется равенство $\Delta_{g_3}(X_i) = \{r_i\}$. Тогда в силу неравенств $\alpha > X_i$ и $g_3(\alpha) = g_1(\alpha) = c > r_i$, $i=3, \ldots, n$, и в силу определений отображений g_3 и f_3, по свойству (h) окрестностей, для каждого i, $i=3, \ldots, n$, выполняется соотношение $\Delta_{g_3}(X_i) = \Delta_{f_3}(X_i)$. Следовательно, по свойству зигзага, последовательность $X_3, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_3.

Таким образом, в силу пп. 2.1–2.3 последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_2. Тогда выполняются следующие соотношения:

1) X_1 — особый элемент для отображения f',

2) ни один из элементов $X_2, \ldots, X_n$ не является ни особым, ни зигзагом длины 1 для отображения f_1,

3) последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_2, такого что f_2 — доопределение отображения f_1 на элемент X_1, $f_2(X_1) = \eta_{f_1}(X_1)$.

Следовательно, последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения $f_1 = f'$. Лемма доказана.

Лемма 2.46. *Пусть $f' : \mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$ — монотонное отображение, такое что в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов длины 1 для f', пусть α — особый элемент для отображения f', такой что ни для какого особого для f' элемента β не выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Пусть g' — доопределение отображения f' на элемент α, такое что $g'(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$. И пусть $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для g'. Тогда в $\mathscr{Q}$ существует зигзаг для отображения f'.*

Доказательство. В силу определения отображения g' и свойства (e) окрестностей легко видеть, что g' монотонно.

Пусть ни для какого элемента X_i из $X_1, \ldots, X_n$ не выполняется неравенство $\alpha > X_i$. Тогда, согласно свойству (g) окрестностей, для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, выполняются соотношения $\delta_{f'}(X_i) = \delta_{g'}(X_i)$ и $\Delta_{f'}(X_i) = \Delta_{g'}(X_i)$. И тогда, по свойству зигзага, последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f', т. е. утверждение леммы доказано.

Пусть теперь найдется такой номер j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, что выполняется неравенство $\alpha > X_j$. Будем считать, что номер j — наименьший из возможных. В силу выбора α элемент X_j не является особым для отображения f'. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $j = 1$. Тогда утверждение леммы следует из леммы 2.44.

2. Пусть $j = 2$. Тогда, так как, согласно замечанию к определению квазиособого элемента, α является квазиособым элементом для отображения f', утверждение леммы следует из леммы 2.45.

3. Пусть теперь выполняются неравенства $n > 2$ и $j > 2$. Пусть найдется такой номер k, $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, что выполняется неравенство $\alpha > X_{k+1}$, и ни для какого i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, неравенство $\alpha > X_i$ не выполняется.

3.1. Пусть $g_1 = g', g_2, \ldots, g_n$ — последовательность ψ-доопределений для зигзага $X_1, \ldots, X_n$. Определим отображения $f_1, \ldots, f_n$ следующим образом: положим $f_1 = f'$. Далее, для каждого j, $j = 2, \ldots, n$, отображение f_j — это доопределение отображения f_{j-1} на элемент X_{j-1}, такое что $f_j(X_{j-1}) = \eta_{f_{j-1}}(X_{j-1})$. Легко видеть, что все отображения $g_1, \ldots, g_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ монотонны.

Обозначим значение $g_1(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$ через c.

3.2. Пусть $m \in \{1, \ldots, n\}$. Согласно определению отображений $f_1, \ldots, f_n$, для каждого i, $i = 2, \ldots, m$, по свойству (g) окрестностей, выполняются соотношения $\delta_{f_i}(\alpha) = \delta_{f_1}(\alpha) = c$. Поэтому отображение g_m является доопределением отображения f_m на элемент α, таким что $g_m(\alpha) = c$, где $\{c\} = \delta_{f_m}(\alpha)$.

3.3. Рассмотрим последовательность $X_k, \ldots, X_n$ и отображения g_k и f_k. Согласно определению зигзага, $X_k, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_k, поэтому X_k является особым элементом для отображения g_k. Так как, согласно выбору номера k, неравенство $\alpha > X_k$ не выполняется, то, по свойству (g) окрестностей, выполняются соотношения $\delta_{g_k}(X_k) = \delta_{f_k}(X_k)$

и $\Delta_{g_k}(X_k)=\Delta_{f_k}(X_k)$. Поэтому, по свойству 3 особых элементов, X_k — особый элемент для отображения f_k.

3.4. Так как α — особый элемент для отображения f', то, по определению особого элемента, выполняется равенство $|\Delta_{f'}(\alpha)|=2$, и (c, C), где $C=\Delta_{f'}(\alpha)$, — элемент типа (ψ3), а значит, и элемент типа (ψ2). Поэтому в силу соотношения $\delta_{f'}(\alpha)=\delta_{f_k}(\alpha)$ (см. п. 3.2) элемент α является квазиособым для отображения f_k, и тогда выполняется равенство $g_k(\alpha)=\zeta_{f_k}(\alpha)=c$.

3.5. Таким образом, выполняются следующие соотношения:

1) элемент X_k является особым, а элемент α — квазиособым для отображения f_k,

2) последовательность $X_k, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения g_k, где g_k — доопределение отображения f_k на элемент α, такое что $g_k(\alpha)=\zeta_{f_k}(\alpha)$,

3) выполняется неравенство $\alpha > X_{k+1}$, а неравенство $\alpha > X_k$ не выполняется.

Следовательно, по лемме 2.45, последовательность $X_k, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_k.

3.6. Предположим, что для некоторого номера j, $j\in\{2, \ldots, k\}$, доказано, что последовательность $X_j, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_j. Покажем, что последовательность $X_{j-1}, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_{j-1}.

3.6.1. По условию, $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g', поэтому в силу утверждения (1) леммы 2.40 выполняются неравенства $X_1 > X_2 > \ldots > X_n$. Кроме того, согласно определению отображений g_i, последовательность $X_{j-1}, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения g_{j-1}, а значит, элемент X_{j-1} — особый для отображения g_{j-1}.

3.6.2. Покажем, что X_{j-1} — особый элемент для f_{j-1}. В силу выбора номера j выполняется неравенство $j-1<k$, следовательно, в силу выбора номера k неравенство $\alpha > X_{j-1}$ не выполняется. Поэтому из определения отображений f_{j-1} и g_{j-1} (см. п. 3.2) и из свойства (g) окрестностей следует, что выполняются соотношения $\delta_{g_{j-1}}(X_{j-1})=\delta_{f_{j-1}}(X_{j-1})$ и $\Delta_{g_{j-1}}(X_{j-1})=\Delta_{f_{j-1}}(X_{j-1})$. Следовательно, так как X_{j-1} — особый элемент для отображения g_{j-1} (см. п. 3.6.1), то, по свойству 3 особых элементов, X_{j-1} — особый элемент и для отображения f_{j-1}.

3.6.3. Покажем теперь, что ни один из элементов $X_j, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{j-1}. Покажем это отдельно для элементов $X_j, \ldots, X_k$ и для элементов $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

A) Так как $X_{j-1}, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_{j-1} (см. п. 3.6.1), то ни один из элементов $X_j, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения g_{j-1}. В силу выбора номера k ни для какого i, $i\in\{1, \ldots, k\}$, не выполняется неравенство $\alpha > X_i$. Так как $j\leqslant k$, то ни для какого i, $i\in\{j, \ldots, k\}$, не выполняется неравенство $\alpha > X_i$. Поэтому в силу определений отображений f_{j-1} и g_{j-1} (см. п. 3.2.) и в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i=j, \ldots, k$, выполняются соотношения $\delta_{g_{j-1}}(X_i)=\delta_{f_{j-1}}(X_i)$ и $\Delta_{g_{j-1}}(X_i)=\Delta_{f_{j-1}}(X_i)$. Следовательно, в силу свойства 3 особых элементов и свойства зигзагов длины 1 ни один из элементов $X_j, \ldots, X_k$ не является ни особым, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{j-1}.

В) Согласно предположению п. 3.6, $X_j, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения f_j, поэтому ни один из элементов $X_{j+1}, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_j. Тогда в силу неравенства $j+1 \leqslant k+1$ ни один из элементов $X_{k+1}, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для f_j. В силу определения отображений f_{j-1} и f_j и в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i = k+1, \ldots, n$, выполняется соотношение

$$\delta_{f_j}(X_i) = \delta_{f_{j-1}}(X_i). \tag{46.1}$$

Рассмотрим $X_{j-1}, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения g_{j-1} (см. п. 3.6.1). Для каждого r, $r = j-1, \ldots, n-1$, обозначим $\delta_{g_{j-1}}(X_r)$ через $\{a_r\}$ (см. утверждение (4) леммы 2.40). Далее, рассмотрим $X_j, \ldots, X_n$ — зигзаг для отображения f_j (см. предположение п. 3.6). Для каждого m, $m = j+1, \ldots, n$, обозначим $\Delta_{f_j}(X_m)$ через $\{r_m\}$ (см. утверждение (2) леммы 2.41). В силу определения отображений g_{j-1}, f_{j-1} и f_j и в силу свойства (g) окрестностей для каждого i, $i = j, \ldots, n-1$, выполняется равенство $\delta_{f_j}(X_i) = \delta_{f_{j-1}}(X_i) = \delta_{g_{j-1}}(X_i) = a_i$ (см. п. 3.2), а также выполняется равенство $f_j(X_{j-1}) = a_{j-1}$. Следовательно, в силу утверждения (1) леммы 2.41 выполняется соотношение $\Delta_{f_j}(X_j) = \{a_{j-1}, r_j\}$, где r_j — некоторый элемент, не сравнимый с a_{j-1}.

Согласно утверждению (3) леммы 2.41, выполняются неравенства $a_{j-1}, r_j > r_{j+1} > \ldots > r_n$. Следовательно, для каждого i, $i = k+1, \ldots, n$, выполняется неравенство $r_i < a_{j-1}$. Поэтому в силу определения отображений f_{j-1} и f_j и в силу свойства (h) окрестностей для каждого i, $i = k+1, \ldots, n$, выполняется соотношение

$$\Delta_{f_j}(X_i) = \Delta_{f_{j-1}}(X_i). \tag{46.2}$$

Следовательно, из соотношений (46.1) и (46.2), свойства 3 особых элементов и свойства зигзагов длины 1 следует, что ни один из элементов $X_{k+1}, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{j-1}.

3.6.4. Таким образом, выполняются следующие условия:

1) X_{j-1} — особый элемент для отображения f_{j-1} (см. п. 3.6.2),

2) ни один из элементов $X_j, \ldots, X_n$ не является ни особым элементом, ни зигзагом длины 1 для отображения f_{j-1} (см. п. 3.6.3),

3) последовательность $X_j, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_j (см. п. 3.6).

Поэтому последовательность $X_{j-1}, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения f_{j-1}.

3.7. Из результатов пп. 3.5 и 3.6 следует, что последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для отображения $f_1 = f'$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{Q}$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, f' — некоторое отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$. Тогда монотонное отображение $f: \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$, такое что $f|_{\mathcal{Q}'} = f'$, существует в том и только в том случае, когда отображение f' монотонно и в $\mathcal{Q}$ не существует зигзага для f'.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует доопределение отображения f' на множество $\mathcal{Q}$ до монотонного отображения f, и индукцией по длине зигзага покажем, что зигзагов для f' в $\mathcal{Q}$ не существует.

Предположим, что в $\mathscr{Q}$ существует X_1 — зигзаг длины 1 для отображения f'. По определению зигзага длины 1, выполняются равенства $|\delta_{f'}(X_1)| = 2$, $|\Delta_{f'}(X_1)| = 2$. Положим $\delta_{f'}(X_1) = \{a_1, a_2\}$, $\Delta_{f'}(X_1) = \{A_1, A_2\}$. По определению зигзага длины 1, (a_1, a_2, A_1, A_2) — квадрат. С другой стороны, так как отображение f монотонно, выполняются неравенства $a_1, a_2 < f(X_1) < A_1, A_2$. Поэтому (a_1, a_2, A_1, A_2) не является квадратом. Таким образом, получилось противоречие, следовательно, зигзага длины 1 для f' в $\mathscr{Q}$ не существует.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и пусть мы показали, что если $g' : \mathscr{Q}'_g \to \mathscr{P}$ — некоторое монотонное отображение, такое что существует монотонное доопределение g отображения g' на множество $\mathscr{Q}$, то в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов для g' длины $n-1$. Предположим, что существует $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг длины n для f'. Тогда, по определению зигзага, X_1 — особый элемент для f'. По определению особого элемента, выполняются равенства $|\delta_{f'}(X_1)| = 1$ и $|\Delta_{f'}(X_1)| = 2$. Обозначим $\delta_{f'}(X_1)$ через $\{a_1\}$, $\Delta_{f'}(X_1)$ — через $\{A_1, A_2\}$. Положим $\mathscr{Q}'' = \mathscr{Q}' \cup \{X_1\}$, обозначим через f'' отображение $\mathscr{Q}'' \to \mathscr{P}$, такое что $f''|_{\mathscr{Q}''} = f$. Из определения отображения f'' в силу монотонности отображения f следует, что отображение f'' монотонно. Легко видеть, что отображение f'' является доопределением отображения f' на элемент X_1. Так как отображение f'' монотонно, выполняются неравенства $a_1 \leqslant f''(X_1) < A_1, A_2$. Тогда, по лемме 2.42, последовательность $X_2, \ldots, X_n$ является зигзагом длины $n-1$ для отображения f''. С другой стороны, согласно индуктивному предположению, так как f — монотонное доопределение монотонного отображения f'', то в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов длины $n-1$ для f''. Таким образом, в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов длины n для отображения f'.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что в $\mathscr{Q}$ нет зигзагов для f'. Индукцией по числу элементов множества $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ покажем, что существует монотонное доопределение f отображения f' на множество $\mathscr{Q}$.

Если выполняется равенство $|\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'| = 0$, т. е. $\mathscr{Q}' = \mathscr{Q}$, то требуемое утверждение очевидно.

Пусть теперь $|\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'| = k$, $k \geqslant 1$, и пусть для любого монотонного отображения $g' : \mathscr{Q}_g \to \mathscr{P}$, такого что выполняется неравенство $|\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}_g| \leqslant k-1$, мы показали, что если в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов для отображения g', то существует монотонное доопределение отображения g' на множество $\mathscr{Q}$.

Если в $\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'$ не существует особых элементов для отображения f', то, согласно следствию из леммы 2.36, существует монотонное доопределение отображения f' на множество $\mathscr{Q}$. Таким образом, требуемое утверждение доказано.

Пусть теперь в $\mathscr{Q}$ существуют особые элементы для f'. Пусть α — такой особый элемент, что в $\mathscr{Q}$ не существует особых для f' элементов β, для которых выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Обозначим через f'' доопределение отображения f' на элемент α, такое что $f''(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$. Из определения отображения f'', определения оператора η и свойства (e) окрестностей следует, что отображение f'' монотонно. Покажем, что в $\mathscr{Q}$ не существует зигзага для f''. Действительно, предположим, что в $\mathscr{Q}$ найдется зигзаг для отображения f''. Тогда выполняются следующие условия:

1) f' — монотонное отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, такое что в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов для f',

2) α — особый элемент для отображения f', такой что ни для какого особого для f' элемента β не выполняется неравенство $\beta < \alpha$,

3) отображение f'' является доопределением отображения f на элемент α, таким что $f''(\alpha) = \eta_{f'}(\alpha)$,

4) в $\mathscr{Q}$ существует зигзаг для отображения f''.

Следовательно, по лемме 2.46, в $\mathscr{Q}$ существует зигзаг для отображения f', что противоречит условию теоремы. Поэтому в $\mathscr{Q}$ не существует зигзагов для отображения f''.

Так как отображение f'' определено на множестве $q'' = \mathscr{Q}' \cup \{\alpha\}$, выполняются равенства $|\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}''| = |\mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}'| - 1 = k - 1$. Поэтому, по индуктивному предположению, существует монотонное доопределение отображения f'' на множество $\mathscr{Q}$. Следовательно, поскольку отображение f'' является монотонным доопределением отображения f' на элемент α, существует и монотонное доопределение отображения f' на $\mathscr{Q}$. Теорема доказана.

2.4. Существование монотонной мажоритарной функции и достаточное условие конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

Лемма 2.47. *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$, пусть $\mathscr{Q}$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathscr{Q}' \subset \mathscr{Q}$, f' — некоторое монотонное отображение $\mathscr{Q}' \to \mathscr{P}$, и пусть $X_1, \ldots, X_n$ — зигзаг для f' в $\mathscr{Q}$. Тогда $n \leqslant l_{\mathscr{P}} - 2$.*

Доказательство. Согласно определению зигзага, X_1 — особый элемент для отображения f', следовательно, по определению особого элемента, $|\Delta_{f'}(X_1)| = 2$. В силу утверждения (4) леммы 2.40 выполняется равенство $|\delta_{f'}(X_n)| = 2$. В силу утверждения (5) леммы 2.40 выполняются неравенства $\delta_{f'}(X_n) < \delta_{f'}(X_{n-1}) < \ldots < \delta_{f'}(X_1)$. В силу свойства (c) окрестностей выполняется неравенство $\delta_{f'}(X_1) < \Delta_{f'}(X_1)$.

Таким образом, выполняются неравенства

$$0 < \delta_{f'}(X_n) < \delta_{f'}(X_{n-1}) < \ldots < \delta_{f'}(X_1) < \Delta_{f'}(X_1) < 1.$$

Это значит, что в $\mathscr{P}$ существует цепь длины $n+2$. Согласно определению длины множества, длина любой цепи в $\mathscr{P}$ не превышает $l_{\mathscr{P}}$, следовательно, выполняется неравенство $l_{\mathscr{P}} \geqslant n+2$, откуда $n \leqslant l_{\mathscr{P}} - 2$. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$. В классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ всех монотонных функций на $\mathscr{P}$ существует мажоритарная функция, зависящая не более чем от $2l_{\mathscr{P}} - 1$ переменных.*

Доказательство. Положим $N = 2(l_{\mathscr{P}} - 2) + 2$. Рассмотрим множество $\mathscr{P}'$, состоящее из всех наборов длины $N+1$ элементов $\mathscr{P}$ вида $(a, b, \ldots, b), (b, a, b, \ldots, b), \ldots, (b, b, \ldots, b, a)$.

Пусть $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{P}'$, обозначим через $M(\widetilde{\alpha})$ значение, которое встречается в наборе $\widetilde{\alpha}$ не менее N раз. Легко видеть, что наборы из множества $\mathscr{P}'$ обладают следующим свойством: пусть $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k \in \mathscr{P}'$, $1 \leqslant k \leqslant N$, тогда найдется такой номер i, $i \in \{1, \ldots, N+1\}$, что для всех j, $j = 1, \ldots, k$, выполняются равенства $\widetilde{\alpha}_j[i] = M(\widetilde{\alpha}_j)$ (через $\widetilde{\alpha}[i]$ обозначается i-я компонента набора $\widetilde{\alpha}$).

На множестве $\mathscr{P}'$ определим частичную функцию $\mu' : \mathscr{P}' \to \mathscr{P}$ следующим образом:

$$\mu'(a, b, \ldots, b) = \mu'(b, a, b, \ldots, b) = \ldots = \mu'(b, b, \ldots, b, a) = b.$$

Легко видеть, что так определенная частичная функция μ' монотонна на множестве $\mathscr{P}'$. Покажем, что ее можно доопределить до монотонной функции μ на все множество $\mathscr{P}^{N+1}$, отсюда будет следовать, что μ — монотонная мажоритарная функция, зависящая от $N+1 = 2l_{\mathscr{P}} - 1$ переменных.

Предположим, что μ' нельзя доопределить до монотонной функции. Согласно теореме 2.1, в этом случае в множестве $\mathscr{P}^{N+1}$ существует зигзаг $X_1, \ldots, X_n$ для μ'. Согласно утверждению (4) леммы 2.40, для каждого i, $i = 1, \ldots, n-1$, выполняется равенство $|\delta_{\mu'}(X_i)| = 1$, а также равенство $|\delta_{\mu'}(X_n)| = 2$. Согласно утверждению (2) леммы 2.41, для каждого i, $i = 2, \ldots, n$, выполняется равенство $|\Delta_{\mu'}(X_i)| = 1$. По определению зигзага, элемент X_1 является особым для отображения μ', следовательно, по определению особого элемента, $|\Delta_{\mu'}(X_1)| = 2$. Положим $\delta_{\mu'}(X_i) = \{a_i\}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\delta_{\mu'}(X_n) = \{a_n, b_n\}$, $\Delta_{\mu'}(X_j) = \{A_j\}$, $j = 2, \ldots, n$, $\Delta_{\mu'}(X_1) = \{A_1, B_1\}$. Согласно определению окрестностей, для каждого i, $i = 1, \ldots, n-1$, найдется такой элемент Z_i из $\mathscr{P}'$, $Z_i < X_i$, что $\mu'(Z_i) = a_i$, и найдутся такие элементы Z_n, Z'_n из $\mathscr{P}'$, $Z_n, Z'_n < X_n$, что $\mu'(Z_n) = a_n$, $\mu'(Z'_n) = b_n$; далее, для каждого j, $j = 2, \ldots, n$, найдется такой элемент Y_j из $\mathscr{P}'$, $Y_j > X_j$, что $\mu'(Y_j) = A_j$, и найдутся такие элементы Y_1, Y'_1 из $\mathscr{P}'$, $Y_1, Y'_1 > X_1$, что $\mu'(Y_1) = A_1$, $\mu'(Y'_1) = B_1$. Положим $\mathscr{P}'_0 = \{Z_1, \ldots, Z_{n-1}, Z_n, Z'_n, Y_1, Y'_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Обозначим $\mu'_0 = \mu'|_{\mathscr{P}'_0}$.

По свойству зигзага, последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для μ'_0 в $\mathscr{P}^{N+1}$. По лемме 2.47, выполняется неравенство $n \leqslant l_{\mathscr{P}} - 2$. Так как частичная функция μ'_0 определена на наборах длины $N+1$, а $|\mathscr{P}'_0| = 2n + 2 \leqslant 2(l_{\mathscr{P}} - 2) + 2 = N$, то, согласно свойству наборов из множества $\mathscr{P}'$, найдется такой номер k, $k \in \{1, \ldots, N+1\}$, что выполняются следующие соотношения: для каждого j, $j = 1, \ldots, n$, выполняются равенства $Z_j[k] = M(Z_j)$, $Y_j[k] = M(Y_j)$, а также $Z'_n[k] = M(Z'_n)$ и $Y'_1[k] = M(Y'_1)$. Поэтому, по определению частичной функции μ', выполняются соотношения $\mu'_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N+1}) = \alpha_k$ для всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N+1})$ из $\mathscr{P}'_0$.

Рассмотрим селекторную функцию e_k^{N+1}, заданную на всех наборах из $\mathscr{P}^{N+1}$ равенством $e_k^{N+1}(x_1, \ldots, x_{N+1}) = x_k$. Положим $e_0 = e_k^{N+1}|_{\mathscr{P}'_0}$. Так как отображение e_0 совпадает с μ'_0, последовательность $X_1, \ldots, X_n$ является зигзагом для e_0. В силу теоремы 2.1 частичную функцию e_0 невозможно монотонно доопределить на элементах $X_1, \ldots, X_n$, что противоречит тому, что селекторная функция e_k^{N+1} монотонна на множестве $\mathscr{P}^{N+1}$. Следовательно, зигзага в $\mathscr{P}^{N+1}$ для функции μ'_0 не существует. Поэтому зигзага в $\mathscr{P}^{N+1}$ для функции μ' также не существует, и, согласно теореме 2.1, можно доопределить функцию μ' до монотонной функции μ на все множество $\mathscr{P}^{N+1}$. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$. Тогда класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ является конечно-порожденным.*

Утверждение следует из теоремы 2.2 и интерполяционной теоремы Бейкера и Пиксли [29] (см. также [30–32]).

§ 3. Критерий конечной порожденности класса всех функций, монотонных относительно множества ширины два

В этом параграфе приводится необходимое условие конечной порожденности классов всех функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. Это условие вместе с результатами предыдущего параграфа позволяет доказать критерий конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

3.1. Семейство предполных классов монотонных функций, не имеющих конечного базиса. В п. 3.1 описываются все частично упорядоченные множества ширины два с наименьшим и наибольшим элементами, которым соответствут предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса. Основной результат, сформулированный в теореме 3.1, опирается на леммы 3.2 и 3.3, в которых метод из работы Тардоша [47] обобщается для семейства $\mathbb{A}_2^{(2)}$ множеств ширины два специального вида.

Обозначим через $\mathbb{A}_2^{(2)}$ семейство всех множеств из $\mathbb{A}_2$ (частично упорядоченных множеств ширины два с наименьшим и наибольшим элементами), содержащих пару 2-несравнимых элементов. Всюду в п. 3.1 будем рассматривать некоторое множество $\mathscr{P}$ из семейства $\mathbb{A}_2^{(2)}$.

Пусть $\mathscr{R} = \{A, A', B, B', C_1, \ldots, C_n, C', D_1, \ldots, D_{2n+1}\}$ — некоторое T-множество ранга $n, n \geqslant 1$. Положим $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \setminus \{D_1, \ldots, D_{2n+1}\}$. Пусть g' — некоторое монотонное отображение $\mathscr{R}' \to \mathscr{P}$. Положим $g'(A) = a$, $g'(A') = a'$, $g'(B) = b$, $g'(B') = b'$, $g'(C_1) = c_1, \ldots, g'(C_n) = c_n$, $g'(C') = c'$.

Лемма 3.1. *Пусть g' — такое монотонное отображение $\mathscr{R}' \to \mathscr{P}$, что отображения $g'_1 = g'|_{\mathscr{R}' \setminus \{B'\}}$ и $g'_2 = g'|_{\mathscr{R}' \setminus \{B\}}$ доопределяются на $\mathscr{R}$ до монотонных отображений g_1 и g_2 соответственно. Монотонного доопределения отображения g' до отображения $g : \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ не существует тогда и только тогда, когда для элементов $a, a', b, b', c_1, \ldots, c_n, c'$ выполняются следующие условия:*

1) *элементы a и a' 2-несравнимы,*

2) *элементы v, v', b, b', где $\{v, v'\} = \overrightarrow{\sup}(a, a')$, образуют неполный квадрат,*

3) *для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, элементы w, w', c_i, c', где $\{w, w'\} = \overrightarrow{\sup}(v, v')$, образуют неполный квадрат.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что не существует монотонного доопределения отображения g' на множество $\mathscr{R}$. Из монотонности отображения g' следует, что выполняются неравенства $a, a' \leqslant b, b', c'$ и для каждого j, $j = 1, \ldots, n$, — неравенства $a, a' \leqslant c_j$. Покажем, что элементы a и a' несравнимы. Действительно, предположим, что эти элементы сравнимы, пусть, например, выполняется неравенство $a \geqslant a'$. Тогда определим отображение $g : \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ следующим образом: положим $g|_{\mathscr{R}'} = g'$, $g(D_k) = a$ для всех k, $k = 1, \ldots, 2n+1$. Очевидно, что отображение g является монотонным доопределением отображения g' на множество $\mathscr{R}$, что противоречит исходному предположению. Далее, покажем, что в $\mathscr{P}$ не существует $\sup(a, a')$. Действительно, в противном случае можно было бы построить монотонное доопределение отображения g' на множество $\mathscr{R}$ положив $g|_{\mathscr{R}'} = g'$, $g(D_k) = \sup(a, a')$ для всех k, $k = 1, \ldots, 2n+1$, что противоречит исходному предположению. Отсюда следует, что элементы a и a' имеют две минимальные верхние грани (обозначим их через v и v'), и, кроме того, выполняются неравенства $a, a' < b, b', c'$, а также $a, a' < c_j$ для всех j, $j = 1, \ldots, n$.

Легко видеть, что для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, элементы c_i и c' несравнимы. Поэтому в силу свойства (a) множеств ширины два все элементы $c_1, \ldots, c_n$ сравнимы между собой, и в множестве $\{c_1, \ldots, c_n\}$ существует единственный минимальный элемент, который обозначим через c. Заметим также, что ни для какого i, $i = 1, \ldots, n$, не существует $\inf(c_i, c')$.

Покажем, что выполняются неравенства $c > v, v'$ и $c' > v, v'$. Действительно, так как $c \in \{c_1, \ldots, c_n\}$, найдется такой нечетный номер r, $r \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, что выполняются неравенства $a, a' < g_1(D_r), g_2(D_r) < c, c'$. Так как v, v' — минимальные верхние грани элементов a, a', то из соотношений $a, a' < g_1(D_r), g_2(D_r)$ следует, что для каждого i, $i = 1, 2$, выполняется по крайней мере одно из неравенств $g_i(D_{k_0}) \geqslant v$ и $g_i(D_{k_0}) \geqslant v'$. Предположим, что найдется такой элемент v_1 из $\{v, v'\}$, что выполняются неравенства $g_1(D_r), g_2(D_r) \geqslant v_1$. Тогда обозначим B через D_0, B' — через D_{2n+2}, положим $g|_{\mathscr{R}'} = g'$, далее, для каждого k, $k = 0, \ldots, r-1$, положим $g(D_k) = g_1(D_k)$, для каждого k, $k = r+1, \ldots, 2n+2$, положим $g(D_k) = g_2(D_k)$, наконец, положим $g(D_r) = v_1$. Так определенное отображение g является монотонным доопределением g' на множество $\mathscr{R}$, что противоречит исходному предположению. Поэтому такого элемента v_1 не найдется, это значит, что найдется такая перестановка π на множестве $\{1, 2\}$, что выполняются неравенства

$g_{\pi(1)}(D_r) \geqslant v,\ \ g_{\pi(2)}(D_r) \geqslant v'$. Отсюда следует, что выполняется неравенство $c, c' > v, v'$.

Покажем, что элементы v, v', b, b' образуют неполный квадрат. Действительно, из неравенства $b, b' > a, a'$ следует, что выполняется по крайней мере одно из соотношений $b \geqslant v$ и $b \geqslant v'$ и по крайней мере одно из соотношений $b' \geqslant v$ и $b' \geqslant v'$. Будем считать, что $b \geqslant v$, случай $b \geqslant v'$ рассматривается аналогично. Неравенство $b' < v$ противоречит тому, что v — минимальная верхняя грань элементов a, a'. Предположим, что выполняется неравенство $b' \geqslant v$. Тогда можно построить монотонное доопределение g отображения g', положив $g(D_k) = v$ для всех $k,\ \ k = 1, \ldots, 2n+1$, что противоречит исходному предположению. Поэтому элементы b' и v несравнимы. Тогда элементы b' и v' сравнимы, а значит, выполняется неравенство $b' \geqslant v'$. Рассуждая так же, как для элементов b' и v, можно показать, что что элементы b и v' несравнимы.

Легко видеть, что не существует элемента z, для которого выполняются неравенства $v, v' < z < c, c'$. Действительно, в противном случае можно было бы построить монотонное доопределение g отображения g', положив $g(D_1) = v,\ \ g(D_{2n+1}) = v',\ \ g(D_k) = z$ для $k = 2, \ldots, 2n$. Отсюда следует, что элементы v, v' имеют две минимальные верхние грани (обозначим их через w, w'), а также, что элементы w, w', c, c' образуют неполный квадрат. Далее без ограничения общности будем считать, что выполняются неравенства $c \geqslant w$ и $c' \geqslant w'$.

Покажем, что ни для какого $i,\ \ i = 1, \ldots, n$, не существует элемента z, для которого выполняются неравенства $v, v' < z < c_i, c'$. Действительно, пусть для некоторого номера i существует такой элемент z. Тогда можно построить монотонное доопределение g отображения g', положив $g(D_k) = v$ для $k = 1, \ldots, 2i - 1,\ \ g(D_k) = v'$ для $k = 2i + 1, \ldots, 2n + 1$ и $g(D_{2i}) = z$. Отсюда следует, что для каждого номера $i,\ \ i = 1, \ldots, n$, элементы w, w', c_i, c' образуют квадрат. Таким образом, необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что условия 1–3 выполнены, и существует g — монотонное доопределение отображения g'. Будем считать (см. условие 2), что выполняются неравенства $b \geqslant v$ и $b' \geqslant v'$. Обозначим $g(D_i)$ через $d_i,\ \ i = 1, \ldots, 2n + 1$. Так как отображение g монотонно, то для каждого номера $i,\ \ i = 1, \ldots, 2n+1$, выполняются неравенства $d_i > a, a'$, и следовательно, выполняется по крайней мере одно из неравенств $d_i \geqslant v$ и $d_i \geqslant v'$. Кроме того, так как v, v' — минимальные верхние грани элементов a, a', то ни для какого d_i не может выполняться ни одно из неравенств $d_i < v,\ \ d_i < v'$. Покажем индукцией по i, что для всех $i,\ \ i = 1, \ldots, 2n+1$, выполняется неравенство $d_i \geqslant v$, а элементы d_i и v' несравнимы. Из неравенства $d_1 \geqslant v'$ следует, что выполняются соотношения $b \geqslant d_1 \geqslant v'$, что противоречит условию 2. Поэтому элементы d_1 и v' несравнимы, и выполняется неравенство $d_1 \geqslant v$. Из неравенства $d_2 \geqslant v'$ следует, что выполняются соотношения $v, v' < d_2 < c_1, c'$. Согласно условию 3, w, w', c, c' — неполный квадрат, но тогда последние соотношения невозможны в силу свойства (c) квадратов. Поэтому элементы d_2 и v' несравнимы и выполняется неравенство $d_2 \geqslant v$. Аналогичным образом для каждого $k,\ \ k = 1, \ldots, n$, можно показать, что если выполняется неравенство $d_{2k} \geqslant v$, а элементы d_{2k} и v' несравнимы, то выполняются соотношения $d_{2k+1}, d_{2k+2} \geqslant v$, элементы d_{2k+1} и v' несравнимы и элементы d_{2k+2} и v' несравнимы. Но тогда из неравенства $d_{2n+1} \geqslant v$ следуют соотношения $b' \geqslant d_{2n+1} \geqslant v$, что противоречит условию 2. Лемма доказана.

Пусть $n \geqslant 3$, $\mathcal{Q}_0 = \{A, A', B, B', C_1, \ldots, C_{n-2}, C', D_1, \ldots, D_{2n-3}\}$ — T-множество ранга $n - 2$, $\mathcal{Q}_0' = \{A, A', B, B', C_1, \ldots, C_{n-2}, C'\}$, $\mathcal{Q}_1' = \mathcal{Q}_0' \setminus \{B'\}$, $\mathcal{Q}_2' = \mathcal{Q}_0' \setminus \{B\}$. Обозначим через T набор элементов

$(a, a', b, b', c_1, \ldots, c_n, c') \in \mathscr{P}^{n+5}$. По этому набору определим n отображений $\mathscr{Q}'_0 \to \mathscr{P}$ следующим образом: для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, положим $f'_i(A) = a$, $f'(A') = a'$, $f'(B) = b$, $f'(B') = b'$, для каждого j, $j = 1, \ldots, n-2$, определим величину $k_{ij} \equiv i + j - 1 \pmod{n}$ и положим $f'_i(C_j) = c_{k_{ij}}$, наконец, положим $f'_i(C') = c'$.

Обозначим через R_0 множество таких наборов T из $\mathscr{P}^{n+5}$, что для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, отображения $f'_i|_{\mathscr{Q}'_1}$, $f'_i|_{\mathscr{Q}'_2}$ можно монотонно доопределить на $\mathscr{Q}_0$. Далее, для каждого j, $j = 1, \ldots, n$, обозначим через R_j множество таких наборов из R_0, что отображение f'_j можно монотонно доопределить на $\mathscr{Q}_0$. Наконец, обозначим через $R_{\mathscr{P},n}$ множество таких наборов T из R_0, что $T \in R_j$ для некоторого j из множества $\{1, \ldots, n\}$. Для каждого набора $T \in \mathscr{P}^{n+5}$ положим $k_T = |\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ T \in R_i\}|$.

Лемма 3.2. *Пусть $T \in R_{\mathscr{P},n}$, $n \geqslant 4$, тогда $k_T \geqslant n-2$.*

Доказательство. Если $T \in R_i$ для всех i, $i = 1, \ldots, n$, то $k_T = n$, и утверждение леммы доказано. Пусть $T \in R_0$, и найдется номер i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, такой что $T \notin R_i$. Без ограничения общности рассмотрим случай $i = 1$, т. е. отображение f'_1 нельзя монотонно доопределить на все $\mathscr{Q}_0$. По лемме 3.1, для элементов набора T выполнены следующие соотношения: элементы a, a' 2-несравнимы, положим $\{v, v'\} = \overrightarrow{\sup}(a, a')$, $\{w, w'\} = \overrightarrow{\sup}(v, v')$. Тогда элементы v, v', b, b' образуют неполный квадрат, без ограничения общности будем считать, что выполняются неравенства $b \geqslant v$, $b' \geqslant v'$. Кроме того, для каждого i, $i = 1, \ldots, n-2$, элементы w, w', c_i, c' образуют неполный квадрат, без ограничения общности будем считать, что выполняются неравенства $c' \geqslant w'$ и $c_i \geqslant w$. Наконец, из условия $T \in R_0$ следует, что выполняются неравенства $c_{n-1}, c_n > a, a'$.

Покажем, что выполняется неравенство $c_{n-1} > v, v'$. Рассмотрим отображение f'_2, пусть ψ_1 и ψ_2 — некоторые монотонные доопределения отображений $f'_2|_{\mathscr{Q}'_1}$ и $f'_2|_{\mathscr{Q}'_2}$ соответственно. Так как $c_{n-1} > a, a'$, то выполняется по крайней мере одно из неравенств $c_{n-1} \geqslant v$ и $c_{n-1} \geqslant v'$, а так как $\{v, v'\} = \overrightarrow{\sup}(a, a')$, то не выполняется ни одно из неравенств $c_{n-1} < v$, $c_{n-1} < v'$. Предположим, что найдется элемент $\widehat{v}$ из $\{v, v'\}$, не сравнимый с c_{n-1}. Предположим, что $\widehat{v} = v'$, тогда выполняется неравенство $c_{n-1} \geqslant v$. Обозначим через z значение $\psi_2(D_{2n-3})$. Так как отображение ψ_2 монотонно, то $z > a, a'$, следовательно, не могут выполняться неравенства $z < v$, $z < v'$. Поэтому выполняется по крайней мере одно из соотношений $z \geqslant v$, $z \geqslant v'$. Из неравенства $z \geqslant v$ следуют соотношения $b' \geqslant z \geqslant v$, что невозможно, а из неравенства $z \geqslant v'$ следуют неравенства $c_{n-1} \geqslant z \geqslant v'$, что противоречит предположению о том, что элементы c_{n-1} и v' несравнимы. Таким образом, равенство $\widehat{v} = v'$ выполняться не может. Значит элементы c_{n-1} и v несравнимы, и выполняется неравенство $c_{n-1} \geqslant v'$. Положим $\mathscr{R} = \{A, A', B, C_{n-2}, C_1, \ldots, C_{n-3}, C', D_1, \ldots, D_{2n-5}\}$, $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \setminus \{D_1, \ldots, D_{2n-5}\}$. Легко видеть, что $\mathscr{R}$ является T-множеством ранга $n-3$, и тогда отображение ψ_1 можно рассматривать как отображение $\mathscr{R}' \to \mathscr{P}$. По лемме 3.1, не существует монотонного доопределения отображения ψ_1 на $\mathscr{R}$, что противоречит условию $T \in R_0$. Таким образом, элемента $\widehat{v}$, $\widehat{v} \in \{v, v'\}$, не сравнимого с c_{n-1}, не найдется, поэтому выполняется неравенство $c_{n-1} > v, v'$. Аналогично доказывается, что выполняется неравенство $c_n > v, v'$.

Положим $\mathscr{P}^* = \{z \in \mathscr{P} \mid z \geqslant w'\}$. Из леммы 3.1 следует, что если $c_{n-1}, c_n \in \mathscr{P}^*$, то все отображения $f'_2, \ldots, f'_n$ можно доопределить до монотонных отображений на множество $\mathscr{Q}_0$, поэтому $T \in R_i$ для всех i, $i = 2, \ldots, n$, и тогда $k_T = n-1$. Если $c_{n-1} \in \mathscr{P}^*$, $c_n \notin \mathscr{P}^*$, то, по лемме 3.1, все отображения

$f'_2, \ldots, f'_{n-1}$ доопределяются до монотонных, а отображение f'_n не доопределяется, следовательно, $k_T = n-2$, аналогично, если $c_{n-1} \notin \mathscr{P}^*$, $c_n \in \mathscr{P}^*$, то $k_T = n-2$. Наконец, если $c_{n-1}, c_n \notin \mathscr{P}^*$, то, по лемме 3.1, ни одно из отображений $f'_2, \ldots, f'_n$ не доопределяется до монотонного, в этом случае $T \notin R_{\mathscr{P},n}$, что противоречит условию леммы.

Таким образом, если $T \in R_{\mathscr{P},n}$, то либо $T \in R_i$ для всех i, $i = 1, \ldots, n$, и тогда $k = n$, либо найдется номер i, такой что $T \notin R_i$, и в этом случае выполняется одно из равенств $k = n-2$ и $k = n-1$. Мы доказали это утверждения для $i = 1$, в других случаях рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Л е м м а 3.3. *Для любого $n \geqslant 3$ в классе $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_{2n})$, не сохраняющая множество $R_{\mathscr{P},n}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$\widetilde{\mathscr{P}}^{2n} = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}', \widetilde{\beta}, \widetilde{\beta}', \widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_n, \widetilde{\gamma}'\}$$

и определенную на нем частичную функцию $\widetilde{\varphi}^{2n}$ (см. § 1, п. 1.3). Положим

$$T_i = (\widetilde{\alpha}[i], \widetilde{\alpha}'[i], \widetilde{\beta}[i], \widetilde{\beta}'[i], \widetilde{\gamma}_1[i], \ldots, \widetilde{\gamma}_n[i], \widetilde{\gamma}'[i]), i = 1, \ldots, 2n,$$

$$T = (\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}), \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}'), \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}), \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}'), \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_1), \ldots, \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_n), \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}')).$$

Нетрудно показать, что $T \notin R_{\mathscr{P},n}$, а для каждого i, $i = 1, \ldots, 2n$, $T_i \in R_{\mathscr{P},n}$. Согласно лемме 1.4, существует монотонная функция φ^n, которая является доопределением функции $\widetilde{\varphi}^{2n}$ на множество $\mathscr{P}^{2n}$. Следовательно, в силу соотношения $\varphi^n(T_1, \ldots, T_n) = T$ функция φ^n не сохраняет множество $R_{\mathscr{P},n}$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $\mathscr{P} \in \mathbb{A}_2^{(2)}$. Тогда класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ не имеет конечного базиса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что если выполняется неравенство $n > 3$, то множество $R_{\mathscr{P},n}$ сохраняется всеми функциями из $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ от k переменных, где $k < \frac{n}{2}$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_k)$ — монотонная функция на множестве $\mathscr{P}$, и пусть $T_1, \ldots, T_k$ — некоторые наборы из $R_{\mathscr{P},n}$. Для каждого i, $i = 1, \ldots, k$, положим $r_i = | \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ T_i \notin R_j\} |$. По лемме 3.2, выполняются неравенства $r_i \leqslant 2$, $i = 1, \ldots, k$. Так как $n > 2k$, найдется такой номер j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, что для всех i, $i = 1, \ldots, k$, выполняется соотношение $T_i \in R_j$. По лемме 1.1, функция h сохраняет множество R_j. Поэтому $h(T_1, \ldots, T_k) \in R_j$, следовательно, $h(T_1, \ldots, T_k) \in R_{\mathscr{P},n}$.

Пусть $\mathscr{F}$ — конечное множество функций из класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$. Очевидно, что найдется такое число k, $k \geqslant 2$, что все функции из $\mathscr{F}$ будут существенно зависеть не более чем от k переменных. Выберем число n, $n > 2k$, и рассмотрим множество $R_{\mathscr{P},n}$. По доказанному выше, оно сохраняется всеми функциями из $\mathscr{F}$, но по лемме 3.3, найдется монотонная функция от $2n$ переменных, не сохраняющая $R_{\mathscr{P},n}$. Таким образом, никакое конечное множество монотонных функций не порождает класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$. Теорема доказана.

3.2. Необходимые и достаточные условия конечной порожденности класса $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть $\mathscr{P}$ — частично упорядоченное множество из семейства $\mathbb{A}_2$. Класс $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ всех функций, монотонных относительно $\mathscr{P}$, является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда для любых двух несравнимых элементов a_1, a_2 в $\mathscr{P}$ существует либо $\sup(a_1, a_2)$, либо $\sup^2(a_1, a_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что найдется пара несравнимых элементов a_1, a_2 из $\mathscr{P}$, таких что в $\mathscr{P}$ не существует ни $\sup(a_1, a_2)$, ни $\sup^2(a_1, a_2)$. Это означает, что элементы a_1 и a_2 2-несравнимы, т. е. $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(2)}$. И тогда, согласно теореме 3.1, класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ не имеет конечного базиса.

Достаточность. Пусть для любых двух несравнимых элементов a_1, a_2 в $\mathcal{P}$ существует либо $\sup(a_1, a_2)$, либо $\sup^2(a_1, a_2)$. Тогда $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$, и, согласно теореме 2.3, класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является конечно-порожденным. Теорема доказана.

Этот результат можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$. Класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда в нем содержится некоторая мажоритарная функция.*

Доказательство. Из интерполяционной теоремы Бейкера и Пиксли следует, что если замкнутый класс функций не имеет конечного базиса, то он не содержит мажоритарной функции. Если же класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является конечно-порожденным, то в силу теоремы 3.2 для любых двух несравнимых элементов a_1, a_2 в $\mathcal{P}$ существует либо $\sup(a_1, a_2)$, либо $\sup^2(a_1, a_2)$. Тогда $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2^{(1)}$, и поэтому, согласно теореме 2.2, в классе $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ содержится некоторая мажоритарная функция. Теорема доказана.

Из теоремы 3.2 следует алгоритмическая разрешимость задачи распознавания конечной порожденности предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

Теорема 3.4. *Для любого частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ ширины два с наименьшим и наибольшим элементами существует алгоритм распознавания конечной порожденности класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.*

Нетрудно показать, что этот алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Автор выражает благодарность А. Б. Угольникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Р. М. Колпакову за обсуждение результатов и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. 84 с.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. 536 с.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984. 568 с.
4. Буевич В. А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики. // Дискретная математика.— 1996.— Т. 8, вып. 4. — С. 11–36.
5. Гаврилов Г. П. Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. — 1984. — 23, № 1. — С. 3–26.
6. Гаврилов Г. П. Функциональные системы дискретной математики. — М.: изд-во МГУ, 1985.
7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004. 416 с.
8. Дудакова О. С. Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестник МГУ. Математика. Механика.— 2006.— №2. — С. 29–33.
9. Дудакова О. С. О свойствах предполных классов монотонных функций k-значной логики // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, 4–6 марта 2006 г.). — М.: МАКС Пресс, 2006. — С. 107–113.
10. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестник МГУ. Математика. Механика.— 2008.— №1. — С. 31–37.
11. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
12. Кузнецов А. В. О проблемых тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 145–146.
13. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. — 1966. — 5, № 2. — С. 5–24.
14. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3.— М.: Наука, 1960. — С. 49–60.

15. Марченков С. С. К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. — 1984. — 23, № 1. — С. 88–99.
16. Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. — М., ИПМ им. М. В. Келдыша, 1990. 148 с.
17. Марченков С. С. Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход. // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6.— М.: Наука, 1996. — С. 117–132.
18. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. 126 с.
19. Угольников А. Б. О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. — 1988. — № 7. — С. 79–88.
20. Угольников А. Б. Классы Поста. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. 64 с.
21. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 6. — С. 1152–1156.
22. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. — 1958. — 51. — С. 5–142.
23. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, I. — М.: Наука, 1974. — С. 9–66.
24. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001. 384 с.
25. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. 120 с.
26. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Анализ и синтез схем в многозначных логиках. Ч. 1. — М.: Изд-во МЭИ, 1989. 118 с.
27. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. — М.: Изд-во МЭИ, 1997. 142 с.
28. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — 127, № 1. — С. 44–46.
29. Baker K., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. — 1975. — 143. — P. 165–174.
30. Börner F., Haddad L. Maximal partial clones with no finite basis // Algebra Universalis. — 1988. — 40. — P. 453–476.
31. Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. Near unanimity functions and partial orderings // Proc. 14 ISMVL, Manitoba. — 1984. — P. 52–56.
32. Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. On algebraic properties of monotone clones // Order. — 1986. — 3. — P. 219–225.
33. Demetrovocs J., Rónyai L. Algebraic properties of crowns and fences // Preprint, MTA SZTAKI. — 1988.
34. Kuntzman J. Algebra de Boole. Bibliothegue de l'Ingenieur // Automaticien. Paris: Dunod. — 1965.
35. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Z. math Log. und Grundl. Math. — 1978. — 24. — P. 79–96.
36. Lau D. On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Process. Cybern. EIK. — 1991. — Bd. 23, 3. — P. 167–178.
37. Lo Czu Kai. Precompleteness of a set and rings of linear functions. Acta sc. natur Univ. Jilinensis. — 1963. — № 2.
38. Lo Czu Kai. On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition. Acta sc. natur Univ. Jilinensis. — 1963 — № 2.
39. Lo Czu Kai. Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics. Acta sc. natur Univ. Jilinensis. — 1964 — № 3.
40. Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua. Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics. Acta sc. natur Univ. Jilinensis. — 1964. — № 4.
41. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — 43, № 3. — P. 163–185.
42. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. — 1941. — 5.
43. Pöschel R., Kaluznin L. A. Funktionen- und Relationenalgebren. — Berlin, 1979.
44. Reschke M., Denecke K. Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E. L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Process. Cybern. EIK. — 1989. — Bd. 7. — P. 361–380.
45. Rosenberg I. G. La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble finil. Comptes Rendus, de l'Academ. Paris, 260. — 1965. — P. 3817–3819.
46. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. CSAV. MPV. — 1970. — 80. — P. 3–93.
47. Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — 3. — P. 211–218.

Поступило в редакцию 31 VII 2007