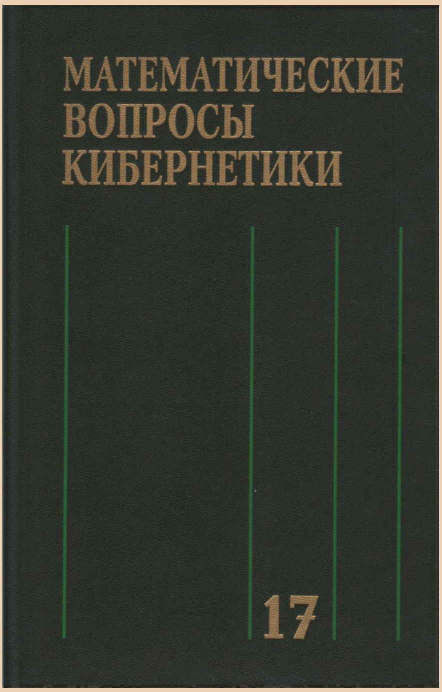

Н. Ю. Золотых

Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции

ОЦЕНКИ МОЩНОСТИ МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕШАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Н. Ю. ЗОЛОТЫХ

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

Введение

Функция f, отображающая $E_k^n = \{0, 1, \ldots, k-1\}^n$ в $\{0, 1\}$, называется пороговой, если существует гиперплоскость, отделяющая множество точек области определения, в которых f равна нулю (множество «нулей» функции), от множества точек, в которых f равна единице (множество «единиц» функции).

В настоящей работе рассматриваются свойства разрешающего множества пороговой функции — такого множества точек области определения, значений функции в которых достаточно для ее однозначного восстановления на всей области. Разрешающее множество заданной функции f называется наименьшим, если среди всех разрешающих множеств этой функции оно имеет минимальную мощность. Разрешающее множество функции f называется минимальным (или тупиковым), если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f. Очевидно, что наименьшее разрешающее множество является минимальным, а также известно, что для любой пороговой функции минимальное разрешающее множество единственно. Максимальная мощность минимального разрешающего множества, где максимум берется по всем пороговым функциям, заданным на E_k^n, называется длиной обучения. Понятие разрешающего множества впервые введено, по-видимому, В. К. Коробковым в работе [8] в контексте монотонных булевых функций.

Разрешающее множество естественным образом появляется в задаче расшифровки функции. Под расшифровкой заранее не известной пороговой функии f, определенной на множестве E_k^n, понимается процедура нахождения коэффициентов разделяющей гиперплоскости с помощью вопросов о значении функции в точке. Возможая стратегия расшифровки может заключаться в последовательном выдвижении и проверке гипотез [6, 17]. Для того, чтобы проверить на равенство две пороговые функции, достаточно сравнить их значения только в точках разрешающего множества одной из них, поэтому важно иметь эффективные алгоритмы построения разрешающего множества пороговой функции по коэффициентам разделяющей гиперплоскости. С другой стороны, легко видеть, что количество вопросов для расшифровки функции f не меньше мощности ее минимального множества, и, следовательно, в худшем случае количество вопросов не меньше длины обучения.

Длина обучения $t(n,k)$ зависит от n экспоненциально, в частности, $t(n,2)=2^n$, поэтому представляет интерес поиск оценок для $t(n,k)$, когда n фиксировано. Известно, что

$$c'_n \log^{n-2} k \leqslant t(n,k) \leqslant c''_n \log^{n-1} k, \tag{1}$$

где c'_n, c''_n — некоторые положительные величины, зависящие только от n. Верхняя оценка в (1) получена в [16] на основе [10] и [15]. Нижняя оценка установлена в [7, 13]. Явные выражения для c'_n и c''_n в указанных работах не приводятся. В [5] доказано, что $t(2,k)=4$, а в [4] установлено, что $\sigma(3,k)=\Theta(\log k)$. Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [3, 14].

В настоящей работе мы уточняем оценки (1), доказывая (теорема 3), что

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\log k - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\right)^{n-2}}{4(n-1)3^{n-1}(n-2)^{n-2}\big((n-2)!\big)^2} \leqslant t(n,k) \leqslant 2n\log(2n)\big(1+\log(k+1)\big)^{n-1}.$$

В § 1 даны основные определения и обозначения. В § 2 приведены сведения о строении разрешающего множества пороговой функции. Эти сведения используются в § 3, где получены оценки длины обучения.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$ и $f\colon E_k^n\to\{0,1\}$. Обозначим

$$M_\nu(f)=\{x\in E_k^n:\ f(x)=\nu\} \qquad (\nu=0,1).$$

Функция f называется *пороговой*, если существуют числа $a_0,a_1,\ldots,a_n$, такие, что

$$M_0(f)=\{x\in E_k^n: \sum_{j=1}^n a_jx_j\leqslant a_0\}.$$

Неравенство $\sum\limits_{j=1}^n a_jx_j\leqslant a_0$ называется *пороговым*. Множество всех пороговых функций, заданных на гиперкубе E_k^n, обозначим $F(n,k)$.

Разрешающим множеством функции f из $F(n,k)$ называется такое T, $T\subseteq E_k^n$, что для произвольной функции g из $F(n,k)\setminus\{f\}$ найдется точка z из T, такая, что $f(z)\neq g(z)$. Разрешающее множество функции f называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для функции f. Известно, что для любой пороговой функции f минимальное разрешающее множество единственно (доказательство приведено в § 2). Минимальное разрешающее множество функции f обозначим $T(f)$. *Длиной обучения* называется величина

$$t(n,k)=\max_{f\in F(n,k)}|T(f)|.$$

Обозначим через $N_\nu(f)$ множество вершин выпуклой оболочки точек из $M_\nu(f)$ $(\nu=0,1)$.

§ 2. Строение обучающего множества пороговой функции

В данном параграфе изложим основные результаты [7, 13], касающиеся строения обучающего множества пороговой функции. Далее эти результаты будут использоваться в § 3. С каждой функцией f из $F(n,k)$ свяжем *конус* $K(f)$ *разделяющих функционалов* $(a_0,\ldots,a_{n+1})$, описываемый следующей системой линейных неравенств (см. [10]):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0 & \text{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in M_0(f), \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant a_0 + a_{n+1} & \text{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in M_1(f), \\ a_{n+1}\geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Легко видеть, что любое решение $(a_0,\ldots,a_{n+1})$ этой системы при $a_{n+1}>0$ определяет некоторое пороговое неравенство функции f. Верно и обратное: коэффициенты $(a_0,\ldots,a_n)$ любого порогового неравенства функции f из $F(n,k)$ удовлетворяют системе (2) при некотором $a_{n+1}>0$.

Лемма 1. *Конус* $K(f)$ *любой функции* $f\in F(n,k)$ *не содержит ненулевых подпространств, т. е. конус острый.*

Доказательство. Достаточно проверить, что если $a=(a_0,\ldots,\ldots,a_{n+1})$ принадлежит $K(f)$ и $-a\in K(f)$, то $a=0$. Действительно, из (2) получаем, что в этом случае $a_{n+1}=0$, и, следовательно,

$$E_k^n \subseteq \{x=(x_1,\ldots,x_n)\colon \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_0\}.$$

Так как размерность E_k^n равна n, то $a=0$.

Лемма 2. *Размерность конуса* $K(f)$ *для любой функции* f *из* $F(n,k)$ *равна* $n+2$, *т. е. конус телесный.*

Доказательство. Небольшим изменением коэффициентов $a_0,\ldots,\ldots,a_n$ порогового неравенства можно добиться строгого отделения гиперплоскостью множеств $M_0(f)$ и $M_1(f)$. Таким образом, для произвольной функции f из $F(n,k)$ существует вектор $(a_0,\ldots,a_{n+1})$ из $K(f)$, строго удовлетворяющий всем неравенствам системы (2). Следовательно, $K(f)$ имеет полную размерность.

Из теории линейных неравенств (см., например, [9]), пользуясь леммами 1, 2, теперь получаем следующее (ср. [10]).

Лемма 3. 1) *Конус* $K(f)$ *имеет единственное с точностью до положительного множителя минимальное порождающее множество*

$$\{a^{(j)}=(a_0^{(j)},\ldots,a_{n+1}^{(j)}),\ j=1,2,\ldots,s\}. \tag{3}$$

2) *Существуют определяемые единственным образом такие множества* $T_\nu(f)\subseteq M_\nu(f)$ $(\nu=0,1)$, *что система* (2) *эквивалентна системе*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0 & \textit{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in T_0(f), \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant a_0 + a_{n+1} & \textit{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in T_1(f), \\ a_{n+1}\geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Никакая подсистема системы (4) *не эквивалентна исходной системе.*

3) *Для любого* $x=(x_1,\ldots,x_n)$, *принадлежащего* $T_0(f)$, *существует такое подмножество* I *множества* $\{1,2,\ldots,s\}$, *что* $|I|=n+1$, *при этом подсистема векторов* $\{a^{(i)}, i\in I\}$ *линейно независима и*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)}x_j = a_0^{(i)} \quad (i\in I), \qquad \sum_{i\in I} a_{n+1}^{(i)} > 0.$$

4) *Для любого* $x=(x_1,\ldots,x_n)$, *принадлежащего* $T_1(f)$, *существует такое подмножество* I *множества* $\{1,2,\ldots,s\}$, *что* $|I|=n+1$, *при этом подсистема векторов* $\{a^{(i)}, i\in I\}$ *линейно независима и*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)}x_j = a_0^{(i)} + a_{n+1}^{(i)} \quad (i\in I), \qquad \sum_{i\in I} a_{n+1}^{(i)} > 0.$$

Пусть T_ν — произвольное подмножество множества $M_\nu(f)$ $(\nu=0,1)$. Рассмотрим следующую подсистему системы (2):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leqslant a_0 & \text{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in T_0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \geqslant a_0 + a_{n+1} & \text{для всех } (x_1,\ldots,x_n)\in T_1, \\ a_{n+1} \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 1 [7]. *Пусть* $T_\nu \subseteq M_\nu(f)$ $(\nu=0,1)$. *Для того, чтобы множество* $T=T_0\cup T_1$ *было обучающим для функции* f *из* $F(n,k)$, *необходимо и достаточно, чтобы система неравенств* (5) *была эквивалентна системе неравенств* (4).

Доказательство. Поскольку достаточность условий очевидна, покажем их необходимость. Предположим, что нашлось решение $b=(b_0,\ldots,b_{n+1})$ системы (4), не принадлежащее конусу $K(f)$. По лемме 3 можем считать, что $b_{n+1}>0$. Неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} b_jx_j \leqslant b_0$$

определяет некоторую функцию g из $F(n,k)$, а так как $b\notin K(f)$, то $g\neq f$. Однако $g(x)=f(x)$ для всех $x\in T$. Следовательно, T не является обучающим множеством.

Из данной теоремы получаем два важных следствия.

Следствие 1 [7]. *Для любой* f *из* $F(n,k)$ *множество* $T=T_0\cup T_1$, *где* $T_\nu\subseteq M_\nu$ $(\nu=0,1)$, *является минимальным обучающим тогда и только тогда, когда* $T_\nu=T_\nu(f)$ $(\nu=0,1)$.

Отсюда и из п. 2 леммы 4 вытекает

Следствие 2 [7]. *Для любой* f *из* $F(n,k)$ *минимальное обучающее множество единственно.*

Минимальное обучающее множество функции f обозначим через $T(f)$. Итак, $T(f)=T_0(f)\cup T_1(f)$.

Следствие 3 [11]. *Для любой* f *из* $F(n,k)$ *справедливо включение*

$$T(f)\subseteq N_0(f)\cup N_1(f).$$

Лемма 4. *Пусть* $f \in F(n,k)$.

1) *Для любого* y *из* $T_0(f)$ *существуют такие* $a_{n+1} > 0$, $a_0, \ldots, a_n$, *что*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = a_0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j < a_0 \quad \text{для всех } (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f) \setminus \{y\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant a_0 + a_{n+1} \quad \text{для всех } (x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f).$$

2) *Для любого* y *из* $T_1(f)$ *существуют такие* $a_{n+1} > 0$, $a_0, \ldots, a_n$, *что*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = a_0 + a_{n+1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j > a_0 + a_{n+1} \quad \text{для всех } (x_1, \ldots, x_n) \in M_1(f) \setminus \{y\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0 \quad \text{для всех } (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f).$$

Доказательство. Положим в п. 3 леммы 3

$$a_j = \sum_{i \in I} a_j^{(i)}, \quad a_{n+1} = \sum_{i \in I} a_{n+1}^{(i)}, \quad 0 < i \leqslant n. \tag{6}$$

Теперь условия легко проверяются:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I} a_j^{(i)} y_j = \sum_{i \in I} a_0^{(i)} = a_0.$$

Для произвольного $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $M_0(f)$ имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0$, однако $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \neq a_0$ по лемме 3. Действительно, рассмотрим равенства в (6) как систему уравнений относительно x_i. Из леммы 1 следует, что y — ее единственное решение. Следовательно, найдется такое $i' \in I$, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{(i')} x_j < a_0^{(i')}$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j < a_0$. Для произвольного $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $M_1(f)$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I} a_j^{(i)} x_j \geqslant \sum_{i \in I} (a_0^{(i)} + a_{n+1}^{(i)}) \geqslant a_0 + a_{n+1}.$$

Аналогично доказывается и п. 2 леммы 4.

Предположим, что в (3) будет $a_{n+1}^{(j)} > 0$ при $j = 1, 2, \ldots, \mu$ и $a_{n+1}^{(j)} = 0$ при $j = \mu + 1, \ldots, s$. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — целочисленный вектор,

$$M_0(f, a) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in E_k^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \max_{y \in M_0(f)} \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \right\},$$

$$M_1(f, a) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in E_k^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \min_{y \in M_1(f)} \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \right\}.$$

Обозначим через $N_\nu(f, a)$ множество вершин выпуклой оболочки множества $M_\nu(f, a)$ $(\nu = 0, 1)$. Из леммы 4 следует

Теорема 2 [7]. *Для любой функции f из $F(n, k)$*

$$T(f) = \bigcup_{i=1}^{\mu} \left(N_0(f, a^{(i)}) \cup N_1(f, a^{(i)}) \right) = \bigcup_{a} \Big(N_0(f, a) \cup N_1(f, a) \Big),$$

в последнем случае объединение берется по всем таким $a = (a_1, \ldots, a_n)$, что неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant \max_{y \in M_0(f)} \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$$

является пороговым для функции f.

В качестве иллюстрации к теореме 2 рассмотрим пороговую функцию, определяемую неравенством $20x_1 + 28x_2 + 35x_3 \leqslant 140$. Запишем систему (4) в виде $Qa \geqslant 0$, где Q — матрица системы, $a = (a_0, \ldots, a_{n+1})^{\mathrm{T}}$ рассматривается как вектор-столбец. Пусть B — матрица, составленная из коодинат векторов $a^{(i)}$, $S = QB$. Матрицы B, Q, S расположим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} & B \\ Q & S \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & 56 & 70 & 140 & 140 & 105 & 84 & 80 & 50 & 36 & 21 \\
 & & & & & 8 & 10 & 20 & 20 & 15 & 12 & 11 & 7 & 5 & 3 \\
 & & & & & 11 & 14 & 28 & 28 & 21 & 16 & 16 & 10 & 7 & 4 \\
 & & & & & 14 & 17 & 35 & 35 & 25 & 21 & 20 & 12 & 9 & 5 \\
 & & & & & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
-1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Имеем $\mu = 3$,

$$\begin{aligned} &N_0(f, a^{(1)}) = \{p^{(1)}, p^{(3)}\}, \quad N_1(f, a^{(1)}) = \{q^{(1)}, q^{(2)}\},\\ &N_0(f, a^{(2)}) = \{p^{(1)}, p^{(2)}\}, \quad N_1(f, a^{(2)}) = \{q^{(1)}, q^{(3)}\},\\ &N_0(f, a^{(3)}) = \{p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}\}, \quad N_3(f, a^{(1)}) = \{q^{(1)}\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} p^{(1)} = (7, 0, 0), \quad p^{(2)} = (0, 5, 0), \quad p^{(3)} = (0, 0, 4),\\ q^{(1)} = (4, 1, 1), \quad q^{(2)} = (3, 3, 0), \quad q^{(3)} = (2, 0, 3),\\ a^{(1)} = (56, 8, 11, 14, 1), \quad a^{(2)} = (70, 10, 14, 17, 1), \quad a^{(3)} = (140, 20, 28, 35, 140). \end{gathered}$$

По теореме 2, $T_\nu(f) = \bigcup\limits_{i=1}^{3} N_\nu(f, a^{(i)})$ $(\nu = 0, 1)$. Для нашего примера в объединении достаточно оставить только два члена. Действительно,

$$T_0(f) = N_0(f, a^{(3)}) = N_0(f, a^{(1)}) \cup N_0(f, a^{(2)}), \quad T_1(f) = N_1(f, a^{(1)}) \cup N_1(f, a^{(2)}).$$

§ 3. Оценки длины обучения

Теорема 3. *При любых n, k, $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$,*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\log k - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\right)^{n-2}}{4(n-1)3^{n-1}(n-2)^{n-2}\big((n-2)!\big)^2} \leqslant t(n, k) \leqslant 2n\log(2n)\big(1 + \log(k+1)\big)^{n-1}. \tag{7}$$

Верхняя оценка в (7) является прямым следствием полученной в [2] верхней оценки числа вершин многогранника задачи о рюкзаке. Обозначим $N(a_0, \ldots, a_n)$ множество вершин выпуклой оболочки решений системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0,\\ 0 \leqslant x_j \leqslant k-1, \quad x_j \text{ целое} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Лемма 5 [2]. *При любых n, k, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, и любых $a_0, \ldots, a_n$*

$$|N(a_0, \ldots, a_n)| \leqslant n\log(2n)\big(1 + \log(k+1)\big)^{n-1}.$$

Отсюда и из следствия 3 сразу получаем верхнюю оценку в (7).

Выведем нижнюю оценку. Для каждого целого Δ, $\Delta \geqslant 2$, определим множество

$$\Phi(n, \Delta) = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \colon\ 0 \leqslant a_j \leqslant \Delta - 1 \ (j = 0, \ldots, n-1)\}.$$

Пусть $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \Phi(n, \Delta)$. Обозначим через $V(a_0, \ldots, a_{n-1}, \Delta)$ множество вершин выпуклой оболочки множества решений системы

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + x_j \equiv a_0 \,(\operatorname{mod} \Delta), \quad x_j \in \boldsymbol{Z}, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1 \ldots n). \tag{8}$$

В [1] (см. также [2] и [12, раздел 3.5]) установлена верхняя оценка для среднего числа вершин

$$\varphi(n, \Delta) = \Delta^{-n} \sum_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\Phi(n,\Delta)} |V(a_0, \ldots, a_{n-1}, \Delta)|.$$

Лемма 6 [1]. *При любых целых $n \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\varphi(n, \Delta) \geqslant c_n \bigl(\log \Delta - n - 2 - n\log(n-1)\bigr)^{n-1},$$

где $c_n = \Bigl(4n3^n(n-1)^{n-1}\bigl((n-1)!\bigr)^2\Bigr)^{-1}$.

Обозначим через $\mathcal{N}(a_0, \ldots, a_n)$ множество вершин выпуклой оболочки решений системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = a_0, \\ x_j \geqslant 0, \quad x_j \text{ целое} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Используя лемму 6, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7. *При любых целых n, k, $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 2$, найдутся $a_0 \in \boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ из $\boldsymbol{Z}^n$ такие, что $0 < a_j < k$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и*

$$|\mathcal{N}(a_0, \ldots, a_n)| \geqslant c_{n-1} \left(\frac{1}{2}\log k - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\right)^{n-2},$$

где c_n — величина, определенная в лемме 6.

Доказательство. Пусть

$$\Delta(\Delta-1) \leqslant a_0 \leqslant \Delta^2 - 1, \quad 0 \leqslant a_j \leqslant \Delta - 1 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

По теореме 3.35 из [12] имеем $N' \subseteq N(a_0, \ldots, a_{n-1}, \Delta)$, где N' — множество вершин выпуклой оболочки целочисленных решений системы

$$a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + \Delta x_n = a_0, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Легко видеть, что N' взаимно однозначно отображается в множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных решений сравнения

$$a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \equiv a_0 \pmod{\Delta},$$

или ему эквивалентного

$$a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \equiv a_0 - \Delta(\Delta-1) \pmod{\Delta}. \tag{9}$$

Для завершения доказательства леммы осталось сравнить (9) с (8), положить $k = \Delta^2$ и воспользоваться леммой 6.

Заметим, что доказательство леммы 7 построено на основе доказательства аналогичного результата из [1] о нижней оценке величины $N(a_0, \ldots, a_n)$.

По теореме 2

$$T(f) = \bigcup_a \Big(N_0(f, a) \cup N_1(f, a) \Big),$$

где объединение берется по всем таким $a = (a_1, \ldots, a_n)$, что неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leqslant \max_{y \in M_0(f)} \sum_{i=1}^n a_i y_i$$

является пороговым для функции f. Пусть $a_0, \ldots, a_n$ — величины, существование которых утверждается в лемме 7. Рассмотрим пороговую функцию f с пороговым неравенством

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leqslant a_0.$$

По теореме 2 имеем $\mathcal{N}(a_0, \ldots, a_n) \subseteq T_0(f)$. Теперь нижняя оценка длины обучения следует из леммы 7.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселов С. И. Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования. — Деп. в ВИНИТИ, 1984, № 619–84.
2. Веселов С. И., Чирков А. Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 14–31.
3. Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю. Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Нижний Новгород: изд-во ННГУ. — 2003. — С. 238–246.
4. Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю. О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного педагогического университета. — 2003. — С. 20–21.
5. Золотых Н. Ю. О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Часть I. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. — 2001. — С. 74–79.
6. Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. Расшифровка пороговых функций k-значной логики // Дискретный анализ и исследование операций.— 1995.— Т. 2, №3. — С. 18–23.
7. Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. О нижней оценке расшифровки пороговых функций k-значной логики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.
8. Коробков В. К. Оценка числа монотонных функций алгебры логики и сложности алгоритма отыскания разрешающего множества для произвольной монотонной функции алгебры логики // ДАН СССР. — 1963. — Т. 150, № 4. — С. 744–747.
9. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
10. Шевченко В. Н. О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР. — 1985. — Вып. 42. — С. 99–108.
11. Шевченко В. Н. О расшифровке пороговых функции многозначной логики // Комбинаторно-алгебраические методы в прикл. матем. — Горький: Горьковский гос. ун-т. — 1987. — С. 155–163.
12. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.
13. Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю. О сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Доклады Академии наук. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.
14. Antony M., Brightwell G., Cohen D., Shawe-Taylor J. On exact specification by examples // Proc. 5th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. New York. — NY: ACM Press. — 1992. — P. 311–318.

15. Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C. On integer points in polyhedra // Combinatorica. — 1992. — V. 12, № 1. — P. 27–37.
16. Hegedüs T. Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. New York. — NY: ACM Press. — 1994. — P. 228–236.
17. Hegedüs T. Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // Proc. 8 annual conf. on Computational learning theory (COLT'95). — New York: ACM Press. — 1995. — P. 108–117.

Поступило в редакцию 14 VIII 2007