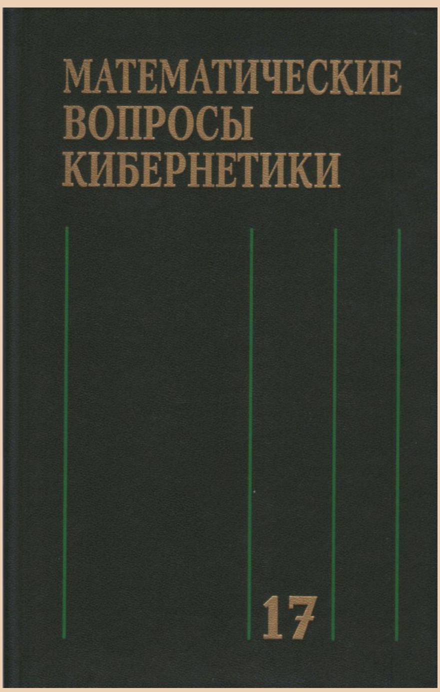

Д. И. Ермакова

О сложности реализации системы констант P_3 в некоторых базисах

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ КОНСТАНТ P_3 В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ

Д. И. ЕРМАКОВА

(МОСКВА)

§ 1. Формулировка основной теоремы

Найдено точное значение величины, показывающей, какого наименьшего количества функциональных элементов достаточно для реализации системы констант трехзначной логики в любом базисе, состоящем из функций от не более чем двух переменных.

В трехзначной логике рассматривается множество $\mathscr{B}_3$ всех *базисов*, т. е. функционально полных систем в P_3. Над каждым базисом из $\mathscr{B}_3$ строятся все возможные схемы из функциональных элементов (здесь используется определение схемы из функциональных элементов, данное в [2]), каждая из которых *реализует систему всех констант* из P_3, т. е. имеет три выхода, соответствующие трем различным константам. Под *сложностью схемы* понимается число входящих в нее элементов. Среди всех схем над некоторым базисом B, каждая из которых реализует систему всех констант из P_3, выбирается схема наименьшей сложности. Сложность этой схемы называется *сложностью* $\mu(B)$ *системы всех констант* над базисом B. Величина

$$\mu_3 = \max_{B\in\mathscr{B}_3} \mu(B)$$

равна наименьшей сложности, достаточной для реализации системы всех констант в любом базисе из $\mathscr{B}_3$.

Заметим, что в двузначной логике P_2 значение аналогично определяемой величины μ_2, т. е. наименьшей сложности, достаточной для реализации системы всех констант в любом базисе из $\mathscr{B}_2$, равно трем. Этот факт вытекает из доказательства теоремы о полноте в P_2 (см. [2]).

В трехзначной логике дело обстоит сложнее. Непосредственно из доказательства теоремы о полноте в P_3 (см. [1]) вытекает лишь грубая оценка:

$$\mu_3 = \max_{B\in\mathscr{B}_3} \mu(B) \leqslant 16.$$

В настоящей работе изучается величина μ_3^2, отличающаяся от μ_3 тем, что базисы берутся не из $\mathscr{B}_3$, а из его подмножества $\mathscr{B}_3^2$, состоящего из функций, зависящих не более чем от двух переменных. Иначе говоря, μ_3^2 определяется равенством

$$\mu_3^2 = \max_{B\in\mathscr{B}_3^2} \mu(B).$$

Основным результатом данной работы является

Т е о р е м а. *Справедливо равенство* $\mu_3^2 = 9$.

Предлагаемое доказательство теоремы состоит из двух частей: сначала доказывается нижняя оценка, потом верхняя. При доказательстве нижней оценки предъявляется конкретный базис из не более, чем двуместных функций, в котором невозможно реализовать систему всех констант из P_3 со сложностью меньше девяти. Доказательство верхней оценки осуществляется перебором, в котором разбиение на случаи зависит от того, каким свойствам удовлетворяют функции базиса. В каждом случае предлагается схема (или просто способ ее построения), реализующая систему всех констант P_3 со сложностью не более девяти. При доказательстве теоремы важную роль играют некоторые предполные классы, введенные С. В. Яблонским (см. [1]).

§ 2. Дополнительные обозначения

1. *Диагональю* $\operatorname{diag} f$ n-местной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, будем называть функцию одной переменной, полученную из функции f отождествлением всех переменных: $\operatorname{diag} f(\widetilde{x}) = f(x, \ldots, x)$.

2. Функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$ из P_3, задаваемую таблицей

$x_2 \setminus x_1$	0	1	2
0	$\alpha_{0,0}$	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$
1	$\alpha_{0,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$
2	$\alpha_{0,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$

,

будем записывать в сокращенном виде следующим образом:

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} \\ \alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{i,j} = f(i, j)$, $i, j = 0, 1, 2$.

3. Функцию одной переменной из P_3, задаваемую следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_0, & \text{при } x = 0; \\ \alpha_1, & \text{при } x = 1; \\ \alpha_2, & \text{при } x = 2, \end{cases}$$

будем записывать в виде столбца

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

4. Для каждой константы a, $a \in E_3$, введем две функции, определяемые равенствами

$$\nu^a(x) = x + a (\operatorname{mod} 3), \quad \lambda^a(x) = -x + a (\operatorname{mod} 3),$$

первую из которых назовем *функцией сдвига* на элемент a.

5. Через $\mathscr{B}_k$ будем обозначать множество всех базисов k-значной логики.

Все остальные определения и обозначения, использующиеся в данной статье, можно найти в [1] или [2].

§ 3. Вспомогательные утверждения

Доказательству теоремы предпошлем четыре леммы, которые относятся к произвольным базисам (а не только к базисам, состоящим из функций от не более, чем двух переменных).

Лемма 1. *Если некоторая константа из P_k реализуется схемой сложности L над базисом B, $B \in \mathscr{B}_k$, то система всех констант из P_k может быть реализована над базисом B схемой сложности $L+k-1$.*

Доказательство. Пусть некоторая схема реализует константу α_0 над базисом B со сложностью L. На первом шаге возьмем функцию ψ_1 из базиса, которая не сохраняет константу α_0 (такая функция обязательно найдется в силу полноты базиса B). Функция ψ_1 на наборе $\widetilde{\alpha}_0$, состоящем только из чисел α_0, принимает значение α_1, не равное α_0. Значит, вторую константу α_1 можно получить с помощью равенства: $\psi_1(\widetilde{\alpha}_0) = \alpha_1$, причем сложность схемы увеличится на один элемент, соответствующий функции ψ_1.

На втором шаге возьмем ту функцию ψ_2 из базиса, которая не сохраняет подмножество $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ (такая функция существует в силу полноты базиса B). Для этой функции существует набор $\widetilde{\alpha}_1$ чисел из множества $\{\alpha_0, \alpha_1\}$, на котором функция ψ_2 принимает значение α_2, отличное от α_0 и от α_1. Следовательно, третью константу α_2 можно получить с помощью равенства: $\psi_2(\widetilde{\alpha}_1) = \alpha_2$, причем сложность схемы увеличится на один элемент, соответствующий функции ψ_2. И так далее.

На $k-1$-м шаге возьмем функцию ψ_{k-1}, не сохраняющую множество $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}\}$ (такая функция существует в силу полноты базиса B). Для этой функции существует набор $\widetilde{\alpha}_{k-2}$ чисел из множества $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}\}$, на котором функция ψ_{k-1} принимает значение α_{k-1}, отличное и от α_0, и от α_1, ..., и от α_{k-2}. Следовательно, k-ю константу α_{k-1} можно получить с помощью равенства: $\psi_{k-1}(\widetilde{\alpha}_{k-2}) = \alpha_{k-1}$, причем сложность схемы увеличится на один элемент, соответствующий функции ψ_{k-1}.

В результате этого построения получены все k констант, сложность схемы увеличилась на $k-1$ элемент, и, значит, ее сложность стала равна $L+k-1$.

Лемма 1 доказана.

Всюду далее будем прекращать рассуждение всякий раз, когда получена хотя бы одна константа, подразумевая под этим, что на основании леммы 1 остальные константы могут быть получены с увеличением сложности схемы не более, чем на два (так как рассматривается трехзначная логика). Аналогично, схемы на рисунках будем строить до получения одной константы, однако сложность будем выписывать с учетом реализации всех трех констант.

Лемма 2. *Если в базисе B, $B \in \mathscr{B}_3$, существует такая функция, что ее диагональ выпускает хотя бы одно значение, то систему всех констант P_3 можно реализовать над базисом B со сложностью не более семи.*

Доказательство. Обозначим через φ диагональ функции, о которой идет речь в условии леммы. Для функции φ, отличной от константы, и, следовательно, выпускающей ровно одно значение, возможны три случая.

1. Функция φ сохраняет одну константу.
2. Функция φ не сохраняет ни одной константы.
3. Функция φ сохраняет две константы.

Рассмотрим каждый случай по отдельности.

Случай 1. Рассматриваются все функции одной переменной, выпускающие ровно одно значение и сохраняющие ровно одну константу. В соответствии с табл. 1, таких функций ровно шесть.

Таблица 1

Все одноместные функции в P_3.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

S_{14}	S_{15}	S_{16}	S_{17}	S_{18}	S_{19}	S_{20}	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}	S_{25}	S_{26}	S_{27}
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Рассмотрим любую из этих функций и обозначим ее через φ, а константу, которую сохраняет функция φ, через α ($\alpha \in E_3$). Тогда выполнено равенство $\varphi(\varphi(x)) = \alpha$. Отсюда и из леммы 1 получаем, что сложность системы всех констант не превосходит четырех. Случай 1 рассмотрен.

Случай 2. Рассматриваются все функции одной переменной, выпускающие одно значение и не сохраняющие ни одной константы. В соответствии с табл. 1, таких функций ровно шесть. Заметим, что можно ограничиться рассмотрением только одной из этих функций, скажем,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, остальные пять функций двойственны функции φ, т. е. получаются из нее двойственными преобразованиями относительно пяти не тождественных перестановок множества E_3. Например, функция

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

двойственна функции φ относительно перестановки $-x$, что вытекает из следующего равенства: $\varphi(-x) = -\tau(x)$. Значит, если мы, исходя из функции φ, путем суперпозиции с некоторыми функциями получим константу, то, исходя из некой функции, двойственной функции φ, и совершая над ней преобразования, двойственные предыдущим, получим функцию, двойственную константе, т. е. также константу.

Переходим к рассмотрению случая. В базисе B существует функция ψ, не сохраняющая подмножество $\{0, 1\}$. Иначе говоря, существует набор $\widetilde{\alpha}$, состоящий из нулей и единиц, на котором функция ψ принимает значение 2. Построим функцию

$$\chi(x) = \psi(\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_n(x)),$$

где при каждом i

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } \alpha_i = 0; \\ \varphi(\varphi(x)), & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\chi = \begin{pmatrix} \sigma \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где σ — некоторое значение из множества E_3.

Если $\sigma(x) = 2$, то $\chi(x) = 2$. Если $\sigma = 1$, то $\varphi(\chi(x)) = 0$. Схема, соответствующая случаям $\sigma = 2$ и $\sigma = 1$, показана на рис. 1.

Если $\sigma = 0$, то в базисе имеется функция ω, не принадлежащая классу $\mathrm{U}^3_{\varepsilon_{12},\varepsilon_0}$ (см. [1]). Поэтому существуют такие наборы $\widetilde{\beta}^0, \widetilde{\beta}^1$, что

$$\beta^0_{j_1} = \beta^0_{j_2} = \ldots = \beta^0_{j_l} = 0,$$

$$\beta^0_j \neq 0 \text{ при } j \neq j_p \ (p = 1, \ldots, l),$$

$$\omega(\widetilde{\beta}^0) = 0,$$

$$\beta^1_{j_1} = \beta^1_{j_2} = \ldots = \beta^1_{j_l} = 0,$$

$$\beta^1_j \neq 0 \text{ при } j \neq j_p \ (p = 1, \ldots, l),$$

$$\omega(\widetilde{\beta}^1) = \beta_1 \neq 0.$$

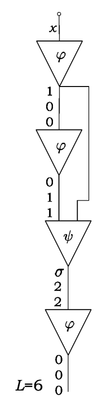

Рис. 1

Рассмотрим набор $\widetilde{\gamma}$ такой, что $\gamma_{j_p} = 1$ при $p = 1, \ldots, l$ и $\gamma_j = 0$ при $j \neq j_p$ $(p = 1, \ldots, l)$. Пусть $\gamma = \omega(\widetilde{\gamma})$. Для значения γ возможны два случая.

Случай 2. 1: $\gamma = 0$. Рассмотрим функции

$$\zeta^0_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \beta^0_i \\ \beta^0_i \end{pmatrix} \qquad \text{при } i = 1, \ldots, n.$$

При этом для каждого i либо $\zeta^0_i(x) = \varphi(\varphi(x))$, либо $\zeta^0_i(x) = \varphi(x)$, либо $\zeta^0_i(x) = \chi(x)$. Подставляя функции ζ^0_i в ω, получаем функцию равную нулю:

$$\omega(\zeta^0_1(x), \zeta^0_2(x), \ldots, \zeta^0_n(x)) = 0.$$

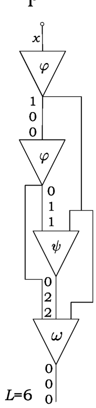

Рис. 2

Схема для этого случая показана на рис. 2, причем элемент, соответствующий n-местной функции ω, изображен как трехвходовый, поскольку на его входы подаются три (а не n) различные функции.

Случай 2. 2: $\gamma \neq 0$. Рассмотрим функции

$$\zeta^1_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \beta^1_i \\ \beta^1_i \end{pmatrix} \qquad \text{при } i = 1, \ldots, n.$$

При этом для каждого i либо $\zeta^1_i(x) = \varphi(\varphi(x))$, либо $\zeta^1_i(x) = \varphi(x)$, либо $\zeta^1_i(x) = \chi(x)$. Подставляя функции ζ^1_i в ω, получаем функцию

$$\omega(\zeta^1_1(x), \zeta^1_2(x), \ldots, \zeta^1_n(x)),$$

которая принимает значения, не равные нулю. Тогда получить константу 0 можно следующим образом:

$$\varphi(\omega(\zeta_1^1(x), \zeta_2^1(x), \ldots, (x)_n^1(x))) = 0.$$

Схема для этого случая получается из схемы на рис. 2 добавлением нового элемента, соответствующего функции φ, на вход которого подается выход элемента, соответствующего функции ω. Сложность новой схемы возрастет на единицу, т. е. станет равна семи. Случай 2 рассмотрен.

Случай 3. Рассматриваются все функции одной переменной, выпускающие одно значение и сохраняющие две константы. В соответствии с табл. 1, таких функций ровно шесть. Рассмотрим одну из этих функций

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как остальные пять функций двойственны функции φ, то достаточно рассмотреть только этот случай.

В базисе B существует функция, не сохраняющая константу 2, обозначим ее диагональ через ψ. В силу случаев 1 и 2, при рассмотрении функции ψ можно ограничиться шестью возможностями:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nu^1,\ \nu^2,\ \lambda^0,\ \lambda^2.$$

В первых пяти случаях одну константу можно получить, используя только элементы, соответствующие функциям ψ и φ. Заметим сразу, что сложность в каждом из пяти случаев не будет превышать шести. Это будет следовать из равенств, полученных в каждом из пяти случаев, поэтому изображения схем можно избежать. В шестом случае обойтись функциями ψ и φ не удается, поэтому он потребует более детального рассмотрения.

Случай 3. 1:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем равенство: $\psi(\varphi(x)) = 0$. Случай 3.1 рассмотрен.

Случай 3. 2:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем равенство: $\varphi(\psi(x)) = 0$. Случай 3.2 рассмотрен.

Случай 3. 3: $\psi(x) = \nu^1(x)$. Имеем равенство:

$$\psi(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(\psi(\varphi(x))) = 0$. Случай 3.3 рассмотрен.

Случай 3. 4: $\psi(x) = \nu^2(x)$. Имеем равенство:

$$\psi(\psi(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(\psi(\psi(\varphi(x)))) = 0$. Случай 3.4 рассмотрен.

С л у ч а й 3. 5: $\psi(x)=\lambda^0(x)$. Имеем равенство:

$$\psi(\varphi)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(\psi(\varphi(x)))=0$. Случай 3.5 рассмотрен.

С л у ч а й 3. 6: $\psi(x)=\lambda^2(x)$. Имеем равенство:

$$\psi(\varphi)=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

В базисе B существует функция χ, которая не сохраняет множество $\{0,2\}$. Иначе говоря, существует такой набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, состоящий из нулей и двоек, что на нем функция χ принимает значение 1.
Рассмотрим функцию

$$\tau(x)=\chi(\xi_1(x),\xi_2(x),\ldots,\xi_n(x)),$$

где при каждом i

$$\xi_i(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } \alpha_i=0;\\ \psi(\varphi(x)), & \text{если } \alpha_i=2.\end{cases}$$

Тогда

$$\tau(x)=\begin{pmatrix}1\\1\\\sigma\end{pmatrix},$$

где σ — некоторое значение из множества E_3.
Если $\sigma=1$, то $\tau(x)=1$. Если $\sigma=0$, то $\varphi(\tau(x))=0$. Если $\sigma=2$, то

$$\psi(\tau)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \varphi(\psi(\tau(x)))=0.$$

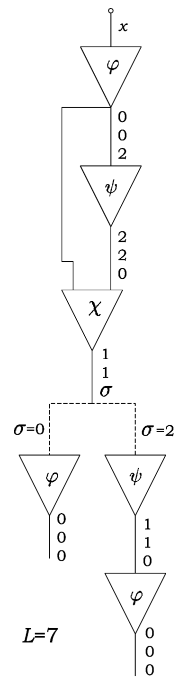

Рис. 3

Соответствующая схема показана на рис. 3, причем штриховое соединение элементов обозначает один из возможных случаев соединения, и элемент соответствующей n-местной функции χ изображен как двухвходовый (поскольку на его входы подаются две различные функции).

Случай 3.6 рассмотрен, а с ним и доказана лемма 2.

Л е м м а 3. *Пусть для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из P_3 верны следующие два утверждения:*

1) *существует такое число a, $a\in E_3$, что диагональ функции f является функцией сдвига на a, т. е.* $\mathrm{diag}\, f=\nu^a$*;*

2) *функция f не является самодвойственной, т. е. $f\notin S^3_{x+1}$.*

Тогда существует такой набор функций $\widetilde{h}(x)=(h_1(x),\ldots,h_n(x))$, $h_i\in\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$, $i=1,\ldots,n$, что функция $f(\widetilde{h}(x))$ либо для некоторого b, $b\in E_3$, равна функции $\lambda^b(x)$, либо выпускает хотя бы одно значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f не является самодвойственной, поэтому существует такой набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, что выполнено неравенство (здесь и далее знак "+" обозначает сложение по модулю два)

$$f(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n+1)\neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+1,$$

следовательно,

$$f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{1})=f(\widetilde{\alpha}), \quad \text{либо} \quad f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{1})=f(\widetilde{\alpha})+2.$$

Рассмотрим набор функций $\widetilde{h}(x)=(h_1(x),\ldots,h_n(x))$, где $h_i=\nu^{\alpha_i}$ при каждом i. Если $f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{1})=f(\widetilde{\alpha})$, то

$$f(\widetilde{h}(x))=\begin{pmatrix} f(\widetilde{\alpha}) \\ f(\widetilde{\alpha}) \\ f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{2}) \end{pmatrix},$$

а если $f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{1})=f(\widetilde{\alpha})+2$, то

$$f(\widetilde{h}(x))=\begin{pmatrix} f(\widetilde{\alpha}) \\ f(\widetilde{\alpha})+2 \\ f(\widetilde{\alpha}+\widetilde{2}) \end{pmatrix}.$$

Видно, что ни в одном из этих двух вариантов функция $f(\widetilde{h}(x))$ не может быть ни одной из множества функций $\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$. Значит, либо функция $f(\widetilde{h}(x))$ выпускает хотя бы одно значение, либо равна одной из множества функций $\{\lambda^0,\lambda^1,\lambda^2\}$, ничего другого быть не может (в соответствии с табл. 1). Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Пусть для функций $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ из P_3 выполнены следующие два утверждения:*

1) *существует такое число a, $a\neq 0$, $a\in E_3$, что диагональ функции f является функцией сдвига на a, т. е. $\operatorname{diag} f=\nu^a$;*

2) *существует такой набор функций $(h_1(x),\ldots,h_n(x))$, где $h_i\in\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$, $i=1,\ldots,n$, что функция $g(h_1(x),\ldots,h_n(x))$ выпускает хотя бы одно значение.*

Тогда систему всех констант P_3 можно реализовать схемой сложности не более восьми, содержащей только элементы, соответствующие функциям f и g.

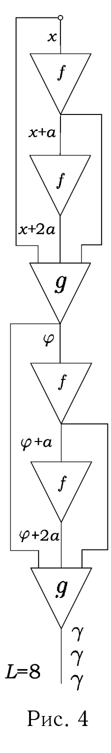

Рис. 4

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\varphi(x)$ функцию $g(h_1(x),\ldots,h_n(x))$. Можно считать, что функция φ выпускает ровно одно значение, иначе, если она выпускает два значения, то функция φ и есть константа. Следовательно существуют два числа α и β, принадлежащие E_3, на которых функция φ принимает одинаковое значение γ, т.е. $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=\gamma$. Рассмотрим функции $\varphi,\varphi+1,\varphi+2$, причем последние две могут быть получены при помощи функции f, а именно: $f(\varphi(x))=\varphi(x)+a$, $f(\varphi(x)+a)=\varphi(x)+2a$. Каждая из функций $\varphi(x),\varphi(x)+1,\varphi(x)+2$ принимает по два значения. Возьмем ту, значения которой совпадают с числами α,β, и назовем ее ψ. Тогда верно равенство: $\varphi(\psi(x))=\gamma$, т. е. получена одна из констант, причем со сложностью не более шести. Доказательство иллюстрирует схема, показанная на рис. 4. Лемма 4 доказана.

§ 4. Доказательство нижней оценки

Будем доказывать неравенство $\mu_3^2\geqslant 9$. Для этого рассмотрим множество функций

$$B=\{\psi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi=\nu^1\}.$$

Докажем, что множество B образует базис в P_3, т. е. целиком не содержится ни в одном из восемнадцати предполных классов трехзначной логики (см. [1]).

Заметим, что функция φ принадлежит только двум классам: $T^3_{N,2}$, L^3, а остальным шестнадцати — нет (см. табл. 34 [1]). Таким образом, для полноты системы функций B достаточно показать, что функция ψ не принадлежит ни одному из двух названных классов. Функция ψ не входит в класс $T^3_{N,2}$, так как принимает все три значения и существенно зависит от двух переменных. Функция ψ также не входит в класс L^3, так как функция

$$\psi(0, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не принадлежит классу L^3.

Теперь докажем, что систему всех констант нельзя реализовать схемой сложности меньше девяти. Допустим, что система всех констант реализована некоторой схемой сложности, не превосходящей восьми, причем эта схема минимальная.

Заметим, что если константа 0 реализуется на выходе некоторого функционального элемента, то, во-первых, этому элементу соответствует функция φ (иначе константа 0 уже должна быть реализована, что противоречит минимальности схемы), а, во-вторых, на вход этого элемента должна подаваться константа 2. Имеется две возможности для элемента, на выходе которого реализуется константа 2.

1. Константа 2 реализуется на выходе элемента, соответствующего функции φ.

2. Константа 2 реализуется на выходе элемента, соответствующего функции ψ.

Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Случай 1. В этом случае на вход элемента φ подается константа 1. Значит, константу 1 требуется реализовать со сложностью не больше шести. Докажем, что это невозможно. Константа 1 может быть реализована только на выходе элемента, соответствующего функции ψ (иначе, если константа 1 реализуется на выходе элемента, соответствующего функции φ, то на его вход подается константа 0, что противоречит минимальности схемы). Причем, на первый вход должен подаваться столбец α_{01} из нулей и единиц, а на второй — столбец α_{12} из единиц и двоек. Значит, используя не более пяти элементов, требуется реализовать столбцы α_{01} и α_{12}.

На рис. 5 показаны некоторые неприводимые схемы из трех элементов над базисом B. Эти схемы не являются всевозможными соединениями трех элементов, но для доказательства их достаточно, так как для каждой схемы S сложности не более трех, не изображенной на рис. 5, найдется такая схема, изображенная на рис. 5, что множество столбцов, реализованных на ее выходах, содержит множество столбцов, реализованных на выходах схемы S.

Заметим, что на рис. 5 нет ни одного элемента, на выходе которого реализуется столбец из нулей и единиц или столбец из единиц и двоек. Следовательно, присоединив некоторым образом два элемента к некоторой схеме на рис. 5, на выходах этих элементов должны реализоваться столбцы α_{01} и α_{12}.

Если столбец α_{12} реализуется на выходе элемента, соответствующего функции ψ, то на второй его вход подается некоторый столбец из единиц и двоек. Такой вариант соединения нам не подходит, так как ни одна схема на рис. 5 не реализует столбец из единиц и двоек, значит нужно реализовать сначала его, а тогда у нас не останется элементов на реализацию столбца α_{01}.

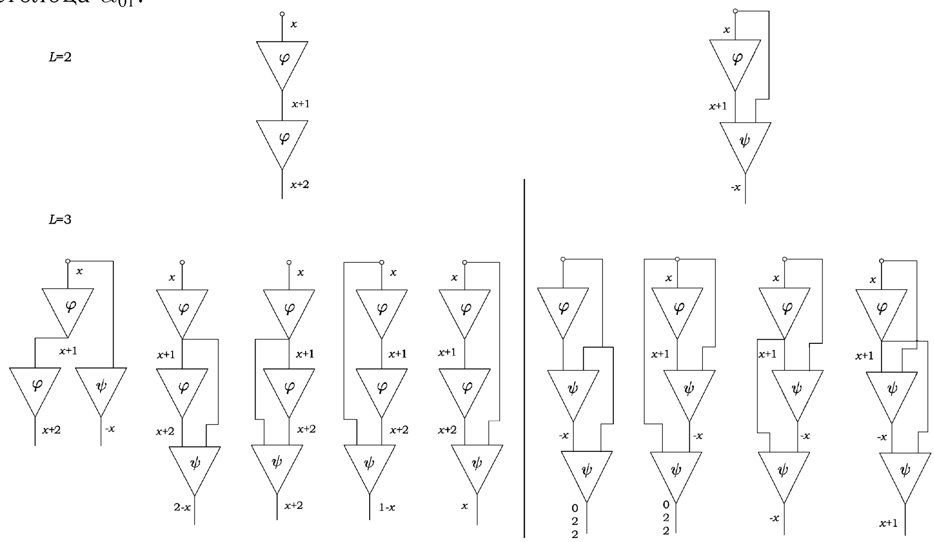

Рис. 5

Если столбец α_{12} реализуется на выходе элемента, соответствующего функции φ, то на его вход подается некоторый столбец α_{01}^1 из нулей и единиц. Но столбец α_{01}^1 не может быть равен столбцу α_{01}, так как столбцы α_{01} и α_{12} не могут быть связаны равенством $\alpha_{01}+1=\alpha_{12}$. Справедливость последнего факта следует из табл. 2, в которой выписаны все возможные наборы для функции ψ, на которых она принимает значение 1. Значит сначала нам нужно реализовать столбец α_{01}^1, а потом — α_{01}. Тогда мы потратим три, а не два элемента на реализацию столбцов α_{01} и α_{12}. Противоречие. Случай 1 рассмотрен.

Таблица 2

x_1	x_2	$\psi(x_1,x_2)$
0	1	1
0	2	1
1	1	1

Случай 2. В рассматриваемом случае на выходе элемента, соответствующего функции ψ, константа 2 реализуется схемой S, сложность которой не больше семи. Имеется две возможности: либо существует некоторая подсхема схемы S, не совпадающая с ней и реализующая константу 1, либо константа 2 реализуется со сложностью не более шести. В первом случае сложность подсхемы, реализующей константу 1, не больше шести, что невозможно в силу случая 1. Во втором случае, исходя из того, что константа 2 реализуется на выходе элемента, соответствующего функции ψ, получаем, что на оба входа этого элемента подаются разные столбцы, состоящие из единиц и двоек. Значит, со сложностью пять надо реализовать два этих столбца. Следовательно, со сложностью четыре надо реализовать хотя бы один из них, обозначим его через α_{12}. Если столбец α_{12} реализуется на выходе элемента, соответствующего функции φ, то на его вход подается столбец из нулей и единиц, который надо получить со сложностью не более трех. Если столбец α_{12} реализуется на выходе элемента, соответствующего функции ψ, то на его первый вход подается столбец из двоек и единиц, который надо получить также со сложностью не более трех. Из рис. 5 видно, что ни одна схема сложности три не реализует ни столбец из нулей и единиц, ни столбец из двоек и единиц. Случай 2 рассмотрен.

Нижняя оценка доказана.

§ 5. Доказательство верхней оценки

Будем доказывать неравенство $\mu_3^2 \leqslant 9$. Рассмотрим произвольный базис B, $B \in \mathscr{B}_3^2$. Для базиса B возможны два случая.

1. Найдется функция, диагональ которой выпускает по крайней мере одно значение.

2. Диагональ любой функции принимает все значения, т. е. является линейной функцией, но не константой.

Случай 1. В силу леммы 2 систему всех констант в этом случае можно получить со сложностью не более семи.

Случай 2. Этот случай разбивается еще на три случая, в зависимости от вида диагоналей несамодвойственных функций базиса; такие обязательно найдутся в силу полноты системы B.

2.1. Найдется такая несамодвойственная функция f с диагональю φ и число a, $a \neq 0$, что $\varphi = \nu^a$.

2.2. Найдется такая несамодвойственная функция f с диагональю φ и число a, что $\varphi = \lambda^a$, и не найдется ни одной несамодвойственной функции с диагональю ν^1 или ν^2.

2.3. У любой несамодвойственной функции f диагональ равна функции ν^0.

Рассмотрим эти три случая по отдельности.

Случай 2. 1. Имеется функция существенно зависящая о двух переменных f, не принадлежащая классу S_{x+1}^3 (иначе, если f существенно зависит от одной переменной, то $f = \nu_a \in S_{x+1}^3$), и ее диагональ φ равна функции ν^a. Для простоты изложения будем пока считать, что $a = 1$. Согласно лемме 3, существует такая подстановка линейных функций

$$\widetilde{h}(x) = (h_1(x), h_2(x)), \quad h_i \in \{\nu^0, \nu^1, \nu^2\} \text{ при } i = 1, 2,$$

что функция $f(\widetilde{h}(x))$ является либо функцией, выпускающей по крайней мере одно значение, и тогда константы получаются со сложностью восемь по лемме 4, либо является линейной несамодвойственной функцией, т. е. для некоторого числа b ($b \in E_3$) верно равенство:

$$f(\widetilde{h}(x)) = \lambda^b(x).$$

Последний вариант, когда функция $f(\widetilde{h}(x))$ есть линейная несамодвойственная, рассмотрим подробнее. Будем перебирать все возможные варианты для функции f. Чтобы свести рассмотрение случаев к минимуму, заметим, что любую из рассматриваемых подстановок линейных функции можно свести к подстановке $\widetilde{h}(x) = (\nu^1(x), \nu^0(x))$. Иначе говоря, если для некоторой подстановки линейных функций $\widetilde{h}'(x) = (h_1'(x), h_2'(x))$, $\widetilde{h}'(x) \neq \widetilde{h}(x)$, $h_i' \in \{\nu^0, \nu^1, \nu^2\}$, функция $f(\widetilde{h}'(x))$ является линейной несамодвойственной, то функция $f(\widetilde{h}(x))$ также является линейной несамодвойственной и может быть получена с той же (или меньшей) сложностью, что и функция $f(\widetilde{h}'(x))$. Докажем это утверждение.

Если $(h_1'(x), h_2'(x)) = (\nu^0(x), \nu^1(x))$, то рассмотрим вместо функции f функцию f', которая получается из f перестановкой местами двух ее переменных. Функция $f'(\widetilde{h}'(x))$, очевидно, равна функции $f(\widetilde{h}(x))$ и имеет такую же сложность.

Если $(h_1'(x), h_2'(x)) = (\nu^0(x), \nu^2(x))$ или $(h_1'(x), h_2'(x)) = (\nu^2(x), \nu^1(x))$, то рассмотрим подстановку функций $\widetilde{h}(x) = (h_1'(x) + 1, h_2'(x) + 1)$ или

$\widetilde{h}(x) = (h'_1(x) + 2, h'_2(x) + 2)$ соответственно. Тогда $\widetilde{h}(x) = (\nu^1, \nu^0)$. Если функция $f(h'_1(x), h'_2(x))$ является линейной несамодвойственной, то функция $f(\widetilde{h}(x))$ также являются линейной несамодвойственной.

Допускаем также, что при всех других подстановках линейных функций из множества $\{\nu^0, \nu^1, \nu^2\}$ в функцию f получаются только линейные функции, не равные константе (иначе строим константы по лемме 4).

Учитывая вышесказанное, приведем все возможные варианты для функции f. Здесь и в дальнейшем на месте звездочек в таблице может находиться любой элемент множества E_3:

$$1)\begin{pmatrix}1&0&*\\1&2&2\\1&*&0\end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&2\\1&1&0\end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\1&0&0\end{pmatrix},\quad 4)\begin{pmatrix}1&0&*\\0&2&2\\1&*&0\end{pmatrix},$$

$$5)\begin{pmatrix}1&1&0\\*&2&0\\2&*&0\end{pmatrix},\quad 6)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&0\\2&0&0\end{pmatrix},\quad 7)\begin{pmatrix}1&1&2\\*&2&0\\2&*&0\end{pmatrix},\quad 8)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$9)\begin{pmatrix}1&2&*\\*&2&1\\0&2&0\end{pmatrix},\quad 10)\begin{pmatrix}1&2&*\\*&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что двойственными преобразованиями относительно перестановки ν^1 данные функции переводятся друг в друга по схеме, в которой под каждым номером подразумевается функция, соответствующая этому номеру

$$\begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ 1 \to 9 \to 5 \to 1, \\ 6 \to 3 \to 8 \to 6, \\ 4 \to 10 \to 7 \to 4. \end{array}$$

Отсюда следует, что можно ограничиться построением трех, а не десяти схем, каждая из которых реализует систему констант.

На рис. 6.1–6.3 представлены схемы для случаев 1, 3, 4.

Осталось заметить, что случай $a = 2$ рассматривается аналогично случаю $a=1$, тем самым, случай 2.1 рассмотрен.

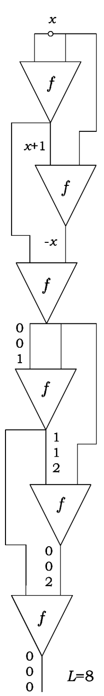

Рис. 6.1

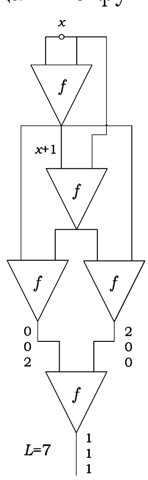

Рис. 6.2

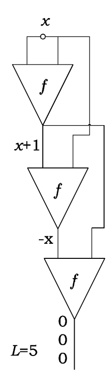

Рис. 6.3

Случай 2.2. Среди несамодвойственных функций в базисе есть такая, что ее диагональю является функция φ, равная функции λ^a. Для простоты изложения пока считаем, что $a=0$.

В базисе существует функция, не сохраняющая константу 0. С учетом рассмотренного случая 1, ее диагональ ψ может быть равна лишь одной из функций

$$\nu^1,\ \nu^2,\ \lambda^1,\ \lambda^2.$$

Заметим, что случаи ν^2, λ^2 для функции ψ можно не рассматривать, в силу того, что они двойственны случаям ν^1, λ^1 для функции ψ соответственно. Действительно, непосредственно проверяется двойственность следующих пар систем функций

$$\{\psi=\nu^1,\ \varphi=\lambda^0\} \longleftrightarrow \{\psi=\nu^2,\ \varphi=\lambda^0\},$$
$$\{\psi=\lambda^1,\ \varphi=\lambda^0\} \longleftrightarrow \{\psi=\lambda^2,\ \varphi=\lambda^0\}$$

относительно перестановки λ^0 (здесь символ $\longleftrightarrow$ обозначает отношение двойственности).

В базисе имеется функция χ, существенно зависящая от двух переменных и принимающая три значения. В силу следствия 2 основной леммы из [1], существуют такие два набора

$$\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2),\quad \widetilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2),\qquad (\alpha_1,\beta_1)\neq(\alpha_2,\beta_2)\qquad \alpha_i\neq\beta_i\qquad i=1,2,$$

и на этих наборах функция χ принимает одинаковое значение, которое обозначим σ.

Дальнейшее рассуждение не изменится, если одновременно переставить местами компоненты обоих наборов, т. е. рассматривать вместо пары наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ пару наборов $\widetilde{\alpha}'=(\alpha_2,\alpha_1)$ и $\widetilde{\beta}'=(\beta_2,\beta_1)$. Рассуждение также не изменится, если переставить местами сами наборы, т. е. рассматривать наборы $\widetilde{\alpha}''=(\beta_1,\beta_2)$ и $\widetilde{\beta}''=(\alpha_1,\alpha_2)$. В табл. 3 приведены все различные наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с точностью до указанных перестановок, а через $\widetilde{\gamma}$ обозначен набор (γ_1,γ_2), определяющийся равенствами $\gamma_i=-\alpha_i-\beta_i$ при $i=1,2$.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\widetilde{\alpha}$	00	01	01	01	12	20	02	20	12
$\widetilde{\beta}$	12	10	20	22	01	11	20	12	21
$\widetilde{\gamma}$	21	22	12	10	20	02	11	01	00
$\psi=\nu^1$	1	2	1	2	1	2	2	1	1
$\psi=\lambda^1$	1	1	2	2	2	3	3	2	1

Рассмотрим часть табл. 3, состоящую из первых трех строк. В каждом столбце этой части расположена пара линейных функций

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}.$$

Опишем в общих чертах способ построения одной константы независимо от того, чему равна функция ψ. Подставляя функции ξ_1 и ξ_2 (способ их получения будет указан ниже) в функцию χ, получаем функцию $\omega(x)$, выпускающую одно значение и принимающую значение σ два раза (если функция $\omega(x)$ принимает значение σ три раза, то она уже равна константе, и построение можно прекращать):

$$\omega(x)=\chi(\xi_1(x),\ \xi_2(x)). \tag{1}$$

Затем, подставляя функцию $\omega(x)$ в функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определенным образом в каждом конкретном случае, получим две функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, принимающие только по два значения: α_1, β_1 и α_2, β_2 соответственно. Функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ будут удовлетворять для любого x следующим утверждениям:

$$\begin{aligned} &\omega_1(x) = \alpha_1 \text{ тогда и только тогда, когда } \omega_2(x) = \alpha_2; \\ &\omega_1(x) = \beta_1 \text{ тогда и только тогда, когда } \omega_2(x) = \beta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда константу σ можно будет выразить формулой над функциями ψ, φ, χ:

$$\chi(\omega_1(x), \omega_2(x)) = \sigma.$$

На основании приведенного построения будем получать константы для каждого варианта функции ψ. Сложностью каждой схемы будем управлять с помощью, во-первых, построения функций ξ_1 и ξ_2, и во-вторых, построения функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$.

Функции ξ_1 и ξ_2 строятся с использованием элементов, соответствующих функциям ψ и φ, имеющихся в базисе. Чтобы уменьшить сложность построения функций ξ_1 и ξ_2, сделаем следующую замену. Рассмотрим пары функций, полученные из пары $(\xi_1(x), \xi_2(x))$ путем их одновременной подстановки во все возможные линейные функции одной переменной, за исключением констант. Тогда получатся следующие шесть пар:

$$(\xi_1(x), \xi_2(x)),\ (\xi_1(x)+1, \xi_2(x)+1),\ (\xi_1(x)+2, \xi_2(x)+2),$$
$$(-\xi_1(x), -\xi_2(x)),\ (-\xi_1(x)+1, -\xi_2(x)+1),\ (-\xi_1(x)+2, -\xi_2(x)+2).$$

Из этих функций выберем ту пару, обозначим ее через (ξ_1', ξ_2'), которую можно реализовать с минимальной сложностью, используя только элементы, соответствующие функциям ψ и φ. После этого заменим пару (ξ_1, ξ_2) новой парой (ξ_1', ξ_2') и сохраним для нее прежние обозначения. В результате такой замены функция ((1)) также будет выпускать одно значение и принимать значение σ два раза. В табл. 3 в четвертой и пятой строчках показана сложность такой пары после указанной замены.

Перейдем непосредственно к рассмотрению случаев.

С л у ч а й 2.2.1: $\psi(x) = \nu^1(x)$. В соответствии с табл. 3, в случаях 1, 3, 5, 8, 9 (эти номера указаны в верхней строчке табл. 3) функции ξ_1 и ξ_2 можно получить со сложностью один. Следовательно, функцию $\omega(x)$, равную функции $\chi(\xi_1(x), \xi_2(x))$, выпускающую одно значение, можно получить со сложностью два. Докажем, что, используя только элементы, соответствующие функциям ψ и φ, подавая на их входы уже полученную функцию $\omega(x)$, функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ можно получить со сложностью не более трех.

В случаях 3, 5, 8 среди трех функций $\omega(x), \psi(\omega(x)), \psi(\psi(\omega(x)))$ найдутся такие две, назовем их $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, которые принимают по два значения α_1, β_1 и α_2, β_2 соответственно. В силу того, что для функций ξ_1 и ξ_2 выполнено одно из следующих равенств: либо $\xi_1(x)+1 = \xi_2(x)$, либо $\xi_2(x)+1 = \xi_1(x)$, для функций $\omega_1(x), \omega_2(x)$ выполнены утверждения (2). Для построения функций $\omega_1(x), \omega_2(x)$ использовано не более двух элементов, соответствующих функции ψ.

В случаях 1 и 9 одна из функций $\omega(x)$, $\psi(\omega(x))$, $\psi(\psi(\omega(x)))$, которую обозначим через $\omega_1(x)$, принимает только значения α_1, β_1. В силу того, что для функций ξ_1 и ξ_2 верно, что для некоторого a из E_3 одна из них есть ν^a, а другая — λ^{-a}, функции ξ_1 и ξ_2 связаны одним из равенств $\varphi(\xi_1(x)) = \xi_2(x)$ или $\varphi(\xi_2(x)) = \xi_1(x)$, т. е. $-\xi_2(x) = \xi_1(x)$. Следовательно, функцию $\omega_2(x)$ получаем с помощью равенства $\omega_2(x) = \varphi(\omega_1(x))$. По построению для функций $\omega_1(x), \omega_2(x)$ выполнены утверждения (2). На построение функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ потрачено не более трех элементов.

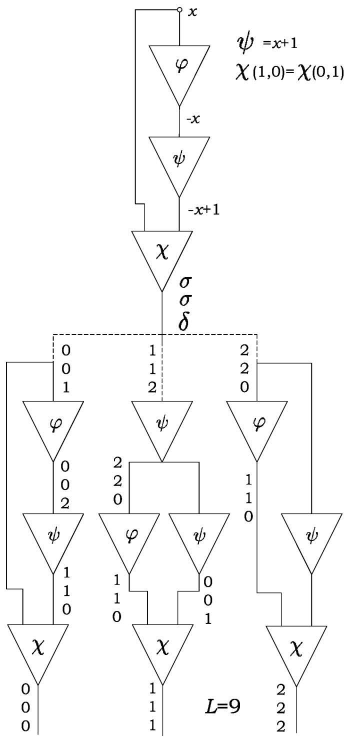

Рис. 7.1

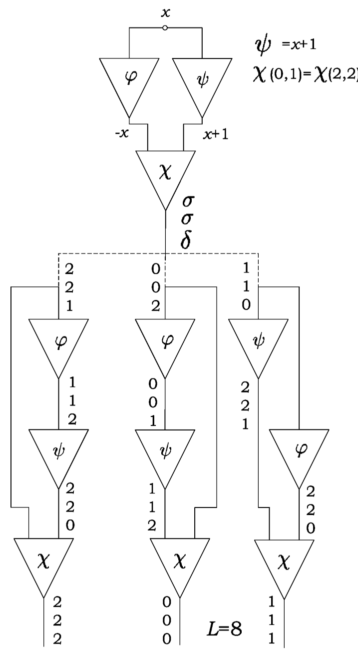

Рис. 7.2

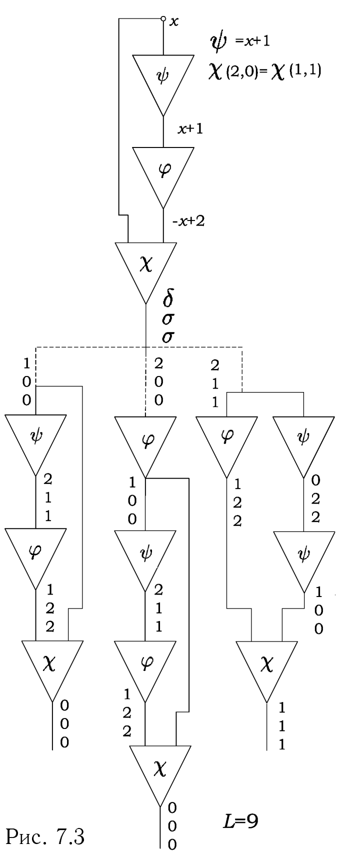

Рис. 7.3

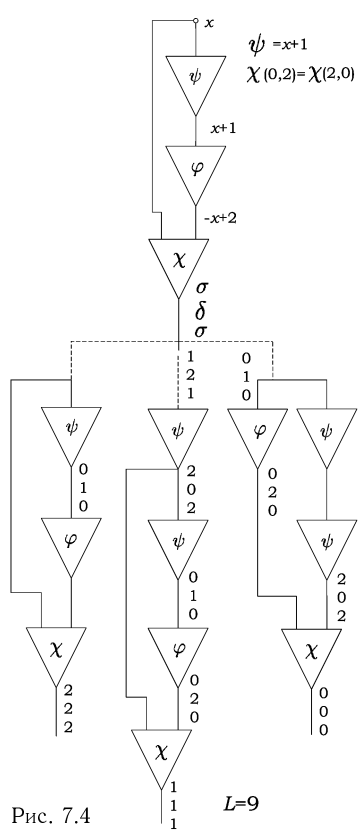

Рис. 7.4

Основываясь на вышеизложенном, общая схема для случаев 1, 3, 5, 8, 9 имеет сложность $2+3+3<9$.

На рис. 7.1–7.4 показаны четыре схемы для констант, соответствующие функции $\psi(x)=\nu^1(x)$ и случаям 2, 4, 6, 7 (см. табл. 3) для пары (ξ_1, ξ_2).

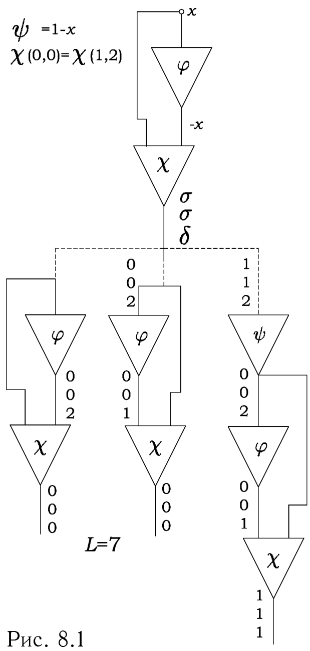

Рис. 8.1

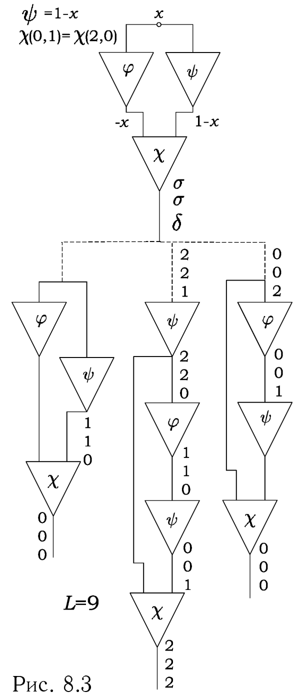

Рис. 8.3

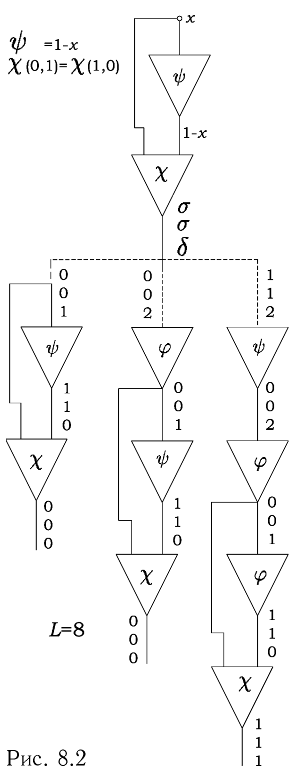

Рис. 8.2

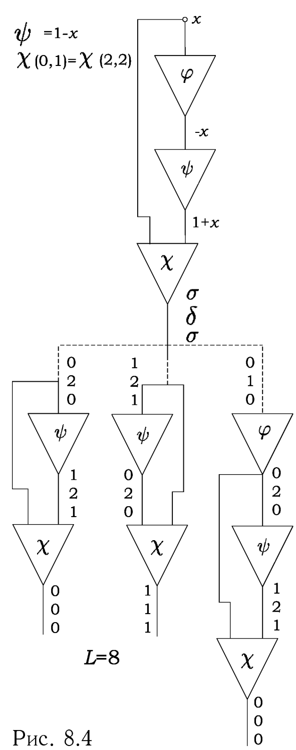

Рис. 8.4

Заметим, что на рис. 7.1–7.4 и 8.1–8.7 штриховое соединение элементов обозначает один из возможных случаев. Случай 2.2.1 рассмотрен.

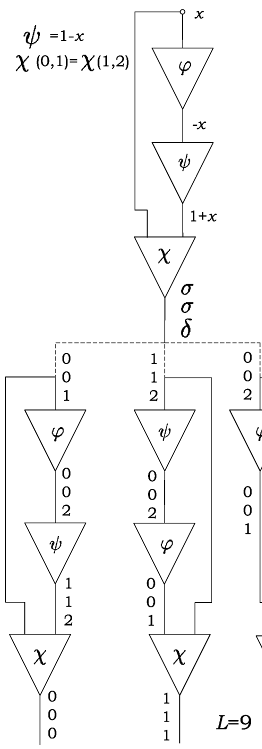

Рис. 8.5

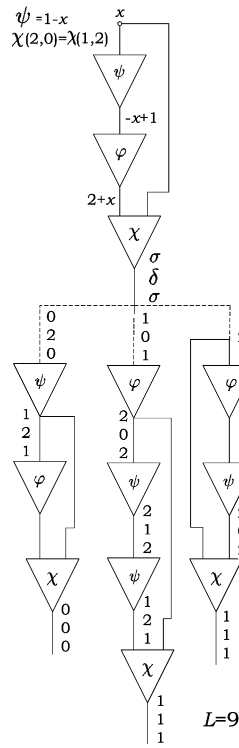

Рис. 8.6

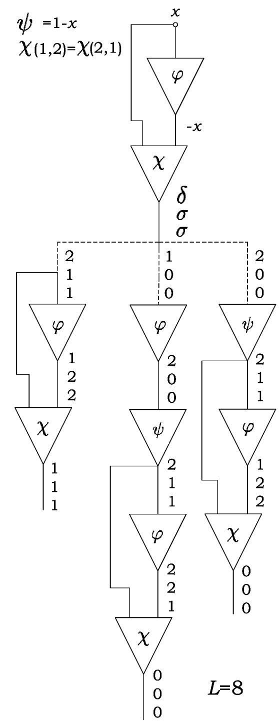

Рис. 8.7

Случай 2.2.2: $\psi(x) = \lambda^1(x)$. На рис. 8.1–8.7 показаны схемы для констант, соответствующие семи возможностям 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 (см. табл. 3) для пары (ξ_1, ξ_2). Для оставшихся случаев 6 и 7 пару (ξ_1, ξ_2) можно получить только со сложностью три (в остальных случаях ее сложность не превышает двух). Докажем, что эти случаи можно не рассматривать.

Допустим, имеет место случай 6 для функций ξ_1 и ξ_2, и ни один из оставшихся случаев, кроме, быть может, случая 7, не имеет места. Кроме того предполагаем, что вместе с невыполнением каждого случая, не выполнен также случай, полученный из него путем перестановки местами функций ξ_1, ξ_2. Например, в случае 1 кроме невыполнения равенства $\chi(0,0) = \chi(1,2)$, считаем, что не выполнено также равенство $\chi(0,0) = \chi(2,1)$. Тогда, если попытаться заполнить таблицу для функции χ, учитывая, что функция χ существенно зависит от двух переменных, и ее диагональ есть линейная функция, то придем к противоречию с невыполнением какого-либо из случаев 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9. Действительно, в силу предположения, имеем: $\chi(2,0) = \chi(1,1) = \sigma$, причем верны неравенства

$$\chi(2,0) \neq \chi(0,1) \quad \text{(в силу невыполнения случая 3);}$$

$$\chi(2,0) \neq \chi(1,2) \quad \text{(в силу невыполнения случая 8);}$$

$$\chi(1,2) \neq \chi(0,1) \quad \text{(в силу невыполнения случая 5),}$$

следовательно, значения $\chi(0,1)$ и $\chi(1,2)$ равны $\sigma+1$ и $\sigma+2$ соответственно (или наоборот). Верны неравенства

$$\chi(2,2) \neq \chi(1,1) \quad \text{(в силу того, diag}(\chi)\text{ не выпускает значений);}$$

$$\chi(2,2) \neq \chi(0,1) \quad \text{(в силу невыполнения случая 4),}$$

следовательно, верны равенства $\chi(2,2)=\sigma+2$, $\chi(0,0)=\sigma+1$.

Из неравенств

$$\chi(1,2)\neq\chi(0,0)\neq\chi(2,1)\ \ \text{(в силу невыполнения случая 1);}$$
$$\chi(1,2)\neq\chi(2,1)\ \ \text{(в силу невыполнения случая 9),}$$

следует, что $\chi(2,1)=\sigma$. Получается, что значение $\chi(1,0)$ не может быть равно ни σ, ни $\sigma+1$, ни $\sigma+2$, так как

$$\chi(0,1)\neq\chi(1,0)=\sigma+1\ \ \text{(в силу невыполнения случая 2);}$$
$$\chi(0,1)\neq\chi(1,2)=\sigma\ \ \text{(в силу невыполнения случая 5);}$$
$$\chi(0,1)\neq\chi(2,2)=\sigma+2\ \ \text{(в силу невыполнения случая 4).}$$

Пришли к противоречию. Случай 2.2.2 рассмотрен.

Заметим, что случаи $a=1$ и $a=2$ разбираются аналогично случаю $a=0$, следовательно, случай 2.2 рассмотрен.

Случай 2.3. У всех несамодвойственных функций базиса диагональю является функция ν^0. Рассмотрим любую из них и обозначим ее через f. В базисе существует функция или функции, в совокупности не сохраняющие ни одной из констант 0, 1, 2. В силу уже рассмотренных случаев, диагональ функции, не сохраняющей константу, есть ν^1 или ν^2. Действительно, если диагональ имеет вид λ^b, то мы попадаем в уже рассмотренный случай 2.2, а если выпускает хоть одно значение, — то в случай 1.

Эти два случая двойственными относительно перестановки λ^0 преобразованиями переводятся друг в друга следующим образом:

$$\{\nu^0,\nu^1\}\longleftrightarrow\{\nu^0,\nu^2\}.$$

Отсюда следует, что можно ограничиться рассмотрением одного случая, скажем, случая, когда функция, не сохраняющая константы, есть ν^1. По лемме 3 найдется такая подстановка линейных функций

$$\widetilde{h}(x)=(h_1(x),h_2(x)),\quad h_i\in\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\},\quad i=1,2,$$

что функция $f(\widetilde{h}(x))$ является либо функцией, выпускающей одно значение, и тогда система констант получается со сложностью восемь по лемме 4, либо для некоторого b функция $f(\widetilde{h}(x))$ равна функции λ^b. Как и в случае 2.1, можно считать, что $\widetilde{h}(x)=(\nu^1(x),\nu^0(x))$. Случай 2.3 разбиваем на три подслучая (2.3.1–2.3.3) в зависимости от того, чему равно число b: $b=0$; $b=1$; $b=2$.

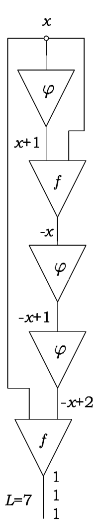

Рис. 9.1

Случай 2.3.1: $b=0$. Тогда $f(\nu^1(x),\nu^0(x))=\lambda^0(x)$, и функция f имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0&0&\sigma\\ *&1&2\\ 1&*&2\end{pmatrix},$$

где σ — некоторое значение из множества E_3.

Если $\sigma=1$, то константу можно получить с помощью равенства $f(\nu^0(x),\lambda^2(x))=1$. Соответствующая схема показана на рис. 9.1.

Если $\sigma=0$ или $\sigma=2$, то, учитывая, что диагоналями всех функций, полученных любыми подстановками линейных функций из множества $\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$

в функцию f, являются линейные функции, не равные константе (иначе сводим к лемме 4), имеем четыре варианта для функции f:

$$1)\quad f=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&2&2\end{pmatrix},\qquad 2)\quad f=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&2\\1&1&2\end{pmatrix},$$

$$3)\quad f=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&2\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad 4)\quad f=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

На рис. 9.2–9.5 приведены схемы для констант в этих случаях.

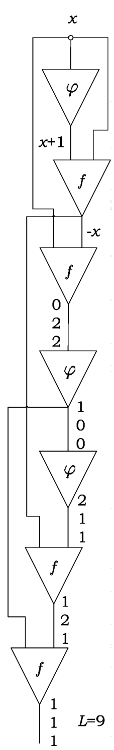

Рис. 9.2

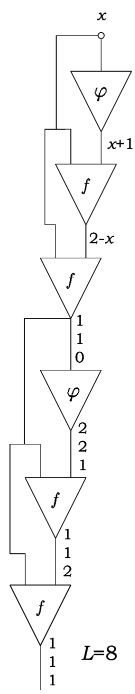

Рис. 9.3

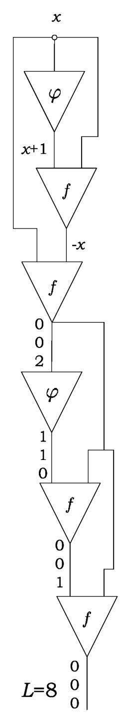

Рис. 9.4

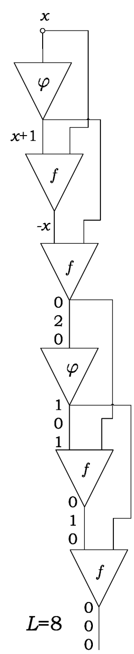

Рис. 9.5

Случай 2.3.1 рассмотрен.

С л у ч а й 2. 3. 2: $b=1$. Тогда $f(\nu^1(x),\nu^0(x))=\lambda^1(x)$, и функция f имеет вид:

$$f=\begin{pmatrix}0&1&*\\ *&1&0\\2&\sigma&2\end{pmatrix},$$

где σ — некоторое значение из множества E_3.

Если $\sigma=0$, то константу можно получить с помощью равенства $f(\nu^0(x),\lambda^0(x))=0$. Соответствующая схема показана на рис. 10.1.

Если $\sigma=1$ или $\sigma=2$, то, учитывая, что диагоналями всех функций, полученных любыми подстановками линейных функций из множества $\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$ в функцию f, являются линейные функции, не равные константе (иначе сводим к лемме 4), имеем четыре варианта для функции f:

$$1)\quad f=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\2&2&2\end{pmatrix},\qquad 2)\quad f=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\2&1&2\end{pmatrix},$$

$$3)\quad f=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\2&2&2\end{pmatrix},\qquad 4)\quad f=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

На рис. 10.2–10.4 приведены схемы, реализующие константы, в первом, втором и четвертом случае функции f соответственно. Схема для констант в случае третьей функции f может быть получена из схемы, изображенной на рис. 9.4, путем перестановки местами входов у всех элементов, соответствующих функции f. Случай 2.3.2 рассмотрен.

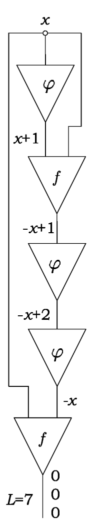

Рис. 10.1

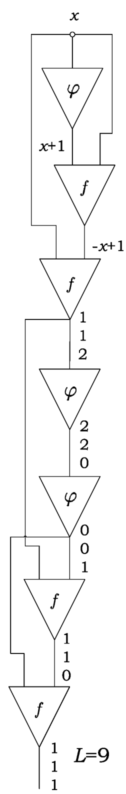

Рис. 10.2

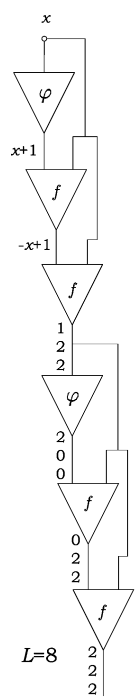

Рис. 10.3

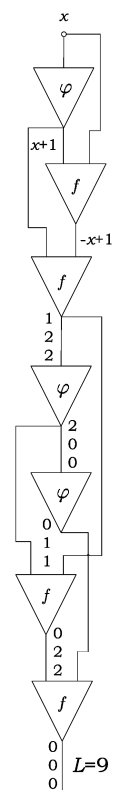

Рис. 10.4

Случай 2.3.3: $b=2$. Тогда $f(\nu^1(x),\nu^0(x))=\lambda^2(x)$, и функция f имеет вид:

$$f=\begin{pmatrix}0&2&*\\\sigma&1&1\\0&*&2\end{pmatrix},$$

где σ — некоторое значение из множества E_3.

Если $\sigma=2$, то константу можно получить с помощью равенства $f(\lambda^0(x),\nu^1(x))=2$. Соответствующая схема показана на рис. 11.1.

Если $\sigma=0$ или $\sigma=1$, то, учитывая, что диагоналями всех функций, полученных любыми подстановками линейных функций из множества $\{\nu^0,\nu^1,\nu^2\}$

в функцию f, являются линейные функции,не равные константе (иначе сводим к лемме 4), имеем четыре варианта для функции f:

$$1)\quad f=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix},\qquad 2)\quad f=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix},$$

$$3)\quad f=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad 4)\quad f=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

На рис. 11.2, 11.3 приведены схемы, реализующие константы, в первом и втором случаях функции f. Схемы для констант в случаях третьей и четвертой функции f могут быть получены из схем, изображенных на рис. 10.3 и 9.3, соответственно, путем перестановки местами входов у всех элементов, соответствующих функции f.

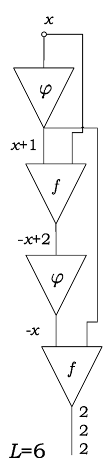

Рис. 11.1

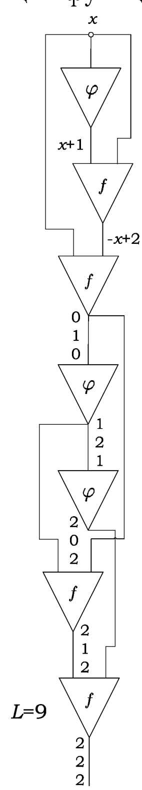

Рис. 11.2

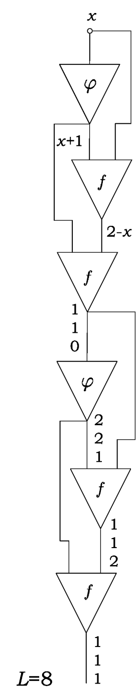

Рис. 11.3

Случай 2.3.3, а с ним и 2.3 рассмотрен. Теорема доказана.

§ 6. Пример

Доказательство теоремы носит конструктивный характер; оно позволяет по любому заданному конечному базису строить схему, реализующую систему констант со сложностью не более девяти.

Рассмотрим базис, который участвует в доказательстве нижней оценки теоремы:

$$B=\left\{\psi=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&2&2\end{pmatrix},\ \nu^1\right\}.$$

Требуется построить систему всех констант в P_3. Сначала мы попадаем в случай 2.3 (см. доказательство теоремы): среди несамодвойственных функций в базисе имеются только те, диагональю которых является функция ν^0. Действительно, из функций базиса только функция ψ не принадлежит классу S^3_{x+1}. В силу равенства $\psi(\nu^1(x), \nu^0(x)) = \lambda^0(x)$, мы оказываемся в случае 2.3.1. Искомая схема, реализующая систему всех констант в P_3 со сложностью девять, показана на рис. 9.2.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде и В. В. Кочергину за неоценимую помощь в написании настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР.— 1958.— Т. LI. — С. 56–140.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2002.

Поступило в редакцию 14 IX 2008