РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт Прикладной Математики
им. М.В. Келдыша

С.А. Лазарева

О неравенствах типа Джексона и Бернштейна для приближений метода конечных суперэлементов

Москва – 2008 г.

О неравенствах типа Джексона и Бернштейна для приближений метода конечных суперэлементов *

С.А. Лазарева

Аннотация

Аннотация

Выведены неравенства типа Джексона и Бернштейна для приближений метода конечных суперэлементов Федоренко. Показаны некоторые свойства аппроксимационных пространств метода. Исследование проведено на примере задачи Дирихле, результаты могут быть распространены на класс общих линейных эллиптических задач.

Jackson and Bernstein-like inequalities for the finite superelement approximations

Svetlana Lazareva
e-mail: LazarevaS@gmail.com

Abstract

Аннотация

Jackson and Bernstein-like inequalities for the approximations of Fedorenko finite superelement method are derived. A number of properties of approximation spaces of the method are shown. The analysis is carried out on the example of Dirichlet problem, the results can be extended for the class of general linear elliptic problems.

Содержание

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00421).

1 Введение. МКСЭ Федоренко

Метод конечных суперэлементов Федоренко (МКСЭ) – численный метод, позволяющий осуществить расчет математических моделей физических явлений, которые не представляется возможным разрешить "обычными" способами. Прежде всего для автора представляют интерес задачи, содержащие сингулярности решения, неоднородности сплошной среды, резкие особенности геометрии расчетной области. Варианты метода являются совершенно новыми и обладают рядом важнейших преимуществ. Их теоретическое обоснование и разрабатывается в данной работе.

К разработке схожих подходов в настоящее время проявляется интерес. Развиваемые методы теоретических исследований численного алгоритма часто не присущи работам такого рода. Разработанная теория позволяет моделировать физические процессы, опираясь на качественные зависимости погрешностей расчетов.

В настоящей работе выведены неравенства типа Джексона и Бернштейна для приближений метода конечных суперэлементов Федоренко. Неравенства позволяют выявить важные аппроксимационные характеристики, а также показать некоторые априорные оценки погрешностей метода в энергетическом пространстве функций. Проведенная работа направлена на поиск оптимальных условий выбора аппроксимаций и применений метода.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) впервые предложен в работах Р.П. Федоренко и его коллег [5, 19]. Эффективность МКСЭ подтверждена примерами решения разнообразных физических проблем [4, 5, 19, 21–23]. Рассмотрены задачи, которые характеризуются наличием множества резких особенностей, проявляющихся на малых пространственных областях.

Рассмотрим простую задачу Дирихле для дифференциального уравнения Лапласа в двумерной области $\Omega \subset R^2$. Расчетная область представляет собой квадрат с исключенными из него кругами, радиус которых мал по сравнению с размерами Ω. Полагаем, что в окрестностях таких мелких отверстий сосредоточены все резкие "сингулярности" решения.

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где u – искомая функция, $\partial\Omega$ – граница расчетной области, g – некоторая известная функция на $\partial\Omega$.

Подобно обычному методу конечных элементов (МКЭ) расчетная область разбита на некоторое число подобластей, называемых *суперэлементами*. Каждое место сосредоточения особенности (отверстие, неоднородность и т.п.) заключено строго в одном из суперэлементов. Каждая *базисная функция МКСЭ* $\Phi_i(x)$ единообразно задачтся в каждом из суперэлементов Ω_k и является решением задачи Дирихле следующего вида [4, 19, 21]:

$$-\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_k, \tag{3}$$

$$\Phi_i = \varphi_i \text{ на } S_k \equiv \partial\Omega_k, \tag{4}$$

где *граничные базисные функции* φ_i, заданные на $\partial\Omega_k$, принимают значения

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij},\ i = 0, \ldots, n, \tag{5}$$

в узлах суперэлемента P_j, $j = 1, \ldots, n$, включая возможную границу отверстия в данном суперэлементе, обозначенную через P_0, здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Узлы P_j с индексами $j = 1, \ldots, n$ расположены только на границе суперэлемента: на его рчбрах, в углах. С узлов на ребра границы суперэлемента функции φ_i продолжаются некоторым "стандартным" интерполянтом: полиномиальным, кусочно-линейным, сплайн-интерполянтом и т.д.

Заметим, что сингулярности задачи в окрестностях отверстий учтены посредством базисной функции с нулевым индексом $\Phi_0(x)$ в каждом из суперэлементов. Остальные функции $\Phi_i(x)$, $i \neq 0$, при наличии отверстия в суперэлементе Ω_k обращаются в ноль на его границе согласно (5). Если в суперэлементе отверстия нет, то $\Phi_0(x) \equiv 0$.

Решение задачи внутри каждого отдельного суперэлемента будем искать при помощи построенного базиса:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x),\ x \in \Omega_k. \tag{6}$$

Таким образом определено *приближенное решение МКСЭ* $\bar{u}(x)$ во всей расчетной области $\Omega = \cup_k \Omega_k$. Решение $\bar{u}(x)$, должно удовлетворять главному граничному условию на $\partial\Omega$ согласно (2):

$$\bar{u}(P_i) = g(P_i),\ \forall P_i \in \partial\Omega.$$

Неизвестные значения a_i разложения (6) определены с помощью схемы метода Бубнова-Галеркина при выборе функций $\Phi_i(x)$ в качестве базисных и пробных [4, 21–23].

2 Необходимые определения

Предполагаем достаточную гладкость функции g, фигурирующей в граничном условии, и границы области $\partial\Omega$ для того, чтобы искомое решение принадлежало пространству Соболева $H^R(\Omega)$ [7]. Сохраним ранее введенные обозначения: Ω – расчетная область, S_k – граница суперэлемента Ω_k, $S = \cup_k S_k$ – совокупность всех суперэлементных границ, u – искомое и $\bar{u}$ – приближенное решение МКСЭ.

Как правило, суперэлемент Ω_k является многоугольником, его граница принадлежит классу C^0 гладкости. При этом мы вправе рассматривать лишь тот случай, когда S_k – многоугольная граница, либо граница, состоящая из конечного числа гладких кривых, то есть: $S_k = \cup_l I_{kl},\ l = 1, \ldots, L$. Представляют интерес те варианты МКСЭ, в которых граничные базисные функции φ_i (4) на отрезках I_{kl} заданы полиномами или сплайнами Лагранжа [21].

Пространство всех полиномов порядка не выше ν на отрезке I_{kl} обозначим через $\mathcal{P}_\nu(I_{kl})$ [8]. На границе S введем пространство $\mathcal{P}_\nu(S) = \prod\limits_{k,l} \mathcal{P}_\nu(I_{kl})$ как множество всех полиномов порядка не выше ν на каждой из ечͅ частей I_{kl}. Обозначим символом $\mathcal{P}_\nu^N(S)$ *пространство всех сплайнов* порядка не выше ν, построенных на разбиении S на $(N-1)$ отрезок длины $|I_{kl}|/\nu$ [8]. Полиномиальная интерполяция служит частным случаем интерполяции сплайнами, потому при ечͅ рассмотрении вариант полиномиальной граничной интерполяции МКСЭ отдельным образом выделять не будем.

Аппроксимирующее пространство $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ МКСЭ – это линейная оболочка, образованная всеми базисными функциями Φ_i МКСЭ (3)–(4) с граничной интерполяцией посредством сплайнов $\mathcal{P}_\nu^N(S)$. То есть:

$$\bar{V}_\nu^N(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : -\Delta v = 0 \text{ в каждом из } \Omega_k \text{ и } \gamma_S^0 v \in \mathcal{P}_\nu^N(S) \right\}. \qquad (7)$$

Здесь след функции на S определен равенством $\gamma_S^0 v = \left\{ \gamma_{S_k}^0 v \right\}_{k=1}^{K_E}$, K_E – число суперэлементов в области. Оператор взятия следа $\gamma_{S_k}^0$, заданный на $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$ соотношением

$$\left(\gamma_{S_k}^0 u \right)(x) = \left(u|_{S_k} \right)(x),\ x \in S_k, \qquad (8)$$

непрерывно действует из пространства $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(S_k)$ для всех $k = 1 \ldots K_E$. При этом существует непрерывный оператор, обратный к $\gamma_{S_k}^0$ и действующий из $H^{1/2}(S_k)$ в $H^1(\Omega_k)$. Такой общий случай действия оператора $\gamma^0_{S_k}$ справедлив как для гладкой, так и для многоугольной или просто липшицевой границы S_k [7, 24]. Определение $\bar{V}^N_\nu(\Omega)$ содержит также следующее условие:

$$\gamma^0_S v = \gamma^0_{S_k} v = \gamma^0_{S_m} v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m, \tag{9}$$

для всех $S_k \cap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$ [26]. Аппроксимирующее пространство МКСЭ содержит его как "главное условие", накладываемое на все базисные функции. Иногда, если это не вызовет недоразумений, будем использовать также символ γ^0, не обозначая при этом множество, на котором определена область значений оператора следа. Аналогичным образом определим и *аппроксимирующее пространство* $\bar{V}_\nu(\Omega)$ *МКСЭ*, представляющее собой линейную оболочку, образованную базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством полиномов $\mathcal{P}_\nu(S)$.

В определение аппроксимирующего пространства не входят условия совместности функций в узлах P_j суперэлемента:

$$\left(\gamma^0 v\big|_{I_{kl}}\right)(P_j) = \left(\gamma^0 v\big|_{I_{kt}}\right)(P_j),\ j = 1, ..., n, \tag{10}$$

на соседних отрезках $I_{kl} \cap I_{kt} = P_j \neq 0$ границы S $\forall l, t = 1, ..., n$, $\forall k = 1, ..., K_E$. Условие (10), как правило, входит в схему МКСЭ. Оно связано с заданием базисных функций МКСЭ, как решений задач (4) – (5), и заданием интерполянта $\varphi_i(x)$ для них, непрерывного на всей границе $S_k = \cup_l I_{kl}$. Тем не менее, условие (10) можно ввести без ограничения общности метода, если непрерывность искомой функции в окрестностях узлов суперэлемента заведомо известна, а все особенности задач заключены строго внутри суперэлементов. В частности, всегда для сильного решения $u \in H^s(\Omega)$, $s \geq 2$.

Отметим, что в определении (7) использован оператор Лапласа, определяющий гармоническую функцию в суперэлементе. Под *гармоничностью* некоторого слабого решения $u \in H^1(\Omega)$ в произвольной области Ω будем понимать его удовлетворение уравнению Лапласа в следующей обобщенной постановке:

$$(-\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx = 0\ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{11}$$

Далее как для слабого, так и для сильного решения продолжаем формально пользоваться кратким обозначением: $-\Delta u = 0$. Выражение $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$ определяет *энергетическое скалярное произведение* и *энергетическую норму* задачи, совпадающие со скалярным произведением и нормой пространства Соболева $H^1(\Omega)$ [7, 12], если Ω – расчетная область. Пространство $H^1(\Omega)$ считаем *энергетическим пространством* задачи.

3 Аппроксимация в энергетическом пространстве

Исследование будем проводить в предположении, что коэффициенты системы Бубнова-Галеркина в схеме МКСЭ (6) рассчитаны точно. Тогда расчет коэффициентов приближенного решения $\bar{u}$ по методу Бубнова-Галеркина равносилен построению такой комбинации базисных функций, которая в метрике энергетического пространства $H^1(\Omega)$ является наилучшим приближением к u [12, 16]. При получении оценок нам не обязательно работать с аппроксимацией $\bar{u}$. Достаточно найти в аппроксимационном пространстве $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ (либо $\bar{V}_\nu(\Omega)$) "хорошее" приближение к u, тогда $\bar{u}$ будет ещч "лучше" по энергетической норме. Для этой цели удобно взять интерполянт функции u, который обозначаем через $\pi_\nu^N(u)$ (соответственно $\pi_\nu(u)$) :

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon_\nu^N(u) \leqslant C\left\|u-\pi_\nu^N(u)\right\|_{H^1(\Omega)}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_\nu^N(u) = \inf_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)}\left(\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{13}$$

В данном неравенстве константа C определена параметрами σ и μ соотношений непрерывности и эллиптичности исходного оператора [14]:

$$C = \sigma/\mu, \tag{14}$$

где константы σ, μ такие, что

$$a(u,u) = (\nabla u, \nabla u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \mu \cdot \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad |a(u,v)| \leqslant \sigma \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Величину $\varepsilon_\nu^N(u) = \inf\limits_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)}\left(\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\right)$ назовем *наилучшим приближением* (или *величиной наилучшего приближения*) элемента $u \in H^R(\Omega)$ подпространством $\bar{V}_\nu^N(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$. Она представляет собой наименьшую норму ошибки приближения функции u аппроксимирующим пространством МКСЭ $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$. Назовем также *элементом наилучшего приближения* такую функцию $g \in \bar{V}_\nu^N(\Omega)$, что $\varepsilon_\nu^N(u) = \inf\limits_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)}\left(\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\right) = \|u-g\|_{H^1(\Omega)}$. Определения соответствуют [1, 6, 8].

Аналогично введем $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2} = \inf\limits_{w\in\mathcal{P}_\nu^N(S)}\left(\left\|\gamma^0 u - w\right\|_{H^{1/2}(S)}\right)$ – *наилучшее приближение* (*величина наилучшего приближения*) элемента $\gamma^0 u$, определенного на S, подпространством $\mathcal{P}_\nu^N(S)\subset H^{1/2}(S)$ в норме пространства $H^{1/2}(S)$.

Отображение π_ν^N: $H^R(\Omega)\to\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ каждому элементу $u\in H^R(\Omega)$ ставит в соответствие его интерполянт $\pi_\nu^N(u)$ из класса $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ [8]. А также π_ν^N: $H^r(S)\to\mathcal{P}_\nu^N(S)$ каждому элементу $\gamma^0 u\in H^r(S)$ ставит в соответствие его граничный интерполянт из $\mathcal{P}_\nu^N(S)$. π_ν^N – линейное непрерывное отображение, проектор на пространство $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ либо $\mathcal{P}_\nu^N(S)$ соответственно. Аналогично определим *отображение* π_ν: $H^r(I_{kl})\to\mathcal{P}_\nu(I_{kl})$, ставящее каждому элементу $\gamma^0 u\in H^r(I_{kl})$ на отрезке $I_{kl}\subset S$ в соответствие его интерполянт класса $\mathcal{P}_\nu(I_{kl})$. При полиномиальной граничной интерполяции справедливо соотношение для π_ν: $H^R(\Omega)\to V_\nu(\Omega)$, а также π_ν: $H^r(S)\to\mathcal{P}_\nu(S)$.

Погрешностью метода на классе $H^R(\Omega)$ назовем величину [1, 2, 8]:

$$\delta_\nu^N H^R(\Omega) = \sup_{u\in H^R(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu^N(u)\right\|_{H^1(\Omega)}. \tag{15}$$

Будем говорить [1,8], что метод *имеет насыщение* (*насыщаем*) на классах $H^R(\Omega)$, $R>1$, если существует R_0, для которого

1) $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{u\in H^R(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)} = 0$ при $R\le R_0$;

2) $\sup\limits_{u\in H^P(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)} = o(\sup\limits_{u\in H^R(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)})$ при $R<P\le R_0$;

3) При $R_0<R$ существует $u\in H^R(\Omega)$ и не зависящая от ν константа $c>0$, такая, что $\left\|u-\pi_\nu^N(u)\right\|_{H^1(\Omega)}\ge c\cdot\sup\limits_{u\in H^{R_0}(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)}$.

Характерной чертой МКСЭ при аппроксимации слабых решений является возможность рассмотрения задачи (1) – (2) в некотором подпространстве энергетического пространства $\mathfrak{H}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$. Оно снабжено дополнительным свойством гармоничности функций в каждом из суперэлементов Ω_k в отдельности:

$$\mathfrak{H}^1(\Omega) = \left\{v\in H^1(\Omega): -\Delta v(x) = 0,\ x\in\Omega_k,\ \text{для всех } \Omega_k,\ k=1,...,K_E\right\}. \tag{16}$$

Аппроксимирующее пространство МКСЭ (7) является подпространством данного пространства. Определение $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ включает в себя условие (9):

$$\gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \text{ почти всюду на } S_k\cap S_m, \tag{17}$$

для всех $S_k \cap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$.

Эквивалентно перепишем определение (16) также в виде:

$$\mathfrak{H}^1(\Omega) = \begin{array}{l} \{v : \ \gamma^0 v \in H^{1/2}(S), \ -\Delta v(x) = 0, \ x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, \text{ что} \\ \gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m \neq 0, \ k, m = 1, ..., K_E \} . \end{array} \tag{18}$$

Утверждения настоящего раздела основаны на наличии изоморфизма между пространством $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(S)$. Мы вправе говорить об однозначном соответствии между пространством всех гармонических функций из $H^1(\Omega_k)$ и пространством $H^{1/2}(S_k)$ их следов на границе S_k с эквивалентностью соответствующих норм. Однозначное отображение устанавливается посредством оператора следа γ_S^0, см. определение (8). А именно: оператор $\gamma_{S_k}^0$ на классе гармонических функций u из $H^1(\Omega_k)$ сопоставляет u единственный элемент $\gamma_{\mathrm{S_k}}^0 u \in H^{1/2}(S_k)$. Это следствие существования оператора $\gamma_{S_k}^0$ на S_k и однозначной разрешимости задачи Дирихле в пространстве $H^1(\Omega_k)$ с такими граничными данными [7, 14]. Результат справедлив как на гладкой, так и на многоугольной границе суперэлемента S_k. При этом для однозначной разрешимости задачи Дирихле в пространстве $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ достаточно коэрцитивности соответствующей ей билинейной формы $a\,(u, v)$: форма $a\,(u, v)$ задает скалярное произведение в $\mathfrak{H}^1(\Omega)$ и коэрцитивна на пространстве слабых решений. Легко убедиться в том [7, 9], что в классическом случае линейного эллиптического уравнения второго порядка для этого достаточно эллиптичности задачи в области суперэлемента Ω_k.

Здесь и далее эквивалентность норм обозначим следующим образом:

$$\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 \cdot\right\|_{H^{1/2}(S)} .$$

А также, $A \simeq B \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 = \mathrm{const} : \ c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A$, если A, B – некоторые выражения.

Для любой функции $u \in \mathfrak{H}^1(\Omega)$ имеем:

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 u\right\|_{H^{1/2}(S)} . \tag{19}$$

Утверждение 1 *Пусть $\varepsilon_\nu^N(u)$ есть наилучшее приближение функции $u \in H^R(\Omega)$ аппроксимационным пространством МКСЭ $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ по норме пространства $H^1(\Omega)$, а величина $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}$ есть наилучшее приближение еч следа $\gamma^0 u$ в пространстве $H^{1/2}(S)$ сплайнами $\mathcal{P}_\nu^N(S)$.*

Тогда

$$c_1 \cdot \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2} \le \varepsilon_\nu^N(u) \le c_2 \cdot \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}, \tag{20}$$

где c_1, c_2 *– некоторые константы.*

▼ Действительно, согласно определению: $\varepsilon_\nu^N(u) = \inf\limits_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\right)$, а также $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2} = \inf\limits_{w\in\mathcal{P}_\nu^N(S)} \left(\left\|\gamma^0 u - w\right\|_{H^{1/2}(S)}\right)$. Поэтому из (19):

$$\varepsilon_\nu^N(u) = \inf_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\right) \simeq \inf_{v\in\bar{V}_\nu^N(\Omega)} \left(\left\|\gamma^0 u - \gamma^0 v\right\|_{H^{1/2}(S)}\right) = \varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}, \tag{21}$$

где $w = \gamma^0 v$ с учетом определения аппроксимационного пространства (7), связанного со сплайнами. Выражение (21) эквивалентно (20). Постоянные c_1 и c_2 определены константами неравенств вложения соответствующих пространств. ▼

Вводим следующие *пространства* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$:

$$\mathfrak{H}^R(\Omega) = \big\{v:\ \gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S),\ -\Delta v(x) = 0,\ x\in\Omega_k, \\ \text{for all } \Omega_k,\ k = 1, ..., K_E\big\}.$$

для любых $R \in \mathbb{R}$, $R \geqslant 1$. При $R = 1$ подразумевается определение (18) пространства $\mathfrak{H}^1(\Omega)$. В определение $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ включим и условие (17). Рост показателя R характеризуется увеличением гладкости функций $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S) = \prod\limits_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})$ из этого пространства на всех гладких частях суперэлементных границ.

Поскольку для следа любой функции v из пространства $H^R(\Omega)$ справедливо включение $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$, то выполнено:

$$H^R(\Omega) \subseteq \mathfrak{H}^R(\Omega). \tag{22}$$

Обратное вложение при $R \neq 1$ на границе класса C^0 не имеет места. Кроме того, любая функция $v \in \mathfrak{H}^R(\Omega)$ однозначно определена своим следом $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$ на S, напр., [25]. В пространстве $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ введем норму прямого произведения пространств $H^{R-1/2}(S)$ так, что $\forall v \in \mathfrak{H}^R(\Omega)$:

$$\|v\|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \simeq \sum_k \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S_k)} = \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S)},\ R \geqslant 1, \tag{23}$$

здесь и далее $\left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{R-1/2}(S)}$ – условная запись. Для $R = 1$, как и ранее, имеем эквивалентность: $\|v\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} \simeq \left\|\gamma^0 v\right\|_{H^{1/2}(S)}$.

Для классов $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ аналогично определению (15) *погрешностью метода на классе* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ назовем величину:

$$\delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega) = \sup_{u \in \mathfrak{H}^R(\Omega)} \left\| u - \pi_\nu^N(u) \right\|_{H^1(\Omega)} = \delta_\nu^N H^r(S) = \sup_{\gamma^0 u \in H^r(S)} \left\| \gamma^0 u - \pi_\nu^N(\gamma^0 u) \right\|_{H^{1/2}(S)},$$

с учетом (23), где $r = R - 1/2$.

Из вложения (22) следует справедливость неравенства:

$$\delta_\nu^N H^R(\Omega) \leqslant \delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega). \tag{24}$$

По аналогии с предыдущим определением понятия насыщаемости будем говорить, что метод *имеет насыщение* (*насыщаем*) на классах $\mathfrak{H}^R(\Omega)$, $r = R - 1/2$, $r = 1/2, 3/2, 5/2, ...$, если существует r_0, для которого

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_\nu^N \mathfrak{H}^R(\Omega) = \lim\limits_{N\to\infty} \delta_\nu^N H^r(S) = 0$ при $r \le r_0$;

2) $\delta_\nu^N H^s(S) = o(\delta_\nu^N H^r(S))$ при $r < s \le r_0$;

3) При $r_0 < r$ существует $\gamma_0 u \in H^r(S)$ и не зависящая от ν константа $c > 0$, такая, что $\left\| \gamma_0 u - \pi_\nu^N(\gamma_0 u) \right\|_{H^{1/2}(S)} \ge c \cdot \delta_\nu^N H^{r_0}(S)$.

4 Насыщаемость. Неравенство Джексона

Согласно утверждению 1 для того, чтобы провести оценку наилучшего приближения $\varepsilon_\nu^N(u)$ сверху, получив таким образом и оценку погрешности МКСЭ, см. (12), необходимо оценить величину наилучшего приближения $\varepsilon_\nu^N(\gamma^0 u)_{1/2}$. Далее мы так и поступим. Основным рабочим пространством выступит пространство $H^{1/2}(S)$ всех следов функций из $H^1(\Omega)$.

В том случае, когда искомая функция $u \in H^R(\Omega)$ имеет целочисленный индекс $R = 1, 2, 3, ...$, то ее след $\gamma^0 u$ изменяет показатель гладкости в пределах соболевских пространств с дробными индексами на всех гладких частях границы I_{kl} по-отдельности так, что $\gamma^0 u \in H^r(S)$, $r = 1/2,\ 3/2,\ 5/2, ...$

Следующее утверждение справедливо как следствие предыдущих соотношений и определений насыщаемости для $H^R(\Omega)$, $\mathfrak{H}^R(\Omega)$.

Утверждение 2 *Если МКСЭ насыщаем на классах* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ *(в норме пространства* $H^1(\Omega)$*), то он насыщаем и на классах Соболева* $H^R(\Omega)$.

Далее след функции $\gamma^0 u \in H^r(S)$ на S (то есть ограничение u на границу S) будем обозначать символом u вместо $\gamma^0 u$ для большей наглядности всех последующих записей. Здесь полагаем, что некоторый элемент u определен только на S и записываем $u \in H^r(S)$, где $r = R - 1/2$.

Докажем насыщаемость МКСЭ на классах $H^r(S)$ в пространстве $H^{1/2}(S)$, $r > 1/2$. Аппроксимация задачи проводится пространством $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ МКСЭ, связанном с лагранжевыми сплайнами $\mathcal{P}_\nu^N(S)$ на равномерной сетке.

Запишем неравенство Лебега [2]:

$$\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \le \delta_\nu^N(u)_{1/2} \le \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}, \tag{25}$$

где $\delta_\nu^N(u)_{1/2} = \left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)}$ – ошибка интерполяции в пространстве $H^{1/2}(S)$ и $\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$ – величина наилучшего приближения. Откуда следует:

$$\sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \le \delta_\nu^N H^r \le \left(1 + \left\|\pi_\nu^N\right\|\right) \cdot \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}, \tag{26}$$

где $\delta_\nu^N H^r$ – погрешность метода на классе H^r. При этом нужно отметить, что $\left\|\pi_\nu^N\right\|$ совпадает с $\|\pi_\nu\|$ и не зависит от N.

Рассмотрим верхнюю оценку (26). Задача получения оценки $\sup\limits_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$ очевидным образом сводится к оценке величины наилучшего приближения полиномами порядка не выше ν на элементарном отрезке разбиения I_k :

$$\sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} = \sup_{I_k} \sup_{u\in H^r(I_k)} \varepsilon_\nu(u)_{1/2}, \;\; S = \prod_{j=1}^{K_E} S_j, \;\; S_j = \bigcup_k I_k, \tag{27}$$

где $\varepsilon_\nu(u)_{1/2} = \inf\limits_{v\in \mathcal{P}_\nu(I_k)} \left(\|u - v\|_{H^{1/2}(I_k)}\right)$ – величина наилучшего приближения полиномами порядка не выше ν в пространстве $H^{1/2}(I_k)$.

Оценим величину $\varepsilon_\nu(u)_{1/2}$, $u \in I_k$. Далее будем обозначать $I = I_k$, опуская индекс.

Широко известно неравенство Джексона для оценки наилучшего приближения алгебраическими полиномами. Классическое неравенство выведено для $u \in C(I)$ [10, 13]. Используются также его обобщения на пространства Соболева $H^K(I)$ с целочисленными индексами $K \in \mathbb{Z}$ [1]. При этом рассматривается норма пространств $C(I)$ и $L_2(I)$ соответственно. Возможность обобщения неравенства на дробные пространства Соболева мало освещена в литературе. Докажем неравенство типа неравенства Джексона для оценки величины наилучшего приближения алгебраическими полиномами при $u \in H^r(I)$, $r = 3/2, 5/2, ...$, в пространстве $H^{1/2}(I)$.

Для этого воспользуемся элементами теории интерполяционных пространств, в частности, выписанные ниже результаты получены при помощи

K-метода Петре [3, 20]. Опорной точкой будет служить уже известная оценка величины наилучшего приближения $\varepsilon_\nu(u)_{L_2}$ для функции $u \in H^R(I)$, $R > 0$, $R \in \mathbb{Z}$, из пространства Соболева с целыми индексами в пространстве $L_2(I)$. Применяя элементы теории интерполяционных пространств, получим оценку величины наилучшего приближения для дробных пространств Соболева $u \in H^r(I)$, лежащих между $L_2(I)$ и $H^R(I) : 0 < r < R$. Таким образом, искомая оценка будет получена для любого дробного соболевского пространства $H^r(I)$, $r > 0$, при прочих условиях, необходимых для утверждения справедливости исходной "классической" оценки.

Утверждение 3 (Неравенство Джексона на I) *Пусть $\nu \geq r - 1$. Для любой функции $u \in H^r(I)$, $r > 1/2$, $r \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}^1$, справедливо неравенство Джексона:*

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \leq c_{1/2} M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{r-1/2}} \left|I\right|^r |u|_{H^r(I)},$$

где константы M_r, $M_{r-1/2}$ зависят только от r. Через $|I|$ обозначена длина отрезка I.

▼ 1) Для начала введем необходимые определения.

Запишем определение *K-функционала*: $\forall t > 0$

$$K(u,t) = K(u,t; L_2(I), H^R(I)) = \inf_{g \in H^R} \left[\|u - g\|_{L_2(I)} + t\,|g|_{H^R(I)} \right].$$

Он позволяет определить набор интерполяционных пространств $\big(L_2(I), H^R(I)\big)_\theta$ с индексом $0 < \theta < 1$ следующим образом.

Интерполяционным пространством $\big(L_2(I), H^R(I)\big)_\theta$, $0 < \theta < 1$, назовем множество всех таких $u \in L_2(I)$, что величина

$$|u|_{(L_2(I), H^R(I))_\theta} = \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta} K(u,t) \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} < \infty \tag{28}$$

конечна.

Введенный K-функционал будет нам полезен в дальнейшем, поскольку описание интерполяционных пространств $\big(L_2(I), H^R(I)\big)_\theta$ получено в теории интерполяции, а пара $L_2(I)$, $H^R(I)$ является одной из классических. Такая характеристика выражается следующим простым равенством [3, 20]:

$$\big(L_2(I), H^R(I)\big)_\theta = H^{\theta R}. \tag{29}$$

То есть, пространство $\left(L_2(I), H^R(I)\right)_\theta$ совпадает с $H^{\theta R}(I)$, а нормы в них эквивалентны.

Введем в рассмотрение отрезок I_0 единичной длины. Отметим, что справедливы следующие соотношения при переходе от отрезка $I_0 = [0,1]$ к $I = [0,\, |I|]$:

$$|u|_{H^r(I_o)} = |I|^{r-1/2}\, |u|_{H^r(I)}\,,$$
$$\|u\|_{L_2(I_o)} = |I|^{-1/2}\, \|u\|_{L_2(I)}\,.$$

Это проверяется непосредственной подстановкой вида $t = |I|\, x$ и интегрированием выражений $|u|_{H^r(I)}\,,\ \|u\|_{L_2(I)}$ с учетом того, что $|u|_{H^r(I)} = \left\|u^{(r)}\right\|_{L_2(I)}$, см. также [1].

2) Рассмотрим величину наилучшего приближения в пространстве $L_2(I_0)$:

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2} = \inf_{v \in \mathcal{P}_\nu(I_0)} \left(\|u-v\|_{L_2(I_0)}\right).$$

Запишем для нее известное неравенство Джексона в $L_2(I_0)$ при $u \in H^R(I_0)$, $R \in \mathbb{Z}$ [1]. При $\nu \geq R-1$:

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2} \leq A_R \frac{1}{(\nu+1)^R}\, |u|_{H^R}\,,\ \ R > 0,\ \ R \in \mathbb{Z},\ \ A_R = A_R(R). \tag{30}$$

Для упрощения записи обозначим далее $n = \nu + 1$.

3) Если w - элемент наилучшего приближения некоторой функции g из $\mathcal{P}_\nu(I_0)$, то из (30) и определения K-функционала:

$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq \|u-w\|_{L_2} \leq \|u-g\|_{L_2} + \|g-w\|_{L_2} \leq \|u-g\|_{L_2} + A_R \frac{1}{n^R}\, |g|_{H^R} \leq C \cdot K(u, n^{-R}$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} K(u, n^{-R})\right]^2.$$

А также, с учетом (28), имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} K(u, n^{-R})\right]^2 \leq \int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(u,t)\right]^2 \frac{dt}{t} = |u|^2_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}\,.$$

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]^2 \leq |u|^2_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}\,. \tag{31}$$

Множество всех таких функций $u \in L_2(I_0)$, для которых конечна величина

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]^2\right]^{1/2} < \infty$$

образует *аппроксимационное пространство* $A_2^{R\theta}(I_0)$ [20]. При этом из вложения $A_2^{R\theta}(I_0) \subset A_\infty^{R\theta}(I_0)$ согласно [18, 20] следует справедливость неравенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-R}} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]^2 \geq \sup_{n\geq 1} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]^2, \qquad (32)$$

где множество всех функций с конечной нормой, определяемой выражением $\sup\limits_{n\geq 1} \left[n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2}\right]$, определяет аппроксимационное пространство $A_\infty^{R\theta}(I_0)$ и одновременно характеризует $\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} = O(n^{-R\theta})$ как зависимость, монотонную по n, см. [18, 20]. Значит, из (31), (32) более слабое соотношение имеет вид:

$$n^{R\theta} \frac{1}{C} \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq |u|_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta},$$

$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq C n^{-R\theta} |u|_{(L_2(I_0), H^R(I_0))_\theta}.$$

И с учетом эквивалентности норм (29):

$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq C n^{-R\theta} |u|_{H^{\theta R}(I_0)}$$

где, как и ранее, $0 < \theta < 1$.

Приходим к следующему утверждению:

$$\forall u \in H^{\theta R}(I_0),\ \ R \in Z,\ \ \text{выполнено}$$
$$\varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq C n^{-R\theta} |u|_{H^{\theta R}(I_0)}\ \ \forall 0 < \theta < 1.$$

Для любого нецелого показателя $r = \theta R$, $0 < \theta < 1$, справедливо:

$$\forall u \in H^r(I_0),\ \ \varepsilon_{n-1}(u)_{L_2} \leq C n^{-r} |u|_{H^r(I_0)},\ \ R > r,\ \ R \in \mathbb{Z}.$$

Откуда с учетом замены $n = \nu + 1$ получаем:

$$\forall u \in H^r(I_0),\ \ \varepsilon_\nu(u)_{L_2} \leq C \frac{1}{(\nu+1)^r} |u|_{H^r(I_0)}\ \ \text{при}\ \nu + 1 \geq R > r. \qquad (33)$$

4) Изначально нас интересует оценка величины $\varepsilon_\nu(u)_{1/2}$:

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} = \inf_{v \in \mathcal{P}_\nu(I_0)} \left(\|u - v\|_{H^{1/2}(I_0)}\right).$$

Поэтому запишем (см. [18]):

$$\|u-v\|_{H^{1/2}(I_0)} \leq c_{1/2} \|u-v\|^{1/2}_{L_2(I_0)} \|u-v\|^{1/2}_{H^1(I_0)},$$

откуда:

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \leq c_{1/2} \inf_{v\in\mathcal{P}_\nu(I_0)} \left[\|u-v\|^{1/2}_{L_2(I_0)} \|u-v\|^{1/2}_{H^1(I_0)}\right],$$

где постоянная $c_{1/2}>0$.

Для $u\in H^r(I_0)$ согласно (33) имеем оценку:

$$\varepsilon_\nu(u)_{L_2(I_0)} \leq M_r \frac{1}{n^r} |u|_{H^r(I_0)} \text{ при } n\geq r,\ \forall u\in H^r(I_0),\ r=3/2,5/2,... \qquad (34)$$

И для оценки второго слагаемого с учетом того факта, что $\left|u^{(1)}\right|_{H^{r-1}(I_0)} = |u|_{H^r(I_0)}$, имеем:

$$\varepsilon_\nu(u)_{H^1(I_0)} = \varepsilon_\nu(u^{(1)})_{L_2(I_0)} \leq M_{r-1}\frac{1}{n^{r-1}} |u|_{H^r(I_0)} \text{ при } n\geq R,\ \forall u^{(1)}\in H^{r-1}(I_0). \qquad (35)$$

В (34), (35) делаем замену в соответствии с пунктом 1) и переходим к исходному отрезку I :

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \leq c_{1/2}\left[M_r\frac{1}{n^r}\right]^{1/2}\left[M_{r-1}\frac{1}{n^{r-1}}\right]^{1/2}|I|^r\,|u|_{H^r(I)};$$

$$\varepsilon_\nu(u)_{1/2} \leq c_{1/2} M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2}\frac{1}{n^{r-1/2}}|I|^r\,|u|_{H^r(I)}.$$

Возвращаясь к индексу ν заменой $n=\nu+1$, получаем требуемое неравенство.
▼

Покажем с помощью доказанных соотношений насыщаемость метода.

Утверждение 4 *Вариант МКСЭ, соответствующий сплайновой интерполяции на границах суперэлементов S на равномерной сетке, имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^{1/2}(S)$ на классах $H^r(S)$, $r>1/2$, $r\in\mathbb{R}$. Классом насыщения является $H^{\nu+1}(S)$. Порядком насыщения –* $O\left(N^{-r}\right)$.

▼ 1) Из утверждения 3 и соотношений (26), (27) легко показать сходимость метода на классах $H^r(S)$:

$$\lim_{n\to\infty}\delta_\nu^N H^r = 0 \text{ при } r\leq r_0=\nu+1.$$

Из (26), (27) имеем:

$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right)\cdot \sup_{u\in H^r(S)} \varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} = \left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right)\cdot \sup_{I_k}\sup_{u\in H^r(I_k)} \varepsilon_\nu(u)_{1/2}.$$

Тогда утверждение 3 дает:

$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right)|u|_{H^r}|I|^r\left(M_r^{1/2}M_{r-1}^{1/2}\frac{1}{(\nu+1)^{r-1/2}}\right).$$

В этом выражении необходимо сделать замену:

$$|I| = |S|\,\nu/(N-1), \tag{36}$$

где $|S|$ – суммарная длина всей границы S, $(N-1)/\nu$ – число отрезков I_{kl}, разбивающих эту границу, и $|I|=|I_{kl}|\ \forall k,l$, поскольку разбиение равномерно. Такая замена следует непосредственно из способа построения сплайна порядка ν на S [8]. Тогда при $\nu\ge 1$, $r>1/2$, несложно получить следующий результат:

$$\delta_\nu^N H^r \le \left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right)M_r^{1/2}M_{r-1}^{1/2}\,|u|_{H^r}\,|2S|^r\cdot\frac{1}{N^r},$$

или

$$\delta_\nu^N H^r \le C_{\nu,r}\,|S|^r\,|u|_{H^r}\cdot\frac{1}{N^r}\xrightarrow{N\to\infty}0$$

где константа $C_{\nu,r}$ зависит только от ν и r. Порядок сходимости $O\left(N^{-r}\right)$.

2) Покажем, что выполнено следующее требование в определении насыщаемости, а именно:

$$\exists r_0 : \delta_\nu^N H^s = o\left(\delta_\nu^N H^r\right),\ \text{при}\ r<s\le r_0,\ \text{и}\ r_0=\nu+1.$$

Запишем:

$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le \frac{\left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right)M_s^{1/2}M_{s-1}^{1/2}}{A_r}|u|_{H^s}\frac{|I|^{s-r}}{(\nu+1)^{s-r-1/2}}, \tag{37}$$

$\nu\ge 1$, $(s-r)>1/2$. Здесь оценка сверху числителя $\delta_\nu^N H^s$ взята из предыдущего пункта доказательства 1). Для оценки знаменателя $\delta_\nu^N H^r$ снизу использована оценка величины $\inf\limits_{\mathcal{P}_\nu^N(S)}\sup\limits_{u\in H^r(S)}\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2}$, поперечника Колмогорова, имеющая место как для целых, так и для дробных классов H^r при $r>1/2$ [1]:

$$\delta_\nu^N H^r \ge \sup_{u\in H^r(S)}\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \ge \inf_{\mathcal{P}_\nu^N(S)}\sup_{u\in H^r(S)}\varepsilon_\nu^N(u)_{1/2} \ge A_r\frac{1}{(\nu+1)^r},$$

с учетом соотношения (25). Константа A_r зависит только от r. Тогда из (37) и замены (36):

$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le \frac{\left(1+\left\|\pi_\nu^N\right\|\right) M_s^{1/2} M_{s-1}^{1/2}}{A_r} \left|2S\right|^{s-r} |u|_{H^s} \frac{1}{N^{s-r}};$$
$$\frac{\delta_\nu^N H^s}{\delta_\nu^N H^r} \le C_{\nu,r,s} \frac{1}{N^{s-r}} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ для } r < s \le \nu + 1.$$

3) Осталось показать справедливость при $r > \nu + 1$, следующего предложения:

$$\exists u \in H^r(S) \text{ и не зависящая от } \nu \text{ константа } c > 0, \text{ такая, что}$$
$$\left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^{1/2}(S)} \ge c \cdot \delta_\nu^N H^{\nu+1}.$$

Это следует непосредственно из насыщаемости сплайновой аппроксимации в пространстве с произвольным целочисленным индексом, например, в пространстве L_2. А именно, согласно [2] можем указать такой элемент $y \in H^r(S)$, что $\left\|y - \pi_\nu^N(y)\right\|_{L_2} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Тогда, используя интерполяционное неравенство [18]:

$$\left\|y - \pi_\nu^N(y)\right\|_{H^{1/2}} \le c_{1/2} \left\|y - \pi_\nu^N(y)\right\|_{L_2} \left\|y - \pi_\nu^N(y)\right\|_{H^1} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

По результатам пунктов 1), 2), 3) насыщаемость доказана. Если данное утверждение рассматривать только на классах Соболева с полуцелым показателем гладкости, то классом насыщения является $H^{\nu+1/2}(S)$, $\nu \ge 1$. ▼

Утверждение 5 (Неравенство Джексона) *При $\nu \ge R - 3/2$ для рассматриваемых приближений МКСЭ в пространствах Соболева справедливо:*

$$\varepsilon_\nu(u) \le C M_{R-1/2}^{1/2} M_{R-3/2}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{R-1}} \left|I\right|^{R-1/2} |u|_{H^R(\Omega)},$$

для любой функции $u \in H^R(\Omega)$ и $R > 1$, $R \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, константа C зависит от параметров исходного оператора и постоянных в неравенствах вложения, а $M_{R-1/2}$, $M_{R-3/2}$ зависят только от R.

Утверждение 6 *Пусть МКСЭ соответствует интерполяции лагранжевыми сплайнами на границах суперэлементов S, разбиение S равномерно с характерным шагом сетки $|I|$. Тогда МКСЭ имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^1(\Omega)$ на классах $H^s(\Omega)$, $s > 1$, $s \in R$. Классом насыщения является $H^{\nu+3/2}(\Omega)$, порядком насыщения – $O(1/N^s)$. В пространстве $H^1(\Omega)$ при $\nu \ge R - 3/2$ справедлива следующяя априорная оценка погрешно-*

сти метода:

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \le C M^{1/2}_{R-1/2} M^{1/2}_{R-3/2} \frac{1}{(\nu+1)^{R-1}} |I|^{R-1/2} |u|_{H^R(\Omega)},$$

где константа C зависит от параметров исходного оператора и постоянных в неравенствах вложения, а $M_{R-1/2}$, $M_{R-3/2}$ зависят только от R.

5 Свойства аппроксимационных пространств МКСЭ. Неравенство Бернштейна

В предыдущем разделе дан вывод неравенства Джексона для аппроксимаций МКСЭ. Его вид для пространства $H^1(\Omega)$ свойственен большинству стандартных методов приближения. Пусть аппроксимация проводится в пространстве X так, что $X_n \subset X$, где X_n – набор аппроксимирующих пространств метода. Полагаем, что может быть найдено положительное число $r > 0$ и второе пространство $Y \subset X$, непрерывно вложенное в X, такие, что для некоторой функции u справедливо неравенство Джексона:

$$\varepsilon_n(u)_X \leqslant C n^{-r} |u|_Y, \ u \in Y, \ n = 1, 2, ... \tag{38}$$

Как следствие общей схемы при использовании K-функционала раздела 4 отсюда вытекает следующее соотношение. Для всех $0 < s < r$ интерполяционное пространство $(X, Y)_{s/r}$ между X и Y вложено в аппроксимационное пространство $A^s_2(X)$, которое определяется исследуемой величиной $\varepsilon_n(u)_X$:

$$(X, Y)_{s/r} \subset A^s_2(X), \ 0 < s < r. \tag{39}$$

В нашем случае: $X = H^1(\Omega)$, $X_n = \bar{V}^N_\nu(\Omega)$, $Y = H^R(\Omega)$, $n = \nu+1$ и $r = R-1$.

Напомним, что *интерполяционным пространством* $(X, Y)_\theta$, $0 < \theta < 1$, называем множество всех таких $u \in X$ с конечной величиной:

$$|u|_{(X,Y)_\theta} = \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta} K(u,t) \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} < \infty. \tag{40}$$

Множество всех таких функций $u \in X$, для которых конечна величина

$$|u|_{A^s_2(X)} = \left[\sum_{n=1}^\infty n^{-1} \left[n^s \varepsilon_n(u)_X \right]^2 \right]^{1/2} < \infty$$

образует *аппроксимационное пространство* $A^s_2(X)$.

Связь аппрокимационных и интерполяционных пространств вносит значительное упрощение в поиск характеристик различных методов приближения. При этом в качестве компаньона неравенства Джексона выступает неравенство Бернштейна. При тех же условиях, что указаны для неравенства (38), *неравенство Бернштейна* имеет следующий вид:

$$|\bar{u}|_Y \leqslant Cn^r \|\bar{u}\|_X, \ \bar{u} \in X_n, \ n = 1, 2, ... \tag{41}$$

Оно характеризует поведение произвольной функции $\bar{u}$ из пространства аппроксимантов X_n в пространстве Y. Если выбор пространств соответствует классическим шкалам, то неравенство Берштейна даст оценки норм производных аппроксимантов решения через нормы их самих в других пространствах, см., напр., [6].

Утверждение 7 ([20]) *Если справедливы неравенства Джексона (38) и Бернштейна (41), то для любого* $0 < s < r$ *справедливо совпадение*

$$A_2^s(X) = (X, Y)_{s/r}, \quad 0 < s < r$$

с эквивалентностью соответствующих норм.

Таким образом, основные свойства аппроксимационных пространств метода могут быть определены утверждением 7, если нам известны его два основных составляющих: 1) подходящее пространство Y, для которого выполнены (38), (41); и 2) свойства пространств $(X, Y)_\theta$. Заметим, что интерполяционные пространства $(X, Y)_\theta$ определены (40), поэтому основной вопрос составляет первый пункт: нахождение пространства $Y \subset X$, для которого выполнены неравенства Джексона и Бернштейна в случае использования того или иного метода приближения.

Обратимся к МКСЭ и положим, как и в случае неравенства Джексона (38), что $X = H^1(\Omega)$, $X_n = \bar{V}_\nu^N(\Omega)$, $Y = H^R(\Omega)$, $n = \nu + 1$. В дальнейшем увидим, что неравенство Бернштейна не выполнено. В общем случае для метода справедливо только вложение (39), и обратное не имеет места. Выделим подробно свойства аппроксимационных пространств.

Утверждение 8 (Неравенство Бернштейна) *При аппроксимации МКСЭ Федоренко справедливо*

$$A_2^s(H^1(\Omega)) = A_2^s(\mathfrak{H}^1(\Omega)) = \left(\mathfrak{H}^1(\Omega), \mathfrak{H}^R(\Omega)\right)_{s/(R-1)}, \quad 0 < s < R-1, \tag{42}$$

с эквивалентностью соответствующих норм.

Выполнено неравенство Бернштейна с показателем $r = R - 1$:

$$\|\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \leqslant Cn^{R-1} \|\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = Cn^{R-1} \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \quad r = R - 1.$$

▼ Используем утверждение 7. Выберем $Y = \mathfrak{H}^R(\Omega)$ и $X = \mathfrak{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $X_n = \bar{V}_\nu^N(\Omega)$. Пространство $\left(\mathfrak{H}^1(\Omega), \mathfrak{H}^R(\Omega)\right)_\theta$ определено K-функционалом (40). Справедливость неравенства Джексона установлена ранее в разделе 4. Перепишем его следующим образом:

$$\varepsilon_n(u)_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = \varepsilon_n(u)_{H^1(\Omega)} \leqslant Cn^{-r} |u|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \leqslant C'n^{-r} |u|_{H^R(\Omega)}, \ n = 1, 2, ...,$$

где $u \in H^R(\Omega) \subset \mathfrak{H}^R(\Omega)$, $n = \nu + 1$ и $r = R - 1$.

Покажем выполнение неравенства Бернштейна:

$$|\bar{u}|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \leqslant Cn^r \|\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)}, \quad \bar{u} \in \bar{V}_\nu^N(\Omega), \ n = 1, 2, ...,$$

для того же $r = R - 1$ и $n = \nu + 1$. Для этого достаточно показать, что

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{\sum\limits_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})} \leqslant Cn^r \|\bar{u}\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = Cn^r \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}, \quad \gamma^0\bar{u} \in \mathcal{P}_\nu(I_{kl}), \ n = 1, 2, ... \tag{43}$$

Неравенство (43) есть следствие выполнения неравенства Бернштейна при полиномиальной аппроксимации в пространствах Соболева с целочисленным индексом $R \in \mathbb{Z}$:

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^R(I_{kl})} \leqslant Cn^R \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{L_2(I_{kl})}, \quad \gamma^0\bar{u} \in \mathcal{P}_\nu(I_{kl}), \ n = 1, 2, ..., \ \forall I_{kl},$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1}(I_{kl})} = \left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^R(I_{kl})} \leqslant Cn^{R-1} \left\|\frac{d}{d\tau}\gamma^0\bar{u}\right\|_{L_2(I_{kl})} = Cn^{R-1} \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^1(I_{kl})},$$

$$\text{а также } \left|\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-2}(I_{kl})} = \left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^R(I_{kl})} \leqslant Cn^{R-2} \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^2(I_{kl})}.$$

Значит, из свойств интерполяционных пространств [18]:

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})} \leqslant c_{1/2} \left|\gamma^0\bar{u}\right|^{1/2}_{H^{R-1}(I_{kl})} \left|\gamma^0\bar{u}\right|^{1/2}_{H^R(I_{kl})} \leqslant C'n^{R-1/2} \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{L_2(I_{kl})},$$

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})} \leqslant c_{1/2} \left|\frac{d}{d\tau}\gamma^0\bar{u}\right|^{1/2}_{H^{R-2}(I_{kl})} \left|\frac{d}{d\tau}\gamma^0\bar{u}\right|^{1/2}_{H^{R-1}(I_{kl})} \leqslant C'n^{R-3/2} \left\|\frac{d}{d\tau}\gamma^0\bar{u}\right\|_{L_2} = C'n^{R-3/2} |$$

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})} \leqslant C'n^{R-5/2} \left\|\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma^0\bar{u}\right\|_{L_2} = C'n^{R-5/2} \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^2(I_{kl})},$$

где

$$\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^1(I_{kl})} = \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{\left(H^{1/2}(I_{kl}),H^2(I_{kl})\right)_{1/3}} \leqslant c_{1/3}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{2/3}_{H^{1/2}(I_{kl})}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{1/3}_{H^2(I_{kl})}, \text{ или}$$
$$c_{1/3}^{-3/2}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{3/2}_{H^1(I_{kl})}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{-1/2}_{H^2(I_{kl})} \leqslant \left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})},\ c_{1/3} = const.$$

Откуда:

$$\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \geqslant c_{1/3}^{-3/2}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{3/2}_{H^1(I_{kl})}\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|^{-1/2}_{H^2(I_{kl})} \geqslant c_{1/3}^{-3/2}C'^{-1}\left[n^{3/2-R}\right]^{3/2}\left[n^{5/2-R}\right]^{-1/2}\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H}$$
$$\left\|\gamma^0\bar{u}\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \geqslant \tilde{C}\left[n^{9/4-3/2\cdot R-5/4+R/2}\right]\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})} = \tilde{C}n^{1-R}\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})}.$$

В результате имеем (43) при $r = R - 1$:

$$\left|\gamma^0\bar{u}\right|_{\sum\limits_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})} \leqslant Cn^{R-1}\left\|\bar{u}\right\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = Cn^{R-1}\left\|\bar{u}\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Тогда из утверждения 7 получаем соотношение (42). ▼

Утверждение 9 *Пусть* T_ν *– последовательность операторов, задающая "оптимальную" аппроксимацию МКСЭ, соответствующую методу Бубнова-Галчркина. То есть:*

$$\left\|u - T_\nu u\right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon_\nu(u) = C\inf_{v\in\bar{V}_\nu(\Omega)}\left(\left\|u-v\right\|_{H^1(\Omega)}\right),\quad \nu = 0,1,2,...,$$

где $T_\nu u = \bar{u}$, *характеризуемое показателем* ν *и аппроксимационным пространством МКСЭ* $\bar{V}_\nu(\Omega)$; $C > 0$ *– константа из (12). Такая последовательность устойчива в* $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ *в следующем смысле:*

$$\left\|\bar{u}\right\|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} = \left\|T_\nu u\right\|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \leqslant C\left|u\right|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)},\quad \nu = 0,1,2,...,$$

где C *– константа, не зависящая ни от одного из входящих в неравенство параметров.*

Тогда $T_\nu u$ *доставляют минимум K-функционалу*

$$\left\|u-\bar{u}\right\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} + (\nu+1)^{-r}\left|\bar{u}\right|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} =$$
$$\left\|u - T_\nu u\right\|_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} + (\nu+1)^{-r}\left|T_\nu u\right|_{\mathfrak{H}^R(\Omega)} \leqslant CK(u,t,\mathfrak{H}^1(\Omega),\mathfrak{H}^R(\Omega)),\quad \nu = 0,1,2,...,$$

также с независимой константой C, *где* $r = R - 1$ *соответствует неравенствам Джексона и Бернштейна (см. [20]) и величина* $t = (\nu+1)^{-r}$.

Минимизация K-функционала в пространствах $\mathfrak{H}^R(\Omega)$ *доставляет "оптимальное" приближение K-функционалу, соответствующему простран-*

ствам Соболева $H^R(\Omega)$. Так, что:

$$K(u,t,\mathfrak{H}^1(\Omega),\mathfrak{H}^R(\Omega)) \simeq C\cdot\varepsilon_\nu(u)_{\mathfrak{H}^1(\Omega)} = C\cdot\varepsilon_\nu(u)_{H^1(\Omega)} \leqslant C'_R\cdot K(u,t,H^1(\Omega),H^R(\Omega)),$$

обратное неравенство в общем случае не выполнено.

6 Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию метода конечных суперэлементов Федоренко. Выведены неравенства типа Джексона и Бернштейна для приближений МКСЭ. Показаны некоторые свойства аппроксимационных пространств метода. Исследование проведено на примере задачи Дирихле, результаты могут быть распространены на класс общих линейных эллиптических задач.

Список литературы

[1] Бабенко К.И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1979.

[2] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

[3] Берг Й., Лчфстрчм Й. Интерполяционные пространства. Введение. М: Мир, 1980.

[4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2003. Т. 43, є 5. С. 711–727.

[5] Жуков В.Т, Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. є 8. 2001.

[6] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наук. Думка, 1992.

[7] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[8] Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.

[9] Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 27, Ч. 2. С. 131-288.

[10] Математическая энциклопедия. В 5 т. Т.2: Джексона неравенство / гл. ред. Виноградов И.М. – М.: Советская Энциклопедия, 1977.

[11] Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М: Мир, 1981.

[12] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

[13] Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Изд-во техн.-теор. литерат., 1949.

[14] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.

[15] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[16] Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.

[17] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

[18] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[19] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.

[20] DeVore R.A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. є 7. P. 51-150.

[21] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method and its Applications // Computational Methods in Applied Mathematics. 2007. V. 7, є 1. P. 3-24.

[22] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the Finite Superelement Method for the 3D elasticity problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2007. V. 12, є 1. P. 39-50.

[23] Galanin M., Savenkov E., Temis J. Finite Superelements Method for Elasticity Problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10, є 3. P. 237-246.

[24] Jerison J., Kenig C.E. The inhomogeneous Dirichlet problem in lipschitz domains // Journal of Functional Analysis. 1995. є 130. P. 161-219.

[25] Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. American Mathematical Society, 1997.

[26] Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations // Electronic Journal of Differential Equations: Monographs, є 1, 1994 (Original book of 1977).