РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт Прикладной Математики
им. М.В. Келдыша

С.А. Лазарева

Точность аппроксимаций метода конечных суперэлементов Федоренко в пространствах Соболева

Москва – 2008 г.

Точность аппроксимаций метода конечных суперэлементов Федоренко в пространствах Соболева *

Светлана А. Лазарева

Аннотация

Аннотация

Статья посвящена разработке метода конечных суперэлементов (МКСЭ) Федоренко. Получены априорные оценки погрешностей метода и установлена его насыщаемость в пространствах С.Л. Соболева. Выведено неравенство Джексона для МКСЭ приближений. Исследование проведено на примере задачи Дирихле, результаты могут быть распространены на класс общих линейных эллиптических задач.

Approximation accuracy of Fedorenko finite superelement method in Sobolev spaces

Svetlana Lazareva
e-mail: LazarevaS@gmail.com

Abstract

Аннотация

The paper is devoted to the development of Fedorenko finite superelement method (FSEM). A priori error estimates are obtained and the saturability of method is established in S.L. Sobolev spaces. Jackson inequality applying to FSEM approximations is derived. The analysis is carried out on the example of Dirichlet problem, the results can be extended for the class of general linear elliptic problems.

Содержание

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00421).

1 Введение. Принципы МКСЭ

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) впервые предложен в работах Федоренко и его коллег [5, 19]. Он входит в класс численных методов, основанных на декомпозиции области в сочетании с выбором особой аппроксимации решения. Приближенное решение МКСЭ заведомо обладает некоторыми свойствами, присущими рассматриваемой математической модели. Это позволяет решать ряд "сложных" вычислительных задач. В работах [4,5,19,21–24] эффективность МКСЭ подтверждена примерами расчетов различных физических проблем. Для автора преимущественный интерес представляют задачи, которые характеризуются наличием множества резких особенностей, проявляющихся на малых пространственных областях. Такие особенности могут представлять собой как "сингулярности" самого решения, так и резкие неоднородности области расчета.

Рассмотрим простую задачу Дирихле для дифференциального уравнения Лапласа в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Расчетная область представляет собой квадрат с исключенными из него кругами, радиус которых мал по сравнению с размерами Ω. Полагаем, что в окрестностях таких мелких отверстий сосредоточены все резкие "сингулярности" решения.

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где u – искомая функция, $\partial\Omega$ – граница расчетной области, g – некоторая известная функция на $\partial\Omega$.

В МКСЭ подобно обычному методу конечных элементов (МКЭ) расчетная область разбита на некоторое число подобластей, называемых *суперэлементами.* Каждое место сосредоточения особенности (отверстие, неоднородность и т.п.) заключено строго в одном из суперэлементов. Каждая базисная функция МКСЭ $\Phi_i(x)$ единообразно задачтся в каждом из суперэлементов Ω_k и является решением задачи Дирихле следующего вида [4, 19, 21, 23]:

$$-\Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_k, \tag{3}$$

$$\Phi_i = \varphi_i \text{ на } S_k \equiv \partial\Omega_k, \tag{4}$$

где граничные базисные функции φ_i, заданные на границе суперэлемента S_k, принимают значения

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij},\ i = 0, \ldots, n, \tag{5}$$

в узлах суперэлемента P_j, $j = 1, \ldots, n$, включая возможную границу отверстия в данном суперэлементе, обозначенную через P_0, здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Узлы P_j с индексами $j = 1, \ldots, n$ расположены только на границе суперэлемента: на его рчбрах, в углах. Функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют главному граничному условию (2) на $\partial\Omega$:

$$\varphi_i(P_i) = g(P_i),\ P_i \in \partial\Omega,\ i = 0, \ldots, n.$$

С узлов на ребра границы суперэлемента функции φ_i продолжаются некоторым "стандартным" интерполянтом: полиномиальным, кусочно-линейным, сплайн-интерполянтом и т.д. На рисунках 1 – 3 представлена одна из таких граничных базисных функций φ_i при кусочно-линейной зависимости (рис. 1) и полиномиальной зависимости второго порядка (рис. 2) на ребрах границы суперэлемента. Предполагается, что функции $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, определенные на одном и том же ребре соседних суперэлементов Ω_k и Ω_m, совпадают, то есть:

$$\varphi_i(x) = \varphi_j(x),\ x \in S_k \cap S_m, \tag{6}$$

для всех $S_k \cap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$.

Заметим, что сингулярности задачи в окрестностях отверстий учтены посредством базисной функции с нулевым индексом $\Phi_0(x)$ в каждом из суперэлементов. Остальные функции $\Phi_i(x)$, $i \neq 0$, при наличии отверстия в суперэлементе Ω_k обращаются в ноль на его границе согласно (5). Если в суперэлементе отверстия нет, то $\Phi_0(x) \equiv 0$.

рис. 1 рис. 2 рис. 3

Пример расчета одной базисной функции $\Phi_i(x)$ в суперэлементе показан на рис. 3. Он соответствует граничной базисной функции φ_i, заданной полиномом второго порядка (см. рис. 2).

Решение задачи внутри каждого отдельного суперэлемента будем искать при помощи построенного базиса:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x), \;\; x \in \Omega_k. \tag{7}$$

Таким образом определено приближенное решение МКСЭ $\bar{u}(x)$ во всей расчетной области $\Omega = \cup_k \Omega_k$. При этом неизвестные значения a_i определены с помощью схемы метода Бубнова-Галеркина при выборе функций $\Phi_i(x)$ в качестве базисных и пробных [4, 21–24].

Анализ вычислительной точности МКСЭ осуществлчн в работах [21, 22]. Предложены различные варианты метода и подтверждена его расчетная эффективность для задач, содержащих резкие особенности в расчетной области как в пространственно-двумерном, так и в трчхмерном случаях.

В работах [4, 23] проведено теоретическое исследование МКСЭ, которое позволяет строить аппроксимации метода для широкого круга задач математической физики. Исследования опираются на общую запись формулы Грина и охватывают слабые решения класса задач, описываемых линейными эллиптическими уравнениями. Установлена связь аппроксимаций МКСЭ с проекционными методами и показано, что для сходимости метода на пространстве слабых решений необходимо и достаточно сходимости аппроксимаций, задаваемых в пространстве их следов на границах разбиения.

Дальнейший интерес представляет вывод оценок погрешностей МКСЭ Федоренко и качественный анализ его аппроксимационных свойств. В настоящей работе получены априорные оценки погрешностей в шкале пространств Соболева $H^R(\Omega)$. Данный вопрос связан с получением аппроксимантов повышенного порядка в МКСЭ и предполагает исследование сильных (и гладких) решений задачи. Установлена насыщаемость и получены точные оценки погрешностей в пространствах Соболева, выведены погрешности численного решения на соболевских классах функций. Исследование проведено на примере задачи Дирихле (1) – (2) в пространственно-двумерном случае. Подход может быть далее распространен и на класс общих линейных эллиптических задач.

2 Необходимые определения

В разделе будут получены априорные оценки погрешностей метода в норме пространства $H^1(\Omega)$ [15]. Интерес представляет адаптация аппроксимаций МКСЭ для разрешения задач, к которым предъявлены повышенные требования по гладкости в естественной для них шкале пространств Соболева $H^R(\Omega)$, $R \geq 1$ [15]. Далее используем индекс $R \in \mathbb{Z}$ для целых значений показателя гладкости и $s \in \mathbb{R}$ либо $r \in \mathbb{R}$ при вещественных. Исследование проводим в предположении достаточной гладкости функции граничного условия g и границы области $\partial\Omega$ для того, чтобы искомое решение принадлежало пространству Соболева $H^R(\Omega)$ [7].

Сохраняем ранее введенные обозначения: Ω – расчетная область, S_k – граница суперэлемента Ω_k, $S = \cup_k S_k$ – совокупность всех суперэлементных границ, u – искомое и $\bar{u}$ – приближенное решение МКСЭ.

Как правило, суперэлемент Ω_k является многоугольником, и его граница принадлежит классу C^0 гладкости. При этом мы вправе рассматривать лишь тот случай, когда S_k – многоугольная граница либо граница, состоящая из конечного числа гладких кривых, то есть: $S_k = \cup_l I_{kl},\ l = 1, \ldots, L$. Представляют интерес те варианты МКСЭ, где граничные базисные функции φ_i (4) на отрезках I_{kl} заданы полиномами или сплайнами Лагранжа [21]. Введем необходимые определения.

Пространство всех полиномов порядка не выше ν на отрезке I_{kl} обозначим через $\mathcal{P}_\nu(I_{kl})$ [8]. На границе S введем пространство $\mathcal{P}_\nu(S) = \prod\limits_{k,l} \mathcal{P}_\nu(I_{kl})$ как множество всех полиномов порядка не выше ν на каждой из ећ частей I_{kl}. Обозначим символом $\mathcal{P}_\nu^N(S)$ *пространство всех сплайнов* порядка не выше ν, построенных на разбиении S на $(N-1)$ отрезок длины $|I_{kl}|/\nu$ [8]. Полиномиальная интерполяция служит частным случаем интерполяции сплайнами, потому при ећ рассмотрении вариант полиномиальной граничной интерполяции МКСЭ отдельным образом выделять не будем.

Аппроксимирующее пространство $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ МКСЭ – это линейная оболочка, образованная всеми базисными функциями Φ_i МКСЭ (3)–(4) с граничной интерполяцией посредством сплайнов $\mathcal{P}_\nu^N(S)$. То есть:

$$\bar{V}_\nu^N(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : -\Delta v = 0 \text{ в каждом из } \Omega_k \text{ и } \gamma_S^0 v \in \mathcal{P}_\nu^N(S) \right\}. \qquad (8)$$

Здесь след функции на S определен равенством $\gamma_S^0 v = \left\{ \gamma_{S_k}^0 v \right\}_{k=1}^{K_E}$, K_E – число суперэлементов в области. Оператор взятия следа $\gamma_{S_k}^0$, заданный на $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$ соотношением

$$\left(\gamma_{S_k}^0 u\right)(x) = \left(u|_{S_k}\right)(x), \ , x \in S_k, \qquad (9)$$

непрерывно действует из пространства $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(S_k)$ для всех $k =$

$1 \dots K_E$. При этом существует непрерывный оператор, обратный к $\gamma^0_{S_k}$ и действующий из $H^{1/2}(S_k)$ в $H^1(\Omega_k)$. Такой общий случай действия оператора $\gamma^0_{S_k}$ справедлив как для гладкой, так и для многоугольной или просто липшицевой границы S_k, см. [7, 25]. Определение $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$ содержит также следующее условие:

$$\gamma^0_S v = \gamma^0_{S_k} v = \gamma^0_{S_m} v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m, \tag{10}$$

для всех $S_k \cap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$ [27]. Аппроксимирующее пространство МКСЭ содержит его как "главное условие", накладываемое на все базисные функции. Иногда, если это не вызовет недоразумений, будем использовать также символ γ^0, не обозначая при этом множество, на котором определена область значений оператора следа. Аналогичным образом определим и *аппроксимирующее пространство* $\bar{V}_\nu(\Omega)$ *МКСЭ*, представляющее собой линейную оболочку, образованную базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством полиномов $\mathcal{P}_\nu(S)$.

В определение аппроксимирующего пространства не входят условия совместности функций в узлах P_j суперэлемента:

$$\left(\gamma^0 v\big|_{I_{kl}}\right)(P_j) = \left(\gamma^0 v\big|_{I_{kt}}\right)(P_j),\ j = 1, ..., n, \tag{11}$$

на соседних отрезках $I_{kl} \cap I_{kt} = P_j \neq 0$ границы S $\forall l, t = 1, ..., n$, $\forall k = 1, ..., K_E$. Условие (11), как правило, выполнено в схеме МКСЭ, поскольку оно введено в определение граничных базисных функций $\varphi_i(x)$, см. (6). Оно связано с расчетом базисных функций МКСЭ из задач (4) – (5) и заданием интерполянта $\varphi_i(x)$ для них, непрерывного на всей границе $S_k = \cup_l I_{kl}$. Линейная оболочка таких базисных функций МКСЭ согласно определению и составляет аппроксимирующее пространство. Тем не менее, условие (11) можно ввести без ограничения общности метода, если непрерывность искомой функции в окрестностях узлов суперэлемента заведомо известна, а все особенности задач заключены строго внутри суперэлементов. В частности, всегда для сильного решения $u \in H^s(\Omega)$ при $s \geq 2$.

Отметим, что в определении (8) использован оператор Лапласа, определяющий гармоническую функцию в суперэлементе. Под *гармоничностью* некоторого слабого решения $u \in H^1(\Omega)$ в произвольной области Ω будем понимать его удовлетворение уравнению Лапласа в следующей обобщенной постановке:

$$(-\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx = 0 \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{12}$$

Далее как для слабого, так и для сильного решения продолжаем формально пользоваться кратким обозначением: $-\Delta u = 0$.

Выражение $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$ в соотношении (12) задает непрерывную *билинейную форму, соответствующую задаче* (1) – (2) и обозначаемую здесь $a(u, v)$, где Ω – расчетная область [4, 7, 23]. Она определяет *энергетическое скалярное произведение* и *энергетическую норму* задачи, совпадающие со скалярным произведением и нормой пространства Соболева $H^1(\Omega)$ (см., напр., [12]): $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)}$, $a(u, u)^{1/2} = (\nabla u, \nabla u)^{1/2}_{L_2(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Пространство $H^1(\Omega)$ считаем *энергетическим пространством* задачи.

3 Оценка наилучшего приближения в $H^1(\Omega)$

Исследование будем проводить в предположении, что коэффициенты системы Бубнова-Галеркина в схеме МКСЭ (7) вычислены точно. Тогда расчет коэффициентов приближенного решения $\bar{u}$ по методу Бубнова-Галеркина равносилен построению такой комбинации базисных функций, которая в метрике энергетического пространства $H^1(\Omega)$ является наилучшим приближением к u [12, 16]. При получении оценок нам не обязательно работать с аппроксимацией $\bar{u}$. Достаточно найти в аппроксимационном пространстве $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$ (либо $\bar{V}_\nu(\Omega)$) "хорошее" приближение к u, тогда $\bar{u}$ будет ещч "лучше" по энергетической норме. Для этой цели удобно взять интерполянт функции u, который обозначаем через $\pi^N_\nu(u)$ (соответственно $\pi_\nu(u)$) :

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^N_\nu(u) \leqslant C \left\|u - \pi^N_\nu(u)\right\|_{H^1(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\varepsilon^N_\nu(u) = \inf_{v \in \bar{V}^N_\nu(\Omega)} \left(\|u - v\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{14}$$

В данном неравенстве константа C определена параметрами σ и μ соотношений непрерывности и эллиптичности исходного оператора [14]:

$$C = \sigma/\mu, \tag{15}$$

где константы σ, μ такие, что

$$a(u,u) = (\nabla u, \nabla u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \mu \cdot \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad |a(u,v)| \leqslant \sigma \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Величину $\varepsilon^N_\nu(u) = \inf\limits_{v \in \bar{V}^N_\nu(\Omega)} \Big(\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \Big)$ назовем *наилучшим приближением* (или *величиной наилучшего приближения*) элемента $u \in H^R(\Omega)$ подпространством $\bar{V}^N_\nu(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$. Она представляет собой норму ошибки приближения функции u аппроксимирующим пространством МКСЭ $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$, имеющую наименьшее значение. Называем также *элементом наилучшего приближения* такую функцию $g \in \bar{V}^N_\nu(\Omega)$, что $\varepsilon^N_\nu(u) = \inf\limits_{v \in \bar{V}^N_\nu(\Omega)} \Big(\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \Big) = \|u - g\|_{H^1(\Omega)}$. Определения соответствуют [1, 6, 8]. Аналогично введем $\varepsilon^N_\nu(\gamma^0 u)_{1/2} = \inf\limits_{w \in \mathcal{P}^N_\nu(S)} \Big(\|\gamma^0 u - w\|_{H^{1/2}(S)} \Big)$ – *наилучшее приближение* (*величина наилучшего приближения*) элемента $\gamma^0 u$, определенного на S, подпространством $\mathcal{P}^N_\nu(S) \subset H^{1/2}(S)$ в норме пространства $H^{1/2}(S)$.

Отображение π^N_ν: $H^R(\Omega) \to \bar{V}^N_\nu(\Omega)$ каждому элементу $u \in H^R(\Omega)$ ставит в соответствие его интерполянт $\pi^N_\nu(u)$ из класса $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$ [8]. А также π^N_ν: $H^r(S) \to \mathcal{P}^N_\nu(S)$ каждому элементу $\gamma^0 u \in H^r(S)$ ставит в соответствие его граничный интерполянт из $\mathcal{P}^N_\nu(S)$. π^N_ν – линейное непрерывное отображение, проектор на пространство $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$ либо $\mathcal{P}^N_\nu(S)$ соответственно. Аналогично определяем *отображение* π_ν: $H^r(I_{kl}) \to \mathcal{P}_\nu(I_{kl})$, ставящее каждому элементу $\gamma^0 u \in H^r(I_{kl})$ на отрезке $I_{kl} \subset S$ в соответствие его интерполянт класса $\mathcal{P}_\nu(I_{kl})$. При полиномиальной граничной интерполяции справедливо соотношение для π_ν: $H^R(\Omega) \to V_\nu(\Omega)$, а также π_ν: $H^r(S) \to \mathcal{P}_\nu(S)$.

Погрешностью метода на классе $H^R(\Omega)$ назовем величину [1, 2, 8]:

$$\delta^N_\nu H^R(\Omega) = \sup_{u \in H^R(\Omega)} \left\| u - \pi^N_\nu(u) \right\|_{H^1(\Omega)}. \tag{16}$$

Будем говорить [1,8], что метод *имеет насыщение* (*насыщаем*) на классах $H^R(\Omega)$, $R > 1$, если существует R_0, для которого

1) $\lim\limits_{N \to \infty} \sup\limits_{u \in H^R(\Omega)} \left\| u - \pi^N_\nu u \right\|_{H^1(\Omega)} = 0$ при $R \leq R_0$;

2) $\sup\limits_{u \in H^P(\Omega)} \left\| u - \pi^N_\nu u \right\|_{H^1(\Omega)} = o(\sup\limits_{u \in H^R(\Omega)} \left\| u - \pi^N_\nu u \right\|_{H^1(\Omega)})$ при $R < P \leq R_0$;

3) При $R_0 < R$ существует $u \in H^R(\Omega)$ и не зависящая от ν константа $c > 0$, такая, что $\left\| u - \pi^N_\nu(u) \right\|_{H^1(\Omega)} \geq c \cdot \sup\limits_{u \in H^{R_0}(\Omega)} \left\| u - \pi^N_\nu u \right\|_{H^1(\Omega)}$.

Характерным свойством МКСЭ является возможность рассмотрения задачи (1) – (2) в некотором подпространстве энергетического пространства $\mathfrak{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Оно снабжено дополнительным свойством гармоничности функций в каждом из суперэлементов Ω_k в отдельности:

$$\mathfrak{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : -\Delta v(x) = 0,\ x \in \Omega_k,\ \text{для всех } \Omega_k,\ k = 1, ..., K_E \right\}. \tag{17}$$

Аппроксимирующее пространство МКСЭ (8) является подпространством данного пространства. Определение $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ включает в себя условие (10):

$$\gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m, \tag{18}$$

для всех $S_k \cap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$.

Эквивалентно перепишем определение (17) также в виде:

$$\mathfrak{H}^1(\Omega) = \begin{array}{l} \left\{ v :\ \gamma^0 v \in H^{1/2}(S),\ \ -\Delta v(x) = 0,\ x \in \Omega_k,\ \text{для всех } \Omega_k,\ \text{что} \right. \\ \left. \gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m \neq 0,\ k, m = 1, ..., K_E \right\}. \end{array} \tag{19}$$

Исследования настоящего раздела базируются на существовании изоморфизма между пространством $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(S)$, описанного ниже. Мы можем утверждать однозначное соответствие между пространством всех гармонических функций из $H^1(\Omega_k)$ и пространством $H^{1/2}(S_k)$ их следов на границе S_k с эквивалентностью соответствующих норм. Однозначное отображение устанавливается посредством оператора следа γ_S^0 (см. определение (9)). А именно: оператор $\gamma_{S_k}^0$ на классе гармонических функций из $H^1(\Omega_k)$ сопоставляет такой функции u единственный элемент $\gamma_{\mathrm{S_k}}^0 u \in H^{1/2}(S_k)$. Это следствие существования оператора $\gamma_{S_k}^0$ на S_k и однозначной разрешимости задачи Дирихле в пространстве $H^1(\Omega_k)$ с такими граничными данными [7, 14]. Результат справедлив как на гладкой, так и на многоугольной границе суперэлемента S_k. При этом для однозначной разрешимости задачи Дирихле в пространстве $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ достаточно коэрцитивности соответствующей ей билинейной формы $a(u, v)$: форма $a(u, v)$ задает скалярное произведение в $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ и коэрцитивна на пространстве слабых решений. Легко убедиться в том [7, 9], что в классическом случае линейного эллиптического уравнения второго порядка для этого достаточно эллиптичности задачи в области суперэлемента Ω_k.

Здесь и далее эквивалентность норм обозначаем следующим образом: $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 \cdot\right\|_{H^{1/2}(S)}$. И, в целом, $A \simeq B \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 = \text{const} :\ c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A$, если A, B – некоторые выражения.

Для любой функции $u \in \mathfrak{H}^1(\Omega)$ имеем:

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 u\right\|_{H^{1/2}(S)}. \qquad (20)$$

Утверждение 1 *Пусть $\varepsilon_\nu^N(u)$ есть наилучшее приближение функции $u \in H^R(\Omega)$ аппроксимационным пространством МКСЭ $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ по норме пространства $H^1(\Omega)$, а величина $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}$ есть наилучшее приближение еѣ следа $\gamma^0 u$ в пространстве $H^{1/2}(S)$ сплайнами $\mathcal{P}_\nu^N(S)$.*

Тогда

$$c_1 \cdot \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2} \leq \varepsilon_\nu^N(u) \leq c_2 \cdot \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}, \qquad (21)$$

где c_1, c_2 – некоторые константы.

▼ Действительно, согласно определению: $\varepsilon_\nu^N(u) = \inf\limits_{v \in \bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\|u - v\|_{H^1(\Omega)}\right)$, а также $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2} = \inf\limits_{w \in \mathcal{P}_\nu^N(S)} \left(\left\|\gamma^0 u - w\right\|_{H^{1/2}(S)}\right)$. Поэтому из (20) может быть получено следующее соотношение:

$$\varepsilon_\nu^N(u) = \inf_{v \in \bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\|u - v\|_{H^1(\Omega)}\right) \simeq \inf_{v \in \bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\left\|\gamma^0 u - \gamma^0 v\right\|_{H^{1/2}(S)}\right) = \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}, \qquad (22)$$

где $w = \gamma^0 v$ с учетом определения аппроксимационного пространства (8), связанного со сплайнами. Выражение (22) эквивалентно (21). Постоянные c_1 и c_2 определены константами неравенств вложения соответствующих пространств. ▼

Введем следующие *пространства* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$:

$$\mathfrak{H}^R(\Omega) = \quad \left\{v: \ \gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S), \ -\Delta v(x) = 0, \ x \in \Omega_k, \ \text{для всех } \Omega_k\right\},$$

для любых $R \in \mathbb{Z}$, $R \geqslant 1$, $k = 1, ..., K_E$. При $R = 1$ подразумевается определение (19) пространства $\mathfrak{H}^1(\Omega)$. В определение $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ включим и условие (18). Рост показателя R характеризуется увеличением гладкости функций $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S) = \prod\limits_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})$ из этого пространства на всех гладких частях суперэлементных границ.

Поскольку для следа любой функции v из пространства $H^R(\Omega)$ справедливо включение $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$, то выполнено:

$$H^R(\Omega) \subseteq \mathfrak{H}^R(\Omega). \qquad (23)$$

Обратное вложение при $R \neq 1$ на границе класса C^0 не имеет места. Кроме того, любая функция $v \in \mathfrak{H}^R(\Omega)$ однозначно определена своим следом $\gamma^0 v \in$

$H^{R-1/2}(S)$ на S, напр., [26]. В пространстве $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ введем норму прямого произведения пространств $H^{R-1/2}(S)$ так, что $\forall v \in \mathfrak{H}^R(\Omega)$:

$$\|v\|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \simeq \sum_k \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S_k)} = \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S)}, \ R \geqslant 1, \tag{24}$$

здесь и далее $\left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S)}$ – условная запись. Для $R = 1$, как и ранее, имеем эквивалентность: $\|v\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{1/2}(S)}$.

Для классов $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ аналогично определению (16) *погрешностью метода на классе* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ назовем величину:

$$\begin{aligned}\delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega) = \sup_{u \in \mathfrak{H}^R(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^1(\Omega)} = \\ = \delta_\nu^N H^r(S) = \sup_{\gamma^0 u \in H^r(S)} \left\|\gamma^0 u - \pi_\nu^N(\gamma^0 u)\right\|_{H^{1/2}(S)},\end{aligned}$$

с учетом (24), где $r = R - 1/2$.

Из вложения (23) следует справедливость неравенства:

$$\delta_\nu^N H^R(\Omega) \leqslant \delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega). \tag{25}$$

По аналогии с предыдущим определением понятия насыщаемости будем говорить, что метод *имеет насыщение* (*насыщаем*) на классах $\mathfrak{H}^R(\Omega)$, $r = R - 1/2$, $r = 1/2, 3/2, 5/2, ...$, если существует r_0, для которого

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega) = \lim\limits_{N\to\infty} \delta_\nu^N H^r(S) = 0$ при $r \leq r_0$;

2) $\delta_\nu^N H^s(S) = o(\delta_\nu^N H^r(S))$ при $r < s \leq r_0$;

3) При $r_0 < r$ существует $\gamma_0 u \in H^r(S)$ и не зависящая от ν константа $c > 0$, такая, что $\left\|\gamma_0 u - \pi_\nu^N(\gamma_0 u)\right\|_{H^{1/2}(S)} \geq c \cdot \delta_\nu^N H^{r_0}(S)$.

4 Насыщаемость. Неравенство Джексона

Согласно утверждению 1 для того, чтобы провести оценку наилучшего приближения $\varepsilon_\nu^N(u)$ сверху, получив таким образом и оценку погрешности МКСЭ (см. (13)), необходимо оценить величину наилучшего приближения $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}$. Далее мы так и поступим. Основным рабочим пространством выступит пространство $H^{1/2}(S)$ всех следов функций из $H^1(\Omega)$.

В том случае, когда искомая функция $u \in H^R(\Omega)$ с целочисленным индексом $R = 1, 2, ...$, показатель гладкости следа $\gamma^0 u$ изменяется в пределах соболевских пространств с дробными индексами на всех гладких частях границы I_{kl} по-отдельности так, что $\gamma^0 u \in H^r(S)$, $r = 1/2,\ 3/2, ...$ Для гладкого искомого решения нам понадобится и соотношение (23): $u \in H^R(\Omega) \subseteq \mathfrak{H}^R(\Omega)$.

Следующее утверждение справедливо как следствие соотношений (25) и определений насыщаемости для $H^R(\Omega)$, $\mathfrak{H}^R(\Omega)$.

Утверждение 2 *Если МКСЭ насыщаем на классах $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ (в норме пространства $H^1(\Omega)$), то он насыщаем и на классах Соболева $H^R(\Omega)$.*

Далее в настоящем разделе след функции $\gamma^0 u \in H^r(S)$ на S (то есть ограничение u на границу S) будем обозначать символом u вместо $\gamma^0 u$ для большей наглядности последующих записей. То есть полагаем, что некоторый элемент u определен только на S и записываем $u \in H^r(S)$.

4.1 Доказательство насыщаемости МКСЭ. Оценки погрешностей для $\nu \geq r-1$

Докажем насыщаемость МКСЭ на классах $H^r(S)$ в пространстве $H^{1/2}(S)$, $r > 1/2$. Аппроксимация задачи проводится пространством $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ МКСЭ, связанном с лагранжевыми сплайнами $\mathcal{P}_\nu^N(S)$ на равномерной сетке.

Запишем неравенство Лебега [2]:

$$\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \leq \delta_\nu^N(u)_{1/2} \leq \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}, \tag{26}$$

где $\delta_\nu^N(u)_{1/2} = \left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)}$ – ошибка интерполяции в пространстве $H^{1/2}(S)$ и $\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$ – величина наилучшего приближения. Откуда следует:

$$\sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \leq \delta_\nu^N H^r \leq \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}, \tag{27}$$

где $\delta_\nu^N H^r$ – погрешность метода на классе H^r. При этом нужно отметить, что $\left\|\pi_\nu^N\right\|$ совпадает с $\|\pi_\nu\|$ и не зависит от N.

Рассмотрим верхнюю оценку (27). Задача получения оценки $\sup\limits_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$ очевидным образом сводится к оценке величины наилучшего приближения полиномами порядка не выше ν на элементарном отрезке разбиения I_k :

$$\sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} = \sup_{I_k} \sup_{u\in H^r(I_k)} \varepsilon_\nu(u)_{1/2}, \;\; S = \prod_{j=1}^{K_E} S_j, \;\; S_j = \bigcup_k I_k, \tag{28}$$

где $\varepsilon_\nu(u)_{1/2} = \inf\limits_{v\in\mathcal{P}_\nu(I_k)} \left(\|u - v\|_{H^{1/2}(I_k)}\right)$ – величина наилучшего приближения полиномами порядка не выше ν в пространстве $H^{1/2}(I_k)$.

Оценим величину $\varepsilon_\nu(u)_{1/2}$, $u \in I_k$. Далее будем обозначать $I = I_k$, опуская индекс.

Широко известно неравенство Джексона для оценки наилучшего приближения алгебраическими полиномами. Классическое неравенство выведено для $u \in C(I)$ [10, 13]. Используются также его обобщения на пространства Соболева $H^K(I)$ с целочисленными индексами $K \in \mathbb{Z}$ [1]. При этом рассматривается норма пространств $C(I)$ и $L_2(I)$ соответственно. Возможность обобщения неравенства на дробные пространства Соболева мало освещена в литературе. Докажем неравенство типа неравенства Джексона для оценки величины наилучшего приближения алгебраическими полиномами при $u \in H^r(I)$, $r = 3/2, 5/2, ...$, в пространстве $H^{1/2}(I)$.

Для этого воспользуемся элементами теории интерполяционных пространств, в частности, выписанные ниже результаты получены при помощи K-метода Петре [3, 20]. Опорной точкой будет служить уже известная оценка величины наилучшего приближения $\varepsilon_\nu(u)_{L_2}$ для функции $u \in H^R(I)$, $R > 0$, $R \in \mathbb{Z}$, из пространства Соболева с целыми индексами в пространстве $L_2(I)$. Применяя элементы теории интерполяционных пространств, получим оценку величины наилучшего приближения для дробных пространств Соболева $u \in H^r(I)$, лежащих между $L_2(I)$ и $H^R(I) : 0 < r < R$. Таким образом, искомая оценка будет получена для любого дробного соболевского пространства $H^r(I)$, $r > 0$, при прочих условиях, необходимых для утверждения справедливости исходной "классической" оценки.

Утверждение 3 *Пусть $\nu \geq r - 1$. Для любой функции $u \in H^r(I)$, $r > 1/2$, $r \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}^1$, справедлива оценка:*

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \leq c_{1/2} M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{r-1/2}} |I|^r |u|_{H^r(I)},$$

где константы M_r, $M_{r-1/2}$ зависят только от r. Через $|I|$ обозначена длина отрезка I.

▼ 1) Для начала введем необходимые определения.

Запишем определение *K-функционала*: $\forall t > 0$

$$K(u,t) = K(u,t; L_2(I), H^R(I)) = \inf_{g \in H^R} \left[\|u - g\|_{L_2(I)} + t\, |g|_{H^R(I)} \right].$$

Он позволяет определить набор интерполяционных пространств $\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta$ с индексом $0 < \theta < 1$ следующим образом.

Интерполяционным пространством $\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta$, $0 < \theta < 1$, назовем множество всех таких $u \in L_2(I)$, что величина

$$|u|_{(L_2(I),H^R(I))_\theta} = \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta} K(u,t) \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} < \infty \tag{29}$$

конечна.

Введенный К-функционал будет нам полезен в дальнейшем, поскольку описание интерполяционных пространств $\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta$ получено в теории интерполяции, а пара $L_2(I)$, $H^R(I)$ является одной из классических. Такая характеристика выражается следующим простым равенством [3, 20]:

$$\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta = H^{\theta R}. \tag{30}$$

То есть пространство $\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta$ совпадает с $H^{\theta R}(I)$, а нормы в них эквивалентны.

Введем в рассмотрение отрезок I_0 единичной длины. Отметим, что справедливы следующие соотношения при переходе от отрезка $I_0 = [0,1]$ к $I = [0,\ |I|]$:

$$|u|_{H^r(I_o)} = |I|^{r-1/2} |u|_{H^r(I)},$$
$$\|u\|_{L_2(I_o)} = |I|^{-1/2} \|u\|_{L_2(I)}.$$

Это проверяется непосредственной подстановкой вида $t = |I|\, x$ и интегрированием выражений $|u|_{H^r(I)}$, $\|u\|_{L_2(I)}$ с учетом того, что $|u|_{H^r(I)} = \left\|u^{(r)}\right\|_{L_2(I)}$, см. также [1].

2) Рассмотрим величину наилучшего приближения в пространстве $L_2(I_0)$:

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2} = \inf_{v \in \mathcal{P}_\nu(I_0)} \left(\|u - v\|_{L_2(I_0)} \right).$$

Запишем для нее известное неравенство Джексона в $L_2(I_0)$ при $u \in H^R(I_0)$, $R \in \mathbb{Z}$ [1]. При $\nu \geq R-1$:

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2} \leq A_R \frac{1}{(\nu+1)^R} |u|_{H^R}, \;\; R > 0, \;\; R \in \mathbb{Z}, \;\; A_R = A_R(R). \tag{31}$$

Для упрощения записи обозначим далее $n = \nu + 1$.

3) Если w - элемент наилучшего приближения некоторой функции g из

$\mathcal{P}_\nu(I_0)$, то из (31) и определения K-функционала:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le \|u-w\|_{L_2} \le \|u-g\|_{L_2} + \|g-w\|_{L_2} \le \\ \le \|u-g\|_{L_2} + A_R \tfrac{1}{n^R} |g|_{H^R} \le C \cdot K(u, n^{-R}).\end{aligned}$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} K(u, n^{-R}) \right]^2.$$

А также, с учетом (29), имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} K(u, n^{-R}) \right]^2 \le \int\limits_0^{\infty} \left[t^{-\theta} K(u,t) \right]^2 \frac{dt}{t} = |u|^2_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}.$$

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]^2 \le |u|^2_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}. \tag{32}$$

Множество всех таких функций $u \in L_2(I_0)$, для которых конечна величина

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]^2 \right]^{1/2} < \infty$$

образует *аппроксимационное пространство* $A_2^{R\theta}(I_0)$ [20]. При этом из вложения $A_2^{R\theta}(I_0) \subset A_\infty^{R\theta}(I_0)$ согласно [18, 20] следует справедливость неравенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]^2 \ge \sup_{n \ge 1} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]^2, \tag{33}$$

где множество всех функций с конечной нормой, определяемой выражением $\sup\limits_{n \ge 1} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \right]$, определяет аппроксимационное пространство $A_\infty^{R\theta}(I_0)$ и одновременно характеризует $\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} = O(n^{-R\theta})$ как зависимость, монотонную по n, см. [18, 20]. Значит, из (32), (33) более слабое соотношение имеет вид:

$$n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le |u|_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta},$$

$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le C n^{-R\theta} |u|_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}.$$

И с учетом эквивалентности норм (30):

$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le C n^{-R\theta} |u|_{H^{\theta R}(I_0)}$$

где, как и ранее, $0 < \theta < 1$.

Приходим к следующему утверждению:

$$\forall u \in H^{\theta R}(I_0),\ \ R \in Z,\ \ \text{выполнено}$$
$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le Cn^{-R\theta}\, |u|_{H^{\theta R}(I_0)}\ \ \forall 0 < \theta < 1.$$

Для любого нецелого показателя $r = \theta R$, $0 < \theta < 1$, справедливо:

$$\forall u \in H^{r}(I_0),\ \ \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \le Cn^{-r}\, |u|_{H^{r}(I_0)}\,,\ \ R > r,\ \ R \in \mathbb{Z}.$$

Откуда с учетом замены $n = \nu + 1$ получаем:

$$\forall u \in H^{r}(I_0),\ \ \varepsilon_{\nu}(u)_{L_2} \le C\frac{1}{(\nu+1)^r}\, |u|_{H^{r}(I_0)}\ \ \text{при } \nu + 1 \ge R > r. \tag{34}$$

4) Изначально нас интересует оценка величины $\varepsilon_{\nu}(u)_{1/2}$:

$$\varepsilon_{\nu}(u)_{1/2} = \inf_{v \in \mathcal{P}_{\nu}(I_0)} \left(\|u - v\|_{H^{1/2}(I_0)} \right).$$

Поэтому запишем (см. [18]):

$$\|u - v\|_{H^{1/2}(I_0)} \le c_{1/2}\, \|u - v\|^{1/2}_{L_2(I_0)}\, \|u - v\|^{1/2}_{H^1(I_0)}\,,$$

откуда:

$$\varepsilon_{\nu}(u)_{1/2} \le c_{1/2} \inf_{v \in \mathcal{P}_{\nu}(I_0)} \left[\|u - v\|^{1/2}_{L_2(I_0)}\, \|u - v\|^{1/2}_{H^1(I_0)} \right],$$

где постоянная $c_{1/2} > 0$.

Для $u \in H^r(I_0)$ согласно (34) имеем оценку:

$$\varepsilon_{\nu}(u)_{L_2(I_0)} \le M_r \frac{1}{n^r}\, |u|_{H^r(I_0)}\ \ \text{при } n \ge r,\ \forall u \in H^r(I_0),\ r = 3/2, 5/2, ... \tag{35}$$

И для оценки второго слагаемого с учетом того факта, что $\left|u^{(1)}\right|_{H^{r-1}(I_0)} = |u|_{H^r(I_0)}$, имеем:

$$\varepsilon_{\nu}(u)_{H^1(I_0)} = \varepsilon_{\nu}(u^{(1)})_{L_2(I_0)} \le M_{r-1} \frac{1}{n^{r-1}}\, |u|_{H^r(I_0)}\ \ \text{при } n \ge R,\ \forall u^{(1)} \in H^{r-1}(I_0). \tag{36}$$

В (35), (36) делаем замену в соответствии с пунктом 1) и переходим к исходному отрезку I :

$$\varepsilon_{\nu}(u)_{1/2} \le c_{1/2} \left[M_r \frac{1}{n^r} \right]^{1/2} \left[M_{r-1} \frac{1}{n^{r-1}} \right]^{1/2} |I|^r\, |u|_{H^r(I)}\,;$$

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \le c_{1/2} M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \frac{1}{n^{r-1/2}} |I|^r |u|_{H^r(I)}.$$

Возвращаясь к индексу ν заменой $n = \nu+1$, получаем требуемое неравенство. ▼

Итак, покажем с помощью уже доказанных соотношений насыщаемость метода.

Утверждение 4 *Вариант МКСЭ, соответствующий сплайновой интерполяции на границах суперэлементов S на равномерной сетке, имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^{1/2}(S)$ на классах $H^r(S)$, $r > 1/2$, $r \in \mathbb{R}$. Классом насыщения является $H^{\nu+1}(S)$. Порядком насыщения – $O\left(N^{-r}\right)$. При этом для $\nu \ge r-1$ выполнено:*

$$\|u - \bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \le C \cdot \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \le C \cdot \frac{M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2}}{(\nu+1)^{r-1/2}} |I|^r |u|_{H^r(S)},$$

$$\delta_\nu^N H^r \le C_{\nu,r} |S|^r |u|_{H^r} \cdot \frac{1}{N^r}.$$

Константы M_r, $M_{r-1/2}$ зависят только от r; константа $C_{\nu,r}$ – от ν и r; константа C определена соотношением (17).

▼ 1) Из утверждения 3 и соотношений (27), (28) легко показать сходимость метода на классах $H^r(S)$:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_\nu^N H^r = 0 \;\; \text{при } r \le r_0 = \nu + 1.$$

Из (27), (28) имеем:

$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} = \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \sup_{I_k} \sup_{u\in H^r(I_k)} \varepsilon_\nu(u)_{1/2}.$$

Тогда утверждение 3 дает:

$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) |u|_{H^r} |I|^r \left(M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{r-1/2}} \right).$$

В этом выражении необходимо сделать замену:

$$|I| = |S| \, \nu/(N-1), \tag{37}$$

где $|S|$ – суммарная длина всей границы S, $(N-1)/\nu$ – число отрезков I_{kl}, разбивающих эту границу, и $|I| = |I_{kl}|$ $\forall k, l$, поскольку разбиение равномерно. Такая замена следует непосредственно из способа построения сплайна порядка ν на S [8]. Тогда при $\nu \ge 1$, $r > 1/2$ несложно получить следующий

результат:
$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right) M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \left|u\right|_{H^r} \left|2S\right|^r \cdot \frac{1}{N^r},$$
или
$$\delta_\nu^N H^r \le C_{\nu,r} \left|S\right|^r \left|u\right|_{H^r} \cdot \frac{1}{N^r} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
где константа $C_{\nu,r}$ зависит только от ν и r. Порядок сходимости $O\left(N^{-r}\right)$.

2) Покажем, что выполнено следующее требование в определении насыщаемости, а именно:
$$\exists r_0 : \delta_\nu^N H^s = o\left(\delta_\nu^N H^r\right), \text{ при } r < s \le r_0, \text{ и } r_0 = \nu + 1.$$
Запишем:
$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le \frac{\left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right) M_s^{1/2} M_{s-1}^{1/2}}{A_r} \left|u\right|_{H^s} \frac{\left|I\right|^{s-r}}{(\nu+1)^{s-r-1/2}}, \tag{38}$$
$\nu \ge 1$, $(s-r) > 1/2$. Здесь оценка сверху числителя $\delta_\nu^N H^s$ взята из первого пункта доказательства. Для оценки знаменателя $\delta_\nu^N H^r$ снизу использована оценка величины поперечника Колмогорова $\inf\limits_{\mathcal{P}_\nu^N(S)} \sup\limits_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$, имеющая место как для целых, так и для дробных классов H^r при $r > 1/2$ [1]:
$$\delta_\nu^N H^r \ge \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \ge \inf_{\mathcal{P}_\nu^N(S)} \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \ge A_r \frac{1}{(\nu+1)^r},$$
с учетом соотношения (26). Константа A_r зависит только от r. Тогда из (38) и замены (37) следует:
$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le \frac{\left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right) M_s^{1/2} M_{s-1}^{1/2}}{A_r} \left|2S\right|^{s-r} \left|u\right|_{H^s} \frac{1}{N^{s-r}};$$
$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le C_{\nu,r,s} \frac{1}{N^{s-r}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ для } r < s \le \nu + 1.$$

3) Осталось показать справедливость при $r > \nu + 1$ следующего предложения:
$$\exists u \in H^r(S) \text{ и не зависящая от } \nu \text{ константа } c > 0, \text{ такая, что}$$
$$\left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)} \ge c \cdot \delta_\nu^N H^{\nu+1}.$$
Это следует непосредственно из насыщаемости сплайновой аппроксимации в пространстве с произвольным целочисленным индексом, например, в пространстве L_2. А именно, согласно [2] можем указать такой элемент $y \in H^r(S)$,

что $\left\| y - \pi_\nu^N(y) \right\|_{L_2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Тогда, используя интерполяционное неравенство [18], получим:

$$\left\| y - \pi_\nu^N(y) \right\|_{H^{1/2}} \le c_{1/2} \left\| y - \pi_\nu^N(y) \right\|_{L_2} \left\| y - \pi_\nu^N(y) \right\|_{H^1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Тем самым по результатам пунктов 1), 2), 3) насыщаемость доказана.

4) Оценка погрешности приближенного решения не использует оценку интерполяции $\left\| u - \pi_\nu^N(u) \right\|_{H^{1/2}(S)}$ из (26). Нужная нам оценка $\| u - \bar{u} \|_{H^{1/2}(S)}$ следует непосредственно из результата утверждения (3) и ранее выписанного соотношения (13). При этом $\| u - \bar{u} \|_{H^{1/2}(S)} = \sum\limits_{I_{kl}} \| u - \bar{u} \|_{H^{1/2}(I_{kl})}$. ▼

Следствие 4.1 *Для оценки погрешности решения $u \in H^r$, $r > 1/2$, $r \in \mathbb{R}$, при тех же условиях в более широком пространстве $L_2(S)$ справедливо:*

$$\| u - \bar{u} \|_{L_2(S)} \le C \cdot \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \le C \cdot |I|^r \frac{M_r}{(\nu+1)^r} \, |u|_{H^r(S)} \,,$$

где константа C определена соотношением (15).

Замечание 4.1 Если рассматривать утверждение 4 только на полуцелых классах: $r = 3/2, 5/2, ...$, то класс насыщения – $H^{\nu+1/2}(S)$, $\nu \ge 1$.

4.2 Оценки погрешностей для случая $\nu \le r - 1$

В параграфе 4.1 показан факт насыщаемости и получены оценки ошибок МКСЭ для случая $\nu \ge r - 1$. Покажем оценки при $\nu < r - 1$, тем самым несколько уточнив эти результаты.

Результаты этого параграфа могут быть получены с использованием K-метода Петре аналогично тому, как это сделано в утверждении 3. Исходной точкой будет являться классическое неравенство для оценки величины наилучшего приближения вида [11, 16, 17]

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2(I)} \le \| u - \pi_\nu(u) \|_{L_2(I)} \le C \cdot |I|^{\nu+1} \, |u|_{H^{\nu+1}(I)} \tag{39}$$

для функции $u \in H^R(I)$, $R > 0$, $R \in Z$, из пространства Соболева с целыми индексами в пространстве $L_2(I)$.

Выведем здесь оценку погрешности приближенного решения иным образом, с использованием обобщения леммы Брэмбла-Гильберта (утв. 5). В этом случае доказательство можно провести без использования уже известных соотношений типа (39). Нам важна и сама схема. Так или иначе, получение априорных оценок погрешностей при установлении условий, необходимых для того, чтобы получить аппроксимацию повышенного порядка точности, при рассмотрении стандартных методов может быть сведено к единому процессу.

Утверждение 5 *Пусть* $L \subset H^r(I)$ *– такое множество, что* $\dim L < \infty$ *и* $p \in L \Leftrightarrow |p|_{H^r} = 0$ *(или* $L = ker|\cdot|$*). Если функция* $f : H^r(I) \to H^r(I)$ *непрерывна, линейна и обладает свойством*

$$\forall p \in L : \; f(p) = 0,$$

тогда $\exists C = C(I) : \forall v \in H^r(I)$ *выполнено*

$$|f(v)| \leq C \cdot \|f\|_{H^{-r}(I)} \cdot |v|_{H^r(I)} . \tag{40}$$

▼ 1) Пусть $v \in H^r$ – произвольная функция. Так как по предположению $f(v) = f(v+p)$ $\forall p \in L$, то можно записать:

$$\forall p \in L \quad |f(v)| = |f(v+p)| \leq \|f\|_{H^{-r}} \cdot \|v+p\|_{H^r} ,$$

и, следовательно, $|f(v)| \leq \|f\|_{H^{-r}} \cdot \inf\limits_{p \in L} \|v+p\|_{H^r}$.

2) Покажем, что $\exists C = C(I)$:

$$\forall v \in H^r(I) \quad \inf_{p \in L} \|v+p\|_{H^r} \leq C \cdot |v|_{H^r} . \tag{41}$$

Пусть $N = \dim L$ и f_i, $1 \leq i \leq N$, – базис двойственного к L пространства. В силу теоремы Хана-Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов существуют такие линейные непрерывные формы на H^r, обозначаемые опять f_i, $1 \leq i \leq N$, что $\forall p \in L$ имеем

$$f_i(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0.$$

Обозначим $G(v) = \sum\limits_{i=1}^{N} |f_i(v)|$.

Если мы покажем справедливость неравенства

$$\|v\|_{H^r} \leq C(I) \cdot [|v|_{H^r} + G(v)] , \; \forall v \in H^r(I), \tag{42}$$

то из него последует (41). Действительно, фиксируя v, мы всегда можем подобрать такой элемент $q \in L$, что $G(v+q) = 0$. Тогда в силу (42) и принадлежности $q \in ker|\cdot|_{H^r} = L$ имеем:

$$\inf_{p \in L} \|v+p\|_{H^r} \leq \|v+q\|_{H^r} \leq C(I) \cdot |v+q|_{H^r} = C(I) \cdot |v|_{H^r} .$$

Докажем справедливость (42). Доказательство ведем от противного. Предположим, что (42) не верно. Тогда существует такая последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v_n \in H^r$, что

$$\|v_n\|_{H^r} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} [|v_n|_{H^r} + G(v_n)] = 0. \tag{43}$$

Отсюда,

$$\lim_{n\to\infty} |v_n|_{H^r} = 0, \tag{44}$$

и из ограниченности $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H^r следует существование в H^r последовательности $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, фундаментальной в H^r и удовлетворяющей (43). Потому обозначим ее снова $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Как известно, $H^r \subset L_2$, L_2 – банахово и H^r замкнуто в нем. Значит последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу v из H^r :

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{H^r} = 0.$$

Из (44) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\|v_n^{(r)}\right\|_{L_2} = 0,$$

а значит, $v^{(r)} = 0$, и $v \in ker|\cdot|_{H^r} = L$. Тогда, используя (43):

$$f_i(v) = \lim_{n\to\infty} f_i(v_n)_{H^r} = 0,$$

откуда $v = 0$ в силу свойств линейных форм f_i. Это противоречит равенству (43): $\|v\|_{H^r} = 1$. Значит справедливо неравенство (42).

3) Окончательно, соединяя пункты 1), 2) доказательства, получаем выражение (40):

$$\forall v \in H^r(I) \quad |f(v)| \le C \cdot \|f\|_{H^{-r}} \cdot |v|_{H^r}. \quad \blacktriangledown$$

Замечание 5.1 Доказательство для случая $L = \mathcal{P}_{K-1}$ и $f \in H^K(I)$, $K \in \mathbb{Z}$, дано в [17] (лемма Брэмбла-Гильберта). При соответствующей замене оно совпадает с полученным в утверждении.

Следствие 5.1 *Пусть* $\pi_\nu(u) : H^r(I) \to \mathcal{P}_\nu(\mathcal{I})$, $\nu + 1 \le r$, *есть проекция на* $\mathcal{P}_\nu(I)$. *Тогда для всех* $u \in H^r(I)$ *справедлива следующая оценка погрешности интерполяции в пространстве* $H^{1/2}(I)$:

$$\|u - \pi_\nu(u)\|_{H^{1/2}(I)} \le C \cdot |I|^{\nu+1} |u|_{H^{\nu+1}(I)},$$

где константа $C = C(\pi_\nu)$, *откуда*

$$\varepsilon_\nu(u)_{H^{1/2}(I)} \le C \cdot |I|^{\nu+1} |u|_{H^{\nu+1}(I)}.$$

▼ Из утверждения 5 при $\nu+1 = r$, $L = \mathcal{P}_\nu(I) \subset H^{\nu+1} = H^r$ и $f(u) = [u - \pi_\nu(u)]$ получим:

$$|u - \pi_\nu(u)| \le C_1(I) \cdot \|E - \pi_\nu\|_{H^{-\nu-1}} \cdot |u|_{H^{\nu+1}} ,$$

где через E обозначен единичный оператор.

Теперь запишем утверждение 5 для $u^{(1)} \in H^{r-1}(I)$ при $L = \mathcal{P}_{\nu-1}(I) \subset H^\nu = H^{r-1}$, $f(u^{(1)}) = [u^{(1)} - \pi_{\nu-1}(u^{(1)})]$:

$$\left|u^{(1)} - \pi_{\nu-1}(u^{(1)})\right| \le C_1(I)\cdot\|E - \pi_{\nu-1}\|_{H^{-\nu}}\cdot\left|u^{(1)}\right|_{H^\nu} = C_1(I)\cdot\|E - \pi_{\nu-1}\|_{H^{-\nu}}\cdot|u|_{H^{\nu+1}} .$$

Поскольку $\pi_\nu(u) \in \mathcal{P}_\nu(I)$, где $\mathcal{P}_\nu(I)$ – множество всех полиномов степени не выше ν, то неравенства, полученные для $\nu + 1 = r$, сохраняют смысл и при показателе $\nu + 1 \le r$.

Зададимся конкретным отрезком $I_0 = [0, 1]$, для которого запишем полученный результат. А именно, из интерполяционного неравенства и выведенных соотношений получим для пространства $H^{1/2}(I_0)$:

$$\forall u \in H^r(I_0) \;\; \varepsilon_\nu(u)_{H^{1/2}(I_0)} \le C(\pi_\nu, I_0) \cdot |u|_{H^{\nu+1}(I_0)} .$$

Тогда из соотношений

$$|u|_{H^r(I_o)} = |I|^{r-1/2} \, |u|_{H^r(I)} ,$$

$$\|u\|_{L_2(I_o)} = |I|^{-1/2} \, \|u\|_{L_2(I)} ,$$

с учетом (13) следует нужное нам неравенство:

$$\forall u \in H^r(I) \;\; \varepsilon_\nu(u)_{H^{1/2}(I)} \le \|u - \pi_\nu(u)\|_{H^{1/2}(I)} \le C(\pi_\nu) \cdot |I|^{\nu+1} \, |u|_{H^{\nu+1}(I)} .$$

Здесь константу $C(\pi_\nu)$ можно взять в виде $C(\pi_\nu) = \|E - \pi_\nu\|_{H^{-\nu-1}}$, заметив, что $C_1(I_0) = 1$ для единичного отрезка I_0. ▼

Утверждение 6 *Пусть вариант МКСЭ соответствует сплайновой интерполяции порядка не выше ν на границах суперэлементов S, разбиение S равномерно с характерным шагом $|I|$ суперэлементной сетки. Тогда для оценки погрешности решения $u \in H^r(S)$, $r \in \mathbb{R}$, в пространстве $H^{1/2}(S)$ при $r \ge \nu + 1$ справедливо:*

$$\|u - \bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \le C \cdot |I|^{\nu+1} \, |u|_{H^{\nu+1}(S)} . \tag{45}$$

▼ Из соотношения (13):

$$\|u-\bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \leq C' \left\|u-\pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)},$$

где C' определена (15).

Тогда при переходе от S к элементарному отрезку I имеем:

$$\|u-\bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \leq C' \sum_{j=1}^{\dim\{I_{kl}\}} \|u-\pi_\nu(u)\|_{H^{1/2}(I_{kl})}, \tag{46}$$

откуда, применяя результат следствия 5.1 утверждения 5, получаем требуемое неравенство. При этом $C = C' \cdot C(\pi_\nu)$, и константа $C(\pi_\nu)$ соответствует введенной в следствии к утверждению 5.

Отметим, что оценки погрешности приближенного решения $\|u-\bar{u}\|_{H^{1/2}(S)}$, выведенные ранее в параграфе 4.1, получены из обобщения неравенства Джексона без использования оценки интерполяции (см. утверждение 4 п. 1). В данном случае мы используем оценку погрешности интерполяции $\left\|u-\pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)}$, отсюда – появление константы $C(\pi_\nu)$. Можно определить иную константу C. Используя следствие 5.1 и тот факт, что $\|u-\bar{u}\|_{H^{1/2}(S)} \leq \mathrm{const} \cdot \|u-\bar{u}\|_{H^{\nu+1}(S)}$, получим также соотношение (45), где константа C есть константа неравенства вложения для пространств $H^{1/2}(S)$ и $H^{\nu+1}(S)$. ▼

5 Априорные оценки погрешностей решения МКСЭ в пространстве $H^1(\Omega)$

Сведем полученные результаты, обобщая их на область Ω. Основные оценки погрешностей получены как зависимые от гладкости следа u на границе S для пространств $H^r(S)$. Ясно, что пространство $H^R(\Omega)$ вложено в пространство $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ всех функций из $H^1(\Omega)$, имеющих следы класса $H^r(S) = \prod\limits_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})$ на S, см. (23). Поэтому справедлива оценка:

$$\forall u \in H^R(\Omega) \;\; \left\|\gamma^0 u\right\|_{H^r(S)} \leqslant c \cdot \|u\|_{H^R(\Omega)}, \tag{47}$$

с уччтом (24), где $c = const$. Изоморфизм между $H^{1/2}(S)$ и $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ (20) дачт:

$$\left\|\gamma^0 u - \gamma^0 \bar{u}\right\|_{H^{1/2}(S)} \simeq \|u-\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)}.$$

А принадлежность $u, \bar{u} \in \mathfrak{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ приводит к эквивалентности:

$$\left\|\gamma^0 u - \gamma^0 \bar{u}\right\|_{H^{1/2}(S)} \simeq \|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{48}$$

причем справедливо равенство

$$\|u-\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = \|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Учтем утверждение 2 и определение $\mathfrak{H}^R(\Omega)$. Тогда из соотношений (46) – (48) и утверждений 2, 4, 6 получим следующее утверждение.

Утверждение 7 *Пусть МКСЭ соответствует интерполяции лагранжевыми сплайнами на границах суперэлементов S, разбиение S равномерно с характерным шагом сетки $|I|$. Тогда МКСЭ имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^1(\Omega)$ на классах $H^s(\Omega)$, $s>1$, $s \in R$. Классом насыщения является $H^{\nu+3/2}(\Omega)$, порядком насыщения – $O(1/N^s)$. Справедливы следующие априорные оценки погрешностей метода в пространстве $H^1(\Omega)$:*

При $\nu \geq R-3/2$:

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C M_{R-1/2}^{1/2} M_{R-3/2}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{R-1}} |I|^{R-1/2} |u|_{H^R(\Omega)},$$

где константа C зависит от параметров исходного оператора и постоянных в неравенствах вложения, а $M_{R-1/2}$, $M_{R-3/2}$ зависят только от R.

При $\nu \leq R-3/2$:

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\nu \cdot |I|^{\nu+1} |u|_{H^{\nu+3/2}(\Omega)},$$

где константа C_ν зависит только от ν , параметров исходного оператора и постоянных неравенств вложения.

Повышение порядка полиномов на суперэлементных границах повлечет за собой аппроксимант более высокой точности МКСЭ в пространстве $H^1(\Omega)$ (для $\nu \geq R-3/2$). Это охарактеризовано полученными оценками. В случае аппроксимации производных решения при помощи МКСЭ в пространстве $H^1(\Omega)$ такая ситуация изменится, а исследование требует привлечения дополнительных фактов. Проблема регулярности ограничения приближенного решения МКСЭ на отдельный суперэлемент представляет как отдельный интерес, так и служит для получения оценок погрешностей производных. Данный вопрос будет рассмотрен в дальнейших работах.

6 Заключение

Статья посвящена разработке метода конечных суперэлементов (МКСЭ) Федоренко. Получены априорные оценки погрешностей метода и установлена его насыщаемость в пространствах С.Л. Соболева. Выведено неравенство

Джексона для МКСЭ приближений. Исследование проведено на примере задачи Дирихле, результаты могут быть распространены на класс общих линейных эллиптических задач.

Список литературы

[1] Бабенко К.И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1979.

[2] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

[3] Берг Й., Лчфстрчм Й. Интерполяционные пространства. Введение. М: Мир, 1980.

[4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2003. Т. 43, є 5. С. 711–727.

[5] Жуков В.Т, Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. є 8. 2001.

[6] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наук. Думка, 1992.

[7] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[8] Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.

[9] Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 27, Ч. 2. С. 131-288.

[10] Математическая энциклопедия. В 5 т. Т.2: Джексона неравенство / гл. ред. Виноградов И.М. – М.: Советская Энциклопедия, 1977.

[11] Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М: Мир, 1981.

[12] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

[13] Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Изд-во техн.-теор. литерат., 1949.

[14] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.

[15] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[16] Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.

[17] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

[18] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[19] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.

[20] DeVore R.A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. є 7. P. 51-150.

[21] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method and its Applications // Computational Methods in Applied Mathematics. 2007. V. 7, є 1. P. 3-24.

[22] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the Finite Superelement Method for the 3D elasticity problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2007. V. 12, є 1. P. 39-50.

[23] Galanin M., Savenkov E. Fedorenko finite superelement method as special Galerkin approximation // Mathematical Modelling and Analysis. 2002. V. 7, є 1. P. 41-50.

[24] Galanin M., Savenkov E., Temis J. Finite Superelements Method for Elasticity Problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10, є 3. P. 237-246.

[25] Jerison J., Kenig C.E. The inhomogeneous Dirichlet problem in lipschitz domains // Journal of Functional Analysis. 1995. є 130. P. 161-219.

[26] Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. American Mathematical Society, 1997.

[27] Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations // Electronic Journal of Differential Equations: Monographs, є 1, 1994 (Original book of 1977).