



Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.

Многосеточный метод для
неструктурных конечно-
элементных дискретизаций
уравнений аэродинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для неструктурных конечно-элементных дискретизаций уравнений аэродинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 5. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-5>

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

В.Т. Жуков, О.Б. Феодоритова

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕСТРУКТУРНЫХ
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ДИСКРЕТИЗАЦИЙ
УРАВНЕНИЙ АЭРОДИНАМИКИ

Москва, 2008

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы № 3.1 Отделения математических наук РАН и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9019.2006.1)

УДК.519.6

В.Т. Жуков, О.Б. Феодоритова

Email: zhukov@kiam.ru, feodor@kiam.ru

Многосеточный метод для неструктурных конечно-элементных дискретизаций уравнений аэродинамики

АННОТАЦИЯ

Построен многосеточный метод для схем, получаемых при аппроксимации на неструктурных сетках дифференциальных уравнений динамики жидкости с помощью стабилизированных вариантов метода конечных элементов. Алгоритм предназначен для ускорения сходимости итераций метода крыловских подпространств. Приведены результаты численных экспериментов для задач, описываемых системами уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

Стр. 31, табл. 5, рис. 8, библиограф. 12 назв.

Ключевые слова: неструктурные сетки, многосеточный метод, метод конечных элементов, уравнения Навье-Стокса, уравнения Эйлера, конвекция-диффузия

O.B. Feodoritova, V.T. Zhukov

Multigrid method for unstructured finite element discretizations of aerodynamics equations

ABSTRACT

A multigrid algorithm for the solution of stabilized finite element discretizations of fluid dynamics equations on unstructured grids is described. The method is intended to accelerate Krylov subspace methods. The results of computations are presented to show capability of the algorithm for the Euler and Navier-Stokes systems.

Keywords: unstructured grids, multigrid method, finite element method, Navier-Stokes equations, Euler equations, convection-diffusion

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	6
3	Дискретизация	7
4	Сетка, сеточные функции	7
5	Многосеточный метод	9
5.1	Формальное представление метода	9
5.2	Описание сеточных структур: подробный и грубый уровни . . .	9
5.3	Описание грубосеточных операторов	13
5.4	Оператор интерполирования $P : u \longrightarrow U$	15
5.5	Оператор сборки $R : U \longrightarrow u$	16
5.6	Сглаживатель	17
5.7	Алгоритм	17
6	Примеры построения грубосеточных операторов	18
7	Численные эксперименты	23
7.1	Общие замечания	23
7.2	НАСА0012: ламинарное обтекание	24
7.3	MCD 1: трехэлементный профиль, турбулентное обтекание . . .	25
7.4	MCD 2: трехэлементный профиль, турбулентное обтекание . .	26
7.5	MCD 3: трехэлементный профиль, невязкое обтекание	27
8	Заключение	30

1 Введение

Численное моделирование аэродинамических течений часто основывается на решении систем дифференциальных уравнений на неструктурных анизотропных сетках, обеспечивающих описание разномасштабных явлений. После дискретизации и линеаризации таких задач возникают системы линейных уравнений, трудоемкость решения которых значительна и стимулирует развитие параллельных итерационных методов. Известно, что надежными являются методы подпространств Крылова, реализованные во многих параллельных библиотеках, в частности, в PETSc [1]. Эффективность методов Крылова зависит в основном от алгоритмов предобуславливания. Среди последних популярными являются методы Шварца (domain decomposition) [2], основанные на декомпозиции исходной области в набор подобластей и решении дискретных уравнений в подобластях. Методы Шварца удобны для параллельной реализации на неструктурных сетках, но они могут приводить к замедлению скорости сходимости крыловских итераций с ростом числа процессоров. Рецепт лечения известен – развитие многосеточных алгоритмов, пригодных для неструктурных сеток.

Именно этой проблеме посвящена данная работа, в которой приведен подход к построению многосеточного метода для конечно-элементных дискретизаций уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Решение стационарных задач ищется установлением по времени, и в процессе линеаризации нелинейных разностных уравнений формируются системы линейных уравнений, требующие эффективных методов решения. Помимо большого числа ($10^5 - 10^7$) неизвестных, эти системы плохо обусловлены, и трудоемкость их решения увеличивается с ростом числа степеней свободы, т.е. как с уменьшением сеточного параметра h , так и увеличением степени p многочленов метода конечных элементов (МКЭ). Дополнительные трудности возникают при решении дискретных схем для сингулярно-возмущенных задач, например, конвекции-диффузии с доминирующей конвекцией, или задач вязкого обтекания, требующих, как правило, существенно анизотропных сеток, адаптирующихся к структуре течения.

Напомним, что эффективность многосеточного метода Р.П. Федоренко [3] зависит от взаимодействия грубосеточной коррекции и сглаживающих итераций. Грубосеточная коррекция служит для уменьшения гладких, низкочастотных мод ошибки итерационного приближения, а сглаживатель нужен для подавления высокочастотных, осциллирующих компонент ошибки. В практических приложениях, и особенно на неструктурных сетках, трудно гарантировать подавления всех мод ошибки, отдельные моды могут остаться, поэтому целесообразно использовать мультигрид как предобуславливатель для уско-

рения сходимости методов подпространств Крылова. Известно (и объяснено п. 2), что крыловские итерации эффективно гасят именно отдельные моды или их небольшие группы. Заметим, что разработанный мультигрид легко включается в существующие параллельные библиотеки именно в качестве предобуславливателя.

Результаты развития мультигрида на неструктурных сетках частично отражены в [4], где нами предложен алгоритм для решения схем МКЭ высокого порядка p . Этот алгоритм по своей структуре является многосеточным методом, примененным для редукции схемы МКЭ порядка $p > 1$ к схеме с линейными элементами, $p = 1$; такого рода алгоритм сейчас называют p -мультигридом. Цель данной работы состоит в построении и изучении мультигрида для схем МКЭ порядка $p = 1$ на неструктурных треугольных сетках. В итоге в дополнение к p -мультигриду [4] здесь строится геометрический мультигрид, и возникает общий hp -мультигрид для неструктурных сеток.

Заметим, что разработка мультигрида с построением последовательности грубых сеток для неструктурных сеток является непростой задачей. В качестве подходов можно использовать редискретизацию, когда заново проводится триангуляция области с меньшим числом узлов, или агломерацию, когда из ячеек подробной сетки строятся агломераты ячеек с построением на них многосеточных операторов. Для анизотропных неструктурных сеток использование таких приемов затруднительно или практически невозможно.

Мы разрабатываем мультигрид для специального класса сеток [5], которые адаптируются к структуре течения в процессе многократного решения исходной задачи. При таком подходе после решения задачи на текущей сетке вырабатываются критерии адаптации и строится новая сетка с увеличением числа узлов и/или их перераспределением. На каждом шаге адаптации число узлов сетки увеличивается незначительно, обычно на 20 – 50 процентов, а не в 2 – 4 и более раза, что типично для мультигрида (в двумерном случае) даже с учетом возможной анизотропии. Предлагаемый метод основан на использовании адаптивной информации, которая служит для построения последовательности грубых сеток.

В пп. 2 – 4 дано описание задачи и сеточных структур, а в п. 5 приводятся основные компоненты мультигрида. В п. 6 на модельной задаче изучено наследование грубосеточным оператором свойств исходной дискретизации. Показано, что для грубосеточной дискретизации эффективной является суперэлементная техника [6]. В п. 7 приводятся примеры расчетов.

Дискретизация уравнений Эйлера и Навье-Стокса, алгоритм их решения и программа *supg_ns C++* разработаны Д.С. Каменецким [7], предоставившим возможность встроения многосеточного алгоритма в указанную программу.

2 Постановка задачи

В процессе решения уравнений Навье-Стокса или Эйлера для нахождения очередного приближения к решению нужно решать невырожденные системы линейных уравнений

$$Au = b, \quad (2.1)$$

где матрица A и вектор b получаются в результате линеаризации на каждом шаге по времени неявной стабилизированной конечно-элементной схемы, записанной для нестационарной системы дифференциальных уравнений на неструктурных адаптивных сетках.

Именно эффективное решение этих систем является интересующей нас задачей. Одним из надежных методов решения линейных систем является метод подпространств Крылова, например, обобщенный метод минимальных невязок GMRES [8]. В этом итерационном процессе строятся подпространства Крылова $K_n = span[r_0, Ar_0, \dots, A^{n-1}r_0]$ размерности $n = 1, 2, \dots$; здесь $r_0 = b - Au_0$ – невязка заданного начального приближения u_0 . Новое приближение u_n ищется в виде $u_n = u_0 + v_n$, где поправка v_n минимизирует (в евклидовой норме) на подпространстве K_n невязку $r_n = b - Au_n$:

$$v_n = \operatorname{argmin}_v \| r_0 - Av \| .$$

Вместо (2.1) обычно решается система

$$CAu = Cb, \quad (2.2)$$

где C – предобуславливающий оператор, от выбора которого зависит эффективность метода, т.е. число итераций n , необходимое для достижения заданной точности (уменьшения начальной невязки в заданное число раз). Оператор C должен быть близок к A^{-1} и достаточно легко вычислим. В качестве предобуславливателя C мы строим вариант мультигрида, основные детали которого приводятся в п. 5. Аргумент в пользу комбинации мультигрида и метода подпространств Крылова простой: если мультигрид оставляет по каким-то причинам некоторые компоненты невязки большими, то использование его в качестве предобуславливателя может существенно ускорить сходимость крыловских итераций. Действительно, из построения подпространств Крылова вытекает, что если невязка r_0 лежит в подпространстве небольшой размерности n , то за n итераций будет найдено точное решение.

3 Дискретизация

Для эллиптических задач с доминирующим конвективным переносом, а также для систем уравнений Эйлера и Навье-Стокса, обычно используют стабилизированные методы конечных элементов Петрова-Галеркина, SUPG – схемы. Полную формулировку таких аппроксимаций можно найти, например, в [9]. Здесь для простоты приведем постановку дискретной задачи в скалярном случае. Для конкретности возьмем оператор конвекции – диффузии $Lu = -\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + bu_x + cu_y$.

Пусть в ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega$ ищется решение $u(x, y)$ первой краевой задачи для линейного эллиптического уравнения

$$Lu = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

здесь $f(x, y)$ – заданная функция. Предполагаем, что входные данные задачи обеспечивают ее корректность в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$. Дискретизация задачи (3.1) – (3.2) проводится с помощью метода конечных элементов. В качестве проекционных рассматриваются семейства подпространств V_h пространства $H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$; V_h состоит из кусочно-линейных функций на триангуляции T_h , обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Вариационная формулировка дискретной задачи имеет вид: найти $u \in V_h$ такую, что для $\forall v \in V_h$

$$B(u, v) + \sum_t (\tau(Lu - f), \bar{L}v)_{T^t} = (f, v), \quad (3.3)$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $B(\cdot, \cdot)$ – соответствующая билинейная форма, τ – параметр схемы; суммирование проводится по всем ячейкам сетки, а индекс T^t означает, что интеграл вычисляется по ячейке $T^t \in T_h$. В качестве стабилизирующего оператора \bar{L} в SUPG – схеме задается конвективная часть оператора L . Для систем дифференциальных уравнений параметр τ является матрицей, элементы которой в каждой ячейке определяются ее размерами и коэффициентами дифференциальных уравнений в ней. Этот параметр регулирует величину искусственной вязкости, служащую для подавления больших нефизических осцилляций. Пример SUPG – дискретизации для простейшей сетки дан в п.6.

4 Сетка, сеточные функции

Основные понятия об используемых нами сетках можно найти в [5]. Мы рассматриваем двумерный вариант, но возможно обобщение и на трехмерный

случай. Для построения многосеточного метода нам важны следующие факты. Для простоты можно представить, что первоначально расчетная область разбита на подобласти треугольной и четырехугольной формы. В процессе адаптации эти подобласти – макроячейки – триангулируются. Объединение макроячеек называется макросеткой. Стороны макроячеек (макрорребра) являются отрезками прямых (за исключением, может быть, сторон, аппроксимирующих границы исходной расчетной области – такие макрорребра могут быть кусками гладких кривых). В процессе адаптации на макрорребрах появляются дополнительные узлы расчетной сетки. На рис. 1 показаны две четырехугольные макроячейки, их стороны – макрорребра – выделены жирной линией. Расчетная сетка, на которой записывается конечно-элементная схема, состоит из треугольников, и в общем случае может быть сильно анизотропна.

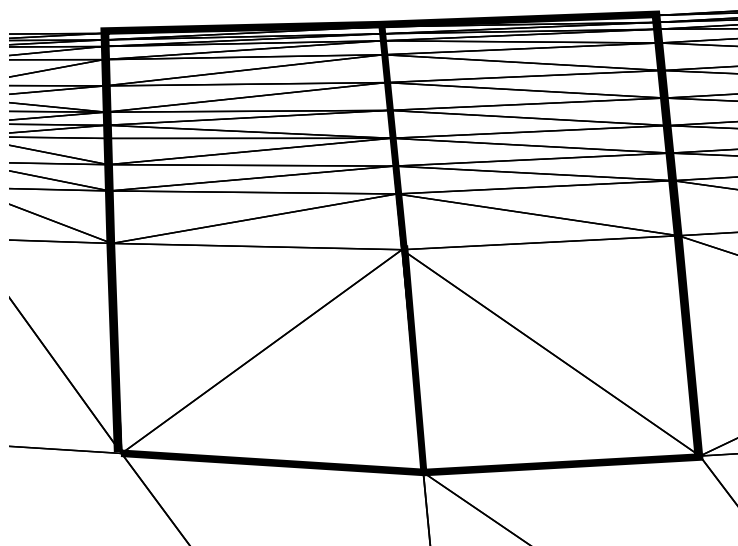


Рис. 1: Фрагмент сетки; жирной линией выделены две макроячейки

Такого вида сетки строятся в процессе многошаговой адаптации и мы считаем, что история их построения нам доступна, т.е. известна сеточная иерархия, используемая нами для построения многосеточного метода.

Функции и вектор-функции, входящие в постановку дифференциальной задачи, заданы в узлах результирующей триангуляции.

5 Многосеточный метод

5.1 Формальное представление метода

Итак, мы строим многосеточный метод, который будет в основном использован в качестве предобуславливателя в методе подпространств Крылова (GMRES) при решении линейных систем (2.1), полученных в процессе линеаризации дискретных уравнений Навье-Стокса или Эйлера.

В многосеточном методе обычно используют несколько уровней, но для изложения достаточно дать его двухсеточное представление, т.е. описать переход с некоторой сетки, называемой подробной, но другую сетку, называемую грубой. Объекты подробной и грубой сеток будем отмечать символами h и H соответственно. Напомним, что узлы грубой сетки составляют подмножество узлов подробной сетки.

В двухсеточном представлении итерирующий оператор Q мультигрида имеет вид

$$Q = S^{\nu_2}(I - PA_H^{-1}RA_h)S^{\nu_1}, \quad (5.1)$$

где A_h и A_H – операторы на подробной и грубой сетках, P и R – операторы интерполирования и сборки, S – сглаживающий оператор, ν_1 и ν_2 – число пре- и пост-сглаживающих итераций.

Многосеточный алгоритм определяет предобуславливающий оператор C формально как

$$C = (I - Q^m)A^{-1}, \quad (5.2)$$

где m – число итераций мультигрида, а Q – итерирующий оператор, возникающий в процессе решения этим методом уравнения $Av_n = r_n$ для поправки; вид оператора Q в двухсеточном представлении дан формулой (5.1).

5.2 Описание сеточных структур: подробный и грубый уровни

Для произвольных неструктурных сеток нет ясного понимания как построить последовательность грубых сеток и операторы на них. В случае адаптивных сеток есть дополнительная информация, которой удобно воспользоваться. Генератор сеток [5] создает в процессе адаптации иерархические многоуровневые структуры, объектами которых является макроячейки и макрорребра. Эти структуры отражают процесс адаптации сеток к решению и геометрии обтекаемого тела, но сами по себе не могут быть рассмотрены как последовательность сеток для многосеточного метода. Мы на основе этих данных формируем новые многоуровневые списки.

Для определения последовательности грубых сеток (сеточных уровней) строится сначала список кандидатов для этой последовательности, занумерованный параметрами $h_i, i = 1, \dots, k$. В этом списке первой сеткой N_{h_1} является

основная расчетная сетка, а последней самой грубой – сетка, узлами которой являются концы макрорубер первого уровня адаптации, т.е. самая первая макросетка N_{h_k} . Промежуточные уровни $N_{h_i}, i = 2, \dots, k - 1$ получаются рекурсивно прореживанием узлов на макроруберах и внутри макроячеек. Построенная таким образом последовательность сеток $N_{h_i}, i = 1, \dots, k$ является вложенной: узлы каждой сетки N_{h_i} являются узлами исходной сетки N_{h_1} . Из этого списка кандидатов выбираем окончательную последовательность сеточных уровней, руководствуясь назначенным числом уровней и законом многократного (например, трех-, четырехкратного) уменьшения числа узлов при переходе к следующему уровню. За выбранной последовательностью оставляем обозначение $N_{h_i}, i = 1, \dots, k$.

Все узлы сетки $N_{h_i}, i < k$ можно разбить на два непересекающихся подмножества узлов M^{edge} и M^{cell} , состоящих соответственно из узлов, лежащих на макроруберах и строго внутри макроячеек данного уровня. Грубая сетка $N_{h_{i+1}}$ сформирована из двух наборов узлов, являющихся подмножествами из M^{edge} и M^{cell} . Для дальнейших объяснений нам удобно представить сеточную функцию на сетке N_{h_i} в виде

$$U = [u_c, u_f^{edge}, u_f^{cell}],$$

где u_c – сеточная функция на грубой сетке, а маркер "f" обозначает узлы подробной сетки N_{h_i} , лежащие на макроруберах (*edge*) и внутри макроячеек (*cell*), но не попавшие на грубую сетку.

Для построения многосеточных операторов на каждой сетке создается новая структура, называемая *макроэлемент* или сокращенно МЭ. Вообще говоря, макроэлемент представляет собой некоторую подобласть сетки $N_{h_i}, i < k$ и спецификацию узлов в этой подобласти. Узлы могут получить маркеры "r", "e" или "c". Такая маркировка определяет способ обработки узла. Маркер c выделяет узлы грубой сетки $N_{h_{i+1}}$, а маркеры r, e представляют узлы подробной сетки N_{h_i} . При этом узлы подробной сетки, которые попали на границу макроэлемента, обозначены как e, а внутренние – как r.

Конкретизируя понятие макроэлемента, введем макроэлементы трех типов ME_A, ME_B, ME_C (см. рис. 2), отвечающие этапам построения грубосеточного оператора. Как правило, макроэлемент ME_B состоит из двух МЭ типа ME_A , а макроэлемент ME_C состоит из макроэлементов типа ME_B , число которых меньше или равно числу ребер, входящих в узел, отмеченный на рис. 2, с значком "o".

Макроэлемент ME_A совпадает с макроячейкой, содержащей внутри себя узлы сетки данного уровня. Внутренние узлы (или их часть) обозначаются как r и отвечающие им неизвестные исключаются точно. Если число m ис-

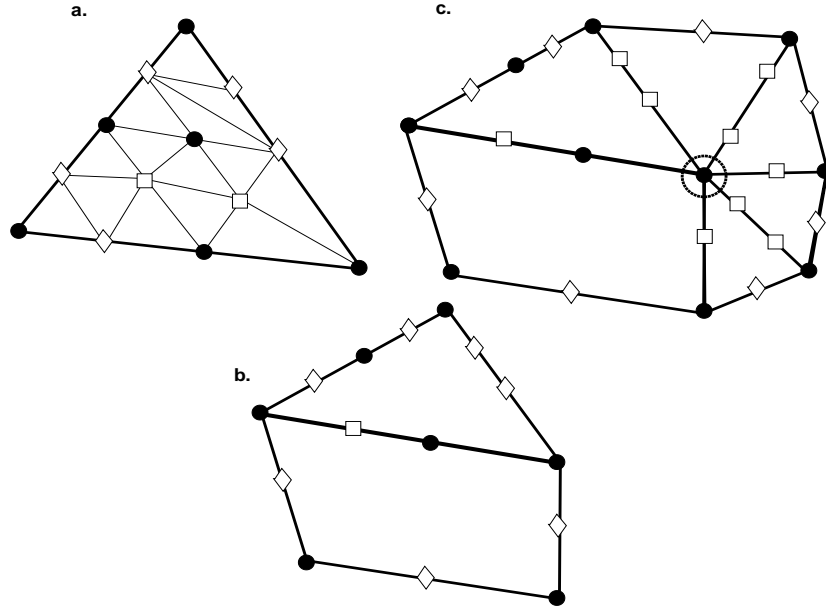


Рис. 2: а. ME_A ; б. ME_B ; в. ME_C ; c -узлы – кружки; r -узлы – квадраты; e -узлы – ромбы.

ключаемых переменных велико, скажем $m > 500$, то точное исключение, требующее обращения $m \times m$ -матрицы, может оказаться дорогим. Тогда точно исключаем часть переменных, остальные переменные относим к c -узлам и можем их исключить на более грубой сетке. Точное исключение означает решение локальной краевой задачи при заданных значениях на границе МЭ и модификацию уравнений, отвечающим как граничным e -узлам МЭ, так и его внутренним c -узлам. Модификация происходит одинаковым образом для всех узлов независимо от спецификации. Такую процедуру называют иногда построением дополнения Шура.

Макроэлемент второго типа ME_B объединяет две макроячейки с общим макрорребром, содержащим хотя бы один внутренний узел и называемым опорным для МЭ. Остальные макрорребра формируют границу МЭ. Если одна или обе макроячейки имеют внутренние узлы, то такие макроячейки получают тип ME_A , и часть дискретных уравнений в них модифицируется. На рис. 2 показано, что макроэлемент ME_B содержит макроэлемент ME_A , но с уже исключенными внутренними узлами. Типичный макроэлемент ME_B показан также на рис. 3. Внутренние переменные, отвечающие узлам на опорном ребре, исключаются с помощью решения локальной краевой задачи при краевых значениях на границе МЭ. Значения в e -узлах на границе МЭ определяются одномерной кусочно-линейной интерполяцией значений u_c вдоль соответствующего макрорребра. В результате таких процедур формируются интерполирующие матрицы W_{rc} и W_{ec} , с помощью которых можно определить переменные в r - и e -узлах по значениям переменных в c -узлах.

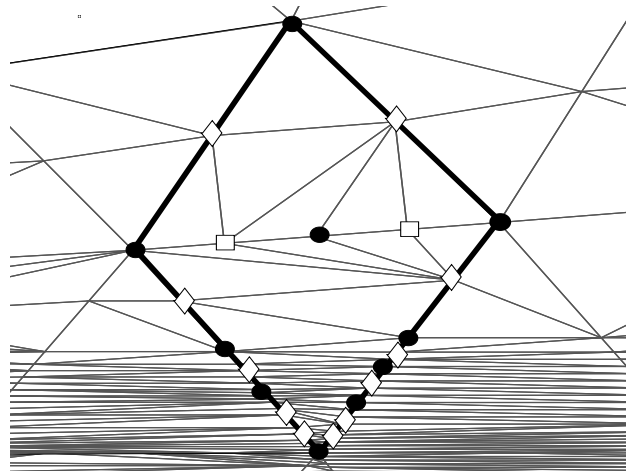


Рис. 3: Макроэлемент ME_B состоит из двух макроячеек; s -узлы – кружки; r -узлы – квадраты, e -узлы – ромбы; жирной линией показана граница МЭ

Макроэлемент ME_C состоит из макроэлементов 1-ого и 2-ого типов, имеющих общую вершину (см. рис. 2, c и рис. 4). Макроэлемент на рис. 2, c – шестиугольник и состоит из 6 макроэлементов ME_B , задаваемых 6 внутренними макроредрами с общим узлом, отмеченным значком "о". В этом узле формируется грубосеточное уравнение в конечно-элементной манере, т.е. суммированием локальных матриц жесткости. При формировании используются интерполирующие матрицы W_{rc} и W_{ec} , связывающие s -переменные грубой сетки с r -и e -переменными подробной сетки соответственно. Такие матрицы составляются из аналогичных матриц, уже построенных при обработке макроэлементов ME_B , входящих в макроэлемент ME_C .

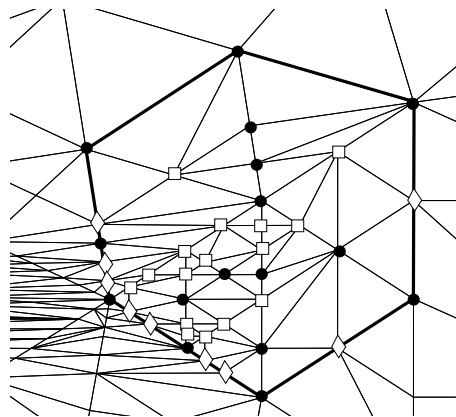


Рис. 4: Макроэлемент ME_C ; жирной линией показана его граница

5.3 Описание грубосеточных операторов

Рассмотрим одну из сеток $N_{h_i}, i < k$, на которой задана система уравнений $Au = b$. Объекты этой системы можно снабдить индексом h_i , но для удобства будем использовать безиндексные обозначения. Построим грубосеточное уравнение вида $A_H \delta_c = b_H$ для определения на грубой сетке $N_{h_{i+1}}$ с $H = h_{i+1}$ коррекции δ_c и операторов интерполирования и сборки. Рассмотрим отдельный макроэлемент на подробной сетке N_{h_i} (см. рис. 5, где еще раз приведена спецификация узлов МЭ).

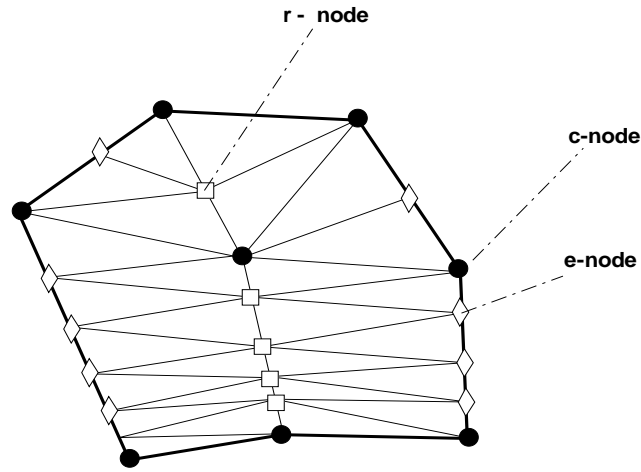


Рис. 5: Спецификация узлов макроэлемента.

Пусть u_m, u_{m+1} – два последовательных приближения к решению линейной системы на этой сетке, $\delta = u_{m+1} - u_m$ – поправка, которую в соответствии с введенной спецификацией узлов в макроэлементе запишем в виде $\delta = [\delta_c, \delta_r, \delta_e]^T$. Для внутренних c - и r -узлов данного МЭ система уравнений относительно δ_c, δ_r может быть представлена в следующем блочном виде:

$$\begin{bmatrix} A_{cc} & A_{cr} & A_{ce} \\ A_{rc} & A_{rr} & A_{re} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_r \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_c \\ g_r \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

где g_c, g_r – компоненты невязки $g = b - Au_k$. Здесь и в дальнейшем $A_{p,q}$ ($p, q = c, r, e$) – соответствующие блоки матрицы A .

В макроэлементах 2-ого типа (т.е. ME_B , см. рис. 2, b и рис. 3) неизвестные δ_r исключаются точно, а неизвестные δ_e – приближенно по формуле

$$\delta_e = W_{ec}^B \delta_c,$$

где интерполирующая матрица W_{ec}^B служит для определения e -переменных по значениям c -переменных в узлах данного МЭ. Эта матрица может быть определена различными способами. Один из простых и используемых в данной работе способ основан на кусочно-линейной интерполяции δ_c -переменных вдоль ребер сетки. После исключения граничных δ_e -переменных получается система уравнений для c -переменных, отвечающих внутренним узлам грубой сетки, попавшим в макроэлемент 2-ого типа:

$$[(A_{cc} - A_{cr}A_{rr}^{-1}A_{rc}) + (A_{ce} - A_{cr}A_{rr}^{-1}A_{re})W_{ec}^B]\delta_c = g_c - A_{cr}A_{rr}^{-1}g_r .$$

В исходной дискретной системе модифицируются уравнения, в шаблон которых входят r -узлы МЭ. Одновременно строятся интерполирующие матрицы W_{rc}^B для исключения r -переменных в макроэлементах 3-его типа:

$$W_{rc}^B = -A_{rr}^{-1}(A_{rc} + A_{re}W_{ec}^B).$$

И, наконец, при обработке МЭ 3-его типа (т.е. ME_C , см. рис. 2, c и рис. 4) неизвестные δ_e для приближенного исключения связываются с неизвестными δ_c аналогичной интерполирующей матрицей W_{ec}^C , а для исключения неизвестных δ_r используются уже подготовленные интерполирующие матрицы W_{rc}^B . В итоге получаем в узле грубой сетки уравнение для определения δ_c :

$$[(A_{cc} + A_{ce}W_{ec}^C) + A_{cr} \sum_{i=1}^{N_{ME_B}} P_{ME_B}^{ME_C} W_{rc}^B]\delta_c = g_c - A_{cr} \sum_{i=1}^{N_{ME_B}} P_{ME_B}^{ME_C} A_{rr}^{-1} g_r .$$

Суммирование проводится по всем макроэлементам 2-ого типа, входящими в рассматриваемый макроэлемент ME_C . Оператор $P_{ME_B}^{ME_C}$ трансформирует интерполирующую матрицу W_{rc}^B в интерполирующую матрицу типа W_{rc}^C , т.е. переводит матрицу W_{rc}^B из локальной нумерации МЭ ME_B в нумерацию макроэлемента ME_C . Приведенные выше операторы определены на шаблонах, ассоциированных с каждым МЭ. Уравнения на всей грубой сетке формируются сборкой по всем МЭ в области и имеют вид

$$A_H \delta_c = g_H .$$

С помощью операторов интерполирования P и сборки R можно записать оператор A_H на грубой сетке в виде

$$A_H = R A_h P, \tag{5.4}$$

т.е. уравнения на грубой сетке формируются с помощью процедуры, называемой в многосеточном методе галеркинской. Конструкции операторов P и R приведены в пп. 5.4 и 5.5.

5.4 Оператор интерполирования $P : u \longrightarrow U$

Итак, сеточная функция на подробном уровне $U = [u_c, u_f^{edge}, u_f^{cell}]^T$ состоит из вектора неизвестных на грубой сетке $u \equiv u_c$ и набора значений, принадлежащих исключительно подробному уровню.

Оператор интерполирования является композицией трех операторов:

$$P = P_{ME_A} \cdot P_{ME_B} \cdot P_C.$$

Сначала функция u_c тождественно проектируется в соответствующие точки подробного уровня: $P_C = [I, 0, 0]^T$.

Во время обработки макроэлементов ME_B находится функция u^{edge} в узлах, лежащих на макрорёбрах. Эта процедура использует линейную интерполяцию вдоль граничных ребер макроэлемента и решение локальной краевой задачи внутри МЭ. Поэтому

$$P_{ME_B} = \sum_{i=1}^{N_{ME_B}} Q_{ME_B}^U P_{ME_B}^{(i)} Q_U^{ME_B}.$$

Оператор $Q_U^{ME_B} : U \rightarrow (u_c, u_r, u_e)^T$ проектирует сеточную функцию U на шаблон ME_B , и оператор обратного проектирования ему сопряжен:

$$Q_{ME_B}^U = [Q_U^{ME_B}]^*.$$

Локальный оператор интерполирования отображает переменные на грубой сетке в e -, r - переменные на подробной сетке и имеет вид:

$$P_{ME_B}^{(i)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -A_{rr}^{-1}(A_{rc} + A_{re}W_{ec}^B) & 0 & 0 \\ W_{ec}^B & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

здесь W_{ec}^B – интерполирующая матрица, построенная с помощью кусочно-линейной интерполяции грубосеточных переменных в переменные на подробной сетке вдоль границы ME_B . Таким образом обеспечивается приближенное исключение e -переменных.

При обработке макроэлементов ME_A функция u во всех граничных узлах макроэлемента ME_A известна, а в узлах внутри макроэлемента ME_A она определяется из решения краевой задачи с заданными краевыми условиями. В операторной форме эту процедуру можно записать как

$$P_{ME_A} = \sum_{i=1}^{N_{ME_A}} Q_{ME_A}^U P_{ME_A}^{(i)} Q_U^{ME_A}.$$

Действие операторов $Q_{ME_A}^U$ и $Q_U^{ME_A}$ аналогично действию операторов $Q_{ME_B}^U$ и $Q_U^{ME_B}$, приведенных выше, и

$$P_{ME_A}^{(i)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -A_{rr}^{-1}A_{rc} & 0 & -A_{rr}^{-1}A_{re} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Теперь оператор интерполирования полностью определен.

5.5 Оператор сборки $R : U \rightarrow u$

Здесь, как и прежде в п. 5.4, U и u – сеточные функции на подробной и грубой сетках. Оператор сборки R является композитным:

$$R = R_C \cdot R_{ME_B} \cdot R_{ME_A}.$$

При обработки макроэлементов ME_A переменные в узлах подробной сетки внутри МЭ исключаются точно, поэтому можно записать

$$R_{ME_A} = \sum_{i=1}^{N_{ME_B}} Q_{ME_A}^U R_{ME_A}^{(i)} Q_U^{ME_A},$$

$$R_{ME_A}^{(i)} = \begin{bmatrix} I & -A_{cr}A_{rr}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где A_{cr} , A_{rr} – блоки матрицы A , относящиеся к макроэлементу ME_A .

Обработка всех макроэлементов ME_B дает возможность исключить выбранные переменные подробной сетки, лежащие внутри макроребра, т.е.

$$R_{ME_B} = \sum_{i=1}^{N_{ME_B}} Q_{ME_B}^U R_{ME_B}^{(i)} Q_U^{ME_B},$$

$$R_{ME_B}^{(i)} = \begin{bmatrix} I & -A_{cr}A_{rr}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где матрицы A_{cr} и A_{rr} связаны с макроэлементом ME_B .

Оператор $R_C = [I; 0; 0]$ проектирует функцию на подробной сетке $U = [u_c, u_f^{edge}, u_f^{cell}]^T$ на грубый уровень тождественным переносом сеточных значений: $u = u_c$.

5.6 Сглаживатель

Грубосеточная коррекция не подавляет высокочастотные моды ошибки. Поэтому, как и положено в многосеточном методе, дополнительно используется сглаживающая процедура. Для перехода на более грубую сетку нужно на текущей подробной сетке обеспечить достаточную гладкость невязки, т.е. погасить ее высокочастотные компоненты. Будем использовать в качестве сглаживающей процедуры несколько различных методов. Основным будет известный метод Шварца на системе перекрывающихся подобластей. Процедуру сглаживания, т.е. переход от текущего итерационного приближения u_k к более "гладкому" \bar{u}_k , можно записать с помощью оператора сглаживания S_h , который текущую ошибку $\varepsilon_0 = u_k - u$ за μ шагов сглаживания преобразует в ошибку $\varepsilon_1 = \bar{u}_k - u : \varepsilon_1 = S_h^\mu \varepsilon_0$. Конкретный вид оператора S_h не важен, но сглаживание должно дополнять грубосеточную коррекцию. Это значит [12] (для двухсеточного представления, см. п. 5.1), что при выполнении условия аппроксимации

$$\| A_h^{-1} - PA_H^{-1}R \| \leq Ch^\delta, \quad \delta > 0 \quad (5.5)$$

(в подходящей норме), должно быть выполнено условие сглаживания

$$\| A_h S_h^\mu \| \leq o(\mu)h^{-\delta}, \quad \text{где } o(\mu) \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow \infty.$$

Проверка этих условий для неструктурных сеток практически невозможна, поэтому мы в основном опираемся на численные эксперименты. В качестве примеров аналитического исследования в п. 6 приводятся результаты оценки качества грубосеточной дискретизации на модельных задачах на однородных треугольных сетках.

5.7 Алгоритм

Пусть на основной сетке задано итерационное приближение u_m . Переход к новой итерации u_{m+1} происходит в три этапа.

1. Сглаживание невязки до коррекции:

по u_m находим \bar{u}_m с помощью $\mu_1 \geq 0$ шагов сглаживающей процедуры S .

2. Грубосеточная коррекция:

вычисляем невязку $\bar{g} = b - A\bar{u}_m$;

находим с помощью оператора сборки R невязку \bar{g}_c на грубой сетке;

решаем систему уравнений для поправки $\bar{\delta}_c$ на грубой сетке;

находим поправку $\bar{\delta}$ на основной сетке интерполяцией $\bar{\delta}_c$ с грубой сетки;

проводим коррекцию: $\tilde{u}_m = \bar{u}_m + \bar{\delta}$.

3. Сглаживание невязки после коррекции: по \tilde{u}_m вычисляем u_{m+1} с помощью $\mu_2 \geq 0$ шагов сглаживающей процедуры S .

Здесь записан алгоритм для двухсеточного представления. Если сеток несколько, то решения уравнения для поправки проводится по вышеприведенному алгоритму с использованием следующей пары сеток.

Переход от начального приближения u_0 к u_m можно записать в виде

$$u_m = Q^m u_0 + (I - Q^m) A^{-1} b, \quad (5.6)$$

где итерирующий оператор Q имеет вид (5.1).

6 Примеры построения грубосеточных операторов

Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии

$$-\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + bu_x + cu_y = f \quad (6.1)$$

и его важный частный случай

$$-\varepsilon u_{yy} + bu_x + cu_y = f \quad (6.2)$$

в квадрате $[0, 1]^2$ с заданными краевыми условиями, коэффициентами ε , b c и правой частью f .

Уравнение (6.2) есть линейаризация уравнения для горизонтальной компоненты скорости в модели пограничного слоя Прандтля [11].

Для простоты возьмем квадратную сетку с шагом h и разобьем каждую ее ячейку диагональю, проведенной из левого верхнего угла в правый нижний. Получим треугольную сетку, состоящую из одинаковых прямоугольных треугольников. Запишем SUPG-дискретизацию уравнения (6.1) во внутреннем узле треугольной сетки в шаблонном представлении.

Для упрощения записи ограничимся постоянными ε , b c и f , положив для определенности $b \leq 0$, $c = 0$. При таком выборе знака b SUPG-дискретизация близка к противопотоковой схеме и имеет вид:

$$\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} U + \frac{bh}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U = fh^2.$$

Наряду с этой сеткой введем грубую сетку с шагом $H = 2h$, полученную укрупнением исходной сетки, см. рис. 6.

Рассмотрим в данном простом случае различные алгоритмы грубосеточных дискретизаций уравнения (6.1) на основе галеркинской процедурой (5.4).

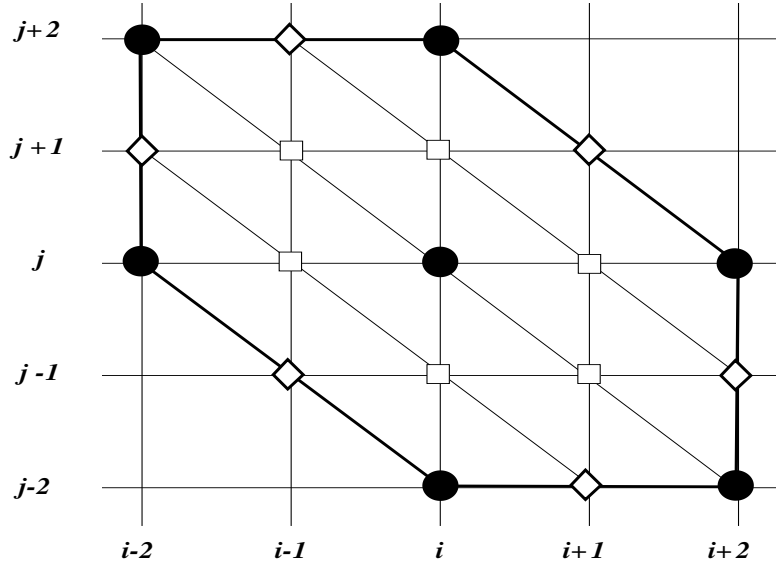


Рис. 6: Узлы грубой сетки (кружки) - c ; узлы подробной сетки внутри макроэлемента (квадратики) - r ; узлы подробной сетки на границе макроэлемента (ромбы) - e

Эти алгоритмы изучены экспериментально, а ниже представлены результаты для основных вариантов, назовем их ASA0, ASA2, ASA1 (именно в таком порядке).

Алгоритм ASA0. Он основан на исключении неизвестных линейной интерполяцией по ребрам грубой сетки и точен на линейных функциях, т.е., если линейная функция является решением задачи, то грубосеточная коррекция такое решение воспроизводит точно. Предполагается, что сглаживание отсутствует, начальное приближение на подробной сетке нулевое, а уравнения на грубой сетке решаются точно. Дискретизация уравнения (6.1) на грубой сетке, полученная при применении алгоритма ASA0, имеет вид:

$$2\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} U + \frac{bH}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U = fH^2, \quad (6.3)$$

то есть является аппроксимацией на грубой сетке уравнения

$$-2\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + bu_x = f,$$

а не исходного уравнения (6.1). Этот же неприятный факт справедлив и для уравнения (6.2). Алгоритм ASA0 представляет собой галеркинскую процедуру (5.4) формирования уравнений на грубой сетке, когда оператор P определен вышеуказанной линейной интерполяцией, а оператор сборки R , как следует из вида правой части уравнения (6.3), есть тождественное отобра-

жение, т.е. значение сеточной функции в узел грубой сетки тождественно переносится из этого же узла подробной сетки.

Напомним [12], что *порядок* m^j *оператора интерполирования* P равен $k+1$, если интерполяция точна на полиномах степени k ; *порядок* m_i *оператора сборки* R равен порядку сопряженного оператора R^* . Для обеспечения условия аппроксимации (5.5) для дифференциального оператора порядка m необходимо

$$m_i + m^j > m. \quad (6.4)$$

Для алгоритма ASA0 порядки операторов $m^j = 2$ и $m_i = 0$, и, следовательно, неравенство (6.4) не выполняется для дифференциальных уравнений второго порядка (6.1) и (6.2) при $\epsilon > 0$.

Отметим, что уравнение чистой конвекции $bu_x + cu_y = f$ аппроксимируется правильно.

Алгоритм ASA2. Ориентируясь на задачи с вязкостью, рассмотрим сначала некоторые грубосеточные аппроксимации уравнения Пуассона, т.е. уравнения (6.1) при $b, c = 0$ и $\epsilon = 1$. Изложенный в п. 5 способ построения многосеточных операторов появился не сразу. Первым был вариант, назовем его здесь ASA2, точный на квадратичных функциях. Отметим достоинства и недостатки этого алгоритма. Макроэлемент в данном случае (см. рис. 6) – шестиугольник, граница которого выделена жирной линией. В нем сначала проводится точное исключение внутренних неизвестных, отвечающим узлом подробной сетки внутри макроэлемента (квадратики на рис. 6, r –переменные). Такое исключение требует вычисления обратной матрицы, размер которой определяется числом r –неизвестных, в данном случае – 6. Точное исключение приводит к разностному уравнению, связывающему центральный узел с узлами на границе макроэлемента. Это уравнение, конечно, аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью $O(h^2)$. Для приближенного исключения неизвестных, отвечающих e –узлам, лежащим на границе макроэлемента, построим аппроксимирующий многочлен второй степени по системе функций $1, x, y, xy, x^2, y^2$, опираясь на значения функции в c –узлах. Число неизвестных коэффициентов – 6, число грубых узлов – 7, поэтому строим многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения. В качестве примера приведем вид интерполяционной формулы в e –узлы $(i+1, j+1)$ и $(i-2, j+1)$ соответственно:

$$u_{i+1, j+1} = \frac{4u_{i+2, j} + 4u_{i, j+2} + 2u_{i, j} - u_{i-2, j+2} - u_{i+2, j-2}}{8},$$

$$u_{i-2, j+1} = \frac{4u_{i-2, j} + 4u_{i-2, j+2} + 2u_{i, j} - u_{i, j+2} - u_{i, j-2}}{8}.$$

Несмотря на то, что в каждой такой интерполяции участвует по 5 узлов 7-точечного шаблона грубой сетки, после исключения неизвестных, отвечающих e -узлам, получаем 5-точечное уравнение

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0.2125 & 0 \\ 0.2125 & -0.85 & 0.2125 \\ 0 & 0.2125 & 0 \end{bmatrix} U = 0.85fh^2,$$

которое после умножения на $4./0.85$ приводится к стандартной 5-точечной аппроксимации уравнения Пуассона на грубой сетке с шагом $2h$.

Этот же подход в случае уравнения (6.1) в отсутствии вязкости ($\varepsilon = 0$) при $b = -1$ приводит к грубосеточному уравнению

$$-201u_{i,j} + 207u_{i+2,j} - 6u_{i-2,j} + 3(u_{i,j+2} - u_{i-2,j+2} + u_{i+2,j-2} - u_{i,j-2}) = 440fh.$$

Данное уравнение и другие подобные формулы получены с помощью программы, написанной на MAPLE. Вычисления велись с точностью до 8 значащих цифр, затем после умножения на 200 все коэффициенты округлены до целых чисел. В шаблонном представлении это разностное уравнение имеет вид

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -6 & -201 & 207 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} U = 440fh,$$

Видно, что дискретизация близка к обычной противопотоковой схеме. С помощью той же MAPLE-программы убеждаемся, что это разностное уравнение аппроксимирует уравнение $bu_x = f$, ($b = -1$) с локальной погрешностью $O(h)$. Такой вывод справедлив и для общего уравнения (6.1).

Если строить в макроэлементе линейный многочлен вида $a_0 + a_1x + a_2y$ наилучшего среднеквадратичного приближения по тем же 7 узлам грубой сетки, то получаемое грубосеточное разностное уравнение аппроксимирует не исходное уравнение Пуассона, а уравнение

$$-1.09(u_{xx} + u_{yy}) + 0.69u_{xy} = 0.85f$$

со смешанной производной.

При применении билинейного восполнения по базису $\{1, x, y, xy\}$ получаем 5-точечную разностную схему для уравнения Пуассона $-0.88\Delta u = 0.85f$.

Мы также проверили и более простую интерполяцию: для приближенного исключения неизвестных, отвечающим e -узлам, лежащим на границе макроэлемента, можно использовать линейную интерполяцию вдоль границы – в данном случае значение в e -узле определяется как полусумма значений в конечных узлах ребра. Это приводит к грубосеточному уравнению, аппроксимирующему уравнение со смешанной производной

$$-1.1(u_{xx} + u_{yy}) + 0.40u_{xy} = 0.85f .$$

Интересно отметить, что, тем не менее, уравнение (6.2) аппроксимируется на грубой сетке с точностью $O(h)$.

Следовательно, грубосеточный оператор ASA2, основанный на точном исключении неизвестных внутри макроэлемента и приближенном исключении e -неизвестных с помощью квадратичной интерполяции, является наилучшим из рассмотренных по своим аппроксимационным свойствам. Но этот оператор требует и наибольшего объема вычислений, причем из-за перекрытия шаблонов грубосеточных уравнений обработка внутренних узлов неизбежно многократна. Например, каждая макроячейка обрабатывается трижды, так как входит в шаблоны трех грубосеточных уравнений. Заметим, в результате адаптации сетки могут возникнуть сотни макроячеек с большим числом (например, $n \approx 200$ и более) внутренних узлов. Вклад таких макроячеек в вычислительные затраты заметен даже на быстрых процессорах, так как число арифметических операций пропорционально n^3 . Замечание о многократности обработки касается и r -узлов, лежащих на внутренних ребрах, так как каждое такое ребро входит в шаблоны 4-х грубосеточных уравнений.

Для того, чтобы избежать многократной обработки узлов и уменьшить вычислительную работу, мы строим новый метод ASA1, приведенный в пп. 5.2 – 5.5. Для уравнения Пуассона этот метод дает на грубой сетке 7-точечную схему

$$\begin{bmatrix} -0.5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} U = fH^2,$$

не аппроксимирующую исходное уравнение. Точно также для конвекции-диффузии (6.1) на грубой сетке получаем аппроксимацию другого уравнения

$$-\varepsilon(1.5u_{xx} + 1.5u_{yy} - u_{xy}) + bu_x = f.$$

Однако, в отличие от самого простейшего варианта ASA0, уравнение (6.2) аппроксимируется с точностью $O(h)$. Заметим, что для уравнение конвекции (6.2) ($b < 0$) в отсутствие вязкости на грубой сетке получается двухточечная противопотоковая схема

$$b \frac{u_{i+2,j} - u_{i,j}}{2h} = f.$$

Для уравнения конвекции при $b < 0$, $c < 0$ схема имеет вид

$$b \frac{u_{i+2,j} - u_{i,j}}{2h} + c \frac{u_{i,j+2} - u_{i,j}}{2h} = f,$$

т.е. грубосеточная аппроксимация конечно-элементной схемы SUPG есть простейшая разностная противопотоковая схема.

Приведенные соображения служат объяснением выбора алгоритма ASA1 для экспериментальной проверки в качестве основного варианта.

7 Численные эксперименты

7.1 Общие замечания

Системы нелинейных уравнений Эйлера и Навье-Стокса решаются установлением по времени с помощью алгоритма [7]. Стационарное состояние считается достигнутым, если норма начальной невязки нелинейных дискретных уравнений уменьшается в заданное число $1/tol$ раз. В приводимых расчетах $tol = 10^{-11}$. Шаги по времени выбираются так, что число Куранта в процессе счета постепенно увеличивается от $\simeq 1$ до 10^9 . Нестационарная задача аппроксимируется на сетке двухслойной нелинейной неявной схемой с помощью стабилизированного метода конечных элементов SUPG. На каждом шаге по времени выполняется одна или несколько ньютоновских итераций. Система линейных уравнений, полученная в результате линеаризации, решается итерационным методом подпространств Крылова GMRES до достижения заданной относительной точности $rtol \approx 10^{-3} - 10^{-5}$, т.е. итерации заканчиваются при условии $r_m/r_0 < rtol$, где r_m, r_0 – норма невязки системы линейных уравнений на m -той и начальной итерации соответственно.

Рассмотрим группу примеров для демонстрации возможностей многосеточного алгоритма. Напомним, что для кратности мы называем это алгоритм как ASA, а его разновидности – ASA0, ASA1 и т.п. Сравним эти методы с другими предобуславливателями, а именно, ASM1 и ASM2. Оба последних алгоритма являются реализациями метода Шварца и основаны на декомпозиции расчетной области на подобласти по числу занятых в расчете процессоров. Каждая подобласть дополняется набором прилегающих ячеек (ASM1) или макроячеек (ASM2). Поэтому перекрытия в методе ASM2 больше, чем в ASM1. Метод ASM1 назовем стандартным предобуславливателем для GMRES, он применяется только на основной сетке. Метод ASM2 используются в многосеточном методе в качестве сглаживателя на основном и всех последующих сеточных уровнях, исключая самую грубую сетку. На грубой сетке система дискретных уравнений решается с достаточно большой точностью методом GMRES с предобуславливателем ASM2. На всех сеточных уровнях ASM2 использует сеточные подобласти, индуцированные исходной декомпозицией.

Так как в разных случаях применения GMRES используются разные предобуславливатели и уравнения решаются с разной точностью, то будем использовать обозначение GMRES(PC, $rtol$) с параметрами PC, $rtol$. Это означает, что GMRES применяется с предобуславливателем PC и относительная точность решения равна $rtol$.

Предлагаемый алгоритм ASA можно рассматривать не только как предо-

буславливатель, но в некоторых не самых сложных задачах как самостоятельный метод решения дискретных уравнений, "решатель". В самом деле, метод ASA определен оператором $C = (I - Q^m)A^{-1}$, где Q – итерирующий оператор метода. Если матрица A не является "плохой", можно надеяться, что метод ASA сходится, и после m итераций мы получим $C \approx A^{-1}$. Поэтому точность расчета в методе ASA определяется двумя параметрами: относительной точностью $rtol$ невязки при решении системы линейных уравнений и максимальным числом итераций $maxiter$. Например, даже небольшое число $maxiter = 10$ может обеспечить приближение к точному решению с погрешностью $rtol \approx 10^{-5}$, т.е. метод может рассматриваться как "решатель", а выбор $maxiter = 1$ удачен для использования метода ASA как "простого" предобуславливателя.

7.2 NASA0012: ламинарное обтекание

Рассмотрим известный тест NASA0012 о расчете ламинарного обтекания профиля с параметрами набегающего потока $Re = 5000$, $M = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$. Решается система уравнений Навье-Стокса на небольшой сетке для того, чтобы продемонстрировать некоторые детали многосеточного метода. Начальная сетка содержит 373 узлов. После 10 шагов адаптации получена сетка с 4902 узлами. Используя информацию об адаптации, можно построить 10 сеточных уровней (см. табл. 1), которые являются кандидатами для формирования последовательности вложенных сеток.

Используя этот набор кандидатов, мы формируем многоуровневые макроэлементные структуры с помощью которых строится набор грубых сеток и записываются многосеточные операторы. В частности, в данном случае разумно построить мультигрид на трех сетках ($ASA_Levs=3$) или даже двух сетках ($ASA_Levs=2$), что обеспечивается построением соответствующих макроэлементных структур. Позже мы сравним, какой из вариантов окажется эффективнее.

Сначала будем использовать мультигрид ASA как очень точный предобуславливатель, практически обеспечивающий вычисление приближенного решения с заданной точностью. Зададимся следующими значениями входных параметров: относительная точность ASA – $rtol = 10^{-5}$, максимальное число ASA-итераций – $maxiter = 10$. На каждом шаге мультигрида делается по одному шагу пре- и пост-сглаживания с помощью алгоритма ASM2. Уравнения на самой грубой сетке решаются с помощью GMRES (ASM2, 10^{-10}). Для сравнения мы также приводим результат без многосеточного ускорения, когда уравнения на самой подробной сетке решаются с помощью GMRES (ASM1, 10^{-5}).

Табл. 1. Геометрическая информация и выбор грубых уровней

Адаптация		ASA_Levs=3	ASA_Levs=2
№ уровня	число узлов	число узлов	число узлов
1	4902	4902	4902
2	2492	-	-
3	1596	1596	-
4	1052	-	-
5	739	-	-
6	528	-	-
7	481	-	-
8	464	-	-
9	462	-	-
10	373	373	373

В табл. 2 приведено среднее число GMRES - итераций, затраченных на каждой ньютоновской итерации при решении уравнений Навье-Стокса установлением по времени до достижения заданного уменьшения нормы невязки. Можно видеть, что ASA действует практически как точный решатель. Действительно, при точном предобуславливателе $C = A^{-1}$ минимальное число итераций GMRES на каждом ньютоновском шаге равно 2, а ASA тратит 2 или 3 итерации. Заметим, что трехуровневый мультигрид ASA_Levs=3 немного лучше, чем двухуровневый метод ASA_Levs=2, и оба варианта ASA лучше ускоряют сходимость GMRES по сравнению с ASM1.

Табл. 2. Среднее число GMRES-итераций

Число процессоров	ASM1	ASA_Levs=2	ASA_Levs=3
2	17	2.5	2.4
4	20	2.7	2.5
8	25	2.7	2.7
16	30	2.7	2.7
32	43	2.9	2.9
64	56	3.3	2.9

7.3 MCD 1: трехэлементный профиль, турбулентное обтекание

В этом расчете решаются уравнения Навье-Стокса с турбулентной моделью Спаларта-Аллмараса с параметрами набегающего потока $Re = 9 \cdot 10^6$, $M = 0.2$, $\alpha = 10^\circ$. Цель этого расчета – показать как работает предобуславливатель ASA в середине нелинейного процесса, когда идет перестройка режимов обтекания. Течение еще не установилось, но шаг по времени уже достаточно

большой: CFL=2000, невязка нелинейных уравнений $\simeq 4 \cdot 10^{-5}$. Полученное приближенное решение используется в качестве начального и делается два ньютоновских шага.

Мы строим три сетки: уровень 1 (26017 узлов), уровень 2 (9552 узлов), уровень 3 (2051 узлов). Системы дискретных уравнений решаются с помощью GMRES ($rtol = 10^{-5}$) с различными предобуславливателями ASM1, ASM2, ASA_Levs=3. Алгоритм ASA действует как предобуславливатель: задана одна итерация, т.е. $maxiter = 1$, и используется один пре- и один пост-сглаживающий шаг (алгоритм ASM2). Уравнения на самой грубой сетке решаются с помощью GMRES(ASM 2, 10^{-7}).

Табл. 3. Среднее число GMRES-итераций

Число процессоров	ASM1	ASM2	ASA_Levs 3
4	33	25	7
8	40	30	9
16	50	35	9
32	70	50	13
48	84	64	14

В табл. 3 показано среднее число GMRES-итераций, затраченных на двух ньютоновских шагах. Видим, что предобуславливающие свойства ASA лучше, чем ASM1 или ASM2. Отметим, что по вычислительным затратам алгоритм ASM1 самый экономный, ASM2 – более затратный, так как использует систему подобластей с большим перекрытием (а в каждой подобласти соответствующая подсистема линейных уравнений решается LU-факторизацией). Алгоритм ASA требует на каждой своей итерации двукратного применения алгоритма ASM2, решения уравнений на самой грубой сетки, выполнения операций интерполирования и сборки, т.е. он очень затратный. Но это алгоритм разрабатывается на перспективу – при большом числе процессоров предобуславливатели типа метода Шварца ASM деградируют и интуитивно ясно, что обеспечить быструю передачу влияния удаленных точек может только грубосеточная коррекция. Важно также, что в принципе многосеточный алгоритм ASA может действовать как "точный решатель" при задании большого числа многосеточных итераций.

7.4 MCD 2: трехэлементный профиль, турбулентное обтекание

Мы рассмотрим как работает многосеточный алгоритм в полном нелинейном процессе при решении уравнений Навье-Стокса с турбулентностью и параметрами набегающего потока $Re = 9 \cdot 10^6$, $M = 0.2$, $\alpha = 10^\circ$. Используя историю

адаптации, строим три сеточных уровня: уровень 1 – 7002 узла, уровень 2 – 3588 узлов, уровень 3 – 2051 узел.

Решатель на основной сетке – GMRES ($rtol = 10^{-5}$). Изучаются три предобуславливателя: ASM1, ASM2 (10), ASA. В многосеточном предобуславливателе ASA система уравнений на самой грубой сетке решаются методом GMRES (ASM2, 10^{-7}), точность расчета векторов Крылова $rtol = 10^{-5}$ и $maxiter = 10$. Выполняется один пре- и пост-сглаживающий шаг с помощью алгоритма ASM2. В этом расчете алгоритм ASM2 (10) означает применение ASM2 итерационно до достижения точности, но не более 10 раз на каждой GMRES-итерации при точности расчета векторов Крылова $rtol = 10^{-5}$.

Табл. 4. Среднее число GMRES-итераций

Число процессоров	ASM1	ASM2(≤ 10)	ASA
4	16	3.9	2
8	19	3.7	2.2
16	26	4.5	2.4
32	36	5.3	2.4
64	46	6.5	2.6

В табл. 4 приведено среднее число GMRES-итераций на одном нелинейном шаге. Можно видеть, что алгоритм ASA действует практически как точный решатель и его предобуславливающие свойства лучше, чем ASM1 и ASM2(10). В этой задаче предобуславливатель ASM2 (основанный на методе Шварца) действует практически как точный решатель, благодаря большим перекрытиям подобластей. Но скорость сходимости методов различна, например, для 64 процессорах средняя скорость сходимости ASA и ASM 2(10) составляет 0.012 and 0.17 соответственно.

7.5 MCD 3: трехэлементный профиль, невязкое обтекание

Этот тест искусственный и специально сделан для обеспечения сравнения метода ASA с другими. В этой задаче решаются уравнения Эйлера. Из начальной сетки, состоящей из 2051 узла, однородным измельчением получены две сетки. Каждая треугольная ячейка делилась изотропно на 4 треугольника, и такое деление повторялось еще раз. В результате такой искусственной адаптации получено три сетки: уровень 1 – 31250 узлов (рис. 7), уровень 2 – 7678 узлов, уровень 3 – 2051 узлов (рис. 8). Если использовать двухуровневый вариант мультигрида с заданием двух соседних сеток, то макроэлементы не будут содержать внутренних узлов, и не будет внутренних неизвестных, исключаемых точно. Тем самым метод ASA лишается преимуществ, связанных

с точным исключением неизвестных. Эта случай воспроизводит ситуацию, рассмотренную в п. 6 при аналитическом изучении различных способов построения многосеточных операторов. Мы ограничимся сравнением двух алгоритмов из п. 6 – ASA0 и ASA1 на одном шаге решения нелинейных уравнений, когда решение еще не установилось (CFL = 1410, норма невязки нелинейных уравнений примерно $\simeq 3 \cdot 10^{-4}$).

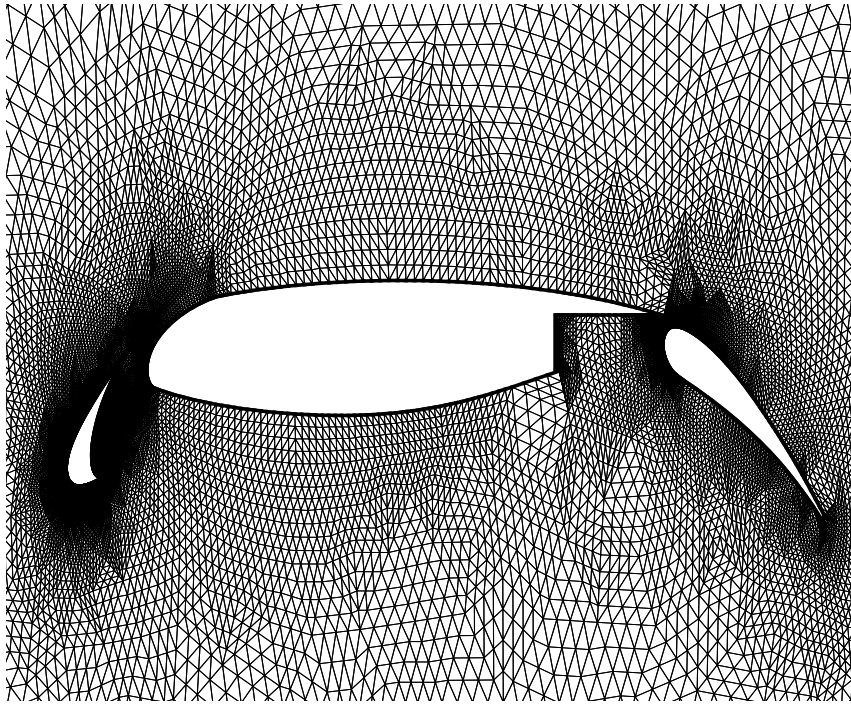


Рис. 7: Фрагмент самой подробной сетки 1

На подробном уровне точность метода GMRES $rtol = 10^{-3}$. Сравнивались три предобуславливателя: ASM1, ASA0, ASA1. Для каждого из двух многосеточных алгоритмов ASA взято $maxiter = 1$ и на грубой сетке использовался GMRES (ASM2, 10^{-7}). Выполнялся один пре- и пост-сглаживающий шаг с помощью алгоритма ASM2.

Напомним, что ASA1 основан на точном исключении r -неизвестных (в этом тесте они есть только для трехуровневого случая) внутри макроэлементов типа ME_A (см. рис. 2, а) и приближенном исключении r -неизвестных внутри МЭ типа ME_B (рис. 2, б) решением локальной дискретной краевой задачи при заданных значениях s -переменных, и значениях e -переменных на границе МЭ типа ME_B , полученных одномерной линейной интерполяцией s -переменных. Алгоритм ASA0 основан на линейной интерполяции s -переменных на каж-

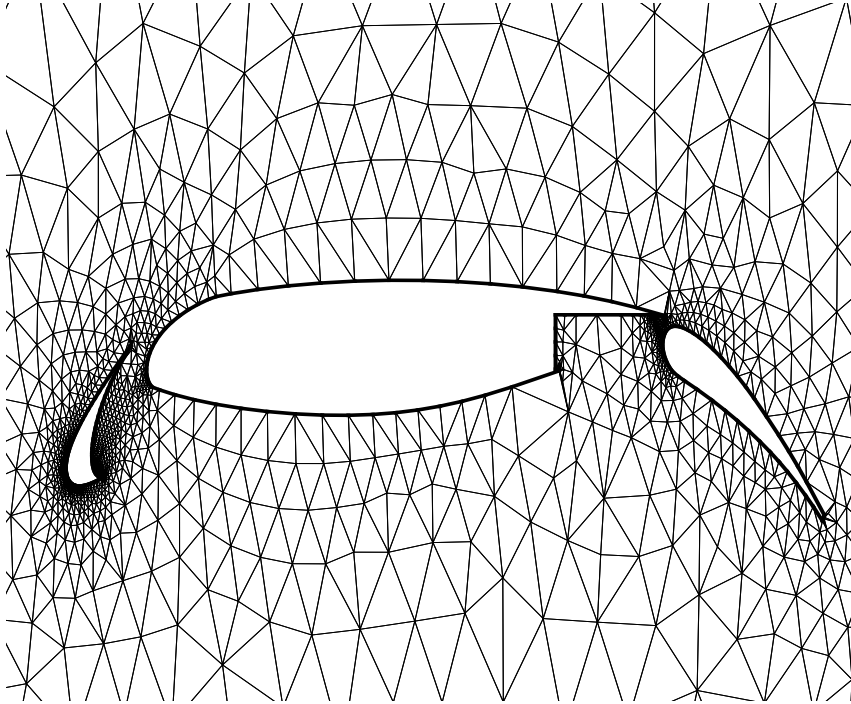


Рис. 8: Фрагмент самой грубой сетки 3

дом ребре, включая внутренние, т.е. в галеркинской процедуре (5.4) оператор пролонгирования P есть линейная интерполяция, а оператор сборки R есть тождественное отображение. Из табл. 5 видно, что ASA1 – лучший предобуславливатель из представленных. Оба многосеточных предобуславливателя используются в двухуровневом случае (уровни 1 и 2) и трехуровневом случае, $Levs = 2$ и $Levs = 3$. Видно, что число итераций GMRES слабо растет с ростом числа подобластей. Метод ASA1 улучшает сходимость GMRES. Объясним, почему для данного случая скорость сходимости практически не зависит от числа уровней в отличие от случая, приведенного в п. 7.2. Трехуровневый вариант из табл. 5 является по отношению к двухуровневому варианту добавлением более грубой сетки, тогда как в п. 7.2 самая грубая и самая подробная сетка фиксировались, а для трехуровневого варианта добавлялся промежуточный уровень.

Табл. 5. Число итераций GMRES

Число процессоров	ASM 1	ASA1		ASA0	
		Levs=2	Levs =3	Levs=2	Levs=3
4	25	6	6	9	12
8	32	11	10	15	22
16	35	9	9	14	22
32	67	13	13	33	52
64	77	19	21	48	607

8 Заключение

Построен многосеточный алгоритм для неструктурных сеток, основанный на специальной обработке сеточных структур, используемых для адаптации сетки. Алгоритм позволяет генерировать последовательность грубых сеток и соответствующих грубосеточных операторов. Расчеты подтверждают, что многосеточный метод ускоряет сходимости метода подпространств Крылова GMRES при решении дискретных аппроксимаций уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

Естественным продолжением работы является разработка похожих подходов на произвольных неструктурных сетках без использования дополнительной информации о геометрической иерархии адаптационного процесса. В этом случае грубосеточную коррекцию естественно строить в дополнение к методам декомпозиции области, причем использовать для построения многосеточных структур информацию, возникающую в процессе декомпозиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation.
<http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/>
2. Domain Decomposition Methods. <http://www.ddm.org/>
3. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1961. Т. 1. № 5, с. 922–927.
4. *Жуков В.Т., Феодоритова О.Б., Янг Д.П.* Итерационные алгоритмы для схем конечных элементов высокого порядка. Математическое моделирование, 16(2004), № 7, 117–128.
5. *Мартынов А.А., Медведев С.Ю.* Надежный способ построения сеток с вытянутыми ячейками. В сб. Построение расчетных сеток: теория и приложения. Ред. С.А. Иваненко, В.А. Гаранжа, ВЦ РАН, Москва, 2002, с.266–276.
6. *Федоренко Р.П.* Finite Superelements Method and Multigrid Method in Problems of Elasticity Theory. Comp. Fluid Dynamics J., Vol.5, №.2, pp. 203-212, 1996.
7. *Venkattakrishnan V., Almaras S., Kamenetskii D., Johnson F.* Higher Order Schemes for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA–2003-3987, 2003.
8. *Y. Saad and M. H. Schultz* GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 7, pp. 856–869 (1986).
9. *T. J. R. Hughes.* Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Int. J. for Numerical Methods in Fluids. V. 7 (1987), № 11, pp. 1261–1275.
10. *Shadid J.N., Tuminaro R.S., Devine K.D., Hennigan G.L., Lin P.T.* Performance of fully coupled domain decomposition preconditioners for finite element transport/reaction simulations. J. of Computat. Physics. 205(2005), pp. 24-47.
11. *Ландау Л.* Теоретическая физика т.VI. Гидродинамика. Физматлит. 2003.
12. *U. Trottenberg, C.W.Oosterlee, A. Schuler.* Multigrid. Academic press, 2001.