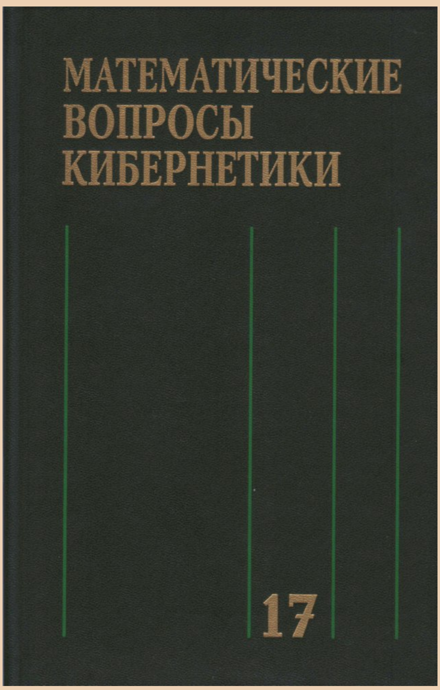


В. И. Иванов,
Ю. Д. Рудомазина

# Некоторые экстремальные задачи для дискретных периодических функций

# НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***В. И. ИВАНОВ, Ю. Д. РУДОМАЗИНА***

(ТУЛА)

## Введение

Работа посвящена решению дискретных экстремальных задач Фейера, Турана, Дельсарта, задачи о дискретных константах Джексона в пространстве $l_2$ на циклической группе $\mathbb{Z}_q$ и прямом произведении циклических групп.

Задача Фейера о наибольшем значении неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением, экстремальный полином в задаче Фейера нашли многочисленные применения в различных областях математики. В аналитической теории чисел, теории функций используется обобщение задачи Фейера на случай полиномов с заданным спектром, известное как задача Монтгомери. Ею занимались Х. Монтгомери, Д. В. Горбачев, А. С. Белов.

Задача Турана — это задача о наибольшем среднем значении положительно определенной функции с фиксированным значением в нуле и заданным носителем. Она находит применение в теории чисел, цифровой обработке сигналов. Ею занимались С. Б. Стечкин, Н. Н. Андреев, А. Ю. Попов, В. В. Арестов, Е. Е. Бердышева, Д. В. Горбачев, Р. П. Боас, М. Кац, М. Колунзакис, С. Ревес, А. Гарсиа, Е. Родемич, Г. Рамсей. Задача Турана для периодических положительно определенных функций допускает редукцию к дискретным задачам Фейера и Турана.

Задача Дельсарта — это задача о наибольшем среднем значении положительно определенной функции с фиксированным значением в нуле и неположительной вне заданного множества. Она используется в задачах об оценке мощности кодов, дизайнов, контактных чисел, плотности упаковки однородных пространств. На этом пути важные результаты получили Ф. Дельсарт, Д. Геталс, Дж. Зейдель, К. Данкл, А. Одлыжко, М. Слоэн, В. М. Сидельников, В. И. Левенштейн, Г. А. Кабатянский, Г. Фазекаш, В. А. Юдин, Н. Н. Андреев, В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, О. Р. Мусин, Д. В. Горбачев, Т. Хейлс, Г. Кон, Н. Элкис, А. Кумар и др. Задачи Дельсарта для ассоциативных симметричных схем отношений являются дискретными экстремальными задачами.

В теории приближений важной задачей является задача о точных константах в неравенствах Джексона между величиной наилучшего приближения функции и ее модулем непрерывности. В пространствах $L_2$ ею занимались Н. И. Черных, В. А. Юдин, В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, В. Ю. Попов, Д. В. Горбачев, В. Т. Шевалдин, А. А. Лигун, А. В. Московский, О. И. Смирнов, С. Н. Васильев, А. И. Козко, А. В. Рождественский, Е. Е. Бердышева, А. А. Тюрюканов. Точные константы или константы Джексона являются функциями размерности приближающего подпространства и аргумента в модуле непрерывности. В пространстве $L_2$ на торе $\mathbb{T}$ константа Джексона вычислена только в одном случае Н. И. Черныхом. Один из подходов к вычислению констант Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ состоит в вычислении дискретных констант Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_q)$ и последующем предельном переходе при $q\to\infty$.

Дискретные экстремальные задачи для тригонометрических полиномов на циклической группе $\mathbb{Z}_q$ можно считать экстремальными задачами для обычных тригонометрических полиномов на подгруппе $\Theta_q=\{i/q: i=0,1,\dots,q-1\}$ тора $\mathbb{T}=[0,1)$. Поэтому, например, в задаче Фейера множество неотрицательных полиномов на $\mathbb{Z}_q$ гораздо шире, чем множество неотрицательных тригонометрических полиномов на $\mathbb{T}$, и для них нет известных представлений. Это обстоятельство объясняет трудность рассматриваемых задач. В частности, должны появиться новые экстремальные полиномы, так как нули экстремальных полиномов на $\mathbb{T}$ не всегда будут попадать на подгруппу $\Theta_q$.

В работе дискретные экстремальные задачи Фейера, Турана, Дельсарта на $\mathbb{Z}_q$ решены для всех значений параметров $q$ и $p$ (определяет порядок полинома или размер носителя), описаны экстремальные полиномы. Для получения двусторонних оценок в многомерных дискретных экстремальных задачах Фейера, Турана, Дельсарта вычислены максимальные мощности кодов для двух ассоциативных симметрических схем отношений на прямом произведении циклических групп. Результаты работы частично были опубликованы в [8–10, 13].

## § 1. Гармонический анализ на $\mathbb{Z}_q$

Пусть

$\exp(2\pi ix)=e(x)$, $\cos(2\pi x)=c(x)$ $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant 2$;

$\mathbb{Z}_q=\{0,1,\dots,q-1\}$ — циклическая группа порядка $q$ с операцией сложения по модулю $q$;

$l_2(\mathbb{Z}_q)$ — евклидово пространство всех функций $f:\mathbb{Z}_q\to\mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(f,q)=\frac{1}{q}\sum_{x=0}^{q-1} f(x)\overline{g(x)} \tag{1.1}$$

и нормой $\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}$.

Так как $\mathbb{Z}_q$ — конечная абелева группа, то конечная двойственная группа $\widehat{\mathbb{Z}}_q=\{e(kx/q)\}_{k=0}^{q-1}$ (система характеров $\mathbb{Z}_q$) является полной ортонормированной системой в $l_2(\mathbb{Z}_q)$. Для любой $f$ из $l_2(\mathbb{Z}_q)$ справедливо разложение в сумму Фурье

$$f(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\widehat{f}_k e(kx/q),\qquad \widehat{f}_k=\big(f(x),e(kx/q)\big) \tag{1.2}$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2=\sum_{k=0}^{q-1}|\widehat{f}_k|^2. \tag{1.3}$$

В подпространстве четных функций ортогональный базис образует система косинусов

$$\{c(kx/q)\}_{k=0}^{w}, \quad w = [q/2],$$

$$\big(c(kx/q), c(lx/q)\big) = \frac{\delta_{kl}}{m_k} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l = 0;\ k = l = w, \quad q \text{ четное}, \\ \frac{1}{2}, & k = l = 1, \ldots, w-1;\ k = l = w, \\ & q \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Для любой четной $f$ из $l_2(\mathbb{Z}_q)$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{f}_k c(kx/q), \qquad \widehat{f}_k = m_k \left(f(x), c(kx/q)\right) \tag{1.5}$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{w} \frac{1}{m_k} |\widehat{f}_k|^2. \tag{1.6}$$

Рассмотрим на $\mathbb{Z}_q$ два отображения

$$d_1(x) = \min\{x, q-x\} : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q, \quad d_2(x) = \max\{x, q-x\} : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$$

и две метрики

$$d_1(x,y) = d_1(x-y) : \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q, \quad d_2(x,y) = d_2(x-y) : \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q.$$

Множества их расстояний суть

$$d_1(\mathbb{Z}_q) = \{d_1(x,y) :\ x, y \in \mathbb{Z}_q\} = \{0, 1, \ldots, w\}, \tag{1.7}$$

$$d_2(\mathbb{Z}_q) = \{d_2(x,y) :\ x, y \in \mathbb{Z}_q\} = \left\{0, \left[\frac{q+1}{2}\right], \ldots, q-1\right\}. \tag{1.8}$$

Метрики определяют на $\mathbb{Z}_q$ две ассоциативные симметричные (метрические) схемы отношений

$$Y_1 = (\mathbb{Z}_q, d_1(x,y)), \quad Y_2 = (\mathbb{Z}_q, d_2(x,y)) \tag{1.9}$$

с $w$ классами. Схема $Y_1$ известна как схема правильного $q$-угольника [3, 6, 24].

Метрики $d_i$, $i = 1, 2$, позволяют определить в $l_2(\mathbb{Z}_q)$ некоторые подпространства полиномов. Для $0 \leqslant p \leqslant w$, $i = 1, 2$ положим

$$T_{i,p,q} = \left\{ f \in l_2(\mathbb{Z}_q) : f(x) = \sum_{d_i(k) \leqslant d_i(p)} \widehat{f}_k e(kx/q) \right\}, \tag{1.10}$$

$$C_{i,p,q} = \left\{ f \in l_2(\mathbb{Z}_q) : f(x) = \sum_{d_i(k) \leqslant d_i(p)} \widehat{f}_k c(kx/q) \right\}. \tag{1.11}$$

Подмножества неотрицательных на $\mathbb{Z}_q$ полиномов из $T_{i,p,q}$, $C_{i,p,q}$ обозначим $T^+_{i,p,q}$, $C^+_{i,p,q}$.

При $1 \leqslant p \leqslant w$ полином из $T_{1,p,q}$ может быть записан в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \widehat{f}_k e(kx/q) + \sum_{k=q-p}^{q-1} \widehat{f}_k e(kx/q)$$

или

$$f(x) = \sum_{|k|\leqslant p} \widehat{f}_k e(kx/q),$$

из $T_{2,p,q}$ — в виде

$$f(x) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=p}^{q-p} \widehat{f}_k e(kx/q), \tag{1.12}$$

из $C_{1,p,q}$ — в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \widehat{f}_k c(kx/q), \tag{1.13}$$

из $C_{2,p,q}$ — в виде

$$f(x) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=p}^{w} \widehat{f}_k c(kx/q). \tag{1.14}$$

## § 2. Постановка экстремальных задач Фейера на $\mathbb{Z}_q$

В этом параграфе будут представлены дискретные варианты известной задачи Фейера для тригонометрических полиномов. В этих задачах либо прямо предполагается, что функции являются положительно определенными, либо таковыми являются экстремальные функции.

Пусть $G$ — компактная абелева группа, $C(G)$ — множество непрерывных комплекснозначных на $G$ функций. Функция $\varphi$ из $C(G)$ называется положительно определенной, если для любых $x_1, \ldots, x_m$ из $G$ и любых $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ из $\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \varphi(x_i - x_j)\alpha_i \overline{\alpha}_j \geqslant 0.$$

Пусть $B(G)$ — множество всех непрерывных, положительно определенных на $G$ функций, $B_{\mathbb{R}}(G)$, $B_{\mathbb{R}}(G) \subset B(G)$, — подмножество действительных функций. По обобщенной теореме Бохнера [20, 21] непрерывная функция является положительно определенной на $G$ тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье интегрируемо и неотрицательно на двойственной группе $\widehat{G}$.

Одномерный тор $\mathbb{T} = [0, 1)$ является компактной абелевой группой и любая функция $\varphi$ из $B(\mathbb{T})$ может быть записана в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k e(kx),$$

где $\widehat{\varphi}_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k < \infty$. Тогда

$$B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) = \left\{ \varphi \in B(\mathbb{T}) : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k c(kx), \widehat{\varphi}_k \geqslant 0, \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k < \infty \right\}.$$

Аналогично,

$$B(\mathbb{Z}_q) = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \widehat{\varphi}_k e(kx/q), \widehat{\varphi}_k \geqslant 0,\ k = 0, \ldots, q-1 \right\},$$

$$B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q) = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{\varphi}_k c(kx/q), \widehat{\varphi}_k \geqslant 0,\ k = 0, \ldots, w \right\}.$$

Рассмотрим постановки следующих дискретных экстремальных задач. Вычислить величины

$$\Lambda_1(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{1,p-1,q},\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.1}$$

$$\Lambda_2(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{2,p,q},\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.2}$$

$$\lambda_1(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{1,p-1,q}\cap B(\mathbb{Z}_q),\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.3}$$

$$\lambda_2(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{2,p,q}\cap B(\mathbb{Z}_q),\ \ \widehat{f}_0=1\right\}. \tag{2.4}$$

Преобразование $Af(x)=(f(x)+f(-x))/2$ полином из $T_{i,p,q}$ переводит в полином из $C_{i,p,q}$, сохраняет его неотрицательность, нулевой коэффициент $\widehat{f}_0$, положительную определенность, поэтому

$$\Lambda_1(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{1,p-1,q},\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.5}$$

$$\Lambda_2(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{2,p,q},\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.6}$$

$$\lambda_1(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{1,p-1,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ \ \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.7}$$

$$\lambda_2(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{2,p,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ \ \widehat{f}_0=1\right\}. \tag{2.8}$$

В задачах (2.1), (2.3), (2.5), (2.7) естественно предполагать $p\leqslant w+1$, а в задачах (2.2), (2.4), (2.6), (2.8), что $p\leqslant w$.

Сформулируем непрерывные варианты дискретных задач. Пусть

$$T_p=\left\{f(x): f(x)=\sum_{|k|\leqslant p}\widehat{f}_k e(kx)\right\},\quad C_p=\left\{f(x): f(x)=\sum_{k=0}^{p}\widehat{f}_k c(kx)\right\},$$

$$T_{p,q}=\left\{f(x): f(x)=\widehat{f}_0+\sum_{p\leqslant|k|\leqslant q-p}\widehat{f}_k e(kx)\right\},$$

$$C_{p,q}=\left\{f(x): f(x)=\widehat{f}_0+\sum_{k=p}^{q-p}\widehat{f}_k c(kx)\right\}.$$

Соответствующие подмножества тригонометрических полиномов, неотрицательных на торе $\mathbb{T}$, обозначим $T_p^+$, $C_p^+$, $T_{p,q}^+$, $C_{p,q}^+$.

Требуется вычислить величины

$$\Lambda(p)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{p-1}, \widehat{f}_0=1\right\}=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{p-1}, \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.9}$$

$$\Lambda(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{p,q}, \widehat{f}_0=1\right\}=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{p,q}, \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.10}$$

$$\lambda(p)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{p-1}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \widehat{f}_0=1\right\}=$$
$$=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{p-1}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \widehat{f}_0=1\right\}, \tag{2.11}$$

$$\lambda(p,q)=\sup\left\{f(0): f\in T^+_{p,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \widehat{f}_0=1\right\}=$$
$$=\sup\left\{f(0): f\in C^+_{p,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \widehat{f}_0=1\right\}. \tag{2.12}$$

Задачу (2.9) поставил и решил Л. Фейер [12, 23]. Он показал, что $\Lambda(p)=p$. Оценка снизу была получена с помощью единственного экстремального полинома

$$F_{p-1}(x)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)c(kx)=\frac{1}{p}\left(\frac{\sin\pi px}{\sin\pi x}\right)^2. \tag{2.13}$$

Оценка сверху была доказана им с помощью квадратурной формулы прямоугольников

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}f\left(\frac{k}{p}\right),\quad f\in T_{p-1}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) вытекает, что $\lambda(p)=\Lambda(p)$.

Задачи (2.1)–(2.8), (2.10), (2.12) будем называть задачами Фейера.

К задаче (2.1) Д. В. Горбачевым и А. С. Маношиной [5] была сведена задача Турана для 1-периодических положительно определенных функций с носителем на отрезке $[-h,h]$, $h=p/q$, $2p\leqslant q$, $(p,q)=1$.

Задача (2.10) в несколько другой, но эквивалентной форме ставилась Х. Монтгомери [25].

## § 3. Коэффициенты одного класса четных тригонометрических полиномов

Этот параграф носит вспомогательный характер. Его результаты будут использованы при решении экстремальных задач Фейера. Возможно, результаты параграфа имеют и самостоятельный интерес.

При проверке положительной определенности четного тригонометрического полинома необходимо проверять неотрицательность его коэффициентов. Часто полином задается своими нулями. Возникает задача выяснения знаков коэффициентов полинома по его нулям. В общем случае это очень сложная задача. Для одного класса четных тригонометрических полиномов удается записать коэффициенты через нули в форме, удобной для анализа знаков коэффициентов. В этот класс, в частности, входит и полином Фейера (2.13).

Рассмотрим четный тригонометрический полином порядка $p-1$

$$t_{p-1}(x,\varphi)=\prod_{k=1}^{p-1}(c(x)-c(k\varphi)) \tag{3.1}$$

переменной $x$, зависящий от параметра $\varphi$, $\varphi\in\mathbb{T}$. Это есть однопараметрический класс четных тригонометрических полиномов. Нули полинома (3.1) суть $\pm k\varphi$, $k=1,\dots,p-1$. Полином Фейера (2.13) с точностью до положительного множителя получается при $\varphi=\frac{s}{p}$, $(s,p)=1$, $s\in\{1,\dots,p\}$.

Запишем разложение (3.1) в виде

$$\begin{aligned} t_{p-1}(x,\varphi)=\frac{1}{2^{p-2}}\Bigg\{&\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^kA_k^p(\varphi)c((p-1-k)x)+\\ &+\frac{1}{2}(-1)^{p-1}A_{p-1}^p(\varphi)\Bigg\}=\frac{a_0^p(\varphi)}{2}+\sum_{k=1}^{p-1}a_k^p(\varphi)c(kx), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$a_k^p(\varphi)=\frac{(-1)^{p-1-k}}{2^{p-2}}A_{p-1-k}^p(\varphi),\quad k=0,1,\dots,p-1.$$

Если разложение (3.2) запишем для полинома $t_{p-2}(x,\varphi)$, умножим его на $(c(x)-c((p-1)\varphi))$ и сравним полученное произведение с разложением (3.1) для полинома $t_{p-1}(x,\varphi)$, то придем к реккурентным формулам

$$\begin{aligned} &A_k^p(\varphi)=A_k^{p-1}(\varphi)+A_{k-2}^{p-1}(\varphi)+2c((p-1)\varphi)A_{k-1}^{p-1}(\varphi), \quad k=1,\ldots,p-2,\\ &A_{p-1}^p(\varphi)=2A_{p-3}^{p-1}(\varphi)+2c((p-1)\varphi)A_{p-2}^{p-1}(\varphi), \quad A_0^p(\varphi)=1,\ A_{-1}^p(\varphi)=0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из формул (3.3) вытекает, что коэффициенты $A_k^p(\varphi)$ являются четными тригонометрическими полиномами переменной $\varphi$ порядка $s_k=pk-\frac{k(k+1)}{2}$, а коэффициенты $a_k^p(\varphi)$ — порядка $\widetilde{s}_k=\frac{(p+k)(p-k-1)}{2}$, $k=0,1,\ldots,p-1$.

Полиномы $A_k^p(\varphi)$ не допускают разложения на простые для исследования их знака сомножители.

Положим

$$B_k^p(\varphi)=A_{k-1}^p(\varphi)+A_k^p(\varphi), \quad k=1,\ldots,p-1,\ B_0^p(\varphi)=1,\ B_{-1}^p(\varphi)=0. \tag{3.4}$$

С помощью (3.3) выводим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &B_k^p(\varphi)=B_k^{p-1}(\varphi)+B_{k-2}^{p-1}(\varphi)+2c((p-1)\varphi)B_{k-1}^{p-1}(\varphi), \quad k=1,\ldots,p-2,\\ &B_{p-1}^p(\varphi)=B_{p-3}^{p-1}(\varphi)+(1+2c((p-1)\varphi))B_{p-2}^{p-1}(\varphi). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Л е м м а 1. *Для* $k=1,\ldots,p-1$

$$B_k^p(\varphi)=\prod_{\nu=1}^{k}\frac{\sin\pi(2p-\nu)\varphi}{\sin\pi\nu\varphi}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$A_0^2(\varphi)=1,\ A_1^2(\varphi)=2\cos 2\pi\varphi,$$

$$B_1^2(\varphi)=A_0^2(\varphi)+A_1^2(\varphi)=1+2\cos 2\pi\varphi=\frac{\sin 3\pi\varphi}{\sin\pi\varphi},$$

поэтому (3.6) для $p=2$, $k=1$ — верно. Предположим, что

$$B_k^{p-1}(\varphi)=\prod_{\nu=1}^{k}\frac{\sin\pi(2p-\nu-2)\varphi}{\sin\pi\nu\varphi}, \quad k=1,\ldots,p-2.$$

Если $k=1,\ldots,p-2$, то согласно (3.5)

$$\begin{aligned} B_k^p(\varphi)\prod_{\nu=1}^{k}\sin\pi\nu\varphi&=\prod_{\nu=1}^{k}\sin\pi(2p-\nu-2)\varphi+\\ &+\sin\pi(k-1)\varphi\sin\pi k\varphi\prod_{\nu=1}^{k-2}\sin\pi(2p-\nu-2)\varphi+\\ &+2\cos 2\pi(p-1)\varphi\sin\pi k\varphi\prod_{\nu=1}^{k-1}\sin\pi(2p-\nu-2)\varphi=\\ &=\{\sin\pi(2p-k-1)\varphi\sin\pi(2p-k-2)\varphi+\sin\pi(k-1)\varphi\sin\pi k\varphi+\\ &+2\cos 2\pi(p-1)\varphi\sin\pi k\varphi\sin\pi(2p-k-1)\varphi\}\prod_{\nu=3}^{k}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=\\ &=\{\sin\pi(2p-2+k)\varphi\sin\pi(2p-k-1)\varphi+\\ &+\sin\pi(k-1)\varphi\sin\pi k\varphi\}\prod_{\nu=3}^{k}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=\\ &=\frac{1}{2}\{\cos\pi\varphi-\cos\pi(4p-3)\varphi\}\prod_{\nu=3}^{k}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=\prod_{\nu=1}^{k}\sin\pi(2p-\nu)\varphi. \end{aligned}$$

Аналогично, если $k=p-1$, то

$$B_{p-1}^{p}(\varphi)\prod_{\nu=1}^{p-1}\sin\pi\nu\varphi=$$
$$=\sin\pi(p-1)\varphi\Big\{\sin\pi(p-2)\varphi+(1+2\cos 2\pi(p-1)\varphi)\sin\pi p\varphi\Big\}\times$$
$$\times\prod_{\nu=3}^{p-1}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=$$
$$=\sin\pi(p-1)\varphi\{\sin\pi p\varphi+\sin\pi(3p-2)\varphi\}\prod_{\nu=3}^{p-1}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=$$
$$=2\sin\pi(p-1)\varphi\cos\pi(p-1)\varphi\sin\pi(2p-1)\varphi\prod_{\nu=3}^{p-1}\sin\pi(2p-\nu)\varphi=$$
$$=\prod_{\nu=1}^{p-1}\sin\pi(2p-\nu)\varphi.$$

Таким образом, (3.6) верно для $p$ и $k=1,\dots,p-1$. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Для* $k=0,1,\dots,p-1$

$$a_k^p(\varphi)=\frac{1}{2^{p-2}}\sum_{s=0}^{p-1-k}(-1)^s B_s^p(\varphi). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.4)

$$(-1)^k A_k^p(\varphi)-(-1)^{k-1}A_{k-1}^p(\varphi)=(-1)^k B_k^p(\varphi),\quad k=0,1,\dots,p-1.$$

Отсюда

$$A_0^p(\varphi)=B_0^p(\varphi),\quad -A_1^p(\varphi)=A_0^p(\varphi)-B_1^p(\varphi)=B_0^p(\varphi)-B_1^p(\varphi),$$
$$(-1)^k A_k^p(\varphi)=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s B_s^p(\varphi).$$

Из

$$a_k^p(\varphi)=\frac{(-1)^{p-1-k}}{2^{p-2}}A_{p-1-k}^p(\varphi),$$

следует

$$a_k^p(\varphi)=\frac{1}{2^{p-2}}\sum_{s=0}^{p-1-k}(-1)^s B_s^p(\varphi),\quad k=0,1,\dots,p-1.$$

Лемма 2 доказана.

С помощью формул (3.7) легко восстановить коэффициенты полинома Фейера по его нулям. Если $\varphi=1/p$, то для $s=0,1,\dots,p-1$

$$B_s^p(1/p)=(-1)^s$$

и

$$a_k^p\,(1/p)=(p-k)/2^{p-2},$$

поэтому

$$\prod_{k=1}^{p-1}\big(c(x)-c(k/p)\big)=2^{2-p}\left\{p/2+\sum_{k=1}^{p-1}(p-k)c(kx)\right\}.$$

Остается только пронормировать нулевой коэффициент. В частности, получаем формулу

$$F_{p-1}(x) = \frac{2^{p-1}}{p} \prod_{k=1}^{p-1} \big(c(x) - c(k/p)\big) .$$

В следующей лемме даются достаточные условия положительности коэффициентов полинома (3.1).

Л е м м а 3. *Если* $r \in \{1, \ldots, p-1\}$, $(r, p) = 1$, $|\varphi_0 - r/p| \leqslant 1/2p^2$, *то* $\operatorname{sgn} B_k^p(\varphi_0) = (-1)^k$ *и*

$$a_k^p(\varphi_0) = \frac{1}{2^{p-2}} \sum_{s=0}^{p-1-k} |B_s^p(\varphi_0)|, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

*В частности,*

$$a_0^p(\varphi_0) > a_1^p(\varphi_0) > \cdots > a_{p-1}^p(\varphi_0) > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.7), достаточно показать, что в условиях леммы

$$\operatorname{sgn} B_k^p(\varphi_0) = (-1)^k, \quad k = 1, \ldots, p-1. \tag{3.8}$$

Так как $B_k^p(r/p) = (-1)^k$, то для доказательства (3.8) достаточно убедиться, что точки $\varphi_0$ и $\varphi_1 = r/p$ лежат на одних участках знакопостоянства сомножителей в (3.6).

Вначале покажем, что для $\nu = 1, \ldots, p-1$

$$\operatorname{sgn} \sin \pi(\nu - 2p)\varphi_0 = \operatorname{sgn} \sin \pi(\nu - 2p)\varphi_1.$$

Действительно, согласно условию $(r, p) = 1$

$$\nu r = \alpha p + \beta, \quad \beta \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Отсюда

$$\sin \pi(\nu - 2p)\varphi_1 = \sin \frac{\pi \nu r}{p} = \sin\left(\pi\alpha + \frac{\pi\beta}{p}\right) = (-1)^\alpha \sin \frac{\pi\beta}{p}$$

и

$$\operatorname{sgn} \sin \pi(\nu - 2p)\varphi_1 = (-1)^\alpha.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sin \pi(\nu - 2p)\varphi_0 = \sin\big(\pi(\nu - 2p)\varphi_1 - \pi(2p - \nu)(\varphi_0 - \varphi_1)\big) = \\ = \sin\left(\pi\alpha + \pi\left(\frac{\beta}{p} - (2p - \nu)(\varphi_0 - \varphi_1)\right)\right) = \\ = (-1)^\alpha \sin \pi\left(\frac{\beta}{p} - (2p - \nu)(\varphi_0 - \varphi_1)\right). \end{aligned}$$

Так как $2p - \nu \leqslant 2p - 1$, $|\varphi_0 - \varphi_1| \leqslant 1/2p^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p^2} \leqslant \frac{1}{p} - |\varphi_0 - \varphi_1|(2p-1) \leqslant \frac{\beta}{p} - (2p - \nu)(\varphi_0 - \varphi_1) \leqslant \\ \leqslant \frac{p-1}{p} + |\varphi_0 - \varphi_1|(2p-1) \leqslant 1 - \frac{1}{2p^2} \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{sgn}\sin\pi(\nu-2p)\varphi_0=(-1)^\alpha.$$

Аналогично,

$$\operatorname{sgn}\sin\pi\nu\varphi_1=(-1)^\alpha,\quad \operatorname{sgn}\sin\pi\nu\varphi_0=(-1)^\alpha\sin\pi\left(\frac{\beta}{p}+\nu(\varphi_0-\varphi_1)\right).$$

Так как $\nu\leqslant p-1<p$, то

$$\frac{1}{2p}\leqslant\frac{1}{p}-p|\varphi_0-\varphi_1|<\frac{\beta}{p}+\nu(\varphi_0-\varphi_1)<\frac{p-1}{p}+p|\varphi_0-\varphi_1|\leqslant 1-\frac{1}{2p}$$

и

$$\operatorname{sgn}\sin\pi\nu\varphi_0=(-1)^\alpha.$$

Значит, (3.8) выполнено. Лемма 3 доказана.

## § 4. Решение дискретных задач Фейера

В этом параграфе будут решены задачи Фейера (2.5)–(2.8). Экстремальные полиномы в задаче (2.5) будем обозначать

$$F_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{F}_k^{p,q}c(kx/q),\quad \widehat{F}_0^{p,q}=1,\tag{4.1}$$

а в задаче (2.6) —

$$f_{p,q}(x)=1+\sum_{k=p}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(kx/q).\tag{4.2}$$

Вначале исследуем задачи (2.5), (2.7). Рассмотрим случай $p=w+1$.

Лемма 4. *Если $p=w+1$, то*

$$\Lambda_1(p,q)=\lambda_1(p,q)=q.\tag{4.3}$$

*Экстремальный полином единственен и имеет вид*

$$F_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{w}m_kc(kx/q),\tag{4.4}$$

*где числа $m_k$ определены в* (1.4).

Доказательство. Пусть $p=w+1$, полином $f$ принадлежит $C^+_{1,p-1,q}$, $\widehat{f}_0=1$. Запишем для него квадратурную формулу прямоугольников

$$1=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}f(k).$$

Пользуясь неотрицательностью $f(k)$, получим

$$f(0)\leqslant q.$$

Отсюда вытекает оценка сверху в (4.3). Равенство в ней будет тогда и только тогда, когда $f(0)=q$, $f(k)=0$, $k=1,\dots,q-1$. Это выполняется только для полинома (4.4). Лемма 4 доказана.

Рассмотрим основной случай $p \leqslant w$. Он подразделяется на три:

$$1)\ p \mid q; \quad 2)\ (p,q)=1; \quad 3)\ p \mid q,\ (p,q)=d>1.$$

Пусть $p \mid q$, $q=dp$, $d \geqslant 2$. Применяя квадратурную формулу прямоугольников (2.14), получим

$$\Lambda_1(p,q)=\lambda_1(p,q)=p, \tag{4.5}$$

причем в качестве экстремального полинома можно взять полином $F_{p,q}(x)=F_{p-1}(x/q)$, где $F_{p-1}$ — полином Фейера (2.13). Однако экстремальный полином не единственен. Поэтому этот случай рассмотрим подробнее. Вместо квадратурной формулы прямоугольников будем использовать квадратурную формулу, прямо определяемую полиномом Фейера.

Лемма 5. *Если $p,q \in \mathbb{N}$, $p \mid q$, $q=dp$, $p \leqslant w$, то для любого дискретного четного тригонометрического полинома $f(x)$ из $C_{1,p-1,q}$ порядка $p-1$*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1} \widehat{f}_k c(kx/q)$$

*справедлива квадратурная формула*

$$\widehat{f}_0=\frac{1}{p}\left\{f(0)+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)f(kd)\right\}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно (2.13) для полиномов $c(rx/q)$, $r=0,1,\ldots,p-1$, равенство (4.6) верно:

$$\frac{1}{p}\left\{1+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)c(kdr/q)\right\}=$$
$$=\frac{1}{p}\left\{1+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)c(kr/p)\right\}=\frac{1}{p^2}\left(\frac{\sin\pi r}{\sin(\pi r/p)}\right)^2=\begin{cases}1, & r=0,\\ 0, & r=1,\ldots,p-1.\end{cases}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\mid q$, $p\leqslant w$, то*

$$\Lambda_1(p,q)=\lambda_1(p,q)=p=F_{p,q}(0)$$

*и полином*

$$F_{p,q}(x)=F_{p-1}(x/q) \tag{4.7}$$

*является экстремальным в задачах* (2.5), (2.7). *Все экстремальные полиномы в задаче* (2.5) *имеют вид*

$$F_{p,q}(x)=\lambda_0\prod_{k=1}^{[p/2]}\big(c(x/q)-c(k/p)\big)\prod_{k=1}^{[(p-1)/2]}\big(c(x/q)-c(z_k/q)\big), \tag{4.8}$$

*где* $\lambda_0>0$; $z_k\in\mathbb{R}$, $|z_k-qk/p|\leqslant 1$, $k=1,\ldots,[(p-1)/2]$.

Доказательство. Оценка сверху величины (2.5) получается с помощью квадратурной формулы (4.6). Если $f\in C^+_{1,p-1,q}$, $\widehat{f}_0=1$, то согласно (4.6)

$$1=\frac{1}{p}\left\{f(0)+2\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{k}{p}\right)f(dk)\right\}\geqslant\frac{f(0)}{p}. \tag{4.9}$$

Отсюда $f(0)\leqslant p$, поэтому $\Lambda_1(p,q)\leqslant p$.

Согласно (2.13) полином $F_{p-1}(x/q)$ принадлежит $C^+_{1,p-1,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, для него $\widehat{f}_0=1$ и $F_{p-1}(0)=p$. Значит, он является экстремальным в задачах (2.5), (2.7).

Согласно (4.9) экстремальный полином в задаче (2.5) имеет нули в точках $x_k=dk$, $k=1,\ldots,p-1$. Это влечет появление у него сомножителя

$$\prod_{k=1}^{[p/2]}\bigl(c(x/q)-c(k/q)\bigr)\,.$$

Второй сомножитель

$$\prod_{k=1}^{[(p-1)/2]}\bigl(c(x/q)-c(z_k/q)\bigr)\,,\quad |z_k-qk/p|\leqslant 1$$

необходим для неотрицательности их произведения на $\mathbb{Z}_q$. Так как произведение этих сомножителей является полиномом порядка $p-1$, то произвольный экстремальный полином в задаче (2.5) имеет вид (4.8). Лемма 6 доказана.

Экстремальные полиномы в задаче (2.7) — это полиномы (4.8), имеющие неотрицательные коэффициенты разложения. Мы предполагаем, что это так для всех полиномов (4.8), но доказать это нам не удалось. Покажем, по крайней мере, что экстремальный полином (4.7) не единственен в задаче (2.7). Если $F_{p,q}(x)$ — полином (4.8), отличный от (4.7), то при достаточно малом $\varepsilon>0$ полином $(1-\varepsilon)F_{p-1}(x/q)+\varepsilon F_{p,q}(x)$ будет также экстремальным в задаче (2.7).

Отметим, что если $p\,|\,q$, то полином (4.7) дает оценку $\Lambda_1(p,q)\geqslant\lambda_1(p,q)\geqslant p$.

Пусть теперь $(p,q)=1$, $p<w$. Построим экстремальный полином $F_{p,q}$ (4.1) в задаче (2.5).

Пусть

$$\begin{gathered}S^1_{p,q}=\bigl\{\,[qi/p]:i=1,\ldots,[p/2]\bigr\}\,,\\ S^2_{p,q}=\bigl\{\,[qi/p]+1:i=1,\ldots,[(p-1)/2]\bigr\}\,,\\ S_{p,q}=S^1_{p,q}\cup S^2_{p,q}.\end{gathered}\tag{4.10}$$

Множество $S_{p,q}$ содержит $p-1$ элементов, которые лежат на интервале $(0,q/2)$. Занумеруем их в порядке возрастания $r_1<r_2<\cdots<r_{p-1}$.

Множество $S_{p,q}\cup(-S_{p,q})$ и будет множеством нулей экстремального полинома. Если

$$\Theta_q=\{i/q:i=0,1,\ldots,q-1\}\subset\mathbb{T}$$

— подгруппа тора, то числа $r_{2i-1}/q$ из $\Theta_q$ наилучшим образом аппроксимируют на $\Theta_q$ нули $i/p$ полинома Фейера (2.13) снизу, а числа $r_{2i}/q$ из $\Theta_q$ — сверху и образуют пары $(r_{2i-1},r_{2i})$, в которых $r_{2i}-r_{2i-1}=1$, $i=1,\ldots,[(p-1)/2]$. Для четного $p$ и нечетного $q$ число $r_{p-1}$ равно $(q-1)/2$ и у него нет пары, причем число $r_{p-1}/q$ из $\Theta_q$ аппроксимирует снизу нуль полинома Фейера, равный $1/2$.

Наша цель доказать, что экстремальный полином в задачах (2.1), (2.5) имеет вид

$$F_{p,q}(x)=1+\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{F}^{p,q}_k c(kx/q)=\lambda_0\prod_{k=1}^{p-1}\bigl(c(x/q)-c(r_k/q)\bigr)\,,\ \lambda_0>0.\tag{4.11}$$

По построению и свойствам чисел $r_k$ для него выполнены неравенства

$$F_{p,q}(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{Z}_q, \tag{4.12}$$

т. е. он из $C^+_{1,p-1,q}$. Покажем, что его коэффициенты $\widehat{F}^{p,q}_k$ положительны при $k=1,\dots,p-1$, т. е. что он и из $B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$.

Лемма 7. *Если $r,m \in \mathbb{N}$, $r > m$, $(r,m)=1$, то существуют числа $u,l$ из $\mathbb{Z}_+$, $u \leqslant m/2$, $l \leqslant r/2$, такие, что*

$$|ru - ml| = 1. \tag{4.13}$$

Доказательство. Известно [19, с. 14–17], что уравнение

$$ru - ml = 1 \tag{4.14}$$

при условии $(r,m)=1$ имеет решение $(u,l)$, $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant l \leqslant r$. Если $u \leqslant m/2$, $l \leqslant r/2$, то (4.13) доказано. Возможны еще три случая.

1. Пусть $u > [m/2]$, $l > [r/2]$. Если $u^* = m-u$, $l^* = r-l$, то $u^* \leqslant m/2$, $l^* \leqslant r/2$,

$$|ru^* - ml^*| = |(m-u)r - (r-l)m| = |-ru + lm| = 1$$

и $(u^*,l^*)$ — искомое решение (4.13).

2. Пусть $u > [m/2]$, $l \leqslant [r/2]$. Если $r = 2r'+1$, $m = 2m'$, то $u \geqslant m'+1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - ml \geqslant (2r'+1)(m'+1) - 2m'r' = 2r' + m' + 1 > 1,$$

что противоречит (4.14). Если $r = 2r'$, $m = 2m'+1$, то $u \geqslant m'+1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - ml \geqslant 2r'(m'+1) - (2m'+1)r' = r' \geqslant 1.$$

Равенство (4.14) выполнено, если только $r=2$, $m=1$. В этом случае можно взять $u=0$, $l=1$. Если $r=2r'+1$, $m=2m'+1$, то $u \geqslant m'+1$, $l \leqslant r'$ и

$$ru - lm \geqslant (2r'+1)(m'+1) - (2m'+1)r' = r' + m' + 1 > 1,$$

что опять противоречит (4.14).

3. Пусть $u \leqslant m/2$, $l > [r/2]$. Тогда

$$ru - ml \leqslant \frac{rm}{2} - m\left(\left[\frac{r}{2}\right] + 1\right) < 0,$$

что противоречит (4.14).

Все случаи рассмотрены. Лемма 7 доказана.

Для $a \in \mathbb{Z}$ через $\langle a \rangle$ обозначим расстояние от числа $a$ до ближайшего целого, кратного $q$,

$$\langle a \rangle = \min(a_0, q - a_0),$$

если $a_0 \in \mathbb{Z}_q$, $a = a_0 \pmod q$. Отметим легко проверяемые свойства операции $\langle a \rangle$:

$$\begin{aligned} 1)\ \langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle \Longleftrightarrow a_2 + a_1 = 0 \pmod q \quad &\text{или} \\ a_2 - a_1 = 0 \pmod q \Longleftrightarrow c(a_1/q) = c(a_2/q);& \end{aligned} \tag{4.15}$$

2) $\langle -a\rangle = \langle a\rangle$; (4.16)

3) если $\langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle$, то для любого $j$, $j\in\mathbb{Z}$, $\langle a_1 j\rangle = \langle a_2 j\rangle$; (4.17)

4) если $(q,j)=1$, то $\langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1 j\rangle = \langle a_2 j\rangle$.

Пусть

$$\begin{aligned} &q=pk+r, \quad r\in\{1,\dots,p-1\},\\ &p=rt+m, \quad m\in\{1,\dots,r-1\} \text{ при } r\geqslant 2, m=0, \text{ при } r=1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Положим

$$\overline{r}=\overline{r}(p,q)=\begin{cases} k, & r=1\\ (lt+u)k+l, & r\geqslant 2,\end{cases} \tag{4.19}$$

где числа $u, l$ удовлетворяют условиям леммы 7.

Отметим, что

$$(\overline{r},q)=1, \quad (lt+u,p)=1. \tag{4.20}$$

Действительно, согласно (4.18), (4.13)

$$r(lt+u)-lp=r(lt+u)-l(rt+m)=ru-lm=\pm 1$$

и $(lt+u,p)=1$. Пусть $(\overline{r},q)=d$. Так как

$$r\overline{r}-lq=r((lt+u)k+l)-l((rt+m)k+r)=(r(lt+u)-lp)k=\pm k,$$

то $d\,|\,k$, $d\,|\,r$, $d\,|\,l$, поэтому из (4.13) $d=1$.

Если $ru-lm=\pm 1$, то в $\mathbb{Z}_q$

$$\overline{r}(q-p)=1, \quad \overline{r}p=1 \tag{4.21}$$

соответственно. Действительно, если, например, $ru-lm=1$, то согласно (4.18), (4.19)

$$\begin{aligned} r\overline{r}&=r((lt+u)k+l)=l((rt+m)k+r)+(ru-ml)k=lk+k,\\ m\overline{r}&=mltk+muk+ml=(ru-1)tk+muk+ml=\\ &\qquad=u((rt+m)k+r)+ml-ru-tk=uq-1-tk \end{aligned}$$

и

$$\overline{r}(q-p)=\overline{r}q-\overline{r}q-\overline{r}(rt+m)=\overline{r}q-(lqt+kt+uq-1-kt)=1 \pmod q.$$

Л е м м а 8. *Для всех* $x\in\mathbb{R}$

$$\prod_{k=1}^{p-1}\bigl(c(x/q)-c(r_k/q)\bigr)=\prod_{k=1}^{p-1}\bigl(c(x/q)-c(\overline{r}k/q)\bigr). \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить, что для $z\geqslant 1$

$$\prod_{k=1}^{p-1}\bigl(z-c(r_k/q)\bigr)=\prod_{k=1}^{p-1}\bigl(z-c(\overline{r}k/q)\bigr). \tag{4.23}$$

Так как для $k=1,\dots,[(p-1)/2]$

$$[qk/p]+1+[q(p-k)/p]=q,$$

то согласно (4.10), (4.15)

$$\prod_{k=1}^{p-1}\big(z-c(r_k/q)\big)=\prod_{k=1}^{[p/2]}\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{qk}{p}\right]\right)\right)\prod_{k=1}^{[(p-1)/2]}\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left(\left[\frac{qk}{p}\right]+1\right)\right)\right)=$$
$$=\prod_{k=1}^{[p/2]}\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{qk}{p}\right]\right)\right)\prod_{k=1}^{[(p-1)/2]}\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{q(p-k)}{p}\right]\right)\right)=$$
$$=\prod_{k=1}^{p-1}\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{qk}{p}\right]\right)\right). \quad (4.24)$$

Рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{qk}{p}\right]\right)\right), \quad z\geqslant 1.$$

Так как

$$[m/q]-[(m-1)/q]=\begin{cases}1, & q\mid m,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

то

$$f(z)=\sum_{m=p}^{pq-1}\ln\left(z-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{m}{p}\right]\right)\right)\left(\left[\frac{m}{q}\right]-\left[\frac{m-1}{q}\right]\right).$$

Представив $m=pn+s$, $1\leqslant n\leqslant q-1$, $0\leqslant s\leqslant p-1$, получим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\frac{n}{q}\right)\right)\sum_{s=0}^{p-1}\left(\left[\frac{pn+s}{q}\right]-\left[\frac{pn+s-1}{q}\right]\right).$$

Если $x=[x]+\{x\}$, где $[x]$ — целая часть $x$, а $\{x\}$ — его дробная часть, то

$$\sum_{s=0}^{p-1}\left(\left[\frac{pn+s}{q}\right]-\left[\frac{pn+s-1}{q}\right]\right)=\sum_{s=0}^{p-1}\left[\frac{pn+s}{q}\right]-\sum_{s=-1}^{p-2}\left[\frac{pn+s}{q}\right]=$$
$$=\left[\frac{pn+p-1}{q}\right]-\left[\frac{pn-1}{q}\right]=\frac{p}{q}+\left\{\frac{pn-1}{q}\right\}-\left\{\frac{pn+p-1}{q}\right\},$$

поэтому

$$f(z)=\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{q-1}\ln(z-c(n/q))+$$
$$+\sum_{n=1}^{q-1}\ln(z-c(n/q))\left(\left\{\frac{pn-1}{q}\right\}-\left\{\frac{pn+p-1}{q}\right\}\right)=f_1(z)+f_2(z).$$

Согласно (4.15), (4.16), (4.21)

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\frac{n\overline{r}p}{q}\right)\right)\left(\left\{\frac{pn-1}{q}\right\}-\left\{\frac{pn+p-1}{q}\right\}\right).$$

Так как $(p,q)=1$, то произведения $pn$ пробегают $\mathbb{Z}_q\backslash 0$, поэтому

$$f_2(z)=\sum_{k=1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\frac{\overline{r}k}{q}\right)\right)\left(\frac{k-1}{q}-\left\{\frac{k+p-1}{q}\right\}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\frac{\overline{r}k}{q}\right)\right)\left(\left[\frac{k+p-1}{q}\right]-\frac{p}{q}\right).$$

Замечая, что

$$f_2(z)=\sum_{k=q-p+1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\overline{r}k/q\right)\right)-\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{q-1}\ln\left(z-c\left(\overline{r}k/q\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(z-c\left(\overline{r}k/q\right)\right)-\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{q-1}\ln\left(z-c(n/q)\right)=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(z-c\left(\overline{r}k/q\right)\right)-f_1(z),$$

получаем

$$f(z)=\sum_{k=1}^{p-1}\left(z-c\left(\overline{r}k/q\right)\right)=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(r-c\left(\frac{1}{q}\left[\frac{qk}{p}\right]\right)\right).$$

Потенциируя последнее равенство и учитывая (4.24), получим (4.23), а, значит, и (4.22). Лемма 8 доказана.

З а м е ч а н и е. Первоначальное доказательство (4.22) [8, 9] основывалось на непосредственной проверке равенства

$$S_{p,q}=\{<\overline{r}k>: k=1,\ldots,p-1\}.$$

Настоящий подход был предложен К. Г. Васильевым.

Согласно (4.22) неотрицательный дискретный полином $F_{p,q}$ (4.11) может быть записан в виде

$$F_{p,q}(x)=\lambda_0\prod_{k=1}^{p-1}\left(c(x/q)-c(\overline{r}k/q)\right). \tag{4.25}$$

Полином $F_{p,q}$ относится к классу полиномов (3.1) с параметром $\varphi_0=\overline{r}/q$ и для исследования знаков его коэффициентов можно применить результаты §3.

Если $\overline{r}=(lt+u)k+l$ (см. (4.19)), $ru-lm=\pm1$ (см. (4.13)), то

$$\frac{\overline{r}}{q}=\frac{lt+u}{p}\mp\frac{1}{pq}.$$

Согласно (4.20), $(lt+u,p)=1$ и $B_k^p((lt+u)/p)=(-1)^k$ (см. (3.6)). Так как

$$\left|\varphi_0-\frac{lt+u}{p}\right|=\frac{1}{pq}\leqslant\frac{1}{2p^2},$$

то по лемме 3 для коэффициентов $\widehat{F}_k^{p,q}$ выполнены неравенства

$$2\widehat{F}_0^{p,q}=2>\widehat{F}_1^{p,q}>\widehat{F}_2^{p,q}>\cdots>\widehat{F}_{p-1}^{p,q}>0, \tag{4.26}$$

и они могут быть вычислены по формулам

$$\widehat{F}_k^{p,q}=\frac{2\sum\limits_{s=0}^{p-1-k}\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1}\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|},\quad k=1,\ldots,p-1. \tag{4.27}$$

Значение полинома $F_{p,q}$ в нуле равно

$$F_{p,q}(0)=1+\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{F}_k^{p,q}=1+\frac{2\sum\limits_{k=1}^{p-1}\sum\limits_{s=0}^{p-1-k}\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1}\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|}=\frac{2\sum\limits_{s=0}^{p-1}(p-s)\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|}{\sum\limits_{s=0}^{p-1}\left|B_s^p(\overline{r}/q)\right|}-1. \tag{4.28}$$

Рассмотрим следующий четный дискретный полином порядка $r_{p-1}$

$$G_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{G}_k^{p,q}c(\overline{r}kx/q), \tag{4.29}$$

у которого коэффициенты вычисляются по формулам

$$\widehat{G}_k^{p,q}=\widehat{F}_k^{p,q}/F_{p,q}(0), \quad k=0,1,\ldots,p-1. \tag{4.30}$$

Согласно (4.12), (4.25), (4.26) он обладает следующими свойствами

$$1)\ \widehat{G}_0^{p,q}=1/F_{p,q}(0), \quad \widehat{G}_k^{p,q}\geqslant 0, \qquad k=1,\ldots,p-1, \tag{4.31}$$

$$2)\ G_{p,q}(x)\geqslant 0, \qquad x\in\mathbb{Z}_q, \tag{4.32}$$

$$3)\ G_{p,q}(0)=1, \qquad G_{p,q}(x)=0, \quad x=1,\ldots,p-1. \tag{4.33}$$

Лемма 9. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p<w$, $(p,q)=1$, то для любого дискретного четного тригонометрического полинома $f(x)$ из $C_{1,p-1,q}$ порядка $p-1$*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{f}_kc(kx/q)$$

*справедлива квадратурная формула*

$$\widehat{f}_0=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{G}_k^{p,q}f(\overline{r}k). \tag{4.34}$$

Доказательство. Формулу (4.34) достаточно проверить для полиномов $\cos\frac{2\pi}{q}kx$, $k=0,1,\ldots,p-1$, для которых она вытекает из (4.33). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p<w$, $(p,q)=1$, то единственным экстремальным полиномом в задачах* (2.5), (2.7) *является полином $F_{p,q}$* (*см.* (4.11), (4.25)) *и*

$$\Lambda_1(p,q)=\lambda_1(p,q)=F_{p,q}(0).$$

Доказательство. Оценка сверху величины (2.1) получается с помощью квадратурной формулы (4.34). Если $f\in T^+_{1,p-1,q}$, $\widehat{f}_0=1$, то, согласно (4.34), (4.31),

$$1=\widehat{G}_0^{p,q}f(0)+\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{G}_k^{p,q}f(\overline{r}k)\geqslant\widehat{G}_0^{p,q}f(0).$$

Отсюда

$$f(0)\leqslant 1/\widehat{G}_0^{p,q}=F_{p,q}(0),$$

поэтому $\Lambda_1(p,q)\leqslant F_{p,q}(0)$. Остается заметить, что $\lambda_1(p,q)\leqslant\Lambda_1(p,q)$.

Согласно (4.11), (4.26) полином $F_{p,q}$ принадлежит $C^+_{1,p-1,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, значит он является экстремальным. Согласно квадратурной формуле (4.34) и лемме 9 он обязан иметь нули в точках множества $S_{p,q}$. Это условие и условие $\widehat{f}_0=1$ определяют экстремальный полином однозначно. Лемма 10 доказана.

Гипотезы о виде экстремального полинома (4.11) и квадратурной формулы (4.34) при $(p,q)=1$ были высказаны первым автором в 2001 году. На пути проверки этих гипотез Д. В. Горбачев и А. С. Маношина [5] решили задачи Фейера (2.1), (2.3) для случаев, когда $p$ — мало, а $q$ — произвольное; $p$ — произвольное, $q=2p+1$.

Пусть теперь $p\,|\,q$, $(p,q)=d>1$, $p=p'd$, $q=q'd$, $p<w$, $\overline{r}'=\overline{r}(p',q')$ найдено по формуле (4.19).

Лемма 11. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\,|\,q$, $(p,q)=1$, $p=p'd$, $q=q'd$, $p<w$, $\overline{r}'=\overline{r}(p',q')$, то для любого дискретного четного тригонометрического полинома $f(x)$ из $C_{q,p-1,q}$ порядка $p-1$*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{f}_k c(kx/q)$$

*справедлива квадратурная формула*

$$\widehat{f}_0=\frac{1}{d}\left\{\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}f(\overline{r}'k)+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)\left[\widehat{G}_0^{p',q'}f(sq')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant p'-1}\widehat{G}_{|k|}^{p',q'}f(\overline{r}'k+sq')\right]\right\}. \quad (4.35)$$

Доказательство. Проверим (4.35) для полиномов $c(rx/q)$, $r=0,1,\ldots,p-1$. Если $r=0$, то согласно (2.13), (4.34)

$$I_0=\frac{1}{d}\left\{\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)\left[\widehat{G}_0^{p',q'}+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant p'-1}\widehat{G}_{|k|}^{p',q'}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{d}\left\{1+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)\right\}\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}=1.$$

Далее для $r\neq 0$

$$I_r=\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}c(r\overline{r}'k/q)+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)\left[\widehat{G}_0^{p',q'}c(rsq'/q)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant p'-1}\widehat{G}_{|k|}^{p',q'}c(r(\overline{r}'k+sq')/q)\right]=$$
$$=\left\{1+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)c(rsq'/q)\right\}\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}c(r\overline{r}'k/q)-$$
$$-\left\{\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)\sin\frac{2\pi}{q}rsq'\right\}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant p'-1}\widehat{G}_{|k|}^{p',q'}\sin\frac{2\pi}{q}r\overline{r}'k=$$
$$=\left\{1+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)c(rs/q)\right\}\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}c(r\overline{r}'k/q).$$

Если $r=md+n$, $m\in\{0,1,\ldots,p'-1\}$, $n\in\{1,\ldots,d-1\}$, то согласно (2.13)

$$1+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)c(rs/d)=1+2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1-\frac{s}{d}\right)c(ns/d)=0$$

и $I_r=0$. Если $r=md$, $m\in\{1,\ldots,p'-1\}$, то согласно (4.33)

$$\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}c(r\overline{r}'k/q)=\sum_{k=0}^{p'-1}\widehat{G}_k^{p',q'}c(m\overline{r}'k/q')=G_{p',q'}(m)=0,$$

и вновь $I_r = 0$. Таким образом, (4.35) для полиномов $c(rx/q)$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$, выполнено. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Если* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \,|\, q$, $(p, q) = d > 1$, $p = p'd$, $q = q'd$, $p < w$, *то*

$$\Lambda_1(p, q) = \lambda_1(p, q) = dF_{p',q'}(0) = F_{p,q}(0) \tag{4.36}$$

*и полином*

$$F_{p,q}(x) = F_{d-1}(x/q)F_{p',q'}(x) \tag{4.37}$$

*является экстремальным в задачах* (2.5), (2.7). *Все экстремальные полиномы в задаче* (2.5) *имеют вид*

$$F_{p,q}(x) = F_{d,q}(x)F_{p',q'}(x), \tag{4.38}$$

*где* $F_{d,q}(x)$ — *полиномы* (4.8), *экстремальные для случая, когда* $d \,|\, q$.

Доказательство. Оценка сверху величины (2.5) получается при помощи квадратурной формулы (4.35), (4.31):

$$1 = \frac{1}{d}\left\{\sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{G}_k^{p',q'} f(\overline{r}'k) + 2\sum_{s=1}^{d-1}\left(1 - \frac{s}{d}\right)\left[\widehat{G}_k^{p',q'} f(sq') + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant p'-1} \widehat{G}_{|k|}^{p',q'} f(\overline{r}'k + sq')\right]\right\} \geqslant \frac{1}{d}\widehat{G}_0^{p',q'} f(0) = \frac{f(0)}{dF_{p',q'}(0)}. \tag{4.39}$$

Отсюда $f(0) \leqslant dF_{p',q'}(0)$, поэтому $\Lambda_1(p, q) \leqslant dF_{p',q'}(0)$.

Отметим, что $(p'-1)d = p-d$ и полином

$$F_{p',q'}(x) = \sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{f}_k^{p',q'} c(kx/q') = \sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{f}_k^{p',q'} c(dkx/q)$$

принадлежит $C^+_{1,p-d,q} \cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, поэтому положим

$$F_{p,q}(x) = F_{d-1}(x/q)F_{p',q'}(x),$$

— принадлежит $C^+_{q,p-1,q} \cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, для него $\widehat{f}_0 = 1$, $F_{p,q}(0) = dF_{p',q'}(0)$. Значит, $\lambda_1(p, q) \geqslant dF_{p',q'}(0)$. Равенство (4.36) доказано, полином (4.37) является экстремальным в (2.5), (2.7).

Экстремальный полином в (2.5) согласно (4.39) должен иметь нули в точках множества

$$S_1 = \{\pm\overline{r}'k + sq' : k = 1, \ldots, p'-1;\ s = 0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Все точки множества $S_1$ в $\mathbb{Z}_q$ — различные. Действительно, предположим, что

$$\overline{r}'k_1 + s_1q' = (\overline{r}'k_2 + s_2q') \pmod q.$$

Покажем, что $k_1 = k_2$, $s_1 = s_2$. Имеем

$$\overline{r}'(k_1 - k_2) + (s_1 - s_2)q' = tq = dtq', \quad \overline{r}'(k_1 - k_2) = (dt + s_2 - s_1)q'.$$

Так как согласно (4.20) $(\overline{r}', q') = 1$, то $k_1 - k_2 = lq'$. Но $|k_1 - k_2| \leqslant 2(p'-1) < q'$, поэтому $l = 0$ и $k_1 = k_2$. Отсюда $s_1 - s_2 = dt$ и $s_1 = s_2$.

Так как $|S_1| = 2(p-d)$ и

$$S_1 = \{\pm(\overline{r}'k + sq') : k = 1, \ldots, p'-1, s = 0, 1, \ldots, [d/2]\},$$

то существует единственный с точностью до числового множителя полином из $C_{1,p-d,1}$, обращающийся в нуль в точках множества $S_1$. Он равен $c_1 F_{p',q'}(x)$, $c_1 > 0$. Отметим, что он неотрицателен на $\mathbb{Z}_q$.

Согласно (4.39) экстремальный полином в задаче (2.5) должен иметь нули в точках множества

$$S_2 = \{sq' : s = 1, \ldots, d-1\}, \quad S_2 \cap S_1 = \varnothing.$$

Согласно лемме 6 все полиномы из $C^+_{1,d-1,q}$, обращающиеся в нуль на $S_2$, имеют вид $c_2 F_{d,q}(x)$ (см. (4.8)), $c_2 > 0$. Итак, произвольный экстремальный полином в задаче (2.5) имеет вид

$$F_{p,q}(x) = c_1 c_2 F_{d,q}(x) F_{p',q'}(x).$$

Из условия $\widehat{f}_0 = 1$ получаем, что $c_1 c_2 = 1$ и (4.38) верно. Лемма 12 доказана.

Если объединить вместе леммы 4, 6, 10, 12, то получится следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant w$, $(p,q) = d$, $1 \leqslant d \leqslant p$, $p = p'd$, $q = q'd$, *то*

$$\Lambda_1(p,q) = \lambda_1(p,q) = dF_{p',q'}(0) = F_{p,q}(0).$$

*Все экстремальные полиномы в задаче* (2.5) *имеют вид*

$$F_{p,q}(x) = F_{d,q}(x) F_{p',q'}(x), \tag{4.40}$$

*где* $F_{d,q}$ *— полиномы, определенные в* (4.8), *а* $F_{p',q'}$ *— полином, определенный в* (4.11), (4.25). *Экстремальным полиномом в задаче* (2.7) *является, например, полином* $F_{d-1}(x/q)F_{p',q'}(x)$, *где* $F_{d-1}$ *— полином Фейера* (2.13).

*Если* $p = w+1$, *то*

$$\Lambda_1(p,q) = \lambda_1(p,q) = q.$$

*Единственным экстремальным полиномом в задачах* (2.5), (2.7) *является полином* (4.4).

Отметим, что при $d = p$ получим лемму 6, а при $d = 1$ — лемму 10. Лемма 12 соответствует случаю $1 < d < p$.

Если $(p,q) = d$, $1 \leqslant d \leqslant p$, $p = p'd$, $\overline{r}' = \overline{r}'(p',q')$ (см. (4.19)), то обозначим

$$\begin{aligned} G_{p,q}(x) &= \frac{1}{d}\Biggl\{\sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{G}_k^{p',q'} c(\overline{r}'kx/q) + 2\sum_{s=1}^{d-1}\Bigl(1 - \frac{s}{d}\Bigr)\Biggl[\widehat{G}_0^{p',q'} c(sq'x/q)x + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant p'-1} \widehat{G}_{|k|}^{p',q'} c((\overline{r}'k + sq')x/q)\Biggr]\Biggr\} = \\ &= \frac{1}{d}\Biggl(1 + 2\sum_{s=1}^{d-1}\Bigl(1 - \frac{s}{d}\Bigr) c(sq'x/q)x\Biggr)\Biggl(\sum_{k=0}^{p'-1} \widehat{G}_k^{p',q'} c(\overline{r}'kx/q)\Biggr) = \\ &= \sum_{k=0}^{w} \widehat{G}_k^{p,q} c(kx/q) \end{aligned} \tag{4.41}$$

полином, определяющий квадратурную формулу в задачах Фейера (2.5), (2.7).

Перейдем к решению задач (2.6), (2.8).

Лемма 13. *Если* $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant w$, *то*

$$\Lambda_1(p,q)\Lambda_2(p,q) \leqslant q.$$

Доказательство. Пусть $f \in C^+_{1,p-1,q}$, $\widehat{f}_0 = 1$, $g \in C^+_{2,p,q}$, $\widehat{g}_0 = 1$. Составим сумму

$$I = \frac{1}{q}\sum_{x=0}^{q-1} f(x)g(x) = (f,g). \tag{4.42}$$

С одной стороны,

$$I \geqslant \frac{1}{q} f(0)g(0).$$

С другой стороны, согласно ортогональности на $\mathbb{Z}_q$ (см. (1.4)) системы косинусов $\{c(kx/q)\}_{k=0}^{w}$

$$I = \widehat{f}_0\widehat{g}_0 + \sum_{k=1}^{p-1}\widehat{f}_k\widehat{g}_0\,\big(c(kx/q),\mathbf{1}\big) + \sum_{l=p}^{w}\widehat{f}_0\widehat{g}_l\,\big(\mathbf{1},c(lx/q)\big) + \\ + \sum_{k=1}^{p=1}\sum_{l=p}^{w}\widehat{f}_k\widehat{g}_l\,\big(c(kx/q),c(lx/q)\big) = \widehat{f}_0\widehat{g}_0 = 1. \tag{4.43}$$

Здесь $\mathbf{1} = c(kx/q)\big|_{k=0} = (1,\ldots,1)$. Поэтому $f(0)g(0) \leqslant q$ и $\Lambda_1(p,q)\Lambda_2(p,q) \leqslant q$. Лемма 13 доказана.

Напомним, что экстремальные полиномы в задаче (2.6) обозначены $f_{p,q}(x)$ (см. (4.2)).

Из леммы 13 и теоремы 1 вытекают соотношения

$$\lambda_2(p,q) \leqslant \Lambda_2(p,q) = f_{p,q}(0) \leqslant \frac{q}{F_{p,q}(0)}.$$

Остается построить полиномы из $C^+_{2,p,q} \cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, которые будут давать оценку

$$\lambda_2(p,q) \geqslant \frac{q}{F_{p,q}(0)}. \tag{4.44}$$

Рассмотрим три случая:

$$1)\ p \mid q, \quad 2)\ (p,q) = 1, \quad 3)\ p \mid q,\ (p,q) = d > 1.$$

Пусть сначала $p \mid q$, $q = pd$. Положим

$$f_{p,q}(x) = F_{d-1}\left(\frac{px}{q}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{d-1}\left(1 - \frac{k}{d}\right)c(pkx/q). \tag{4.45}$$

Имеем полином $f_{p,q}$ из $C^+_{2,p,q} \cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, $\widehat{f}_0^{p,q} = 1$ и согласно лемме 6 он дает оценку (4.44)

$$f_{p,q}(0) = d = \frac{q}{p} = \frac{q}{F_{p,q}(0)}.$$

Пусть теперь $(p,q)=1$. Рассмотрим четный полином

$$f_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{q-1}G_{p,q}(k)c(kx/q)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(kx/q). \qquad (4.46)$$

Так как $(\overline{r},q)=1$, то

$$\{\overline{r}k:\ k\in\mathbb{Z}_q\}=\mathbb{Z}_q$$

и согласно (4.21), (4.29), (1.4)

$$\begin{aligned}f_{p,q}(x)&=\sum_{k=0}^{q-1}G_{p,q}(k)c(kx/q)=\sum_{k=0}^{q-1}G_{p,q}(k)c(\overline{r}pkx/q)=\\&=\sum_{s=0}^{p-1}\widehat{G}_s^{p,q}\sum_{k=0}^{q-1}c(\overline{r}sk/q)c(\overline{r}pkx/q)=\sum_{s=0}^{p-1}\widehat{G}_s^{p,q}\sum_{k=0}^{q-1}c(sk/q)c(pkx/q)=\\&=\begin{cases}q\widehat{G}_0^{p,q}, & x=0,\\ q\widehat{G}_s^{p,q}/2, & x=\overline{r}s,\ \ 1\leqslant d_1(s)\leqslant p-1,\\ 0, & x=\overline{r}s,\ \ d_1(s)\geqslant p.\end{cases}\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.31)–(4.33), (4.46) получаем следующие свойства полинома $f_{p,q}(x)$:

1) $\widehat{f}_0^{p,q}=1,\ \ \widehat{f}_k^{p,q}=0\ \ (k=1,\ldots,p-1),\ \ \widehat{f}_k^{p,q}>0\ \ (k=p,\ldots,w),$ (4.47)

2) $f_{p,q}(0)=q/F_{p,q}(0),\quad f_{p,q}(x)\geqslant 0\ (x\in\mathbb{Z}_q),$ (4.48)

3) $f_{p,q}(\overline{r}x)=0,\quad x=p,\ldots,q-p.$ (4.49)

В частности, полином $f_{p,q}$ принадлежит $C^+_{2,p,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$, $\widehat{f}_0^{p,q}=1$, и он дает оценку (4.44).

Пусть наконец $p\,|\,q$, $(p,q)=d>1$, $p=dp'$, $q=dq'$. Положим

$$f_{p,q}(x)=f_{p',q'}(x)=1+\sum_{k=p'}^{w'}\widehat{f}_k^{p',q'}c(kx/q')=1+\sum_{k=p'}^{w'}\widehat{f}_k^{p',q'}c(dkx/q). \qquad (4.50)$$

Согласно (4.47), (4.48), (4.50), леммы 12

$$f_{p,q}\in C^+_{2,p,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\quad \widehat{f}_0^{p,q}=1,$$
$$f_{p,q}(0)=f_{p',q'}(0)=\frac{q'}{F_{p',q'}(0)}=\frac{q}{dF_{p',q'}(0)}=\frac{q}{F_{p,q}(0)},$$

что дает оценку(4.44) и в этом случае.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant w$, то*

$$\Lambda_2(p,q)=\lambda_2(p,q)=f_{p,q}(0)=\frac{q}{F_{p,q}(0)}.$$

*Экстремальные полиномы $f_{p,q}(x)$ даются формулами* (4.45), (4.46), (4.50).

Опираясь на теоремы 1, 2, Д. В. Горбачев [8, 9] решил задачи Монтгомери (2.10), (2.12). Решение этих задач также анонсировано А. С. Беловым [4]. Отметим, что в [4] приведен и полином (4.11) без доказательства его свойств.

Исследуем единственность экстремальных полиномов в задачах (2.6), (2.8).

Покажем, что в случае $(p,q)=1$ экстремальный полином в задачах (2.6), (2.8) единственен. Пусть $f_{p,q}(x)$ — полином (4.46), $\overline{r}$ определено в (4.19),

$$g_{p,q}(x)=\frac{1}{f_{p,q}(0)}\left\{\widehat{f}_0^{p,q}+\sum_{k=p}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(\overline{r}x/q)\right\}=\sum_{k=0}^{q-1}\widehat{g}_k^{p,q}c(k\overline{r}x/q). \tag{4.51}$$

Согласно (4.47), (4.48), (4.49)

$$\begin{gathered}\widehat{g}_0^{p,q}=\frac{F_{p,q}(0)}{q},\quad \widehat{g}_k^{p,q}=0,\quad (k=1,\dots,p-1,q-p+1,\dots,q-1),\\ \widehat{g}_k^{p,q}>0\quad (k=p,\dots,q-p),\\ g_{p,q}(0)=1,\quad g_{p,q}(x)\geqslant 0\quad (x\in\mathbb{Z}_q),\quad g_{p,q}(x)=0,\quad x=p,\dots,q-p.\end{gathered} \tag{4.52}$$

Для любого дискретного четного полинома из $C_{2,p,q}$

$$f(x)=\widehat{f}_0+\sum_{k=p}^{w}\widehat{f}_kc(kx/q)$$

справедлива квадратурная формула

$$\widehat{f}_0=\widehat{g}_0^{p,q}f(0)+\sum_{k=p}^{w}\widehat{g}_k^{p,q}f(\overline{r}k). \tag{4.53}$$

Проверим (4.53) для полинома $c(rx/q)$, $r=0,p,\dots,w$. Согласно (4.50)

$$\widehat{g}_0^{p,q}+\sum_{k=p}^{w}\widehat{g}_k^{p,q}c(\overline{r}kr/q)=\frac{f_{p,q}(\overline{r}r)}{f_{p,q}(0)}=\begin{cases}1, & r=0,\\ 0, & r=p,\dots,w,\end{cases}$$

что доказывает (4.53).

Пусть полином $f^1(x)$ из $C_{2,p,q}^{+}$ — экстремальный в задаче (2.6), отличный от полинома (4.46). Тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ полином $f^2(x)=(1-\varepsilon)f_{p,q}(x)+\varepsilon f^1(x)$ из $C_{2,p,q}^{+}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$ будет экстремальным в задачах (2.6), (2.8) и отличным от (4.46). Согласно (4.53) $f^2(\overline{r}k)=0$, $k=p,\dots,w$, поэтому полином

$$F(x)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}\sum_{k=0}^{q-1}f^2(\overline{r}k)c(kx/q)$$

принадлежит $C_{1,p-1,q}\cap B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$. Для него также выполняются следующие свойства

$$\widehat{F}_0=\frac{F_{p,q}(0)}{q}f^2(0)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}f_{p,q}(0)=1,$$

$$\begin{aligned}F(0)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(1+\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2c(\overline{r}sk/q)\right)&=\\ =\frac{F_{p,q}(0)}{q}\left\{q+\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2\sum_{k=0}^{q-1}c(\overline{r}sk/q)\right\}&=\\ =\frac{F_{p,q}(0)}{q}\left\{q+\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2\sum_{k=0}^{q-1}c(ks/q)\right\}&=F_{p,q}(0).\end{aligned}$$

Далее для $x\neq 0$ согласно (1.4)

$$F(x)=\frac{F_{p,q}(0)}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(1+\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2 c(\overline{r}sk/q)\right)c(kx/q)=$$
$$=\frac{F_{p,q}(0)}{q}\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2\sum_{k=0}^{q-1}c(\overline{r}sk/q)c(kx/q)=F_{p,q}(0)\sum_{s=p}^{w}\widehat{f}_s^2\frac{\delta_{<\overline{r}s><x>}}{m_{<\overline{r}s>}}\geqslant 0.$$

Таким образом, полином $F(x)$ экстремальный в задачах (2.5), (2.7) и отличен от полинома $F_{p,q}(x)$ (см. (4.11), (4.25)), что противоречит единственности последнего. Значит, экстремальный полином $f_{p,q}(x)$ (см. (4.46)) в задачах (2.6), (2.8) единственен.

Покажем, что квадратурная формула, аналогичная (4.53), справедлива и для случаев $p\,|\,q$, $(p,q)=d$, $1<d<p$. В сумме (4.42) возьмем полиномы $f(x)=F_{p,q}(x)$ (см. (4.7), (4.37)), экстремальные в задачах (2.5), (2.7) в этих случаях.

Если $p\mid q$, $q=pd$, то согласно (4.7), (4.42), (4.43) для полинома $f(x)\in C_{2,p,q}$

$$\widehat{f}_0=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}F_{p-1}\left(\frac{k}{q}\right)f(k). \tag{4.54}$$

Эта формула определяет полином

$$g_{p,q}(x)=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}F_{p-1}\left(\frac{k}{q}\right)c(kx/q), \tag{4.55}$$

для которого выполнены свойства

$$\begin{gathered}\widehat{g}_0^{p,q}=\frac{p}{q}=\frac{1}{d},\quad \widehat{g}_k^{p,q}=0\quad (k=sd,\ s=1,\dots,p-1),\quad \widehat{g}_k^{p,q}\geqslant 0\quad (k\in\mathbb{Z}_q),\\ g_{p,q}(0)=1,\quad g_{p,q}(x)=0\ (x=p,\dots,q-p),\ g_{p,q}\geqslant 0\ (x\in\mathbb{Z}_q).\end{gathered} \tag{4.56}$$

Из формулы (4.54) для $f$ из $C^+_{2,p,q}$, $\widehat{f}_0=1$, как и в лемме 13, получается оценка $f(0)\leqslant q/p=q/F_{p,q}(0)$.

Если $p|\,q$, $(p,q)=d>1$, то согласно (4.37), (4.42), (4.43) для полинома $f$ из $C_{2,p,q}$

$$\widehat{f}_0=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}F_{d-1}\left(\frac{k}{q}\right)F_{p',q'}(k)f(k). \tag{4.57}$$

Эта формула определяет полином

$$g_{p,q}(x)=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}F_{d-1}\left(\frac{k}{q}\right)F_{p',q'}(k)c(kx/q)=\sum_{k=0}^{q-1}\widehat{g}_k^{p,q}c(kx/q), \tag{4.58}$$

для которого выполнены свойства

$$\begin{gathered}\widehat{g}_0^{p,q}=\frac{dF_{p',q'}(0)}{q},\quad \widehat{g}_k^{p,q}=0\ (k=\pm\overline{r}'l+sq',\ l=1,\dots,p'-1,\\ s=0,1,\dots,d-1;\ k=sq',s=1,\dots,d-1),\quad \widehat{g}_k^{p,q}\geqslant 0\ (k\in\mathbb{Z}_q),\\ g_{p,q}(0)=1,\quad g_{p,q}(x)=0\ (x=p,\dots,q-p),\quad g_{p,q}(x)\geqslant 0\ (x\in\mathbb{Z}_q).\end{gathered} \tag{4.59}$$

Отметим что и формула (4.53) (случай $(p,q)=1$) может быть получена аналогичным образом с помощью полинома $F_{p,q}$ (4.11), (4.25).

Пусть $p\,|\,q$, $q=pd$,

$$F(x)=1+\sum_{k=p}^{q-p}\widehat{F}_k c(kx/q), \quad F(0)=d,\ \widehat{F}_k=\widehat{F}_{q-k},\ k=w+1,\dots,q-p,$$

— экстремальный полином в задаче (2.6). Согласно (4.54) $F(x)=0$, $x=sd+r$, $s=0,1,\dots,p-1$, $r=1,\dots,d-1$, поэтому из (1.5) следует

$$\widehat{F}_k=\frac{1}{q}\sum_{x=0}^{q-1}F(x)c(x/q)k=\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{p-1}F(sd)c(sk/p).$$

Отсюда $\widehat{F}_k$ — периодическая функция $k$ с периодом $p$, в частности, $\widehat{F}_{pk}=\widehat{F}_0=1$. Так как $\widehat{F}_k=0$, $k=1,\dots,p-1$, то

$$F(x)=\widehat{F}_0+\sum_{k=1}^{d-1}\widehat{F}_{pk}c(kx/d)=\widehat{F}_0\sum_{k=0}^{d-1}c(kx/d)=$$
$$=\sum_{k=0}^{d-1}c(pkx/q)=\begin{cases} d, & x=sd,\ s=0,1,\dots,p-1,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, в случае $p\,|\,q$ экстремальный полином в задачах (2.6), (2.8) единственен. Отметим, что полином (4.45) совпадает с полиномом $F(x)$.

## § 5. Экстремальные задачи Турана и Дельсарта на $\mathbb{Z}_q$

Постановка дискретных экстремальных задач Турана для двух ассоциативных симметричных схем отношений на $\mathbb{Z}_q$ состоит в следующем. Вычислить величины

$$a_{T,1}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0:\ f\in B(\mathbb{Z}_q),\quad f(0)=1,\quad f(x)=0,\quad d_1(x)\geqslant d_1(p)\}$$
$$(1\leqslant p\leqslant w), \tag{5.1}$$

$$a_{T,2}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0:\ f\in B(\mathbb{Z}_q),\quad f(0)=1,\quad f(x)=0,\quad d_2(x)\geqslant d_2(p-1)\}$$
$$(1\leqslant p-1\leqslant w). \tag{5.2}$$

С помощью преобразования $Af(x)=(f(x)+f(-x))/2$ легко убедиться, что

$$a_{T,1}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0:\ f\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ f(0)=1,\ f(x)=0,\ d_1(x)\geqslant d_1(p)\}=$$
$$=\sup\left\{\widehat{f}_0:\ f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q),\ \widehat{f}_k\geqslant 0,\ k=0,\dots,w,\right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k=1,\quad f(x)=0,\quad x=p,\dots,q-p\right\}\ (1\leqslant p\leqslant w), \tag{5.3}$$

$$a_{T,2}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0:\ f\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ f(0)=1,\ f(x)=0,\ d_2(x)\geqslant d_2(p-1)\}=$$
$$=\sup\left\{\widehat{f}_0:\ f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q),\ \widehat{f}_k\geqslant 0,\ k=0,\dots,w,\right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k=1,\quad f(x)=0,\quad x=1,\dots,p-1\right\}\ (1\leqslant p-1\leqslant w). \tag{5.4}$$

Постановка дискретных экстремальных задач Дельсарта для двух ассоциативных симметричных схем на $\mathbb{Z}_q$ состоит в следующем. Вычислить величины

$$a_{D,1}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0\colon f\in B(\mathbb{Z}_q),\quad f(0)=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad d_1(x)\geqslant d_1(p)\}\\ (1\leqslant p\leqslant w), \tag{5.5}$$

$$a_{D,2}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0\colon f\in B(\mathbb{Z}_q),\quad f(0)=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad d_2(x)\geqslant d_2(p-1)\}\\ (1\leqslant p-1\leqslant w). \tag{5.6}$$

Аналогично (5.3), (5.4) убеждаемся, что

$$a_{D,1}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0\colon f\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ \ f(0)=1,\ \ f(x)\leqslant 0,\ d_1(x)\geqslant d_1(p)\}=\\ =\sup\Big\{\widehat{f}_0\colon f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q),\ \widehat{f}_k\geqslant 0,\ k=0,\dots,w,\\ \sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad x=p,\dots,q-p\Big\}\ (1\leqslant p\leqslant w), \tag{5.7}$$

$$a_{D,2}(p,q)=\sup\{\widehat{f}_0\colon f\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q),\ \ f(0)=1,\ \ f(x)\leqslant 0,\ d_2(x)\geqslant d_2(p-1)\}=\\ =\sup\Big\{\widehat{f}_0\colon f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q),\ \widehat{f}_k\geqslant 0,\ k=0,\dots,w,\\ \sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad x=1,\dots,p-1\Big\}\ \ (1\leqslant p-1\leqslant w). \tag{5.8}$$

Величины (5.1), (5.2), (5.5), (5.6) связаны неравенствами

$$a_{T,1}(p,q)\leqslant a_{D,1}(p,q),\quad a_{T,2}(p,q)\leqslant a_{D,2}(p,q). \tag{5.9}$$

Экстремальные полиномы в задаче (5.3) обозначим

$$U_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{U}_k^{p,q}c(kx/q), \tag{5.10}$$

а в задаче (5.4) —

$$u_{p,q}(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{u}_k^{p,q}c(kx/q). \tag{5.11}$$

Вначале займемся решением задач (5.3), (5.4). Пусть полином $f(x)$ из $C^+_{1,p-1,q}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{f}_k c(kx/q),\quad \widehat{f}_0=1,$$

является допустимым в задаче (2.5). Рассмотрим полином

$$g(x)=\Big(\frac{1}{q}\Big)\sum_{k=0}^{q-1}f(k)c(kx/q)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{g}_k c(kx/q)\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q).$$

Так как согласно (1.14)

$$g(x)=\sum_{s=0}^{p-1}\widehat{f}_s\cdot\Big(\frac{1}{q}\Big)\sum_{k=0}^{q-1}c(sk/q)c(kx/q)=\widehat{f}_x/m_x,$$

то для него выполнены следующие свойства

$$\widehat{g}_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots, w; \quad g(0) = \widehat{f}_0/m_0 = 1;$$
$$g(x) = 0, \quad x = p, \ldots, q-p; \quad \widehat{g}_0 = f(0)/q.$$

Значит, полином $g(x)$ является допустимым в задаче (5.3) и

$$a_{T,1}(p,q) \geqslant \sup \frac{f(0)}{q} = \frac{\Lambda_1(p,q)}{q}. \tag{5.12}$$

Обратно, пусть полином

$$g(x) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{g}_k c(kx/q) \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q), \quad g(0) = 1, \quad g(x) = 0, \quad x = p, \ldots, q-p,$$

является допустимым в задаче (5.3). Рассмотрим полином

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} g(k)c(kx/q) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{f}_k c(kx/q).$$

Так как согласно (1.14)

$$f(x) = \sum_{s=0}^{w} \widehat{g}_s \sum_{k=0}^{q-1} c(sk/q)c(kx/q) = \frac{q\widehat{g}_x}{m_x},$$

то для него выполнены следующие свойства

$$\widehat{f}_0 = g(0) = 1; \quad \widehat{f}_k = 0, \quad k = p, \ldots, w; \quad f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{Z}_q; \quad f(0) = q\widehat{g}_0.$$

Таким образом, полином $f(x)$ является допустимым в задаче (2.5) и

$$\Lambda_1(p,q) \geqslant q \sup \widehat{g}_0 = q a_{T,1}(p,q).$$

Отсюда и из (5.12), теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Если $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant w$, то*

$$a_{T,1}(p,q) = \frac{\Lambda_1(p,q)}{q} = \frac{F_{p,q}(0)}{q}.$$

*Все экстремальные полиномы в задаче Турана* (5.3) *имеют вид*

$$U_{p,q}(x) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{q-1} F_{p,q}(k)c(kx/q),$$

*где полиномы $F_{p,q}$ (см.* (4.40)) *— экстремальные в задаче* (2.5).

Решение задачи (5.4) аналогично. Пусть полином $f(x)$ из $C^{+}_{2,p,q}$

$$f(x) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=p}^{w} \widehat{f}_k c(kx/q), \quad \widehat{f}_0 = 1,$$

является допустимым в задаче (2.6). Рассмотрим полином

$$g(x) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{q-1} f(k)c(kx/q) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{g}_k c(kx/q)$$

из $B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$. Так как согласно (1.14)

$$g(x)=\widehat{f}_x/m_x,$$

то

$$\widehat{g}_k\geqslant 0,\ \ k=0,1,\dots,w;\ \ g(0)=\widehat{f}_0=1;\ \ g(x)=0,\ \ x=1,\dots,p-1,\ \ \widehat{g}_0=f(0)/q.$$

Таким образом, полином $g(x)$ является допустимым в задаче (5.4) и

$$a_{T,2}(p,q)\geqslant \sup\frac{f(0)}{q}=\frac{\Lambda_2(p,q)}{q}. \tag{5.13}$$

Обратно, если для полинома

$$g(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{g}_k c(kx/q)\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_q)$$

выполнены условия

$$g(0)=1,\quad g(x)=0,\quad x=1,\dots,p-1,$$

то для полинома

$$f(x)=\sum_{k=0}^{q-1}g(k)c(kx/q)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q)$$

выполнены свойства

$$\widehat{f}_0=1;\quad \widehat{f}_k=0,\quad k=1,\dots,p-1;\quad f(x)\geqslant 0,\quad x\in\mathbb{Z}_q;\quad f(0)=q\widehat{g}_0.$$

Значит, полином $f(x)$ является допустимым в задаче (2.6) и

$$\Lambda_2(p,q)\geqslant q\sup\widehat{g}_0=qa_{T,2}(p,q).$$

Отсюда, из (5.13) и теоремы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $2\leqslant p\leqslant w+1$, то*

$$a_{T,2}(p,q)=\frac{\Lambda_2(p,q)}{q}=\frac{1}{F_{p,q}(0)}.$$

*Все экстремальные полиномы в задаче Турана* (5.4) *имеют вид*

$$u_{p,q}(x)=\left(\frac{1}{q}\right)\sum_{k=0}^{q-1}f_{p,q}(k)c(kx/q),$$

*где $f_{p,q}(x)$ — полиномы, экстремальные в задаче* (2.6).

Перейдем к задачам (5.7), (5.8).

Теорема 5. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant w$, то*

$$a_{D,1}(p,q)=a_{T,1}(p,q)=\frac{\Lambda_1(p,q)}{q}=\frac{F_{p,q}(0)}{q}.$$

*Полиномы, экстремальные в задаче Турана* (5.3), *являются экстремальными и в задаче Дельсарта* (5.7).

Доказательство. Согласно (5.9) и теореме 3, достаточно доказать неравенство
$$a_{D,1}(p,q) \leqslant \frac{F_{p,q}(0)}{q}. \tag{5.14}$$

Пусть $f$ — допустимый полином в задаче Дельсарта (5.7), т. е.
$$f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q), \quad \widehat{f}_k \geqslant 0, \quad k=0,1,\ldots,w, \tag{5.15}$$
$$f(0)=1, \quad f(x)\leqslant 0, \quad x=p,\ldots,q-p. \tag{5.16}$$

Пусть
$$f_{p,q}(x)=1+\sum_{k=p}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(kx/q)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(kx/q)$$
— экстремальный полином в задаче Фейера (2.6), для которого выполнены свойства
$$f_{p,q}(x)\geqslant 0, \quad x\in\mathbb{Z}_q, \quad \widehat{f}_k^{p,q}>0, \quad k=p,\ldots,w, \tag{5.17}$$
$$f_{p,q}(0)=q/F_{p,q}(0). \tag{5.18}$$

Составим сумму
$$I=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}f(k).$$
С одной стороны, согласно (5.16), (5.17)
$$I=f(0)+\sum_{k=p}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}f(k)\leqslant f(0)=1.$$
С другой стороны, согласно (5.15), (5.17), (5.18)
$$I=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}\sum_{s=0}^{w}\widehat{f}_s c(sk/q)=\sum_{s=0}^{w}\widehat{f}_s\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k^{p,q}c(sk/q)=$$
$$=\sum_{s=0}^{w}\widehat{f}_s f_{p,q}(s)\geqslant \widehat{f}_0 f_{p,q}(0)=\frac{q\widehat{f}_0}{F_{p,q}(0)}.$$
Поэтому
$$\widehat{f}_0\leqslant F_{p,q}(0)/q$$
и (1.13) верно. Теорема 5 доказана.

Непрерывный вариант задачи (5.1) был поставлен в 1970 году П. Тураном в беседе С. Б. Стечкину. Он состоит в следующем. Для $h\in(0,1/2]$ вычислить величину
$$A_T(h)=\sup\int_{-h}^{h} f(x)\,dx, \tag{5.19}$$
если
$$1)\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k c(kx), \quad \widehat{f}_k\geqslant 0,$$
$$2)\ f(0)=1, \quad f(x)=0, \quad h\leqslant|x|\leqslant 1/2.$$

С. Б. Стечкин [16, 17] вычислил $A_T(1/q)=1/q$, $q\in\mathbb{N}$. А. Ю. Попов показал, что для остальных $h$ имеет место $A_T(h)>h$. Д. В. Горбачев и А. С. Маношина [5] доказали, что для рациональных $h=p/q$, $(p,q)=1$, $p\leqslant w$

$$A_T(p/q)=a_{T,1}(p,q)=\Lambda_1(p,q)/q. \tag{5.20}$$

Таким образом, для рациональных $h$ задача Турана (5.19) эквивалентна задачам (2.1), (5.1).

Непрерывный вариант задачи Дельсарта (5.5) состоит в следующем. Вычислить величину

$$A_D(h)=\sup\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx, \tag{5.21}$$

если

$$1)\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k c(kx),\quad \widehat{f}_k\geqslant 0,$$
$$2)\ f(0)=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad h\leqslant |x|\leqslant 1/2.$$

Задачи, подобные (5.5), (5.21), ставились Ф. Дельсартом [6, 22] для многочленов по зональным сферическим функциям, связанным с ассоциативными симметричными схемами отношений, с целью получения верхних оценок мощности $k$-кодов на этих схемах. Наиболее сильные результаты в решении задач Дельсарта были получены В. М. Сидельниковым [14], В. И. Левенштейном [24], В. В. Арестовым и А. Г. Бабенко [1].

Отметим, что

$$A_T(p/q)\leqslant A_D(p/q)\leqslant a_{D,1}(p,q). \tag{5.22}$$

Отсюда, (5.20) и теорем 3, 5 вытекает следствие.

Следствие [8–10]. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant\omega$, $(p,q)=1$, то*

$$A_T(p/q)=A_D(p/q)=F_{p,q}(0)/q.$$

Теорема 6. *Если $p,q\in\mathbb{N}$, $2\leqslant p\leqslant w+1$, то*

$$a_{D,2}(p,q)=a_{T,2}(p,q)=\frac{\Lambda_2(p,q)}{q}=\frac{1}{F_{p,q}(0)}.$$

*Полиномы, экстремальные в задаче Турана* (5.4), *являются экстремальными и в задаче Дельсарта* (5.8).

Доказательство. Согласно (5.9) и теореме 4, достаточно доказать неравенство

$$a_{D,2}(p,q)\leqslant\frac{1}{F_{p,q}(0)}. \tag{5.23}$$

Пусть $f$ — допустимый полином в задаче Дельсарта (5.8), т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{w}\widehat{f}_k c(kx/q),\quad \widehat{f}_k\geqslant 0,\quad k=0,1,\ldots,w, \tag{5.24}$$

$$f(0)=1,\quad f(x)\leqslant 0,\quad x=1,\ldots,p-1. \tag{5.25}$$

Пусть

$$F_{p,q}(x)=1+\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{f}_k^{p,q}c(kx/q)=\sum_{k=0}^{p-1}\widehat{F}_k^{p,q}c(kx/q)$$

— экстремальный полином в задаче Фейера (2.5), для которого выполнены свойства

$$F_{p,q}(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{Z}_q, \quad \widehat{F}_k^{p,q} > 0, \quad k = 1, \ldots, p-1. \tag{5.26}$$

Составим сумму

$$I = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} f(k).$$

С одной стороны, согласно (5.25), (5.26)

$$I = f(0) + \sum_{k=1}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} f(k) \leqslant f(0) = 1.$$

С другой стороны, согласно (5.24), (5.26)

$$I = \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} \sum_{s=0}^{w} \widehat{f}_s c(sk/q) = \sum_{s=0}^{w} \widehat{f}_s \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{F}_k^{p,q} c(sk/q) = \sum_{s=0}^{w} \widehat{f}_s F_{p,q}(s) \geqslant \widehat{f}_0 F_{p,q}(0).$$

Поэтому

$$\widehat{f}_0 \leqslant 1/F_{p,q}(0),$$

и (5.23) верно. Теорема 6 доказана.

## § 6. Константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_q)$

Используя гармонический анализ на $\mathbb{Z}_q$, определим величины наилучших приближений, модули непрерывности и дискретные константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_q)$.

Пусть для $i = 1, 2, \quad k, d \in d_i(\mathbb{Z}_q) \setminus \{0\}$

$$E_{k,i}(f)_2 = \min_{a_\nu} \Big\| f(x) - \sum_{d_i(\nu) \leqslant k-1} a_\nu e(\nu x/q) \Big\|_2 \tag{6.1}$$

— величина наилучшего приближения функции $f$ из $l_2\left(\mathbb{Z}_q\right)$,

$$\omega_i(d, f)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \max\{\|f(x+h) - f(x)\|_2 : \, d_i(h) \leqslant d\} \tag{6.2}$$

— ее модуль непрерывности,

$$D_i(d, k)_2 = \sup_{f \in l_2(\mathbb{Z}_q)} \frac{E_{k,i}(f)_2}{\omega_i(d, f)_2} \tag{6.3}$$

— дискретные константы Джексона.

Константы Джексона образуют две квадратные матрицы порядка $w$. Наша цель — вычислить элементы последних строк в этих матрицах ($d = w$ и $d = q-1$).

Согласно (1.2), (1.3) для $i = 1, 2$

$$E_{k,i}^2(f)_2 = \sum_{d_i(\nu) \geqslant k} |\widehat{f}_\nu|^2, \tag{6.4}$$

$$\omega_i^2(d, f)_2 = \max_{d_i(h) \leqslant d} \sum_{\nu=1}^{q-1} \big(1 - c(\nu h/q)\big) \, |\widehat{f}_\nu|^2, \tag{6.5}$$

поэтому

$$D_i^2(d,k)_2 = \sup_{f\in l_2(\mathbb{Z}_q)} \frac{\sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k} |\widehat{f}_\nu|^2}{\max\limits_{d_i(h)\leqslant d} \sum\limits_{\nu=1}^{q-1} \big(1-c(\nu h/q)\big)\,|\widehat{f}_\nu|^2} =$$

$$= \sup_{f\in l_2(\mathbb{Z}_q)} \frac{\sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k} |\widehat{f}_\nu|^2}{\max\limits_{d_i(h)\leqslant d} \sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k} \big(1-c(\nu h/q)\big)\,|\widehat{f}_\nu|^2} =$$

$$= \max_{\widehat{a}_\nu\geqslant 0,\ \sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k}\widehat{a}_\nu=1} \frac{1}{\max\limits_{d_i(h)\leqslant d} \sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k} \big(1-c(\nu h/q)\big)\,|\widehat{a}_\nu|^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\max\limits_{\substack{\widehat{a}_\nu\geqslant 0,\\ \sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k}\widehat{a}_\nu=1}} \min\limits_{d_i(h)\leqslant d} \sum\limits_{d_i(\nu)\geqslant k} \widehat{a}_\nu c(\nu h/q)}. \qquad (6.6)$$

Учитывая четность $c(\nu h/q)$, получаем, что

$$D_1^2(d,k)_2 = \frac{1}{1-\max\limits_{\substack{\widehat{a}_\nu\geqslant 0,\\ \sum_{\nu=k}^{w}\widehat{a}_\nu=1}} \min\limits_{1\leqslant h\leqslant d} \sum\limits_{\nu=k}^{w} \widehat{a}_\nu c(\nu h/q)}, \quad k,d=1,\ldots,w, \qquad (6.7)$$

$$D_2^2(d,k)_2 = \frac{1}{1-\max\limits_{\substack{\widehat{a}_\nu\geqslant 0,\\ \sum_{\nu=1}^{q-k}\widehat{a}_\nu=1}} \min\limits_{q-d\leqslant h\leqslant w} \sum\limits_{\nu=1}^{q-k} \widehat{a}_\nu c(\nu h/q)}, \quad k,d=\big[(q+1)/2\big],\ldots,q-1. \qquad (6.8)$$

Рассмотрим две задачи линейного программирования. Для $k,d=1,\ldots,w$ вычислить величину

$$\widehat{\mu}_1(d,k)=\max\widehat{\mu}, \qquad (6.9)$$

если

$$1)\ \widehat{a}_j\geqslant 0,\quad j=k,\ldots,w,\quad \sum_{j=k}^{w}\widehat{a}_j=1,$$

$$2)\ \sum_{j=k}^{w}\widehat{a}_j c(ij/q)\geqslant\widehat{\mu},\quad i=1,\ldots,d.$$

Аналогично, для $k,d=[(q+1)/2],\ldots,q-1$ вычислить величину

$$\widehat{\mu}_2(d,k)=\max\widehat{\mu}, \qquad (6.10)$$

если

$$1)\ \widehat{a}_j\geqslant 0,\quad j=1,\ldots,q-k,\quad \sum_{j=1}^{q-k}\widehat{a}_j=1,$$

$$2)\ \sum_{j=1}^{q-k}\widehat{a}_j c(ij/q)\geqslant\widehat{\mu},\quad i=q-d,\ldots,w.$$

Согласно (2.7), (2.8)

$$D_1^2(d,k)_2 = \frac{1}{1-\widehat{\mu}_1(d,k)}, \quad k,d = 1,\ldots,w,$$

$$D_2^2(d,k)_2 = \frac{1}{1-\widehat{\mu}_2(d,k)}, \quad k,d = [(q+1)/2],\ldots,q-1.$$

Исследуем конечность констант Джексона. Константа Джексона $D_1(d,k)_2$ будет бесконечной, если $\widehat{\mu}_1(d,k)=1$. В этом случае из ограничений в задаче (6.9)

$$\sum_{j=k}^{w} \widehat{a}_j = 1, \quad \widehat{a}_j\left(1-c(ij/q)\right)=0, \quad j=k,\ldots,w;\ i=1,\ldots,d.$$

Если $i=1$, то $1-c(ij/q)\geqslant 1-c(1/q)$ и $\widehat{a}_j=0$ для $j=k,\ldots,w$. Условие $\sum\limits_{j=k}^{w}\widehat{a}_j=1$ не выполнено, поэтому константа $D_1(d,k)_2$ конечна для всех $k,d=1,\ldots,w$.

Аналогично константа Джексона $D_2(d,k)_2$ будет бесконечной, если $\widehat{\mu}_2(d,k)=1$. В этом случае из ограничений в задаче (6.10) получаем

$$\sum_{j=1}^{q-k} \widehat{a}_j = 1, \quad \widehat{a}_j\left(1-c(ij/q)\right)=0, \quad j=1,\ldots,q-k;\ i=q-d,\ldots,w. \qquad (6.11)$$

Если $d=[(q+1)/2]$, то $i=q-[(q+1)/2]=[q/2]=w$ и должно выполняться условие $jw=0 \pmod q$ для некоторого $j$, $j=1,\ldots,q-k$. Если $q$ — нечетное, то это невозможно, так как $(w,q)=1$ и $1\leqslant j\leqslant w$. Если $q$ — четное, то $j$ должно быть также четным. Если $k=[(q+1)/2],\ldots,q-2$, то $j=2\in\{1,\ldots,q-k\}$. Если $k=q-1$, то $j=1$. Таким образом, при $d=[(q+1)/2]$ и $k=[(q+1)/2],\ldots,q-2$ условия (6.11) выполнены, если

$$\widehat{a}_2=1, \quad \widehat{a}_j=0, \quad j\neq 2$$

и для этих $k$ и $d$ имеем $D_2(d,k)_2=+\infty$.

Если $d>[(q+1)/2]$, то множество $\{q-d,\ldots,w\}$ содержит не менее двух элементов. Для справедливости (6.11) должны выполняться условия

$$ij=0 \pmod q, \quad (i+1)j=0 \pmod q$$

для некоторых $i\in\{q-d,\ldots,w\}$, $j\in\{1,\ldots,q-k\}$. Из этих условий следует $j=0 \pmod q$, что невозможно, так как $1\leqslant j\leqslant w$.

Итак, нами доказано следующее утверждение

Лемма 14. *Константа Джексона $D_1(d,k)_2$ конечна для всех $k,d=1,\ldots,w$. Константа Джексона $D_2(d,k)_2$ бесконечна, если $q$ — четное, $d=[(q+1)/2]$ , $k=[(q+1)/2],\ldots,q-2$, и конечна для всех остальных $k,d$.*

Для задачи (6.9) запишем двойственную задачу линейного программирования. Вычислить величину

$$\mu_1(d,k)=\min\mu, \qquad (6.12)$$

если

$$1)\ a_i\geqslant 0, \quad i=1,\ldots,d, \quad \sum_{i=1}^{d} a_i=1,$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{d} a_i c(ij/q)\leqslant\mu, \quad j=k,\ldots,w.$$

Для задачи (6.10) также запишем двойственную задачу линейного программирования. Вычислить величину

$$\mu_2(d,k)=\min\mu, \tag{6.13}$$

если

$$1)\ a_i\geqslant 0,\quad i=q-d,\dots,w,\quad \sum_{i=q-d}^{w}a_i=1,$$

$$2)\ \sum_{i=q-d}^{w}a_ic(ij/q)\leqslant\mu,\quad j=1,\dots,q-k.$$

Имеем равенства

$$D_i^2(d,k)_2=\frac{1}{1-\widehat{\mu}_i(d,k)}=\frac{1}{1-\mu_i(d,k)},\quad i=1,2. \tag{6.14}$$

Если в (6.12), (6.13) сделать замену $a_0=-\mu$, то получим следующие задачи линейного программирования. Вычислить величины

$$\mu_3(d,k)=\max a_0, \tag{6.15}$$

если

$$1)\ a_i\geqslant 0,\quad i=1,\dots,d,\quad \sum_{i=1}^{d}a_i=1,$$

$$2)\ \sum_{i=0}^{d}a_ic(ij/q)\leqslant 0,\quad j=k,\dots,w;$$

$$\mu_4(d,k)=\max a_0, \tag{6.16}$$

если

$$1)\ a_i\geqslant 0,\quad i=q-d,\dots,w,\quad \sum_{i=q-d}^{w}a_i=1,$$

$$2)\ a_0+\sum_{i=q-d}^{w}a_ic(ij/q)\leqslant 0,\quad j=1,\dots,q-k.$$

Величины (6.12), (6.13) и (6.15), (6.16) связаны равенствами

$$\mu_3(d,k)=-\mu_1(d,k),\quad \mu_4(d,k)=-\mu_2(d,k). \tag{6.17}$$

Определим более общие варианты задач Дельсарта (5.7), (5.8). Для $r,p=1,\dots,w$ вычислить величину

$$a_{D,1}(r,p,q)=\sup\widehat{f}_0, \tag{6.18}$$

если

$$1)\ \widehat{f}_i\geqslant 0,\quad i=1,\dots,r,\quad \sum_{i=0}^{r}\widehat{f}_i=1,$$

$$2)\ \sum_{i=0}^{r}\widehat{f}_ic(ij/q)\leqslant 0,\quad j=p,\dots,w.$$

Аналогично, для $r=1,\dots,w$, $p=2,\dots,w+1$ вычислить величину

$$a_{D,2}(r,p,q)=\sup\widehat{f}_0, \tag{6.19}$$

если

$$1)\ \widehat{f}_i \geqslant 0, \quad i=r,\dots,w, \quad \widehat{f}_0+\sum_{i=r}^{w}\widehat{f}_i=1,$$

$$2)\ \widehat{f}_0+\sum_{i=r}^{w}\widehat{f}_i c(ij/q) \leqslant 0, \quad j=1,\dots,p-1.$$

Величины (5.7), (5.8) и (6.18), (6.19) связаны равенствами

$$a_{D,1}(p,q)=a_{D,1}(w,p,q), \quad a_{D,2}(p,q)=a_{D,2}(1,p,q). \tag{6.20}$$

Из условий конечности констант Джексона $D_i(d,k)$, $i=1,2$, можно считать, что в задачах (6.15), (6.16) $a_0>-1$. Допустимые векторы в задачах (6.15) и (6.18) при $r=d$, $p=k$, а также в задачах (6.16) и (6.19) при $r=q-d$, $p=q-k+1$ связаны соотношениями

$$\widehat{f}_i=\frac{a_i}{(1+a_0)}.$$

Так как при $a_0>-1$ функция $\widehat{f}_0=a_0/(1+a_0)$ является возрастающей, то экстремальные значения также будут связаны соотношениями

$$a_{D,1}(d,k,q)=\frac{\mu_3(d,k)}{1+\mu_3(d,k)}, \quad a_{D,2}(q-d,q-k+1,q)=\frac{\mu_4(d,k)}{1+\mu_4(d,k)}.$$

Отсюда и из (6.14), (6.17) вытекает следующее утверждение.

Лемма 15. *При условиях конечности констант Джексона* (6.3) *справедливы равенства*

$$D_1^2(d,k)_2=1-a_{D,1}(d,k,q), \quad D_2^2(d,k)_2=1-a_{D,2}(q-d,q-k+1,q).$$

Первое равенство в лемме 15 было установлено А. Г. Бабенко [2]. Он вычислил константы Джексона в двух случаях:

$$1)\ D_1(d,k)_2=1, \quad q=2k(d+1);$$

$$2)\ D_1^2(d,k)_2=1-\frac{k}{q}, \quad q=kl \ \text{четное}, \quad 2\leqslant l\leqslant d+2.$$

Во всех этих случаях $k\mid q$.

Из леммы 15, (6.20), теорем 5, 6 вытекают следующие теоремы.

Теорема 7. *Если $k=1,\dots,w$, то*

$$D_1^2(w,k)_2=1-a_{D,1}(k,q)=1-\frac{F_{k,q}(0)}{q}.$$

Теорема 8. *Если $k=[(q+1)/2],\dots,q-1$, то*

$$D_2^2(q-1,k)_2=1-a_{D,2}(q-k+1,q)=1-\frac{1}{F_{q-k+1,q}(0)}.$$

## § 7. Коды на конечных абелевых группах

Рассмотрим обобщение схем отношений $Y_1, Y_2$ (см. (1.9)) на случай прямого произведения конечных циклических групп. Известно, что любая конечная абелева группа раскладывается в прямое произведение циклических групп. Наша цель — вычислить максимальные мощности $k$-кодов на этих общих схемах отношений и применить их для оценок сверху в многомерных задачах Дельсарта и оценок снизу многомерных констант Джексона.

Пусть $q=(q_0,q_1,\ldots,q_{n-1})\in\mathbb{N}^n$, $q_i\geqslant 2$, $i=0,1,\ldots,n-1$,

$$G_q^n=\mathbb{Z}_{q_0}\times\mathbb{Z}_{q_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{q_{n-1}}=\{x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}):\ x_i\in\mathbb{Z}_{q_i}\}$$

— конечная абелева группа с операцией покоординатного сложения по соответствующему модулю.

Определим две последовательности

$$\begin{aligned}&M_0=1,\quad M_1=q_0,\qquad M_k=M_{k-1}q_{k-1};\\&M'_0=1,\quad M'_1=q_{n-1},\quad M'_k=M'_{k-1}q_{n-k}\quad(k=1,\ldots,n).\end{aligned}$$

Для $x=(x_0,\ldots,x_{n-1})$ из $G_q^n$ положим

$$|x|=\sum_{k=0}^{n-1}x_kM_k:G_q^n\to\mathbb{Z}_{M_n}. \tag{7.1}$$

С помощью (7.1) определим два отображения

$$d_1(x,y)=\min\{|x-y|,|y-x|\}:G_q^n\times G_q^n\to\mathbb{Z}_{M_n}, \tag{7.2}$$

$$d_2(x,y)=\max\{|x-y|,|y-x|\}:G_q^n\times G_q^n\to\mathbb{Z}_{M_n}. \tag{7.3}$$

Отображение (7.3) будет метрикой на $G_q^n$. Отображение (7.2) (кроме случаев $n=1$, $q_0$ — произвольное и $n$ — произвольное, $q_0=q_1=\cdots=q_{n-1}=2$) метрикой не является.

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\Lambda_r&=\{x\in G_q^n:|x|\leqslant M_{r+1}-1\}=\\&=\{x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in G_q^n:x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_{n-1}=0\}.\end{aligned}$$

Оно является в $G_q^n$ подгруппой, поэтому, если $x\in\Lambda_r$, то $-x\in\Lambda_r$. Выделим в $\Lambda_r$ подмножество

$$\Lambda'_r=\{x\in\Lambda_r:|x|\leqslant|-x|\}.$$

Положим

$$d_r=\max\{|x|:x\in\Lambda'_r\}. \tag{7.4}$$

Тогда

$$d_r=\left|\left(q_0-1,\ldots,q_{p-1}-1,\frac{q_p-1}{2},\frac{q_{p+1}}{2},\ldots,\frac{q_r}{2},0,\ldots,0\right)\right|=|x^r|, \tag{7.5}$$

если $q_p$ — нечетное, а $q_{p+1},\ldots,q_r$ — четные.

Обозначим через $d_i(G_q^n)$, $i=1,2$, множества всех значений (7.2), (7.3) на $G_q^n$, $[m,M]=\{m,m+1,\ldots,M\}$ — множество всех целых чисел от $m$ до $M$.

Имеем

$$d_1(G_q^n)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{r=0}^{n-1}[M_r,d_r]\right),$$

где $d_r$ определено в (7.5),

$$d_2(G_q^n)=\bigcup_{r=0}^{n-1}S_r,$$

где

$$S_0 = \{0\} \cup \big[[(q_0+1)/2], q_0-1\big],$$
$$S_r = \{S_{r-1} + q_r M_r/2\} \cup [(q_r/2+1)M_r, M_{r+1}-1] \quad (q_r \text{ четное}),$$
$$S_r = [(q_r+1)M_r/2, M_{r+1}-1] \quad (q_r \text{ нечетное}), \quad r \geqslant 1.$$

Пусть для $i=1,2$

$$d_{n,i} = \max\{k:\ k \in d_i(G_q^n)\}.$$

Согласно (7.5)

$$d_{n,1} = d_{n-1}, \qquad d_{n,2} = M_n - 1.$$

Пары $Y_i^n = (G_q^n, d_i(x,y))$, $i=1,2$, будут ассоциативными симметричными схемами отношений с $(|d_i(G_q^n)|-1)$-классами. Отметим, что $Y_i^1 = Y_i$, $i=1,2$. В [7] установлено, что

$$|d_1(G_q^n)| = |\Lambda'_{n-1}| = |d_2(G_q^n)| = M_n/2 + 2^{t_n-1},$$

где $t_n$ — количество четных чисел среди $q_0, \ldots, q_{n-1}$.

Множество $A$, $A \subset G_q^n$, назовем *$k$-кодом* в схеме $Y_i^n$, если для любых $x, y \in A$, $x \neq y$ будет $d_i(x,y) \geqslant k$. Максимальную мощность $k$-кода обозначим $m_i(k, G_q^n)$. При вычислении $m_1(k, G_q^n)$ можно считать $k \leqslant d_{n-1}$, а при вычислении $m_2(k, G_q^n)$ — $k \leqslant M_n - 1$.

Пусть $G_q^r = \mathbb{Z}_{q_0} \times \mathbb{Z}_{q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_{r-1}}$. В дальнейшем метрики $d_i(x,y)$ будем применять и к векторам $x, y$ из $G_q^r$, считая отсутствующие координаты равными нулю. Для кода $C \subset G_q^n$

$$\delta_i(C) = \min\{d_i(x,y) : x, y \in C, x \neq y\}$$

— его кодовое расстояние в схеме $Y_i^n$.

Вначале исследуем случай схемы $Y_2^n$ и начнем с вычисления $m_2(k, \mathbb{Z}_q)$. Пусть $m \geqslant 2$, $C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subset \mathbb{Z}_q$ — код мощности $m$, $\delta_2(m)$ — максимальное кодовое расстояние для кодов мощности $m$. Мы можем считать далее $\gamma_1 = 0$, так как кодовое расстояние не зависит от сдвига кода.

Лемма 16. *Если $C \subset \mathbb{Z}_q$, $|C| \geqslant [q/2]+1$, то $\delta_2(C) = [(q+1)/2]$.*

Доказательство. Пусть $q = 2t$. Так как

$$\mathbb{Z}_q = \bigcup_{i=0}^{t-1}\{i, t+i\}, \quad |C| \geqslant t+1,$$

то при некотором $i$ будет $\{i, i+t\} \subset C$ и $\delta_2(C) \leqslant t = [(q+1)/2]$.

Пусть $q = 2t+1$, $\mathbb{Z}_q = \{0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{t}\{i, t+i\}\right)$. Если $t$ или $t+1$ лежат в $C$, то $\delta_2(C) \leqslant t+1 = [(q+1)/2]$. В остальных случаях найдется $i$, $i \in C$, такое, что $i+1 \notin C$, а $i+1+t \in C$ и

$$\delta_2(C) \leqslant d_2(i, i+1+t) = t+1 = [(q+1)/2].$$

Остается заметить, что для любого кода $\delta_2(C) \geqslant [(q+1)/2]$. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *При $2 \leqslant m \leqslant [q/2]$ $\delta_2(m) = q - m + 1$.*

Доказательство. Пусть $C=\{0,\gamma_2,\ldots,\gamma_m\}$. Имеем

$$\mathbb{Z}_q=\left(\bigcup_{i=1}^{m-2}\{i,q-m+1+i\}\right)\cup\{0\}\cup[m-1,q-m+1].$$

Если для некоторого $\gamma_i$ имеет место $\gamma_i\in[m-1,q-m+1]$, то $q-\gamma_i\in[m-1,q-m+1]$ и $\delta_2(C)\leqslant d_2(0,\gamma_i)\leqslant q-m+1$. Если $C\cap[m-1,q-m+1]=\varnothing$, то одна из пар $\{i,q-m+1+i\}\subset C$ и опять $\delta_2(C)\leqslant q-m+1$.

Остается заметить, что $\delta_2(\{0,1,\ldots,m-1\})=q-m+1$. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Если* $q\geqslant 2$, *то*

$$m_2(k,\mathbb{Z}_q)=\begin{cases}q, & k=1,\ldots,[(q+1)/2],\\ q-k+1, & k=[(q+1)/2]+1,\ldots,q-1.\end{cases}$$

Доказательство. При $k=1,\ldots,[(q+1)/2]$ равенство $m_2(k,\mathbb{Z}_q)=q$ тривиально. Если $k\geqslant[(q+1)/2]+1$, $C=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}$, $\delta_2(C)\geqslant k$, то, по лемме 16, $m\leqslant[q/2]$. Тогда, по лемме 17, $k\leqslant\delta_2(C)\leqslant q-m+1$, поэтому $m\leqslant q-k+1$ и $m_2(k,\mathbb{Z}_q)\leqslant q-k+1$. Остается заметить, что $\delta_2(\{0,1,\ldots,q-k\})=k$. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Для всех* $r\in[0,n-1]$, $k\in[M_r,M_{r+1}-1]$

$$m_2(k,G_q^n)=M'_{n-r-1}m_2(k,G_q^{r+1}).$$

Доказательство. Пусть $C\subset G_q^n$, $\delta_2(C)\geqslant k$, $|C|=m_2(k,G_q^n)$. Для вектора $(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})$ из $\mathbb{Z}_{q_{r+1}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{q_{n-1}}$ положим

$$C_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}=\{(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{n-1})\in C:\ \gamma_{r+1}=\alpha_{r+1},\ldots,\gamma_{n-1}=\alpha_{n-1}\}.$$

Тогда

$$C=\bigcup_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{Z}_{q_{r+1}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{q_{n-1}}}C_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}.$$

Пусть $x,y\in C$. Если $x$ и $y$ входят в разные классы $C_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}$, то $d_2(x,y)\geqslant M_{r+1}>k$, так как по условию $k\in[M_r,M_{r+1}-1]$. Если

$$x=(x_0,\ldots,x_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1}),\quad x'=(x_0,\ldots,x_r)\in G_q^{r+1},$$
$$y=(y_0,\ldots,y_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1}),\quad y'=(y_0,\ldots,y_r)\in G_q^{r+1},$$

то $d_2(x,y)=d_2(x',y')$. Если положить

$$C'_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}=\{x'=(x_0,\ldots,x_r)\in G_q^{r+1}:\ x=(x_0,\ldots,x_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})\in C_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}\},$$

то $C'_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}$ код в $G_q^{r+1}$ с кодовым расстоянием, не меньшим $k$, а множество

$$C=\bigcup_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}\{x=(x_0,\ldots,x_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})\in G_q^n:\ x'=(x_0,\ldots,x_r)\in C'_{(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})}\}$$

будет кодом в $G_q^n$ с кодовым расстоянием, не меньшим $k$.

Число возможных $(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{n-1})$ равно $M'_{n-r-1}=q_{r+1}\cdots q_{n-1}$, следовательно, $m_2(k,G_q^n)=M'_{n-r-1}m_2(k,G_q^{r+1})$. Лемма 19 доказана. Таким образом, достаточно вычислить величину $m(k,G_q^{r+1})$ для $k\in[M_r,M_{r+1}-1]$ и $r\in[0,n-1]$.

Лемма 20. *Если* $r\in[0,n-1]$, $s\in\bigl[\bigl[(q_r+1)/2\bigr]+1,q_r-1\bigr]$, $k\in[sM_r,(s+1)M_r-1]$, *то*

$$m_2(k,G_q^{r+1})=q_r-s+1.$$

Доказательство. Пусть $C\subset G_q^{r+1}$, $|C|=m_2(k,G_q^{r+1})=m$, $\delta_2(C)\geqslant k$. В $C$ не могут входить два элемента с одной и той же $r$-й координатой, иначе $\delta_2(C)\leqslant M_r-1$. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ $r$-е координаты точек $C$. Если $x,y\in C$, $x=(x_0,\ldots,x_{r-1},\gamma_i)=(x_0,\ldots,x_{r-1},0)+(0,\ldots,0,\gamma_i)=x'+x''$, $y=(y_0,\ldots,y_{r-1},\gamma_j)=(y_0,\ldots,y_{r-1},0)+(0,\ldots,\gamma_j)=y'+y''$, то, пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned}sM_r\leqslant k\leqslant d_2(x,y)\leqslant d_2(x',y')+d_2(x'',y'')\leqslant M_r-1+\\+M_r\max\{|\gamma_i-\gamma_j|,q_r-|\gamma_i-\gamma_j|\}=M_r-1+M_rd_2(\gamma_i,\gamma_j).\end{aligned}$$

Отсюда $d_2(\gamma_i,\gamma_j)\geqslant s$, т. е. $C'=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}$ — код в $\mathbb{Z}_{q_r}$ мощности $m$ с кодовым расстоянием $\delta_2(C')\geqslant s$. Согласно леммам 16, 17 для $s\in\bigl[\bigl[(q_r+1)/2\bigr]+1,q_r-1\bigr]$ справедлива оценка $q_r-m+1\geqslant s$ или

$$m=m_2(k,G_q^{r+1})\leqslant q_r-s+1. \tag{7.6}$$

Пример кода

$$C=\{(0,0,\ldots,0),\ (q_0-1,\ldots,q_{r-1}-1,s)\}\bigcup\left(\bigcup_{l=s+1}^{q_r-1}\{(0,0,\ldots,0,l)\}\right)$$

показывает, что в (7.6) имеет место равенство. Лемма 20 доказана.

Леммы 19, 20 для случая $q_0=\ldots=q_{n-1}$ установлены в [18].

Обозначим $]x[$ — наименьшее целое, не меньшее $x$, $p(q,s)$ — наименьшее $p\in\mathbb{N}$, при котором уравнение

$$r_1+r_2+\cdots+r_s=0\pmod q,\qquad r_i\in[1,p] \tag{7.7}$$

имеет решение.

Лемма 21. *Для любых* $q,s\in\mathbb{N}$

$$p(q,s)=\begin{cases}1, & q\ \textit{делит}\ s,\\ 2, & q<s\ \textit{и}\ q\ \textit{не делит}\ s,\\ \left]\dfrac{q}{s}\right[, & q>s.\end{cases}$$

*Если* $q\mid s$ *или* $s\mid q$, *то решение уравнения* (7.7) *имеем вид* $r_1=\cdots=r_s=p(q,s)$. *В остальных случаях любое из* $r_1,\ldots,r_s$ *может быть меньше* $p(q,s)$ *или равно* $p(q,s)$

Доказательство. Если $q\mid s$, то можно положить $r_1=\cdots=r_s=1$ и $p(q,s)=1$.

Если $q<s$ и $q\mid s$, то для $r_i\in[1,2]$ сумма $r_1+r_2+\cdots+r_s$ пробегает все значения от $s$ до $2s$. В этом случае $q$ делит некоторое число, лежащее на

интервале $(s,2s)$, и $p(q,s)=2$. Если $q>s$, то $\left(]\frac{q}{s}[-1\right) s<q$, $\left(]\frac{q}{s}[\right) s\geqslant q$ и $p(q,s)=]\frac{q}{s}[$. Анализируя рассмотренные случаи, легко получаем указанные свойства решений уравнения (7.7). Лемма 21 доказана.

Пусть

$$k_r=\left(\left[(q_r+1)/2\right]+1\right)M_r-1, \tag{7.8}$$

$$\widetilde{k}_r=k_r \quad (q_r \text{ четное}), \tag{7.9}$$

$$\widetilde{k}_r=\left[(q_r+1)/2\right]M_r+\sum_{i=0}^{l-1}(q_i-1)M_i+\sum_{i=l}^{r-1}(q_i-p(q_i,q_r))M_i \ (q_r \text{ нечетное}), \tag{7.10}$$

где $l\in\{0,1,\dots,r-1\}$ — наибольшее, для которого $q_l\mid q_r$ и $q_r\mid q_l$, а при $j=l+1,\dots,r-1$ или снова $q_j\mid q_r$ или $q_r\mid q_j$; если такого $l$ нет, то $l=0$.

Отметим, что при $q_0=q_1=\dots=q_r$ $p(q_i,q_r)=1$ и $\widetilde{k}_r=k_r$ независимо от четности $q_r$.

Для $\alpha\in\mathbb{Z}$ и $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant 2$ обозначим

$$(\alpha)_q=\alpha \pmod q\in[0,q-1].$$

Для $x_0,\dots,x_r\in\mathbb{Z}$ будем писать $(x_0,\dots,x_r)\in G_q^{r+1}$, имея в виду, что речь идет об элементе $((x_0)_{q_0},\dots,(x_r)_{q_r})$.

Л е м м а 22. *Если* $r\in[0,n-1]$, *то*

$$m_2(k,G_q^{r+1})=\begin{cases} q_r, & k\in\left[M_r,\widetilde{k}_r\right], \quad (7.11)\\ q_r-1, & k\in\left[\widetilde{k}_r+1,k_r\right]. \quad (7.12)\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k\geqslant M_r$, для кода $C\subset G_q^{r+1}$, $|C|=m_2(k,G_q^{r+1})$. Тогда $|C|\leqslant q_r$, иначе $\delta_2(C)<M_r$.

Если $q_r=2s$, $k\in[M_r,k_r]$, то для кода

$$C=\bigcup_{l=0}^{s-1}\{(0,0,\dots,0,l),\ (q_0-1,q_1-1,\dots,q_{r-1}-1,s+l)\}$$

кодовое расстояние $\delta_2(C)=k_r=\widetilde{k}_r$ (7.9) и (7.11) выполнено.

Пусть в дальнейшем $q_r=2s+1$. Рассмотрим код $C$, состоящий из $2s=q_r-1$ элементов

$$x^0=(0,\dots,0,0), \qquad \left\{x^j=(q_0-2j,\dots,q_{r-1}-2j,j)\right\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\left\{x^{j+s}=(q_0-2j+1,\dots,q_{r-1}-2j+1,s+j)\right\}_{j=1}^{s}.$$

Подсчитаем его кодовое расстояние. Оно может достигаться между парами элементов

$$(x^0,x^{s+1}), \qquad (x^j,x^{j+s}), \qquad (x^j,x^{j+s+1}), \quad j=1,\dots,s-1.$$

Имеем для $j=1,\dots,s-1$

$$d_2(x^0,x^{s+1})=|(q_0-1,\dots,q_{r-1}-1,s+1)|=k_r,$$
$$d_2(x^j,x^{s+j})=|(2j-1-2j,\dots,2j-1-2j,s+1)|=$$
$$=|(q_0-1,\dots,q_{r-1}-1,s+1)|=k_r,$$
$$d_2(x^j,x^{s+1+j})=|(2j-2j-1,\dots,2j-2j-1,s+1)|=$$
$$=|(q_0-1,\dots,q_{r-1}-1,s+1)|=k_r,$$

поэтому $\delta_2(C) = k_r$. Отсюда

$$m_2(k_r, G_q^{r+1}) \geqslant q_r - 1. \tag{7.13}$$

Отметим, что если к коду $C$ добавить элемент $x^s = (q_0 - 2s, \ldots, q_{r-1} - 2s, s)$, то для нового кода $C'$, $|C'| = q_r$ и

$$\delta_2(C') = \min\{k_r, d_2(x^0, x^s), d_2(x^s, x^{2s})\}. \tag{7.14}$$

Имеем

$$d_2(x^s, x^{2s}) = |(2s - 1 - 2s, \ldots, 2s - 1 - 2s, s + 1)| = k_r, \tag{7.15}$$

но

$$d_2(x^0, x^s) = |(2s, \ldots, 2s, s + 1)|$$

может быть меньше $k_r$.

Выясним для каких $k \geqslant M_r$ существует код мощности $q_r$ с кодовым расстоянием $k$. Пусть это будет код $C$, состоящий из элементов

$$x^j = (q_0 - \alpha_{0j}, \ldots, q_{r-1} - \alpha_{r-1\,j}, j),$$

где $\alpha_{ij} \in [1, q_i]$, $i \in [0, r-1]$, $j \in [0, 2s]$. Кодовое расстояние может достигаться между следующими парами элементов

$$(x^j, x^{s+j}), \qquad (x^j, x^{s+1+j}), \qquad j \in [0, s], \qquad x^{2s+1} = x^0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$x^0 = (0, \ldots, 0),$$

$$\begin{aligned}\delta_2(C) = d_2(x^0, x^{s+1}) = |(q_0 - \alpha_{0\,s+1}, \ldots, q_r - \alpha_{r-1\,s+1}, s + 1)| = \\ = |(q_0 - p_0, \ldots, q_{r-1} - p_{r-1}, s + 1)|.\end{aligned}$$

В таком случае должна выполняться система неравенств

$$\begin{aligned}d_2(x^j, x^{s+j}) = |(\alpha_{0\,s+j} - \alpha_{0\,j}, \ldots, \alpha_{r-1\,s+j} - \alpha_{r-1\,j}, s + 1)| \geqslant \\ \geqslant |(q_0 - p_0, \ldots, q_{r-1} - p_{r-1}, s + 1)|, \quad j \in [0, s],\end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}d_2(x^j, x^{s+1+j}) = |(\alpha_{0\,j} - \alpha_{0\,s+j+1}, \ldots, \alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,s+1+j}, s + 1)| \geqslant \\ \geqslant |(q_0 - p_0, \ldots, q_{r-1} - p_{r-1}, s + 1)|, \quad j \in [0, s - 1].\end{aligned} \tag{7.17}$$

Отсюда, в частности, вытекают следующие неравенства

$$(\alpha_{r-1\,s+j} - \alpha_{r-1\,j})_{q_{r-1}} \geqslant q_{r-1} - p_{r-1}, \quad j \in [0, s], \tag{7.18}$$

$$(\alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,s+1+j})_{q_{r-1}} \geqslant q_{r-1} - p_{r-1}, \quad j \in [0, s - 1]. \tag{7.19}$$

Если обе части этих неравенств умножить на $-1$, то получим, что числа

$$\begin{aligned}r_j &= (\alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,s+j})_{q_{r-1}}, \qquad & j \in [0, s],\\ r_{s+j+1} &= (\alpha_{r-1\,s+1+j} - \alpha_{r-1\,j})_{q_{r-1}}, \qquad & j \in [0, s - 1],\end{aligned}$$

лежат на отрезке $[1, p_{r-1}]$. Кроме этого

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2s} r_j = \Bigg(\sum_{j=0}^{s} (\alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,s+j}) + \\ + \sum_{j=0}^{s-1} (\alpha_{r-1\,s+1+j} - \alpha_{r-1})\Bigg) \pmod{q_{r-1}} = 0 \pmod{q_{r-1}}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Значит $p_{r-1}=p(q_{r-1},q_r)$, $r_{s+1}=\alpha_{r-1\,s+1}=p_{r-1}$ и по решению уравнения (7.20) мы можем однозначно восстановить числа $\alpha_{r-1\,j}$, $j\in[0,2s]$. Отметим, что, согласно лемме 21, $1\leqslant p(q_{r-1},q_r)<q_r$.

Если $q_{r-1}\mid q_r$ и $q_r\mid q_{r-1}$, то, согласно лемме 21, $p_{r-1}\geqslant 2$ и можно считать, что

$$r_0=(-\alpha_{r-1\,s})_{q_{r-1}}\leqslant p_{r-1}-1,\quad \alpha_{r-1}\geqslant q_{r-1}-p_{r-1}+1.$$

Тогда

$$d_2(x^0,x^s)=|(\alpha_{0s},\ldots,\alpha_{r-1\,s},s+1)|\geqslant(q_{r-1}-p_{r-1}+1)M_{r-1}+(s+1)M_r. \quad (7.21)$$

Полагаем неизвестные параметры кода $C$ равными

$$\alpha_{i\,j}=(2j)_{q_i},\ i\in[0,r-2],\ j\in[1,s],\ \alpha_{i\,j+s}=(2j-1)_{q_i},\ i\in[0,r-2],\ j\in[1,s].$$

Напомним, что $\alpha_{i\,0}=0$, $i\in[0,r]$. Для полученного кода согласно (7.14), (7.15), (7.18), (7.19), (7.21)

$$\begin{aligned}\delta_2(C)&=\min\{(s+1)M_r+(q_r-p_{r-1})M_{r-1}+\sum_{i=0}^{r-2}(q_i-1)M_i,\ d_2(x^0,x^s)\}=\\&=(s+1)M_r+(q_{r-1}-p_{r-1}+1)M_{r-1}-1=\overline{k}_r.\end{aligned}$$

В нашем случае в определении $\widetilde{k}_r$ (см. (7.10)) $l=r-1$, поэтому $\overline{k}_r=\widetilde{k}_r$, и (7.11) выполнено.

Если $q_{r-1}\mid q_r$ или $q_r\mid q_{r-1}$, то решение уравнения (7.20) имеет вид $r_0=r_1=\cdots=r_{2s}=p(q_{r-1},q_r)=p_{r-1}$. Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned}&(\alpha_{r-1\,s+j}-\alpha_{r-1\,j})_{q_{r-1}}=q_{r-1}-p_{r-1}, && j\in[0,s],\\&(\alpha_{r-1\,j}-\alpha_{r-1\,s+1+j})_{q_{r-1}}=q_{r-1}-p_{r-1}, && j\in[0,s-1].\end{aligned}$$

Тогда из системы неравенств (7.16), (7.17) будут вытекать следующие неравенства

$$\begin{aligned}&(\alpha_{r-2\,s+j}-\alpha_{r-2\,j})_{q_{r-2}}\geqslant q_{r-2}-p_{r-2}, && j\in[0,s],\\&(\alpha_{r-2\,j}-\alpha_{r-2\,s+1+j})_{q_{r-2}}\geqslant q_{r-2}-p_{r-2}, && j\in[0,s-1],\\&((\alpha_{r-2\,0}-\alpha_{r-2\,s+1})_{q_{r-2}}=q_{r-2}-p_{r-2}),\end{aligned}$$

и мы можем повторить предыдущие рассуждения. После конечного числа шагов мы докажем равенство (3.11) для $k\in[M_r,\widetilde{k}_r]$.

Если $k\in[\widetilde{k}_r+1,k_r]$, то с одной стороны $m_2(k,G_q^{r+1})\leqslant q_r-1$, а с другой стороны, согласно (7.13), $m_2(k,G_q^{r+1})\geqslant q_r-1$, поэтому

$$m_2(k,G_q^{r+1})=q_r-1.$$

Равенство (3.12) также доказано. Лемма 22 полностью доказана.

Из лемм 19, 20, 22 вытекает теорема.

Т е о р е м а 9. *Если* $r\in[0,n-1]$, $k\in[M_r,M_{r+1}-1]$, *то*

$$m_2(k,G_q^n)=\begin{cases}q_rM'_{n-r-1}, & k\in[M_r,\widetilde{k}_r],\\(q_r-1)M'_{n-r-1}, & k\in[\widetilde{k}_r+1,k_r],\\(q_r-s+1)M'_{n-r-1}, & k\in[sM_r,(s+1)M_r-1],\\ & s\in\big[\big[(q_r+1)/2\big]+1,q_r-1\big]\,.\end{cases}$$

Если все $q_i = q$, то $\widetilde{k}_r = k_r$ и теорема 9 при $q = 2$ была доказана О. И. Смирновым [15], а при $q \geqslant 3$ — А. А. Тюрюкановым [18].

Перейдем к случаю схемы $Y_1^n$. Известно, что $m_1(k, \mathbb{Z}_q) = [q/k]$.

Обозначим $\delta_1(m)$ — максимальное кодовое расстояние для кодов из $Y_1$ мощности $m$. Для $m = 2, \ldots, q$

$$\delta_1(m) = [q/m]. \tag{7.22}$$

Напомним, что $d_r$ определено в (7.5).

Лемма 23. *Для всех $r \in [0, n-1]$, $k \in [M_r, d_r]$*

$$m_1(k, G_q^n) = m_1(k, G_q^{r+1}) M'_{n-r-1}.$$

*Для всех $r \in [0, n-2]$, $k \in [d_r + 1, M_{r+1} - 1]$*

$$m_1(k, G_q^n) = M'_{n-r-1}.$$

Доказательство. Первое равенство доказывается точно так же как и лемма 18.

Для всех $x, y \in G_q^{r+1}$ $d_1(x, y) \leqslant d_r$, поэтому при $k \in [d_r + 1, M_{r+1} - 1]$ в $G_q^{r+1}$ нет кода с кодовым расстоянием, равным $k$. Но если $r \neq n-1$, то множество

$$C = \bigcup_{(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{q_{r+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_{n-1}}} \{(0, \ldots, 0, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n-1})\}$$

будет кодом в $G_q^n$ с кодовым расстоянием $k \geqslant M_{r+1}$. Его мощность равна $M'_{n-r-1}$. Лемма 23 доказана.

Таким образом, достаточно вычислить величину $m_1(k, G_q^{r+1})$ для $k \in [M_r, d_r]$ и $r \in [0, n-1]$.

Для $s \in [1, [q_r/2] - 1]$ положим

$$k'_r = (s+1) M_r - 1, \quad (s \mid q_r), \tag{7.23}$$

$$k'_r = s M_r + \sum_{i=0}^{l-1} (q_i - 1) M_i + \sum_{i=l}^{r-1} (q_i - p(q_i, m)) M_i, \quad (s \nmid q_r), \tag{7.24}$$

где $q_r = ms$, $l \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ — наибольшее, для которого $q_l \mid m$ и $m \mid q_l$, а при $j = l+1, \ldots, r-1$ $q_j \mid m$ или $m \mid q_j$; если такого $l$ нет, то $l = 0$.

Лемма 24. *Если $r \in [0, n-1]$, $s \in [1, [q_r/2] - 1]$, то*

$$m_1(k, G_q^{r+1}) = \begin{cases} [q_r/s], & k \in \left[sM_r, k'_r\right], & (7.25) \\ [q_r/s] - 1, & k \in \left[k'_r + 1, (s+1)M_r - 1\right], & (7.26) \\ 2, & k \in [[q_r/2] M_r, d_r]. & (7.27) \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \geqslant sM_r$, $s \in [1, [q_r/2] - 1]$, для кода $C \subset G_q^{r+1}$, $|C| = m_1(k, G_q^{r+1})$. Тогда $r$-е координаты кода $C$ все различны, иначе $\delta_1(C) < sM_r \leqslant k$. Значит, они образуют код $C' \subset \mathbb{Z}_q$, для которого $|C'| = |C|$. Если $|C'| \geqslant [q_r/s] + 1$, то согласно (7.22) $\delta_1(C') \leqslant s - 1$ и $\delta_1(C) < sM_r < k$. Поэтому

$$|C| = |C'| \leqslant [q_r/s]. \tag{7.28}$$

Пусть сначала $s\,|\,q_r$. Рассмотрим код

$$C=\bigcup_{j=0}^{[q_r/s]-1}\{x^j=(q_0-j,\ldots,q_{r-1}-j,js)\}$$

мощности $[q_r/s]$. Подсчитаем его кодовое расстояние. Оно может достигаться между парами элементов

$$(x^j,x^{j+1}),\quad j=0,\ldots,[q_r/s]-1,\quad x^{[q_r/s]}=x^0=(0,\ldots,0).$$

Для $j=0,\ldots,[q_r/s]-2$ согласно (7.23)

$$d_1(x^j,x^{j+1})=|(q_0-1,\ldots,q_{r-1}-1,s)|=(s+1)M_r-1=k_r'.$$

Для $j=[q_r/s]-1$

$$d_1(x^{[q_r/s]-1},x^0)=d_1((q_0+1-[q_r/s],\ldots,q_{r-1}+1-[q_r/s],s([q_r/s]-1))).$$

Здесь $d_1(x)=d_1(x,(0,\ldots,0))$.

Если $1\leqslant s\leqslant[q_r/3]$, то, согласно условию $s\,|\,q_r$,

$$s+1\leqslant q_r-2s+1\leqslant s([q_r/s]-1)\leqslant q_r-s-1$$

и $d_1(x^{[q_r/s]-1},x^0)\geqslant(s+1)M_r>k_r'$.

Если $[q_r/3]+1\leqslant s\leqslant[q_r/2]-1$, то $[q_r/s]=2$ и

$$d_1(x^{[q_r/s]-1},x^0)=|(q_0-1,\ldots,q_{r-1}-1,s)|=k_r'.$$

Итак, $d_1(C)=k_r'$, $|C|=[q_r/s]$ и согласно (7.28) в случае $s\,|\,q_r$ (7.25) верно.

Пусть в дальнейшем $q_r=ms$. Рассмотрим код $C$, состоящий из $m-1$ элементов

$$C=\bigcup_{j=0}^{m-2}\{x^j=(q_0-j,\ldots,q_{r-1}-j,js)\}.$$

Кодовое расстояние может достигаться только между парами элементов $(x^j,x^{j+1})$, $j=0,\ldots,m-3$, для которых

$$d_1(x^j,x^{j+1})=|(q_0-1,\ldots,q_r-1,s)|=(s+1)M_r-1.$$

Поэтому $\delta_1(C)=(s+1)M_r-1$ и для $k\in[sM_r,(s+1)M_r-1]$

$$m_1(k,G_q^{r+1})\geqslant m-1.\tag{7.29}$$

Отметим, что если к коду $C$ добавить элемент

$$x^{m-1}=(q_0+1-m,\ldots,q_r+1-m,(m-1)s),$$

то для нового кода $C'$, $|C'|=m$, и

$$\delta_1(C')=\min\{(s+1)M_r-1,d_1(x^0,x^{m-1})\},$$

но $d_1(x^0,x^{m-1})=|(m-1,\ldots,m-1,s)|$ может быть меньше $(s+1)M_r-1$.

Выясним для каких $k\geqslant sM_r$ существует код $C$ мощности $m$ с кодовым расстоянием $k$. В этом случае его $r$-е координаты образуют код $C'$ в $\mathbb{Z}_q$

мощности $m$ с кодовым расстоянием $s$. С точностью до сдвига он единственен $C' = \{0, s, 2s, \ldots, (m-1)s\}$. Поэтому мы можем предположить, что код $C$ состоит из элементов

$$x^j = (q_0 - \alpha_{0j}, q_1 - \alpha_{1j}, \ldots, q_{r-1} - \alpha_{r-1\,j}, js),$$

где $\alpha_{ij} \in [1, q_i]$, $i \in [0, r-1]$, $j \in [0, m-1]$. Кодовое расстояние может достигаться между следующими парами элементов

$$(x^j, x^{j+1}), \quad j \in [0, m-1], \quad x^m = x^0.$$

Дальнейшие рассуждения как и в лемме 22. Приведем их для полноты изложения.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{gathered} x^0 = (0, \ldots, 0), \\ \delta_1(C) = d_1(x^0, x^1) = |(q_0 - \alpha_{0\,1}, q_1 - \alpha_{11} \ldots, q_{r-1} - \alpha_{r-1\,1}, s)| = \\ = |(q_0 - p_0, \ldots, q_{r-1} - p_{r-1}, s)|. \end{gathered}$$

В таком случае должна выполняться система неравенств

$$\begin{gathered} d_1(x^j, x^{j+1}) = |(\alpha_{0j} - \alpha_{0j+1}, \ldots, \alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,j+1}, s)| \geqslant \\ \geqslant |(q_0 - p_0, \ldots, q_{r-1} - p_{r-1}, s)|, \quad j \in [0, m-1], \\ \alpha_{0m} = \cdots = \alpha_{r-1\,m} = 0. \end{gathered} \tag{7.30}$$

Отсюда, в частности, вытекают следующие неравенства

$$(\alpha_{r-1\,j} - \alpha_{r-1\,j+1})_{q_{r-1}} \geqslant q_{r-1} - p_{r-1}, \quad j \in [0, m-1]. \tag{7.31}$$

Если обе части этих неравенств умножить на $-1$, то числа

$$r_j = (\alpha_{r-1\,j+1} - \alpha_{r-1\,j})_{q_{r-1}} \leqslant p_{r-1}, \quad j \in [0, m-1]$$

будут лежать на отрезке $[1, p_{r-1}]$. Кроме того

$$\sum_{j=0}^{m-1} r_j = \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha_{r-1\,j+1} - \alpha_{r-1\,j}) \pmod{q_{r-1}} = 0 \pmod{q_{r-1}}. \tag{7.32}$$

Значит, $p_{r-1} = p(q_{r-1}, m)$, $p_{r-1} = \alpha_{r-1\,1}$ и по решению уравнения (7.32) мы можем однозначно восстановить числа $\alpha_{r-1\,j}$, $j \in [2, m-1]$.

Если $q_{r-1} \,|\, m$ и $m \,|\, q_{r-1}$, то согласно лемме 21 можно считать, что

$$\begin{gathered} r_{m-1} = (-\alpha_{r-1\,m-1})_{q_{r-1}} \leqslant p_{r-1} - 1, \quad p_{r-1} \geqslant 2, \\ \alpha_{r-1\,m-1} \geqslant q_{r-1} - p_{r-1} + 1. \end{gathered}$$

Тогда

$$d_1(x^0, x^{m-1}) = |(\alpha_{0\,m-1}, \ldots, \alpha_{r-1\,m-1}, s)| \geqslant (q_r - p_{r-1} + 1)M_{r-1} + sM_r. \tag{7.33}$$

Полагаем неизвестные параметры кода $C$ равными

$$\alpha_{ij} = (j)_{q_i}, \quad i \in [0, r-2], \quad j \in [1, m-1], \quad \alpha_{i0} = 0, \quad i \in [0, r].$$

Для полученного кода

$$\delta_1(C) = \min\{d_1(x^0, x^1), d_1(x^0, x^{m-1})\}.$$

Так как

$$d_1(x^0, x^1) = sM_r + \sum_{i=0}^{r-2}(q_i - 1)M_i + (q_{r-1} - p_{r-1})M_{r-1} = \\ = sM_r + (q_{r-1} - p_{r-1} + 1)M_r - 1,$$

то, сравнивая с (7.33), получаем, что

$$\delta_1(C) = d_1(x^0, x^1) = \overline{k}_r.$$

В нашем случае в определении $k'_r$ (см. (7.24)) $l = r - 1$, поэтому $\overline{k}_r = k'_r$ и (7.25) верно.

Если $q_{r-1} \,|\, m$ или $m \,|\, q_{r-1}$, то решение уравнения (7.32) имеет вид

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{m-1} = p(q_{r-1}, m) = p_{r-1}.$$

Поэтому неравенства (7.31) превращаются в равенства. Тогда из системы неравенств (7.30) будет вытекать, что

$$(\alpha_{r-2\,j} - \alpha_{r-2\,j+1})_{q_{r-2}} \geqslant q_{r-2} - p_{r-2}, \quad j \in [0, m-1],$$

и мы можем повторить предыдущие рассуждения. После конечного числа шагов мы докажем равенство (7.25) для $k \in [sM_r, k'_r]$ и $s \,|\, q_r$.

Если $k \in [k'_r + 1, (s+1)M_r - 1]$, то с одной стороны $m_1(k, G_q^{r+1}) \leqslant m-1$, а с другой стороны, согласно (7.29), $m_1(k, G_q^{r+1}) \geqslant m-1$, поэтому

$$m_1(k, G_q^{r+1}) = m - 1.$$

Равенство (7.26) также доказано.

Пусть теперь $k \geqslant [q_r/2]M_r$, для кода $C$, $\delta_1(C) \geqslant k$. Тогда $r$-е координаты его элементов все различные и образуют код $C'$ в $\mathbb{Z}_{q_r}$, для которого $\delta_1(C') \geqslant [q_r/2]$. По (7.22) $|C| = |C'| \leqslant 2$. Для кода $C = \{(0, \ldots, 0), x^r\}$, где $x^r$ определено в (7.5), $|C| = 2$ и $\delta_1(C) = d_r$. Равенство (7.27) и лемма 24 доказаны.

Из лемм 23 и 24 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 10. *Если* $r \in [0, n-1]$, $s \in [1, [q_r/2]-1]$, *то*

$$m_1(k, G_q^n) = \begin{cases} [q_r/s]M'_{n-r-1}, & k \in [sM_r, k'_r], \\ ([q_r/s] - 1)M'_{n-r-1}, & k \in [k'_r + 1, (s+1)M_r - 1], \\ 2M'_{n-r-1}, & k \in [[q_r/2]M_r, d_r], \\ M'_{n-r-1}, & k \in [d_r + 1, M_{r+1} - 1], \ \ r \neq n-1. \end{cases}$$

## § 8. Многомерные дискретные экстремальные задачи

В этом параграфе рассматриваются многомерные варианты задач Фейера (2.1)–(2.8), Турана (5.1)–(5.4), Дельсарта (5.5)–(5.8), констант Джексона (6.3) для схем отношений $Y_i^n$, $i = 1, 2$. Используются обозначения и определения предыдущего параграфа.

Пусть $l_2(G_q^n)$ — евклидово пространство всех функций $f: G_n^n \to \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{M_n} \sum_{x \in G_q^n} f(x) \overline{g}(x)$$

и нормой $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$.

Если для $\nu, x \in G_q^n$ $(\nu, x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\nu_i x_i / q_i)$, то система функций

$$\{\varphi_\nu(x)\} = \{\exp 2\pi i(\nu, x)\} = \{e((\nu, x))\}$$

будет образовывать в пространстве $l_2(G_q^n)$ полную ортонормированную систему (систему характеров группы $G_q^n$). Для любой функции $f$ из $l_2(G_q^n)$ справедливо разложение в сумму Фурье

$$f(x) = \sum_{\nu \in G_q^n} \widehat{f}_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{|k|=0}^{M_n - 1} \widehat{f}_\nu \varphi_\nu(x), \quad \widehat{f}_\nu = (f, \varphi_\nu)$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\nu \in G_q^n} |\widehat{f}_\nu|^2 = \sum_{|k|=0}^{M_n - 1} |\widehat{f}_\nu|^2.$$

В подпространстве четных функций ортогональный базис образует система косинусов

$$\{\psi_\nu(x)\} = \{\cos 2\pi(\nu, x)\} = \{c((\nu, x))\}, \quad \nu \in \Lambda'_{n-1}, \quad x \in G_q^n,$$

где

$$\Lambda'_{n-1} = \{\nu \in G_q^n : |x| \leqslant |-x|\}.$$

Соотношения ортогональности выглядят так. Для $\nu, \mu \in \Lambda'_{n-1}$

$$(\psi_\nu, \psi_\mu) = \frac{\delta_{\nu\mu}}{m_\nu},$$

$$\frac{1}{m_\nu} = (\psi_\nu, \psi_\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}), \\ & \nu_i \text{ либо } 0, \text{ либо } q_i/2 \ \ (q_i \text{ четное}), \\ 1/2, & \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{8.1}$$

Символы Кронекера $\delta_{\nu\mu}$ в (8.1) продолжим с $\Lambda'_{n-1}$ на всю группу $G_q^n$, полагая

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \text{ либо } \mu = -\nu, \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда равенство (8.1) для скалярных произведений $(\psi_\nu, \psi_\mu)$ будет справедливо для всех $\nu, \mu \in G_q^n$.

Для любой четной $f$ из $l_2(G_q^n)$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{\nu \in \Lambda'_{n-1}} \widehat{f}_\nu \psi_\nu(x), \quad \widehat{f}_\nu = m_\nu (f, \psi_\nu)$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\nu \in \Lambda'_{n-1}} \frac{1}{m_\nu} |\widehat{f}_\nu|^2.$$

Для произвольной функции $f$ из $l_2(G_q^n)$ определим величины наилучших приближений, связанные со схемами $Y_i^n$, $i=1,2$,

$$E_{k,i}(f,G_q^n)_2=\min_{a_\nu}\Big\|f-\sum_{d_i(\nu)<k}a_\nu\varphi_\nu\Big\|_2,\quad k\in d_i(G_q^n)$$

и модули непрерывности

$$\omega_i(d,f,G_q^n)_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\max_{d_i(h)\leqslant d}\|f(x+h)-f(x)\|_2,\quad d\in d_i(G_q^n).$$

Здесь $d_i(x)=d_i(x,(0,\ldots,0))$.

С помощью равенства Парсеваля нетрудно убедиться, что

$$E_{k,i}^2(f,G_q^n)_2=\sum_{d_i(\nu)\geqslant k}|\widehat{f}_\nu|^2,\quad \omega_i^2(d,f,G_q^n)_2=\max_{d_i(h)\leqslant d}\sum_{\nu\in G_q^n}(1-\psi_\nu(h))|\widehat{f}_\nu|^2.$$

Константы Джексона определим равенством

$$D_i(d,k,G_q^n)_2=\sup_{f\in l_2(G_q^n)}\frac{E_{k,i}(f,G_q^n)_2}{\omega_i(d,f,G_q^n)_2}. \tag{8.2}$$

Сформулируем задачи Фейера. Вычислить величины

$$\Lambda_i(k,G_q^n)=\sup\Big\{f(0):f(x)=\sum_{d_i(\nu)<k}\widehat{f}_\nu\varphi_\nu(x),\\ \widehat{f}_0=1,\ f(x)\geqslant 0,\ x\in G_q^n\Big\},\quad k\in d_i(G_q^n), \tag{8.3}$$

$$\lambda_i(k,G_q^n)=\sup\Big\{f(0):f(x)=\sum_{d_i(\nu)<k}\widehat{f}_\nu\varphi_\nu(x),\ \widehat{f}_0=1,\ \widehat{f}_\nu\geqslant 0,\\ 0<d_i(\nu)<k,\quad f(x)\geqslant 0,\ x\in G_q^n\Big\},\ k\in d_i(G_q^n). \tag{8.4}$$

Сформулируем задачи Турана. Вычислить величины

$$a_{T,i}(k,G_q^n)=\sup\Big\{\widehat{f}_0:f(x)=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{f}_\nu\varphi_\nu(x),\ \widehat{f}_\nu\geqslant 0,\ \nu\in G_q^n,\\ f(0)=1,\ f(x)=0,\ d_i(x)\geqslant k\Big\},\quad k\in d_i(G_q^n). \tag{8.5}$$

Сформулируем задачи Дельсарта. Вычислить величины

$$a_{D,i}(k,G_q^n)=\sup\Big\{\widehat{f}_0:f(x)=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{f}_\nu\varphi_\nu(x),\ \widehat{f}_\nu\geqslant 0,\ \nu\in G_q^n,\\ f(0)=1,\ f(x)\leqslant 0,\ d_i(x)\geqslant k\Big\},\ k\in d_i(G_q^n). \tag{8.6}$$

Для вычисления констант Джексона необходим более общий вариант задач Дельсарта. Вычислить величины

$$a_{D,i}(l,k,G_q^n)=\sup\Big\{\widehat{f}_0:f(x)=\sum_{d_i(\nu)\leqslant l}\widehat{f}_\nu\varphi_\nu(x),\ \widehat{f}_\nu\geqslant 0,d_i(\nu)\leqslant l,\\ f(0)=1,\ f(x)\leqslant 0,\ d_i(x)\geqslant k\Big\},\ l,k\in d_i(G_q^n). \tag{8.7}$$

Мы используем запись $\widehat{f}_0$ для $\widehat{f}_{(0,\dots,0)}$.

Имеем

$$a_{D,i}(d_{n,i},k,G_q^n)=a_{D,i}(k,G_q^n). \tag{8.8}$$

Во всех экстремальных задачах можно ограничиться только четными тригонометрическими полиномами. Для удобства в записи четных полиномов мы будем использовать $\nu\in G_q^n$, предполагая, что всегда $\widehat{f}_\nu=\widehat{f}_{-\nu}$.

Так же как и для схем $Y_i$, $i=1,2$, (одномерный случай) устанавливаются соотношения

$$a_{T,i}(k,G_q^n)=\frac{\Lambda_i(k,G_q^n)}{M_n}, \tag{8.9}$$

$$D_i^2(d_{n,i},k,G_q^n)_2=1-a_{D,i}(k,G_q^n). \tag{8.10}$$

Отметим также следующие неравенства

$$\lambda_i(k,G_q^n)\leqslant\Lambda_i(k,G_q^n), \tag{8.11}$$

$$a_{T,i}(l,G_q^n)\leqslant a_{D,i}(k,G_q^n). \tag{8.12}$$

Пользуясь известной схемой Дельсарта, установим связь между величинами $m_i(k,G_q^n)$ и $a_{D,i}(k,G_q^n)$.

Лемма 25. *Если $k\in d_i(G_q^n)$, $i=1,2$, то*

$$m_i(k,G_q^n)\leqslant\frac{1}{a_{D,i}(k,G_q^n)}, \tag{8.13}$$

$$D_i^2(d_{n,i},k,G_q^n)_2\geqslant 1-\frac{1}{m_i(k,G_q^n)}. \tag{8.14}$$

Доказательство. Пусть $C$ — код в $G_q^n$ с кодовым расстоянием $\delta_i(C)\geqslant k$, для полинома

$$f(x)=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{f}_\nu\psi_\nu(x)$$

выполнены условия

$$1)\ \widehat{f}_\nu\geqslant 0,\quad \nu\in G_q^n, \tag{8.15}$$

$$2)\ f(0)=1, \tag{8.16}$$

$$3)\ f(x)\leqslant 0,\quad d_i(x)\geqslant k. \tag{8.17}$$

Составим сумму

$$I=\sum_{x,y\in C}f(x-y).$$

С одной стороны, согласно (8.16), (8.17), неравенству $\delta_i(C)\geqslant k$

$$I=|C|f(0)+\sum_{x\neq y}f(x-y)\leqslant|C|.$$

С другой стороны, согласно (8.15)

$$I=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{f}_\nu\sum_{x,y\in C}\psi_\nu(x-y)=\widehat{f}_0|C|^2+\Re\sum_{d_i(\nu)>0}\widehat{f}_\nu\sum_{x,y\in C}\varphi_\nu(x)\overline{\varphi_\nu(y)}=$$

$$=\widehat{f}_0|C|^2+\sum_{d_i(\nu)>0}\left|\sum_{x\in C}\varphi_\nu(x)\right|^2\geqslant\widehat{f}_0|C|^2,$$

поэтому
$$|C| \leqslant \frac{1}{\widehat{f}_0}.$$
Вспоминая определение величины $a_{D,i}(k, G_q^n)$, получим
$$m_i(k, G_q^n) \leqslant \frac{1}{a_{D,i}(k, G_q^n)}.$$

Полином
$$f(x) = \sum_{\nu \in G_q^n} \psi_\nu(x),$$
для которого $f(x) = 0$ для всех $x \neq 0$, показывает, что оценка (8.13) — нетривиальная.

Оценка (8.14) вытекает из (8.13) и (8.10). Лемма 25 доказана.

Укажем возможную схему вычисления величин (8.3) и (8.6).

Пусть $i = 1, 2,\ k \in d_i(G_q^n)$
$$A_{k,i} = \{\nu \in G_q^n : 0 < d_i(\nu) < k\}.$$

Предположим, что существуют множества $A_{k,i}^* \subset G_q^n$ и полиномы
$$F_{k,i}(x) = 1 + \sum_{\nu \in A_{k,i}} \widehat{F}_\nu^{k,i} \psi_\nu(x), \tag{8.18}$$
$$G_{k,i}(x) = \widehat{G}_0^{k,i} + \sum_{\nu \in A_{k,i}^*} \widehat{G}_\nu^{k,i} \psi_\nu(x), \tag{8.19}$$

для которых выполнены условия
$$1)\ \widehat{F}_\nu^{k,i} \geqslant 0\ (\nu \in A_{k,i}), \quad \widehat{G}_\nu^{k,i} \geqslant 0\ (\nu \in A_{k,i}^*), \tag{8.20}$$
$$2)\ F_{k,i}(x) = 0\ (x \in A_{k,i}^*), \quad F_{k,i}(x) > 0\ (x \in G_q^n \setminus A_{k,i}^*), \tag{8.21}$$
$$\begin{aligned} 3)\ G_{k,i}(0) = 1, \quad & G_{k,i}(x) = 0\ (x \in A_{k,i}), \\ & 0 < G_{k,i}(x) < 1\ (x \in G_q^n \setminus A_{k,i}). \end{aligned} \tag{8.22}$$

Покажем, что полином $F_{k,i}$ — экстремальный в задачах Фейера (8.3), (8.4) и справедливы равенства
$$\Lambda_i(x, G_q^n) = \lambda_i(k, G_q^n) = F_{k,i}(0), \tag{8.23}$$
$$a_{T,i}(k, G_q^n) = a_{D,i}(k, G_q^n) = \frac{F_{k,i}(0)}{M_n}, \tag{8.24}$$
$$D_i^2(d_{n,i}, k, G_q^n)_2 = 1 - \frac{F_{k,i}(0)}{M_n}. \tag{8.25}$$

Вначале покажем, что
$$\widehat{G_0^{k,i}} = \frac{1}{F_{k,i}(0)}. \tag{8.26}$$

Рассмотрим полином
$$H_{k,i}(x) = \sum_{\nu \in G_q^n} G_{k,i}(\nu) \psi_\nu(x) = \sum_{\nu \in G_q^n} \widehat{H}_\nu^{k,i} \psi_\nu(x). \tag{8.27}$$

Пользуясь (8.1), получим

$$H_{k,i}(x) = M_n \sum_{\mu \in A^*_{k,i} \cup \{0\}} \widehat{G}^{k,i}_\mu (\psi_\mu(\nu), \psi_x(\nu)) = M_n \sum_{\mu \in A^*_{k,i} \cup \{0\}} \widehat{G}^{k,i}_\mu \frac{\delta_{\mu x}}{m_\mu}.$$

Отсюда и из (8.19) вытекают следующие свойства полинома (8.27)

$$1)\ \widehat{H}^{k,i}_0 = 1, \quad \widehat{H}^{k,i}_\nu = 0 \quad (\nu \in A_{k,i}), \quad \widehat{H}^{k,i}_\nu \geqslant 0\ (\nu \in G^n_q), \tag{8.28}$$

$$2)\ H_{k,i}(x) = 0 \quad (x \in G^n_q \setminus (A^*_{k,i} \cup \{0\})), \tag{8.29}$$

$$3)\ H_{k,i}(0) = M_n \widehat{G}^{k,i}_0, \quad H_{k,i}(x) \geqslant 0 \quad (x \in G^n_q). \tag{8.30}$$

Составим сумму

$$I = \frac{1}{M_n} \sum_{x \in G^n_q} F_{k,i}(x) H_{k,i}(x).$$

Из (8.21), (8.29), (8.30)

$$I = \frac{1}{M_n} F_{k,i}(0) H_{k,i}(0) = F_{k,i}(0) \widehat{G}^{k,i}_0. \tag{8.31}$$

Из (8.1), (8.18), (8.28)

$$I = \sum_{\nu \in A_{k,i} \cup \{0\}} \sum_{\mu \in G^n_q \setminus A_{k,i}} \widehat{F}^{k,i}_\nu \widehat{H}^{k,i}_\mu (\psi_\nu(x), \psi_\mu(x)) = \widehat{F}^{k,i}_0 \widehat{H}^{k,i}_0 = 1. \tag{8.32}$$

Равенства (8.31) и (8.32) доказывают (8.26).

Для любого полинома вида

$$f(x) = \sum_{\nu \in A_{k,i} \cup \{0\}} \widehat{f}_\nu \psi_\nu(x) \tag{8.33}$$

справедлива квадратурная формула

$$\widehat{f}_0 = \Big(\frac{1}{F_{k,i}(0)}\Big) f(0) + \sum_{\nu \in A^*_{k,i}} \widehat{G}^{k,i}_\nu f(\nu). \tag{8.34}$$

Проверка (8.34) для полиномов $\psi_\nu(x)$, $\nu \in A_{k,i} \cup \{0\}$, основана на свойствах (8.22) полинома (8.19).

Если для полинома (8.33) дополнительно $\widehat{f}_0 = 1$, $f(x) \geqslant 0$, $x \in G^n_q$, то согласно (8.34)

$$f(0) \leqslant F_{k,i}(0),$$

поэтому в задачах (8.3), (8.4)

$$\lambda_i(k, G^n_q) \leqslant \Lambda_i(k, G^n_q) \leqslant F_{k,i}(0).$$

Полином $F_{k,i}$ дает нижнюю оценку $\lambda_i(k, G^n_q) \geqslant F_{k,i}(0)$. Таким образом, (8.23) верно.

Пусть $f$ — допустимый полином в задаче Дельсарта (8.6), т. е.

$$f(x) = \sum_{\nu \in G^n_q} \widehat{f}_\nu \psi_\nu(x), \quad \widehat{f}_\nu \geqslant 0, \quad \nu \in G^n_q, \tag{8.35}$$

$$f(0) = 1, \quad f(x) \leqslant 0, \quad d_i(x) \geqslant k. \tag{8.36}$$

Составим сумму

$$I=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{H}_\nu^{k,i}f(\nu).$$

С одной стороны, согласно (8.28), (8.36), равенства $\{\nu\in G_q^n\colon d_i(\nu)\geqslant k\}=G_q^n\backslash(A_{k,i}\cup\{0\})$

$$I=f(0)+\sum_{d_i(\nu)\geqslant k}\widehat{H}_\nu^{k,i}f(\nu)\leqslant f(0)=1.$$

С другой стороны, согласно (8.30), (8.35), (8.26)

$$I=\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{H}_\nu^{k,i}\sum_{\mu\in G_q^n}\widehat{f}_\mu\psi_\mu(\nu)=\sum_{\mu\in G_q^n}\widehat{f}_\mu\sum_{\nu\in G_q^n}\widehat{H}_\nu^{k,i}\psi_\nu(\mu)=$$
$$=\sum_{\mu\in G_q^n}\widehat{f}_\mu H_{k,i}(\mu)\geqslant\widehat{f}_0H_{k,i}(0)=\frac{M_n\widehat{f}_0}{F_{k,i}(0)},$$

поэтому

$$\widehat{f}_0\leqslant\frac{F_{k,i}(0)}{M_n}.$$

Отсюда

$$a_{D,i}(k,G_q^n)\leqslant\frac{F_{k,i}(0)}{M_n}.$$

Это вместе с (8.9), (8.12), (8.23) дает (8.24). Равенство (8.25) вытекает из (8.10) и (8.24).

Предложенная схема вычисления величин (8.3)–(8.6) может быть дополнена следующими рассуждениями.

Если полином $\widetilde{F}_{k,i}$ удовлетворяет ограничениям задачи (8.4), то согласно (8.13)

$$\frac{\widetilde{F}_{k,i}(0)}{M_n}\leqslant\frac{\lambda_i(k,G_q^n)}{M_n}\leqslant\frac{\Lambda_i(k,G_q^n)}{M_n}=$$
$$=a_{T,i}(k,G_q^n)\leqslant a_{D,i}(k,G_q^n)\leqslant\frac{1}{m_i(k,G_q^n)}.\tag{8.37}$$

$$1-\frac{1}{m_i(k,G_q^n)}\leqslant D_i^2(d_{n,i},k,G_q^n)_2\leqslant1-\frac{\widetilde{F}_{k,i}(0)}{M_n}.\tag{8.38}$$

Если окажется, что

$$\widetilde{F}_{k,i}(0)=\frac{M_n}{m_i(k,G_q^n)},$$

то все неравенства обратятся в равенства.

Опишем случаи, когда экстремальные полиномы в многомерных задачах Фейера являются произведениями одномерных полиномов.

Пусть $i=1$, $k=sM_r$, $r\in[0,n-1]$, $s\in[1,[q_r/2]]$, $F_{s,q_r}(x_r)$ — экстремальный полином (4.37) в задачах Фейера (2.5), (2.7) при $p=s$, $q=q_r$, $G_{s,q_r}(x_r)$ — полином (4.41), определяющий квадратурную формулу в задачах Фейера (2.5), (2.7).

Положим

$$F_{k,1}(x) = \left(\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} \psi_\nu(x)\right) F_{s,q_r}(x_r) = \\ = \left(\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} c\left(\sum_{i=0}^{r-1}(\nu_i x_i/q_i)\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{|\nu_r|=1}^{s-1} \widehat{F}^{s,q_r}_{|\nu_r|} c(\nu_r x_r/q_r)\right), \quad (8.39)$$

$$G_{k,1}(x)=\left(\frac{1}{M_r}\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} \psi_\nu(x)\right) G_{s,q_r}(x_r) = \\ = \left(\frac{1}{M_r}\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} c\left(\sum_{i=0}^{r-1}(\nu_i x_i/q_i)\right)\right)\left(\widehat{G}^{s,q_r}_0 + \frac{1}{2}\sum_{|\nu_r|=1}^{[q_r/2]} \widehat{G}^{s,q_r}_{|\nu_r|} c(\nu_r x_r/q_r)\right). \quad (8.40)$$

Отметим свойства этих полиномов. Спектр полиномов $F_{k,1}$ совпадает с

$$\{\nu \in G_q^n : d_1(\nu) < sM_r\} = A_{k,1} \cup \{0\}, \quad |A_{k,1}| = (2s-1)M_r - 1,$$
$$F_{k,1}(x) \geqslant 0 \ (x \in G_q^n), \quad F_{k,1}(0) = F_{s,q_r}(0)M_r,$$
$$\widehat{F}^{k,1}_\nu \geqslant 0 \ (\nu \in G_q^n), \quad \widehat{F}^{k,1}_0 = 1,$$
$$G_{k,1}(x) \geqslant 0 \ (x \in G_q^n), \quad G_{k,1}(0) = 1,$$
$$\widehat{G}^{k,1}_\nu \geqslant 0 \ (\nu \in G_q^n)), \quad G_{k,1}(x) = 0 \ (x \in A_{k,1}).$$

Первый сомножитель у $F_{k,1}$ имеет $M_r - 1$ нулей в $G_q^r$, второй сомножитель имеет $2(s-1)$ нулей в $\mathbb{Z}_{q_r}$, поэтому их общее количество в $G_q^{r+1}$ есть

$$2(s-1)M_r + M_r - 1 = (2s-1)M_r - 1.$$

Обозначим множество нулей $F_{k,1}$ в $G_q^{r+1}$ через $A^*_{k,1}$. Имеем $|A^*_{k,1}| = |A_{k,1}|$. Спектр полинома $G_{k,1}$ совпадает с $A^*_{k,1} \cup \{0\}$. Таким образом, для полиномов (8.39), (8.40) выполнены свойства (8.18)–(8.22), поэтому для $r \in [0, n-1]$, $s \in [1, [q_r/2]]$

$$\lambda_1(sM_r, G_q^n) = \Lambda_1(sM_r, G_q^n) = F_{k,1}(0) = M_r F_{s,q_r}(0). \quad (8.41)$$

Если $s \in [1, [q_r/2]-1]$, $k \in [sM_r+1, (s+1)M_r-1]$, то согласно (8.37)

$$\lambda_1(k, G_q^n) \leqslant \Lambda_1(k, G_q^n) \leqslant \frac{M_n}{m_1(k, G_q^n)}. \quad (8.42)$$

Из теоремы 10, (8.37), (8.38), (8.41), (8.42) вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 11. *Если* $r \in [0, n-1]$, $s \in [1, [q_r/2]]$, *то*

$$a_{T,1}(sM_r, G_q^n) = a_{D,1}(sM_r, G_q^n) = \frac{\Lambda_1(sM_r, G_q^n)}{M_n} = \\ = \frac{\lambda_1(sM_r, G_q^n)}{M_n} = \frac{M_r F_{s,q_r}(0)}{M_n} = \frac{F_{s,q_r}(0)}{M'_{n-r}},$$
$$D_1^2(d_{n-1}, sM_r, G_q^n)_2 = 1 - \frac{F_{s,q_r}(0)}{M'_{n-r}}.$$

*Если* $r \in [0, n-1]$, $s \in [1, [q_r/2]-1]$, $k \in [sM_r+1, (s+1)M_r-1]$, $k \in \in d_1(G_q^n)$, *то*

$$\frac{F_{s,q_r}(0)}{M'_{n-r}} \leqslant \frac{\lambda_1(k, G_q^n)}{M_n} \leqslant \frac{\Lambda_1(k, G_q^n)}{M_n} = a_{T,1}(k, G_q^n) \leqslant a_{D,1}(k, G_q^n) \leqslant \frac{1}{m_1(k, G_q^n)},$$
$$1 - \frac{1}{m_1(k, G_q^n)} \leqslant D_1^2(d_{n-1}, k, G_q^n)_2 \leqslant 1 - \frac{F_{s,q_r}(0)}{M'_{n-r}}.$$

*Эти неравенства превращаются в равенства, если* $s \,|\, q_r$, $k \in [sM_r+1, k'_r]$.

Пусть $i=2$, $k=sM_r$, $r\in[0,n-1]$, $s\in[[(q_r+1)/2], q_r-1]$, $f_{q_r-s+1,q_r}(x)$ — экстремальный полином (4.2), (4.45), (4.46), (4.50) в задачах Фейера (2.6), (2.8) при $p=q_r-s+1$, $q=q_r$, $g_{q_r-s+1,q_r}(x_r)$ — полином (4.51), (4.55), (4.58), определяющий квадратурную формулу в задачах Фейера (2.6), (2.8).

Положим

$$F_{k,2}(x) = \left(\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} \psi_\nu(x)\right) f_{q_r-s+1,q_r}(x_r) =$$
$$= \left(\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} c\left(\sum_{i=0}^{r-1}(\nu_i x_i/q_i)\right)\right) \left(1 + \sum_{\nu_r=q_r-s+1}^{s-1} \widehat{f}_{\nu_r}^{\,q_r-s+1,q_r} c(\nu_r x_r/q)\right), \quad (8.43)$$

$$G_{k,2}(x) = \left(\frac{1}{M_r}\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} \psi_\nu(x)\right) g_{q_r-s+1,q_r}(x_r) =$$
$$= \left(\frac{1}{M_r}\sum_{|\nu|=0}^{M_r-1} c\left(\sum_{i=0}^{r-1}(\nu_i x_i/q_i)\right)\right) \left(\sum_{\nu_r=0}^{q_r-1} \widehat{g}_{\nu_r}^{\,q_r-s+1,q_r} c(\nu_r x_r/q)\right). \quad (8.44)$$

Так же как и в предыдущем случае, опираясь на (4.45), (4.46)–(4.49), (4.50), (4.52), (4.56), (4.59), убеждаемся, что для полиномов (8.43), (8.44) выполнены свойства (8.18)–(8.22), поэтому для $r\in[0,n-1]$, $s\in[[(q_r+1)/2], q_r-1]$

$$\lambda_2(sM_r, G_q^n) = \Lambda_2(sM_r, G_q^n) = F_{k,2}(0) =$$
$$= M_r f_{q_r-s+1,q_r}(0) = \frac{M_{r+1}}{F_{q_r-s+1,q_r}(0)}. \quad (8.45)$$

Если $s\in[[(q_r+1)/2], q_r-1]$, $k\in[sM_r+1, (s+1)M_r-1]$, то согласно (8.37)

$$\lambda_2(k, G_q^n) \leqslant \Lambda_2(k, G_q^n) \leqslant \frac{M_n}{m_2(k, G_q^n)}. \quad (8.46)$$

Из теоремы 9, (8.37), (8.45), (8.46) вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 12. *Если* $r\in[0,n-1]$, $s\in[[(q_r+1)/2], q_r-1]$, *то*

$$a_{T,2}(sM_r, G_q^n) = a_{D,2}(sM_r, G_q^n) = \frac{\Lambda_2(sM_r, G_q^n)}{M_n} = \frac{\lambda_2(sM_r, G_q^n)}{M_n} =$$
$$= \frac{M_{r+1}}{M_n F_{q_r-s+1,q_r}(0)} = \frac{1}{F_{q_r-s+1,q_r}(0) M'_{n-r-1}},$$
$$D_2^2(M_n-1, sM_r, G_q^n)_2 = 1 - \frac{1}{F_{q_r-s+1,q_r}(0) M'_{n-r-1}}.$$

*Если* $r\in[0,n-1]$, $s\in[[(q_r+1)/2],q_r-1]$, $k\in[sM_r+1,(s+1)M_r-1]$, *то*

$$\frac{1}{F_{q_r-s+1,q_r}(0)M'_{n-r-1}}\leqslant\frac{\lambda_2(k,G_q^n)}{M_n}\leqslant\frac{\Lambda_2(k,G_q^n)}{M_n}=$$

$$=a_{T,2}(k,G_q^n)\leqslant a_{D,2}(k,G_q^n)\leqslant\frac{1}{m_2(k,G_q^n)},$$

$$1-\frac{1}{m_2(k,G_q^n)}\leqslant D_2^2(M_n-1,k,G_q^n)_2\leqslant 1-\frac{1}{F_{q_r-s+1,q_r}(0)M'_{n-r-1}}. \qquad (8.47)$$

*Эти неравенства превращаются в равенства, если*

$$s=[(q_r+1)/2],\quad k\in[[(q_r+1)/2]M_r+1,\widetilde{k}_r]$$

*или*

$$s\in[[(q_r+1)/2]+1,q_r-1],\quad (q_r-s+1)\,|\,q_r,\quad k\in[sM_r+1,(s+1)M_r-1].$$

Пусть все $q_i=q$. При $q=2$ константы Джексона $D_2(d,k,G_q^n)_2$ для всех $d$ и $k$ были вычислены О. И. Смирновым [15], при $q=3,4$ — А. А. Тюрюкановым. При $q\geqslant 5$ теорема 2.10 была доказана А. А. Тюрюкановым [18] для случаев, когда неравенства (8.47) превращаются в равенства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИРАН. — 1997. — Т. 219. — С. 44–73.
2. Бабенко А. Г. Неравенство Джексона для среднеквадратичных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на равномерной сетке // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 3. — С. 460–472.
3. Банаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. — М.: Мир, 1987.
4. Белов А. С. Об оценке снизу равномерной нормы частных сумм неотрицательного тригонометрического полинома // Вестник Ивановского государственного университета. Серия «Биология, Химия, Физика, Математика». — 2005. — Вып. 3. — С. 73–83.
5. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, № 5. — С. 688–700.
6. Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. — М.: Мир, 1976.
7. Иванов В. И. О теореме Джексона в $L_2$ для систем Прайса // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, № 3. — С. 37–50.
8. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2004. — Т. 10, Вып. 1. — С. 76–104.
9. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Труды ИММ УрО РАН. — 2005. — Т. 11, № 2. — С. 92–11. ???
10. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. — 2005. — Т. 77, № 6. — С. 941–945
11. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. Вып. 40.— М.: Наука, 1983. — С. 43–110.
12. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1978.
13. Рудомазина Ю. Д. Константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_q)$ // Тезисы докладов XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Пенза: ПГУ. — 2005. — С. 131.
14. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценке мощности кода // Пробл. передачи информации. — 1980. — Т. 16, № 3. — С. 17–30. /nopagebreak
15. Смирнов О. И. Точные константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_2^n)$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 1997. — Т. 3, Вып. 1. — С. 71–79.
16. Стечкин С. Б. Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Scient. Hungar. — 1972. — Т. 23 (3–4). — P. 289–291.

17. Стечкин С. Б. Избранные труды: Математика. — М.: Наука, 1998.
18. Тюрюканов А. А. Константы Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_q^n)$ и коды на группе $\mathbb{Z}_q^n$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2001. — Т. 7, Вып. 1. — С. 154–161.
19. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974.
20. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
21. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. — М.: Мир, 1985.
22. Delsarte Ph. Bounds for unterstricted codes by linear programming // Phihips Res. Rep. — 1972. — V. 2. — P. 272–289.
23. Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Reine Angew. Math. — 1916. — V. 146. — P. 53–82.
24. Levenstein V. I. Universal Bonnds for codes and designs // Handbook of Coding Theory. — Amsterdam: Elsevier, 1998.
25. Montgomery H. L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

Поступило в редакцию 20 VIII 2007