



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 2008 г.



Варин В.П.

Замкнутые семейства
периодических решений
ограниченной задачи трех
тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Варин В.П. Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 16. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-16>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

ЗАМКНУТЫЕ СЕМЕЙСТВА
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Москва, 2008 г.

В.П. Варин. Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел имеет бесконечно много семейств симметричных периодических решений (СПР). Среди натуральных семейств СПР имеются семейства, которые при изменении параметра замыкаются на себя (например, семейство c). Эти семейства сохраняют свойство замкнутости при всех допустимых значениях массового параметра μ . Однако существует и другой тип замкнутых семейств СПР, которые существуют только в ограниченных интервалах значений μ , и образуются в результате самобифуркаций некоторых семейств СПР. Этот тип семейств СПР мало изучен. В этой работе описан начальный участок бесконечного каскада самобифуркаций натурального семейства i (4 бифуркации).

V.P. Varin. Closed families of periodic solutions of the restricted three-body problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2008.

The plane circular restricted three-body problem has infinitely many families of symmetric periodic solutions (SPS). Among natural families of SPS, there are some that close upon themselves when the parameter changes (the family c , for example). These families preserve this property for all admissible values of the mass parameter μ . There is, however, another type of closed families of SPS that exist only in some intervals of values of μ , and which appear as a result of self-bifurcations of some families of SPS. These type of closed families is poorly understood. In this paper we describe an initial part of an infinite cascade of self-bifurcations of the natural family i (4 bifurcations).

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Москва, 2008 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: varin@keldysh.ru

http: www.keldysh.ru

(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

§ 1. Самобифуркации семейств СПР

Плоская круговая ограниченная задача трех тел имеет бесконечно много семейств симметричных периодических решений (СПР). Некоторые из них имеют относительно простую структуру для всех допустимых значений массового параметра μ и хорошо изучены. Натуральное семейство h является одним из примеров таких семейств [2, 3]. Существуют также семейства со сколь угодно сложной структурой, которая сильно зависит от величины μ . Одно из наиболее изученных таких семейств – это семейство i [4, 7].

Известно [4, 7], что при достаточно малых μ начальный участок семейства i имеет циклическую структуру, которая соответствует структуре порождающего семейства i , состоящего из частей семейств с круговыми, эллиптическими орбитами и решений-отрезков [1]. В работе [5] было показано, что при сколь угодно малом μ циклическая структура семейства i разрушается после некоторого (зависящего от μ) количества циклов. Это происходит в результате бесконечного каскада самобифуркаций семейства i при $\mu \rightarrow 0$. Был вычислен начальный участок этого каскада (4 бифуркации) и показано, что существуют две монотонно убывающие последовательности μ'_k и μ''_k , $\mu'_k < \mu''_k$, $k = 1, 2, \dots$, такие что замкнутое семейство СПР i_k ответвляется от семейства i при $\mu = \mu'_k$. Семейства i_k существуют только в ограниченных интервалах значений $\mu \in [\mu'_k, \mu''_k]$; при $\mu = \mu''_k$ семейство i_k стягивается в одну орбиту. Была также найдена эмпирическая асимптотика этих последовательностей при $k \rightarrow \infty$ [5]. Однако объем работы [5] не позволил детально описать бифуркации семейства i и структуру образующихся замкнутых семейств i_k .

В этой работе замкнутые семейства i_k , $k = 1, \dots, 4$ изучаются при некоторых фиксированных значениях μ , позволяющих описать их структуру достаточно подробно, а также показывается как вычислять самобифуркации семейств СПР. Некоторые из семейств i_k при некоторых значениях μ были ранее изучены [8], однако вычисление самобифуркаций семейств СПР – это вопрос полностью обойденный вниманием. Это же относится к семействам, представленным одной орбитой, которые ранее были неизвестны.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел в синодической системе координат с центром в P_1 (телом большей массы) описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром $\mu \in [0, 1/2]$ [1]:

$$dx_j/dt = \dot{x}_j = \partial H / \partial y_j, \quad dy_j/dt = \dot{y}_j = -\partial H / \partial x_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \mu R, \quad H_0 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - r^{-1}, \\ R &= r^{-1} + x_1 - r_2^{-1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При фиксированном $\mu \neq 0$ СПР (т.е. решения, обладающие свойством $x_2(0) = y_1(0) = x_2(T/2) = y_1(T/2) = 0$, где T – период) образуют однопараметрические семейства, которые могут быть представлены своими характеристиками в плоскости симметрии $\Pi = \{x_2 = y_1 = 0\}$ с координатами $x_1(0), y_2(0)$ [1].

При изменении μ характеристики семейства СПР могут быть интерпретированы как линии уровня некоторой гладкой поверхности \mathcal{M} , лежащей в $\Pi \times \mu \in [0, 1/2]$. Таким образом, в случае общего положения самобифуркации семейств СПР соответствуют седловым (или гиперболическим) точкам поверхности \mathcal{M} , а вырожденные семейства СПР, состоящие из одной орбиты, соответствуют экстремальным (или эллиптическим) точкам поверхности \mathcal{M} . Впервые эти точки были вычислены в работе [5]. Используя уравнения в вариациях для системы (1.1) (которые мы не выписываем), критические точки поверхности \mathcal{M} можно вычислить с той же точностью, как и обычные точки поверхности. При этом мы следуем теории развитой в работе [9].

Рассмотрим произвольную характеристику \mathcal{L} семейства СПР и найдем ее экстремальные точки. В точке экстремума величины $y_2(0)$ выполнено необходимое условие экстремума $dy_2(0)/dx_1(0) = 0$, которое можно записать также $dy_2(T)/dx_1(0) = 0$, где T – период СПР. Пусть $M = ||m_{i,j}||$, $i, j = 1, \dots, 4$ – это матрица монодромии СПР в точке экстремума величины $y_2(0)$. Тогда необходимое условие экстремума $y_2(0)$ – это равенство $m_{4,1} = 0$. Аналогично, в точке экстремума величины $x_1(0)$ на характеристике \mathcal{L} необходимо выполнение равенства $dx_1(0)/dy_2(0) = dx_1(T)/dy_2(0) = 0$, что означает $m_{1,4} = 0$.

Экстремальные точки характеристик – это вырождения коразмерности 1 на поверхности \mathcal{M} , т.е. некоторые кривые. Они могут пересекаться в некоторых изолированных точках – вырождениях коразмерности 2. Очевидно, в произвольно малой окрестности седловой точки имеются как экстремумы величины $x_1(0)$, так и величины $y_2(0)$, поэтому в седловой точке

$$m_{4,1} = m_{1,4} = 0. \quad (1.3)$$

Эти же уравнения, очевидно, описывают и эллиптическую точку поверхности \mathcal{M} .

Напомним, что при фиксированном $\mu \neq 0$ точка на характеристике \mathcal{L} , т.е. СПР системы (1.1), может быть вычислена как решение некоторой нелинейной системы уравнений. Например, при фиксированном $x_1(0)$ полупериод $T/2$ и величина $y_2(0)$ находятся из системы уравнений

$$x_2(T/2) = y_1(T/2) = 0, \quad (1.4)$$

которая невырождена в случае общего положения. Однако в критических точках поверхности \mathcal{M} система (1.4) вырождена, что объясняет трудность

вычисления подобных точек, так как численный алгоритм отказывает уже в некоторой окрестности критической точки. Поэтому ранее в подобных случаях применялась интерполяция.

Согласно изложенному выше, критические точки (седловые и эллиптические) удовлетворяют системе уравнений (1.3)–(1.4) для неизвестных $x_1(0)$, $y_2(0)$, T и μ , и эта система невырождена в случае общего положения. Заметим, что якобиан этой системы может быть выписан в явном виде с помощью высших вариаций уравнений (1.1) [9], однако в этом нет необходимости, так как система (1.3)–(1.4) решается численно (т.е. невырожденность ее якобиана проверяется в процессе вычислений).

Система уравнений (1.3) для матрицы монодромии M за период СПР может быть переписана для матрицы монодромии за полупериод. Однако эти формулы весьма громоздки и мы их не приводим.

В заключение этого параграфа заметим, что в критических точках поверхности \mathcal{M} автоматически имеем

$$\sum_{k=1}^4 m_{k,k} = 4 \quad (1.5)$$

в силу теоремы о неявной функции для отображения Пуанкаре. Условие (1.5) записывается (после редукции к нормальной форме) как $\text{Tr} = 2$.

§ 2. Образование и эволюция замкнутых семейств

Как показано в работе [5], замкнутые семейства СПР образуются в результате разрушения циклической структуры порождающего семейства i при возрастании μ . Расчеты показали, что существуют две монотонно убывающие к нулю последовательности $\mu'_k, \mu''_k, \mu'_k < \mu''_k, k = 1, 2, \dots$, такие, что при возрастании μ от семейства i отделяются замкнутые семейства i_k , существующие только в интервалах $\mu \in [\mu'_k, \mu''_k]$. В этой работе приводятся результаты вычислений, показывающие динамику процесса образования и исчезновения замкнутых семейств $i_k, k = 1, \dots, 4$.

Поскольку при сколь угодно малом $\mu > 0$ уже произошло бесконечное количество самобифуркаций и образовалось (и исчезло) бесконечное количество замкнутых семейств, удобно начать нумерацию этого каскада бифуркаций с последнего замкнутого семейства, но описывать его эволюцию будем при возрастающем μ .

Бифуркационные значения $\mu'_k, \mu''_k, k = 1, \dots, 4$ посчитаны здесь с точностью не менее 15 десятичных разрядов. Эти расчеты отражены в табл. 1 с 8 десятичными разрядами. Бифуркационные орбиты в табл. 1 представлены астрономическими координатами \tilde{a}, \tilde{e} [1], нормированным периодом

$\tilde{T} = T/(2\pi)$, константой Якоби C и значениями вертикального следа $\tilde{\text{Tr}}_v$ [2]. Плоский след у всех бифуркационных орбит, очевидно, равен 2. Видно, что только первые две эллиптические точки (μ_1'' и μ_2'') пространственно неустойчивы. На рис. 13, 14 бифуркационные орбиты показаны в координатах x_1, x_2 .

Эмпирическая асимптотика бифуркационных орбит представлена в табл. 2. Из нее следует, что отношения μ_k'/μ_1' и μ_k''/μ_1'' близки к значению $k^{-8/3}$, $k = 2, \dots, 4$.

На последовательности картинок рис. 1 изображена эволюция замкнутого семейства i_1 при изменении μ в астрономических координатах \tilde{a}, \tilde{e} , соответствующих правой характеристике порождающего семейства i [4, 7]. Видно, что при $\mu = \mu_J = 9.5388 \cdot 10^{-4}$, соответствующему случаю Солнце – Юпитер, изображенный фрагмент характеристики семейства i еще очень близок к характеристике порождающего семейства. Участок характеристики семейства i близкий к горизонтали $\tilde{e} = 1$, соответствует семейству круговых орбит Id_1 , а участок близкий к вертикали – семейству эллиптических орбит $E_{2/1}$ [1]. Наклонный участок соответствует семейству B_1 решений-отрезков. При возрастании μ наклонный участок характеристики семейства i постепенно удлиняется, продвигаясь вдоль семейства B_1 , а затем загибается влево и постепенно удлиняется, продвигаясь вблизи характеристики семейства c [6, 7] ($\mu = 2 \cdot 10^{-3}, \dots, 3 \cdot 10^{-3}$) и приближается к левой нижней части характеристики, где затем происходит бифуркация и образуется замкнутое семейство i_1 ($\mu = \mu_1' \approx 4.1313 \cdot 10^{-3}$). Ответвившиеся части семейства i , не принадлежащие семейству i_1 , эволюционируют по невыясненному пока закону. В частности, из сравнения рис. 1 при $\mu = \mu_1'$ и $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ видно, что произошла еще одна бифуркация.

На последней картинке рис. 1 показано, как семейство i_1 изменяется при увеличении μ от $\mu = \mu_M = 1.2155 \cdot 10^{-2}$, соответствующему случаю Земля – Луна, вплоть до стягивания семейства i_1 в одну орбиту при $\mu = \mu_1'' \approx 3.66863 \cdot 10^{-2}$, показанную на этой картинке кружком.

На рис. 2 изображена эволюция семейства i_1 при изменении μ в координатах $\tilde{a}, \tilde{T} = T/(2\pi)$, где T – период СПР. Точка бифуркации и последняя орбита семейства i_1 показаны на рис. 2 кружком.

Рис. 3 и 4 изображают эволюцию плоского $\tilde{\text{Tg}}$ и вертикального $\tilde{\text{Tr}}_v$ (нормированных, см. [2]) следов. При этом критические орбиты, соответствующие значениям следов ± 2 , на всех рис. 1–4 отмечены крестиками. В табл. 3.1–3.7 приводятся данные о критических орбитах для всех значений μ , указанных на рис. 1–4. Для каждой критической орбиты приводятся: астрономические координаты \tilde{a}, \tilde{e} , соответствующие правой характеристике порождающего

семейства i , нормированный период \tilde{T} , значения плоского и вертикального следов $\tilde{\text{Tr}}$ и $\tilde{\text{Tr}}_v$, а также константа Якоби C .

Эволюция последующих замкнутых семейств i_k , $k = 2, 3, 4$ полностью аналогична описанной эволюции семейства i_1 . Рис. 5–8 для семейства i_2 соответствуют рис. 1–4 для семейства i_1 и отличаются значениями бифуркационного параметра μ и масштабом рисунков. На рис. 9–12 показана эволюция семейств i_3, i_4 в одинаковом масштабе по оси \tilde{a} .

Из табл. 2 видно, что эллиптическая критическая точка семейства i_{k+1} расположена выше на поверхности \mathcal{M}_i , соответствующей семейству i , чем гиперболическая критическая точка семейства i_k , $k = 1, \dots$. Это означает, что при любом $\mu < \mu'_1$ существуют одновременно два замкнутых семейства.

Литература

1. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Брюно А.Д., Варин В.П. Семейство h периодических решений ограниченной задачи при малых μ . Препринт N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 32 с.
3. Брюно А.Д., Варин В.П. Семейство h периодических решений ограниченной задачи при больших μ . Препринт N 64. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. 31 с.
4. Брюно А.Д., Варин В.П. Порождающее семейство i периодических решений ограниченной задачи. Препринт N 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 27 с.
5. Брюно А.Д., Варин В.П. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // ПММ. 2007. Т. 71. N 6. С. 1034–1066.
6. Брюно А.Д., Варин В.П. Порождающее семейство s периодических решений ограниченной задачи // Препр. N 51 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2007а. 14 с.
7. Брюно А.Д., Варин В.П. Семейства s и i периодических решений ограниченной задачи при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ // Астроном. вестник. 2008. Т. 42. N. С.
8. Colombo G., Franklin F.A. On a family of periodic orbits of the restricted three-body problem and the question of the gaps in the asteroid belt and in Saturn's ring // Astron. Journal. 1968. V. 73 N 2. P. 111-123.
9. Varin, V.P., Degeneracies of periodic solutions to the Beletsky equation // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2000, vol. 5, no 3, p. 313-328.

Таблица 1. Бифуркационные орбиты четырех циклов.

μ	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}_v$
μ'_1	0.68871719	0.72837343	1.23370552	3.10346652	-1.84389397
μ''_1	0.81395640	1.43867005	1.97012501	2.91324794	2.00251016
μ'_2	0.80267498	0.83798725	2.26009772	3.03169188	-1.98293642
μ''_2	0.88734729	1.24472130	2.97373803	2.97306701	2.00068411
μ'_3	0.85530336	0.88504109	3.26879728	3.01520595	-1.99690250
μ''_3	0.91324869	1.17586906	3.97406324	2.98691862	1.99975053
μ'_4	0.88572210	0.91096036	4.27305773	3.00890595	-1.99960338
μ''_4	0.92909055	1.13776964	4.97446586	2.99230487	1.99919355

Таблица 2. Эмпирическая асимптотика бифуркационных орбит.

k	μ'_k	μ''_k	μ'_k/μ'_1	μ''_k/μ''_1	$k^{-8/3}$
1	$4.13129887 \cdot 10^{-3}$	$3.66863029 \cdot 10^{-2}$	1	1	1
2	$6.61705554 \cdot 10^{-4}$	$5.27272358 \cdot 10^{-3}$	0.160	0.144	0.157
3	$2.15292269 \cdot 10^{-4}$	$1.88241384 \cdot 10^{-3}$	0.052	0.051	0.053
4	$9.54304953 \cdot 10^{-5}$	$8.86552296 \cdot 10^{-4}$	0.023	0.024	0.025

Таблица 3.1 Критические орбиты первого цикла, $\mu = \mu_J$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.76327	1.38908	1.99925	2.92063	1.64854	2.00000
2	0.76404	1.43293	1.99978	2.88628	1.62031	2.00000
3	0.77203	1.80498	2.00820	2.33977	-2.00000	1.91842
4	0.77186	1.80575	2.00842	2.33745	-2.00000	1.91072
5	0.77582	1.80949	2.01204	2.32447	2.00000	1.66188
6	0.78852	1.78345	2.02473	2.37306	8.00581	-2.00000
7	0.63774	0.93864	1.03038	3.16551	2.00000	1.95979
8	0.56149	0.24921	1.02722	2.87977	6.15797	-2.00000
9	0.91744	1.31852	2.24575	2.90882	2.00000	-7.11721
10	0.91744	1.31852	2.24578	2.90882	-2.00000	-7.11623
11	0.91429	1.33096	2.26314	2.90114	12.27128	-2.00000
12	0.91410	1.33167	2.26362	2.90070	12.43809	2.00000

Таблица 3.2 Критические орбиты первого цикла, $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.72473	1.00625	1.54410	3.09135	-2.00000	-1.92022
2	0.72355	1.00571	1.53549	3.09220	-2.00000	-1.93187
3	0.76473	1.39370	1.99848	2.91849	1.27059	2.00000
4	0.76393	1.43805	1.99964	2.88256	1.21224	2.00000
5	0.78070	1.76619	2.01750	2.41896	2.00000	1.73589
6	0.80531	1.70985	2.04310	2.50843	8.41322	-2.00000
7	0.99850	1.16535	1.98580	2.99119	8.91030	-2.00000
8	1.00199	1.12940	1.75677	3.00903	9.65885	2.00000
9	0.96876	1.08431	1.63142	3.02360	2.00000	2.12157
10	0.96878	1.08432	1.63146	3.02360	-2.00000	2.11769
11	0.97144	1.08714	1.63694	3.02290	-7.02724	2.00000
12	1.00419	1.16219	1.95917	2.99334	6.26993	-2.00000
13	0.96164	1.22288	2.18868	2.96262	10.69170	-2.00000
14	0.94868	1.25086	2.21852	2.94874	11.95833	2.00000
15	0.64516	0.92234	1.05620	3.15923	2.00000	1.85786
16	0.54437	0.21110	1.02941	2.89003	6.59234	-2.00000

Таблица 3.3 Критические орбиты первого цикла, $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.72168	1.00450	1.49143	3.09798	-2.00000	-1.97852
2	0.73118	1.01119	1.55878	3.09138	-2.00000	-1.80934
3	0.76594	1.39711	1.99778	2.91709	0.91910	2.00000
4	0.76458	1.44023	1.99949	2.88159	0.83761	2.00000
5	0.78381	1.73502	2.02118	2.48011	2.00000	1.77136
6	0.82164	1.64167	2.06132	2.61151	8.73356	-2.00000
7	0.97679	1.20710	2.06074	2.97650	10.67212	-2.00000
8	0.97455	1.12448	1.71040	3.01800	11.25715	2.00000
9	0.95205	1.08924	1.61407	3.03091	11.31311	2.00000
10	0.77212	0.84420	1.47124	3.07801	2.00000	1.84240
11	0.77215	0.84422	1.47200	3.07801	-2.00000	1.85388
12	0.77432	0.84720	1.48911	3.07774	-4.71776	2.00000
13	0.77465	0.84769	1.49053	3.07770	-2.00000	2.00166
14	0.77475	0.84785	1.49099	3.07768	2.00000	2.00201
15	0.77594	0.84967	1.49548	3.07751	6.86982	2.00000
16	0.98847	1.12028	1.67103	3.02346	15.16546	-2.00000
17	1.01831	1.20049	2.01441	2.98316	12.38541	-2.00000
18	0.99520	1.20216	2.04503	2.98044	13.44788	2.00000
19	0.65299	0.91253	1.08206	3.15381	2.00000	1.69132
20	0.53366	0.18794	1.02974	2.89869	6.86899	-2.00000

Таблица 3.4 Критические орбиты первого цикла, $\mu = \mu'_1$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.74307	1.02263	1.60310	3.08855	-2.00000	-1.48878
2	0.66364	0.90585	1.11598	3.14761	2.00000	1.37954
3	0.68872	0.72837	1.23371	3.10347	2.00000	-1.84389
4	0.69131	0.72519	1.27362	3.10258	-2.00000	-1.97228
5	0.69647	0.72215	1.44170	3.10182	-2.00000	1.63270
6	0.69723	0.72272	1.47870	3.10180	2.00001	1.99073
7	0.93264	1.07164	1.60381	3.04888	17.00208	-2.00000
8	1.02064	1.20275	1.90521	2.99197	14.64865	-2.00000
9	1.00762	1.21786	2.00186	2.98028	14.26744	2.00000
10	0.76694	1.39860	1.99692	2.91715	0.53823	2.00000
11	0.76665	1.43849	1.99906	2.88464	0.44260	2.00000
12	0.77599	1.69185	2.01446	2.56584	-2.00000	1.95579
13	0.77624	1.69292	2.01470	2.56381	-2.00000	1.95359
14	0.78642	1.70636	2.02433	2.53215	2.00000	1.79447
15	0.84381	1.55648	2.08470	2.71773	9.06748	-2.00000
16	0.95243	1.25883	2.10237	2.95344	10.27359	-2.00000
17	0.99138	1.18916	1.88863	2.99556	10.46371	2.00000
18	0.96978	1.13318	1.68529	3.02390	10.68423	2.00000
19	-0.63260	0.69957	1.21355	3.10380	2.00000	-1.73165

Таблица 3.5 Критические орбиты первого цикла, $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	\tilde{T}_r	\tilde{T}_{r_v}
1	0.76678	1.39430	1.99594	2.92102	0.26904	2.00000
2	0.76705	1.44102	1.99896	2.88316	0.14217	2.00000
3	0.78805	1.68758	2.02624	2.56435	2.00000	1.80603
4	0.87020	1.46698	2.10742	2.80804	9.36170	-2.00000
5	0.92415	1.32137	2.12158	2.91830	9.88792	-2.00000
6	0.98759	1.20897	1.92324	2.98913	10.03214	2.00000
7	0.97341	1.15335	1.71751	3.02081	10.23280	2.00000
8	0.76953	0.89692	1.35799	3.09641	6.81328	-2.00000
9	0.75895	0.88181	1.33793	3.09942	6.43340	-2.00000
10	0.67411	0.90447	1.14874	3.14236	2.00000	0.99294
11	0.73129	1.00702	1.48739	3.10085	-2.00000	-2.00602
12	0.75310	1.03557	1.64144	3.08567	-2.00000	-1.09713
13	0.51887	0.15745	1.02886	2.91459	7.26907	-2.00000
14	0.63660	0.60762	1.21677	3.11124	6.65435	-2.00000
15	0.63734	0.60936	1.21948	3.11140	6.62580	-2.00000
16	0.66087	0.65414	1.48444	3.11386	4.36058	2.00000
17	0.62046	0.54029	1.77352	3.10118	17.29409	-2.00000
18	0.60705	0.49630	1.84536	3.09245	18.23484	-2.00000
19	0.56743	0.34077	2.11905	3.05005	19.44408	2.00000
20	0.52524	0.15098	2.60896	3.00080	18.10977	2.00000
21	0.51259	0.09228	2.80090	2.98734	17.51982	-2.00000
22	0.50479	0.05543	2.92429	2.97810	17.26414	-2.00000
23	0.49726	0.01703	3.07761	2.96477	17.07851	2.00000
24	1.01159	1.22666	1.96987	2.98123	14.83026	2.00000
25	1.02653	1.22018	1.91309	2.98794	14.77202	-2.00000
26	0.89372	1.03621	1.58655	3.06670	17.87033	-2.00000
27	0.72443	0.78775	1.67165	3.11113	17.77427	-2.00000
28	0.72014	0.77962	1.68476	3.11178	17.69079	-2.00000
29	0.70380	0.74722	1.94299	3.11377	17.62877	1.99999
30	0.76903	0.86486	2.21798	3.10227	28.11488	-2.00000
31	0.82202	0.94391	2.34514	3.08850	29.15898	-2.00000
32	0.91550	1.06007	2.57060	3.06032	29.26631	2.00000
33	1.03500	1.19726	3.24758	3.00688	26.36665	2.00000

Таблица 3.6 Критические орбиты первого цикла, $\mu = \mu_M$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.77446	1.41086	1.99074	2.91613	-1.68694	2.00000
2	0.77109	1.45739	1.99859	2.87441	-1.85308	2.00000
3	0.77398	1.48822	2.00271	2.84530	-2.00000	1.99679
4	0.78164	1.57325	2.01849	2.74339	-2.00000	1.95681
5	0.79700	1.58665	2.03232	2.71703	2.00000	1.85284
6	0.94801	1.28991	1.95622	2.96457	7.71655	2.00000
7	0.95229	1.24192	1.84520	3.00088	7.69841	2.00000
8	0.82613	1.12415	1.69167	3.07103	2.00000	-0.16030
9	0.80385	1.16417	1.81734	3.05689	-2.00000	1.07930
10	0.80195	1.17186	1.83386	3.05386	-2.00000	1.22930

Таблица 3.7 Критические орбиты первого цикла, $\mu = 2.3 \cdot 10^{-2}$.

k	\tilde{a}	\tilde{e}	\tilde{T}	C	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$
1	0.80989	1.31540	1.92191	2.99528	-2.00000	1.85923
2	0.78068	1.40694	1.97685	2.92955	-2.62199	2.00000
3	0.78718	1.45049	1.98945	2.89349	-2.51640	2.00000
4	0.78861	1.49600	2.00592	2.84431	-2.00000	1.98562
5	0.80558	1.51035	2.02113	2.81947	2.00000	1.92859
6	0.88850	1.37707	1.98156	2.92587	5.61988	2.00000
7	0.89613	1.33436	1.92962	2.96290	5.54204	2.00000
8	0.84068	1.28561	1.88056	3.00976	2.00000	1.67544

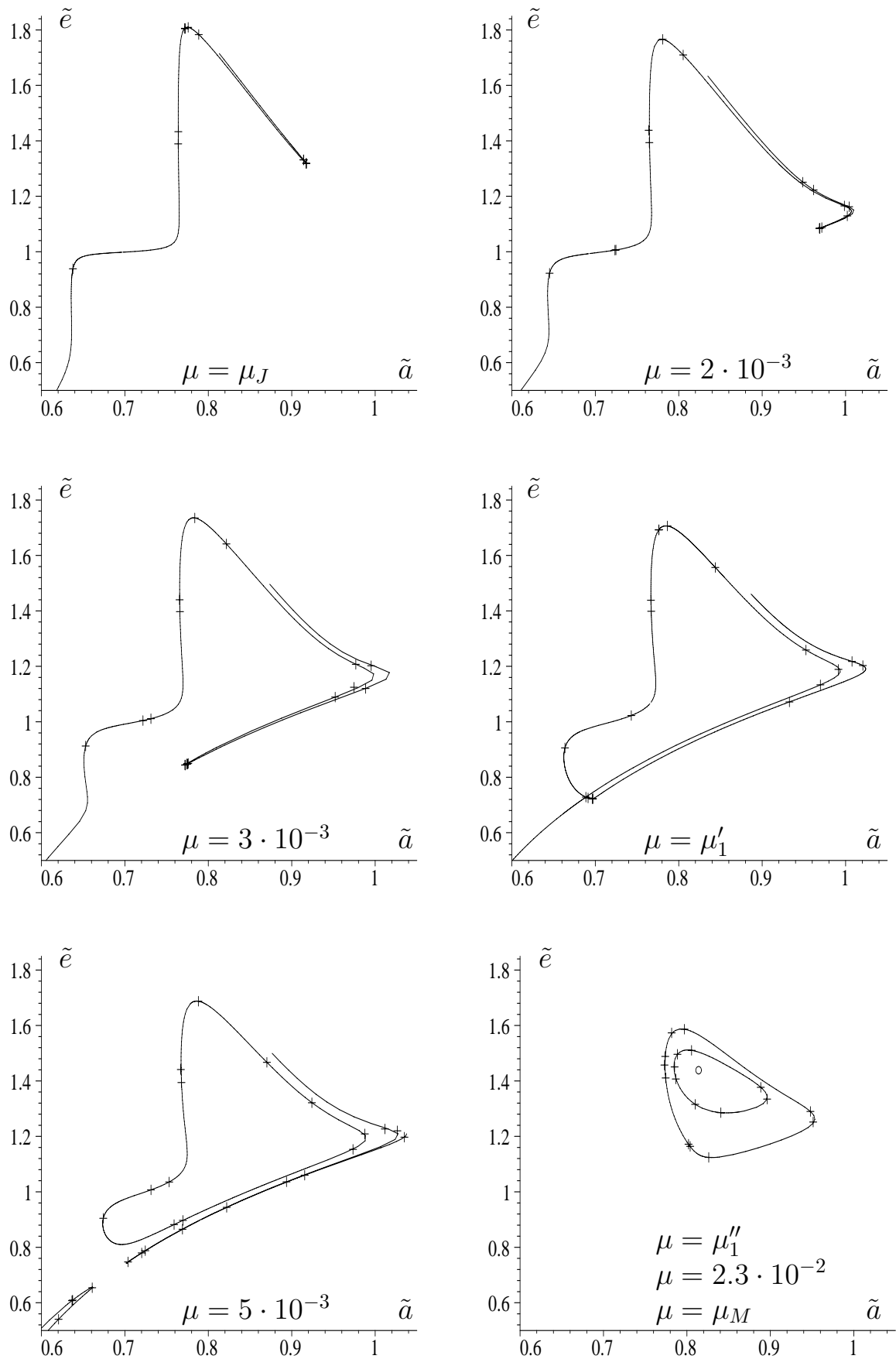


Рис. 1. Эволюция первого цикла в координатах \tilde{a} , \tilde{e} .

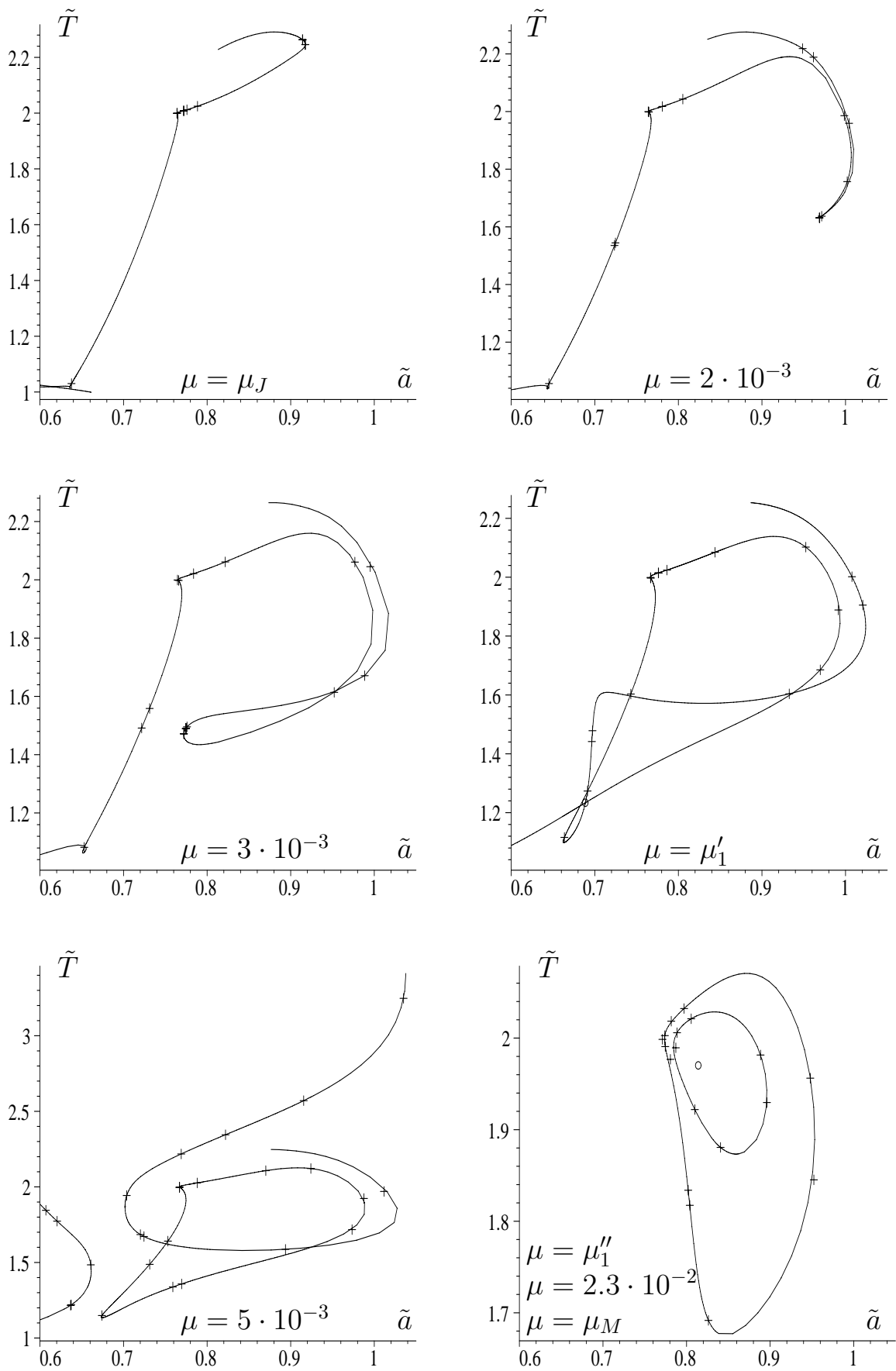


Рис. 2. Эволюция первого цикла в координатах \tilde{T} , \tilde{a} .

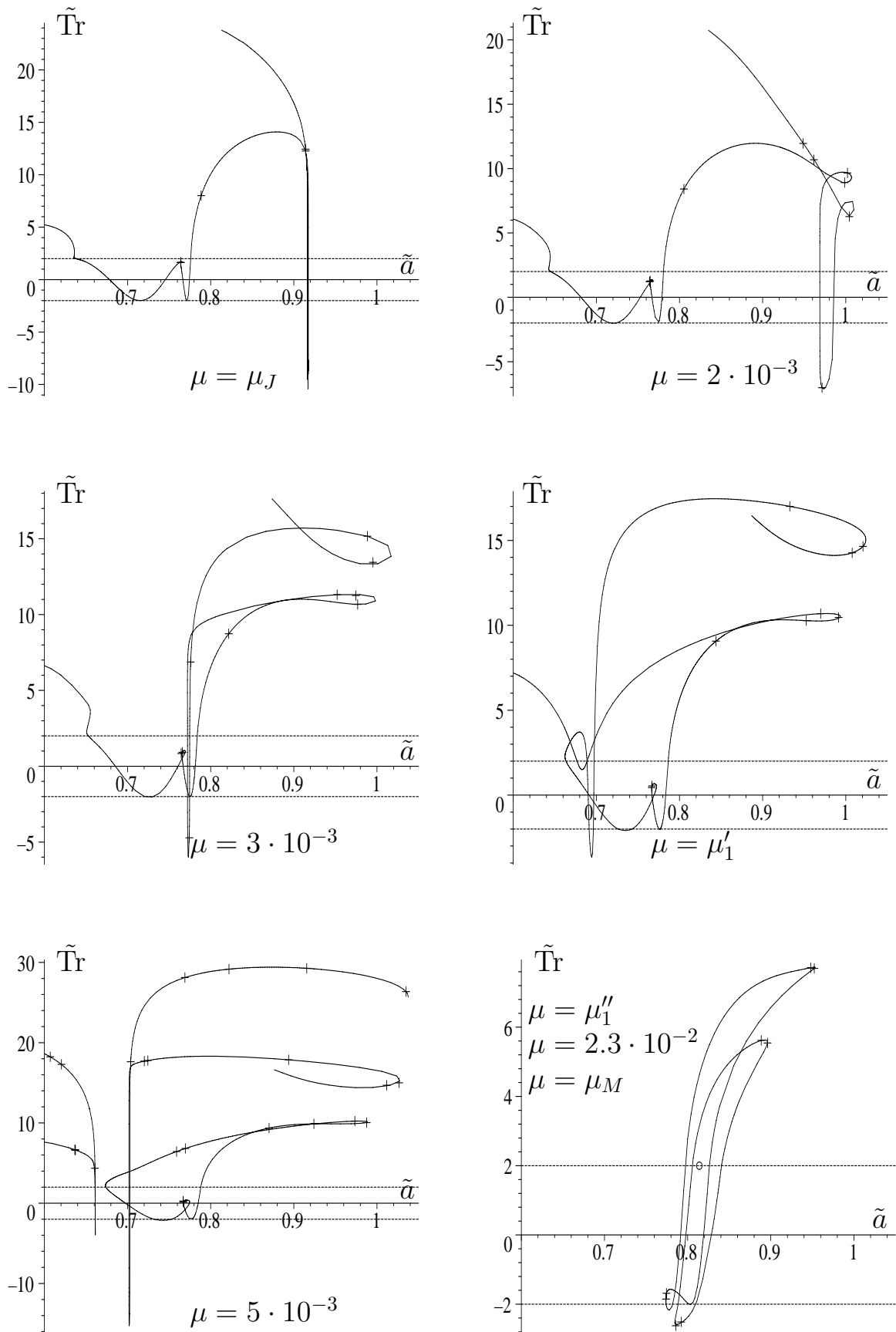


Рис. 3. Эволюция плоского следа первого цикла в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}$.

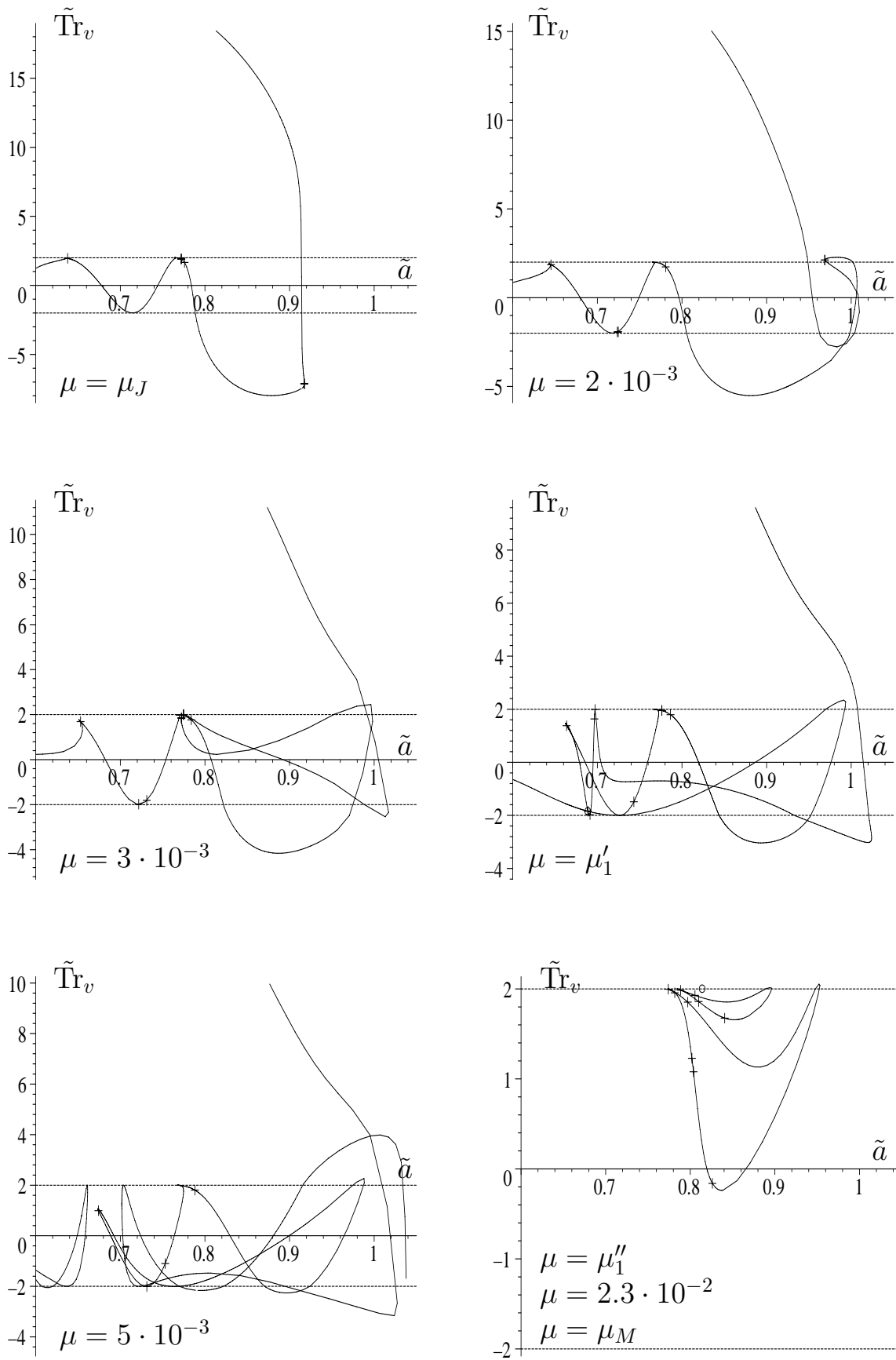


Рис. 4. Вертикальный след первого цикла в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}_v$.

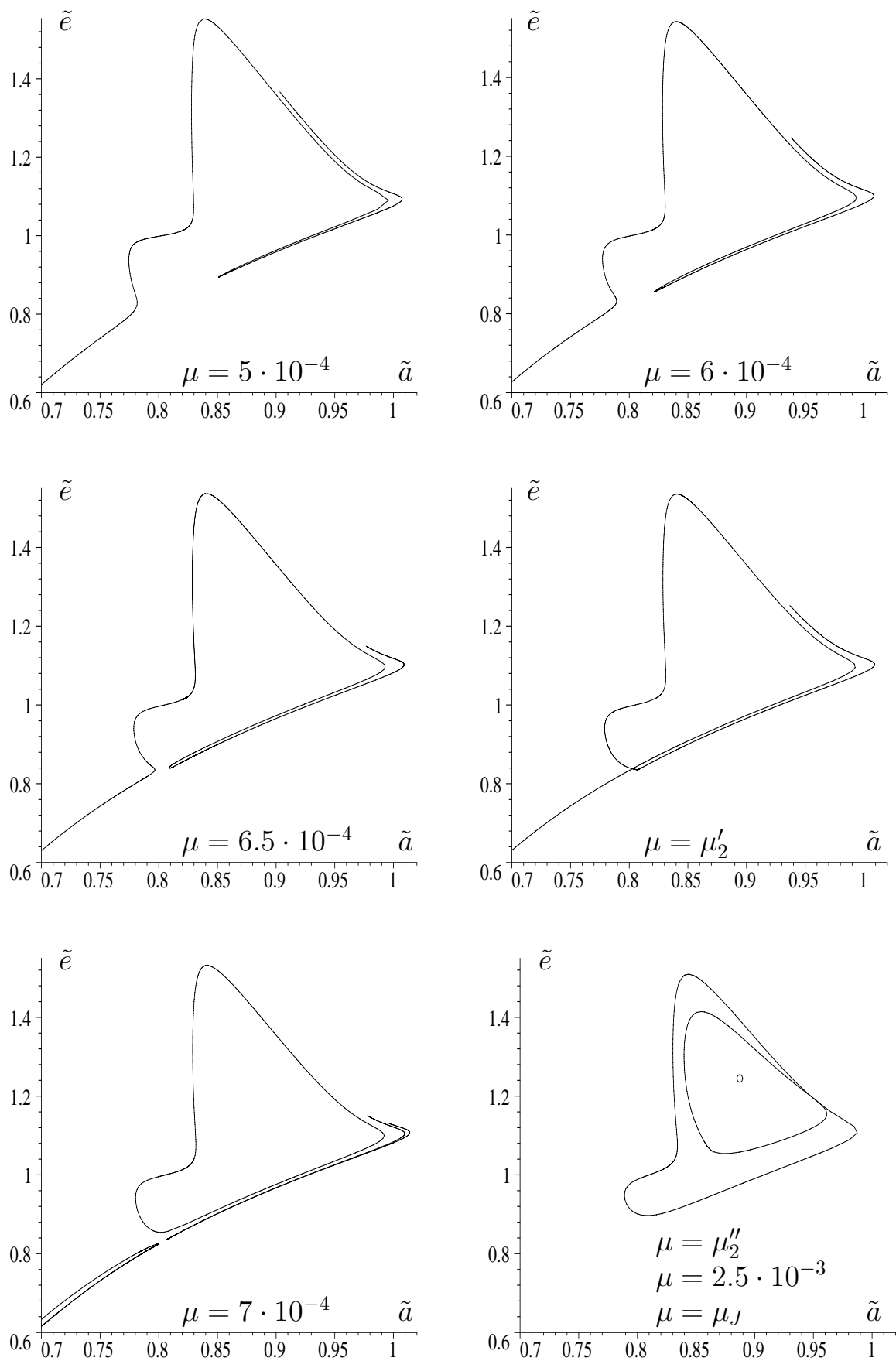


Рис. 5. Эволюция второго цикла в координатах \tilde{a} , \tilde{e} .

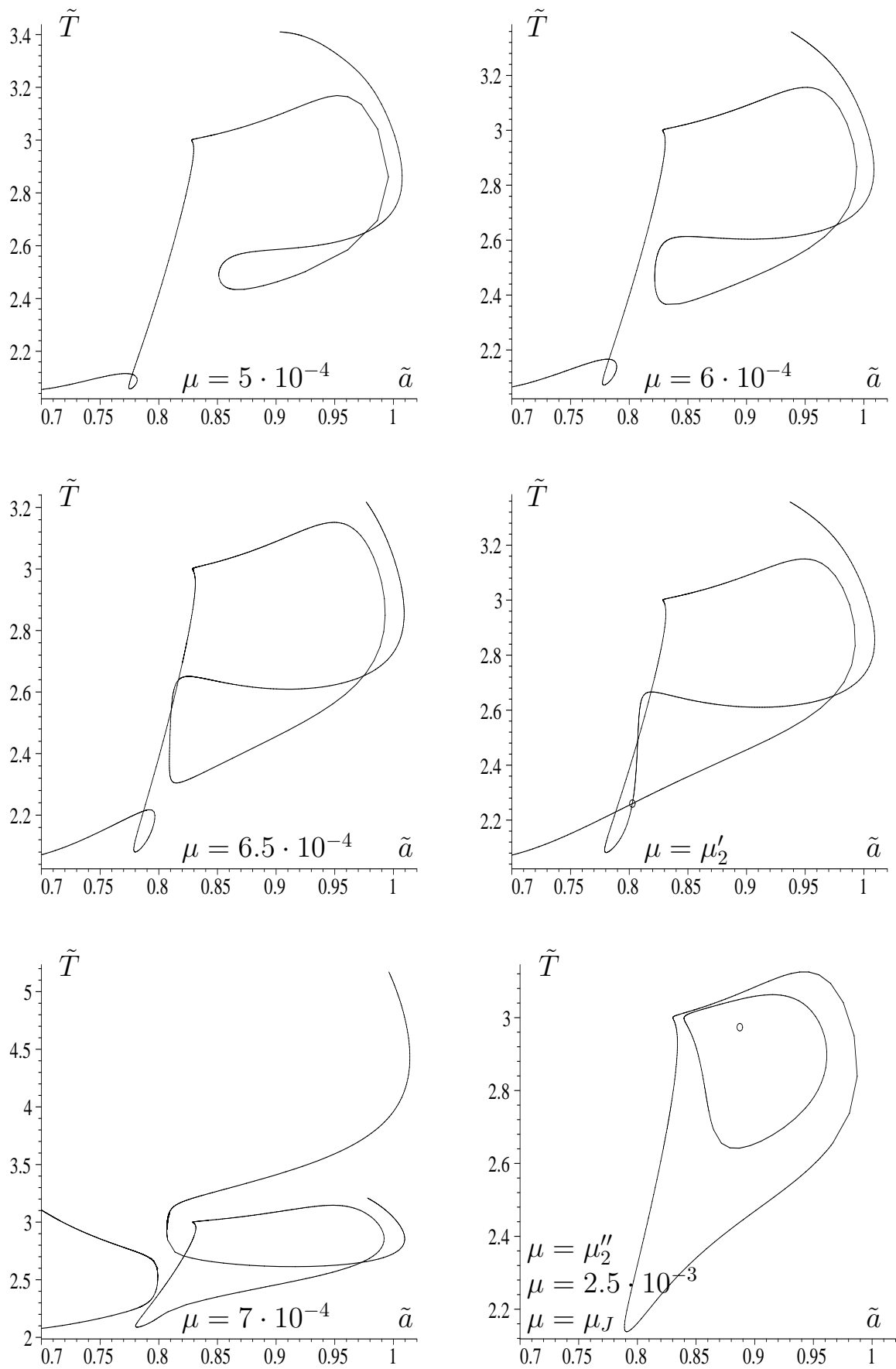


Рис. 6. Эволюция второго цикла в координатах \tilde{T} , \tilde{a} .

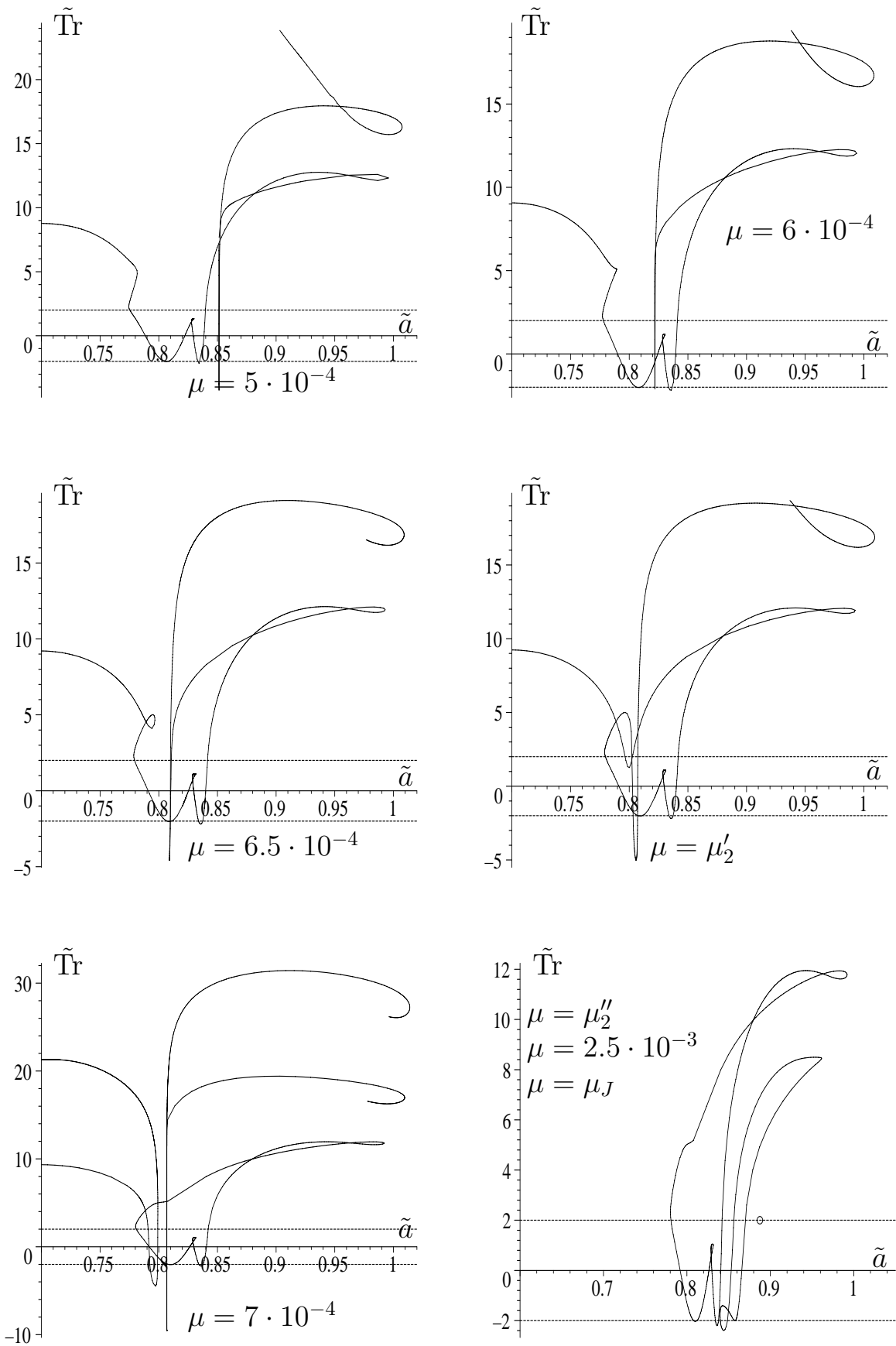


Рис. 7. Эволюция плоского следа второго цикла в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}$.

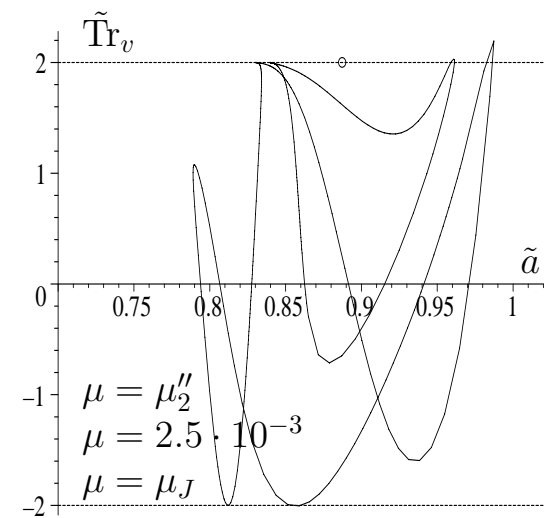
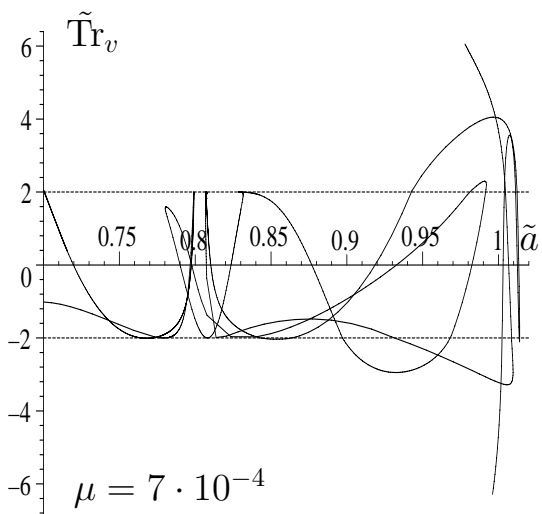
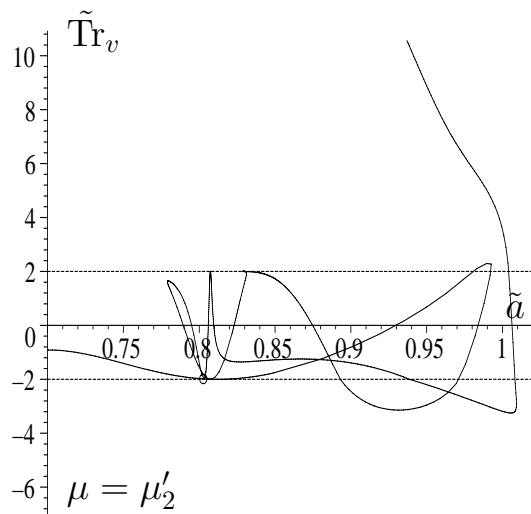
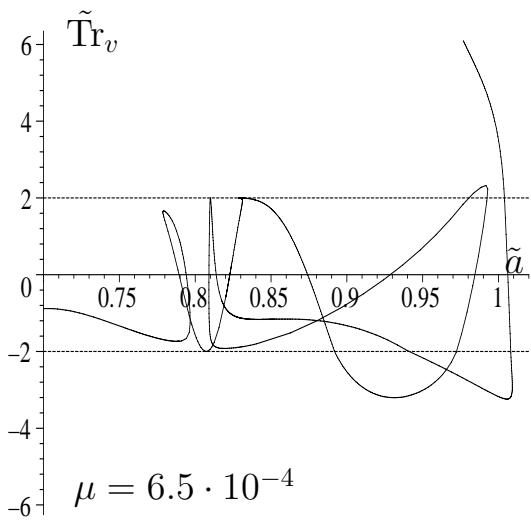
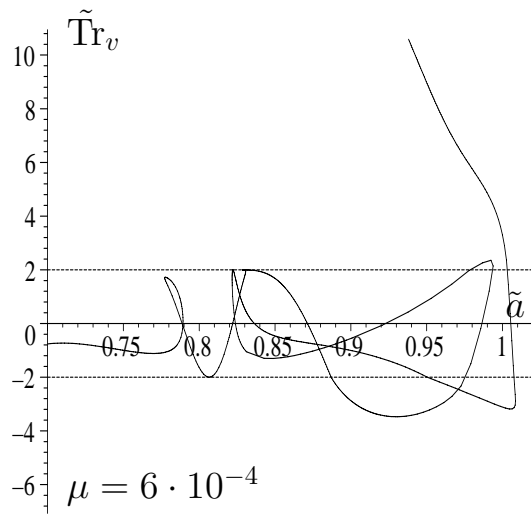
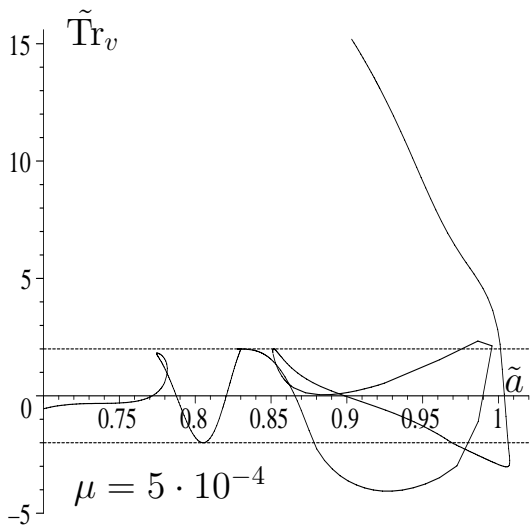


Рис. 8. Вертикальный след второго цикла в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}_v$.

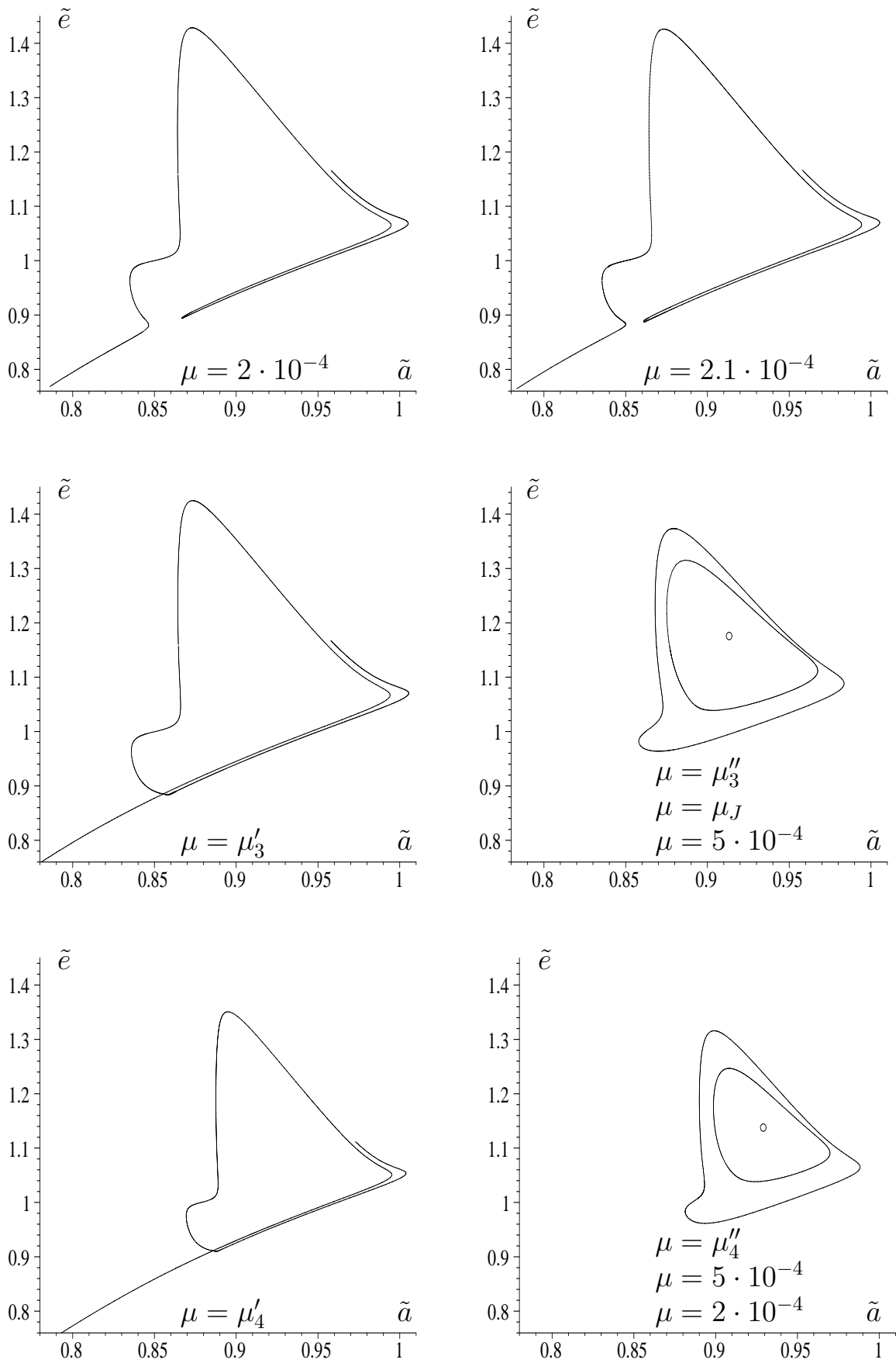


Рис. 9. Третий и четвертый циклы в координатах \tilde{a} , \tilde{e} .

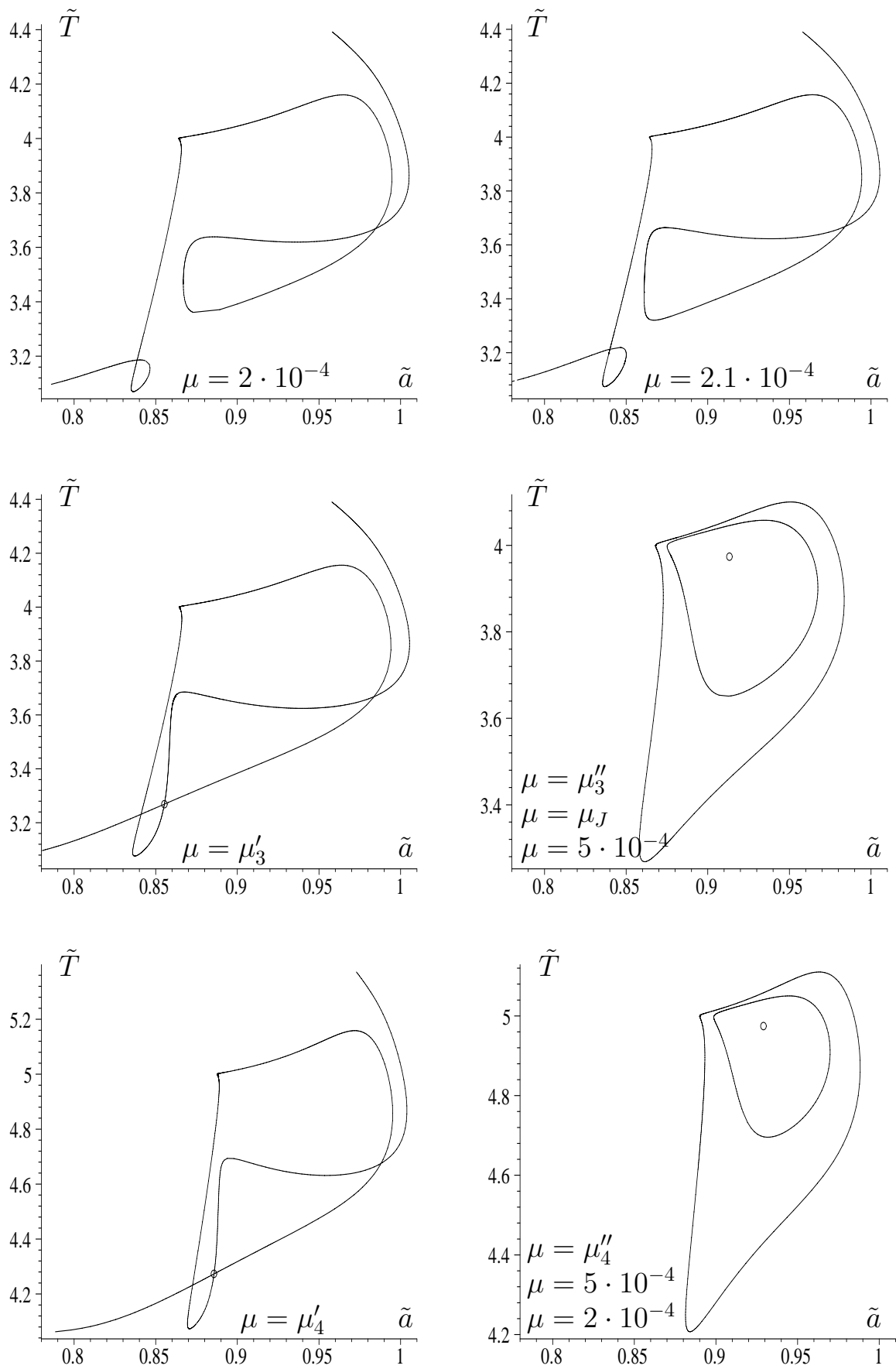


Рис. 10. Третий и четвертый циклы в координатах \tilde{a} , \tilde{T} .

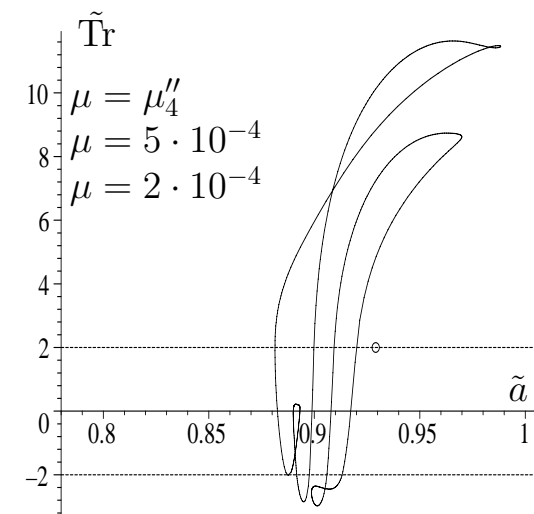
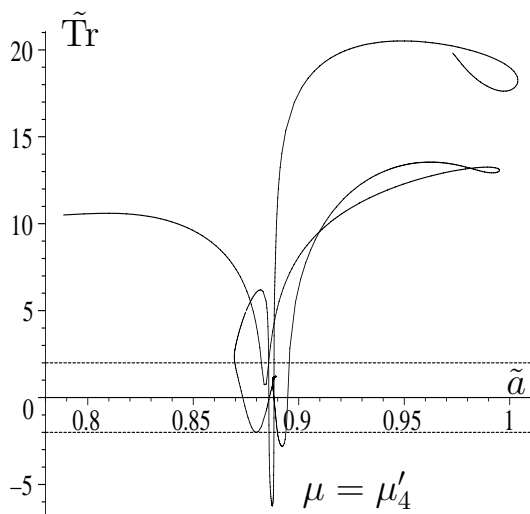
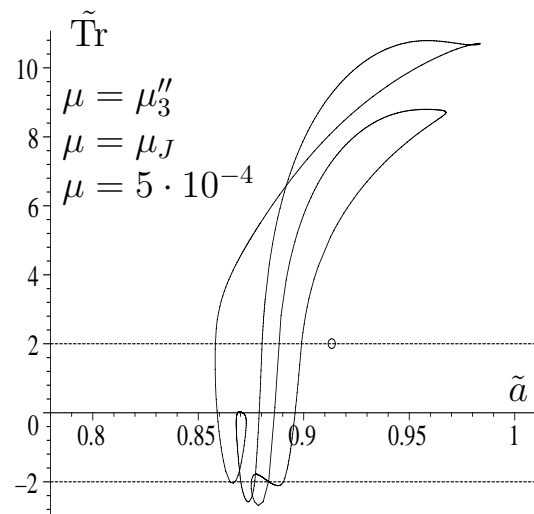
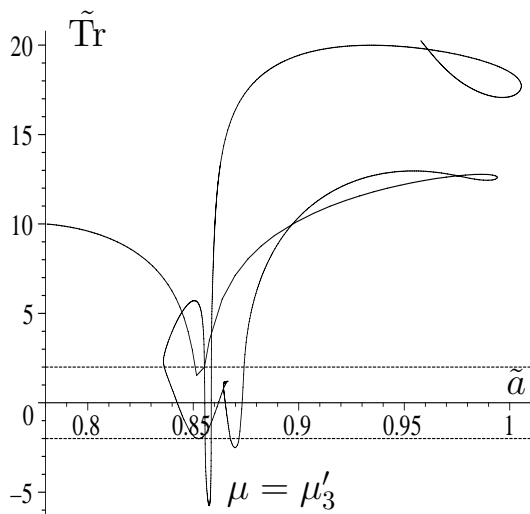
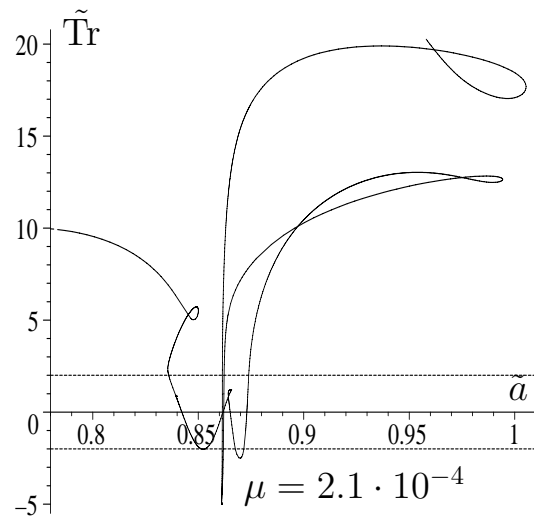
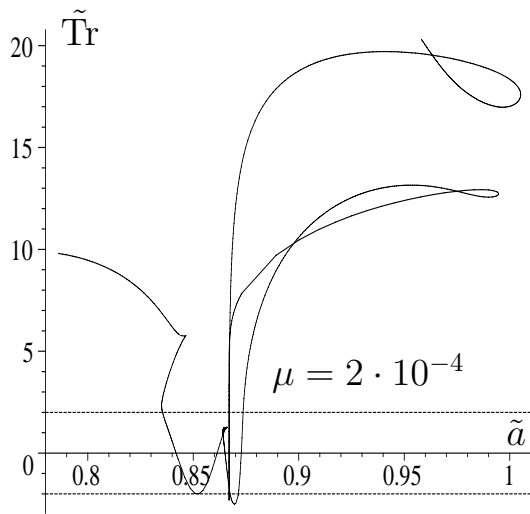


Рис. 11. Третий и четвертый циклы в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}$.

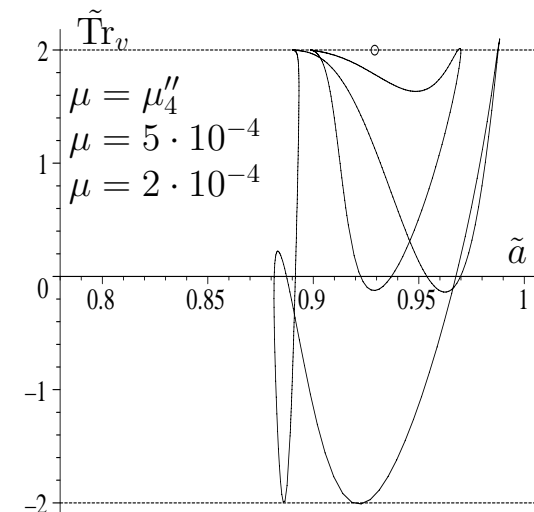
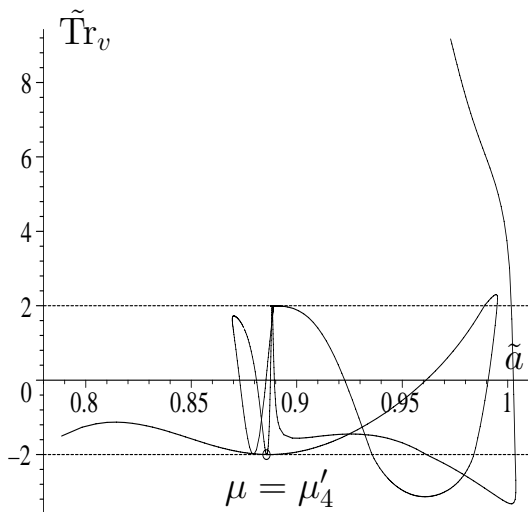
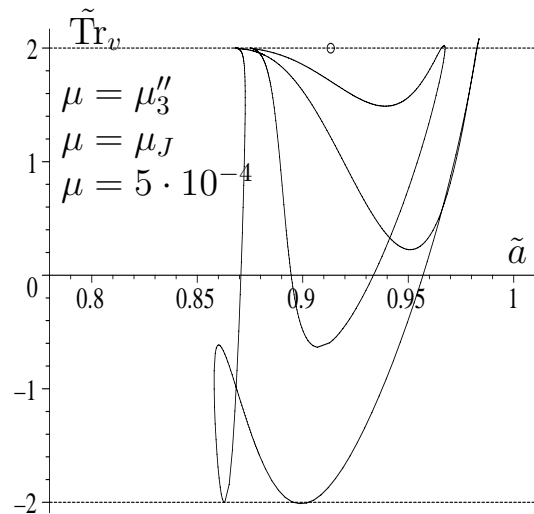
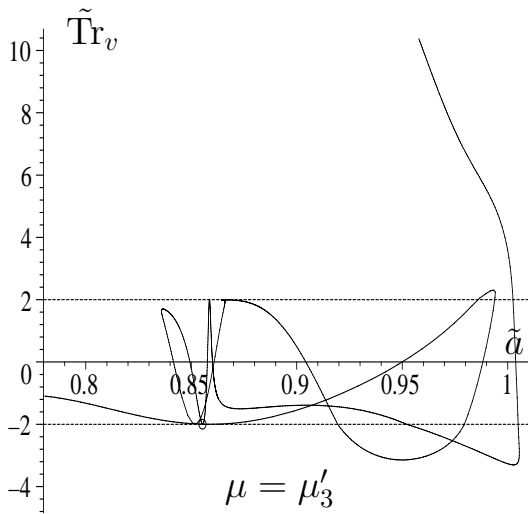
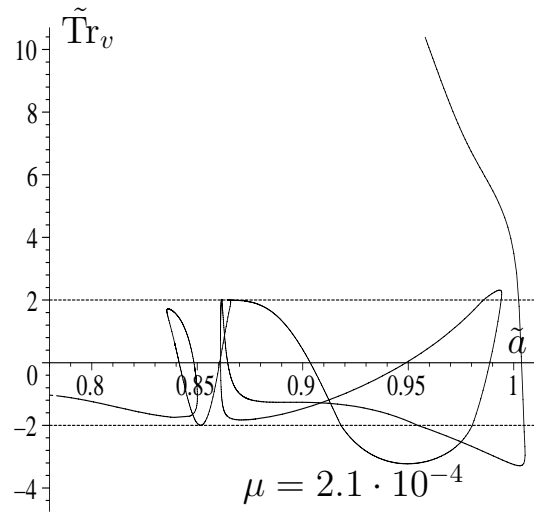
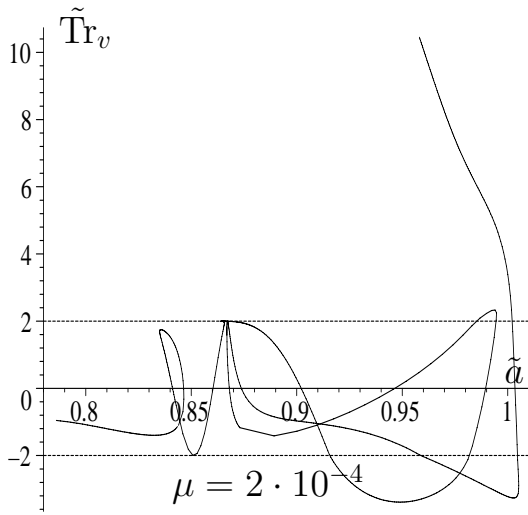


Рис. 12. Третий и четвертый циклы в координатах \tilde{a} , $\tilde{\text{Tr}}_v$.

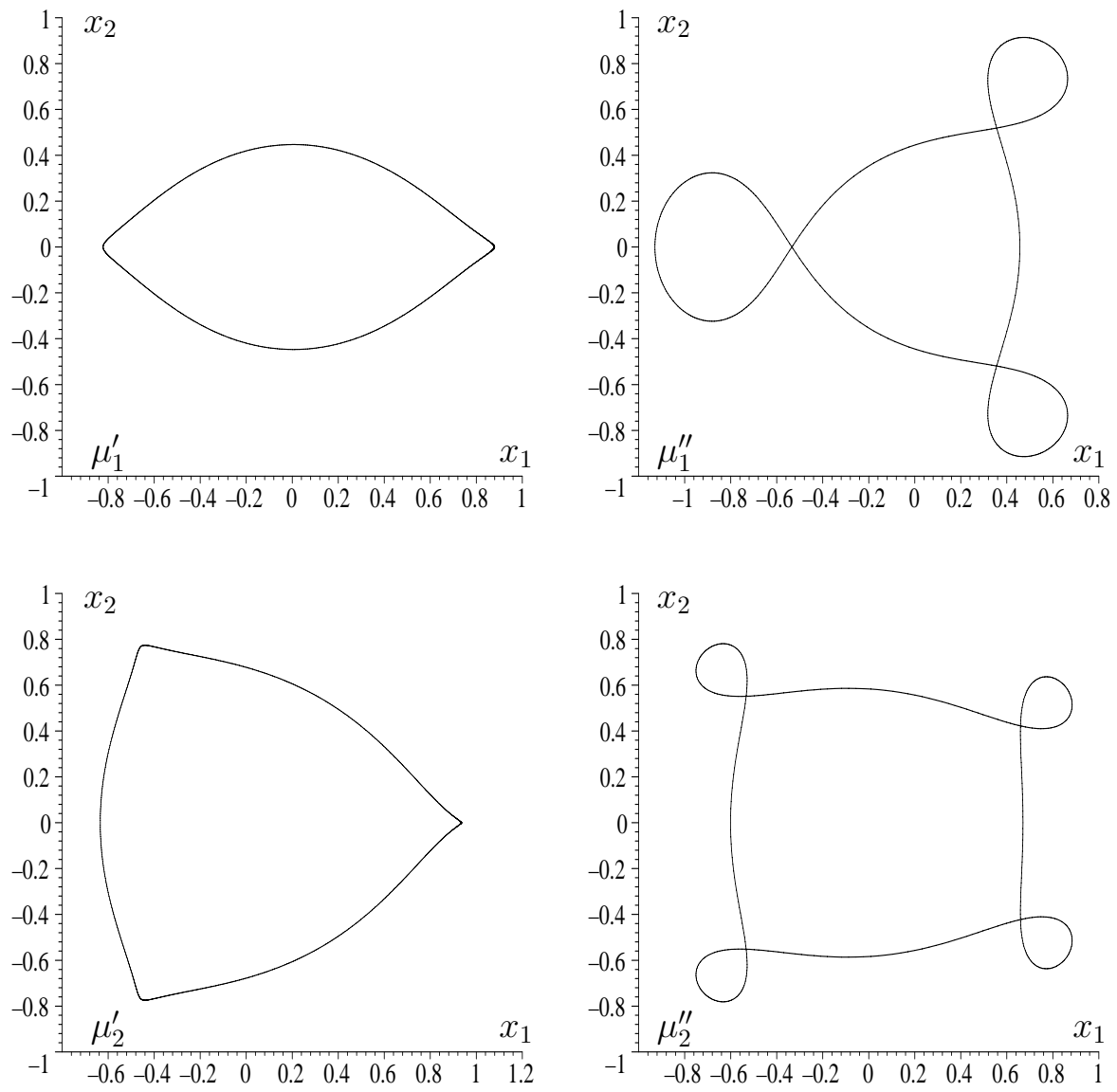


Рис. 13. Орбиты семейств i_1, i_2 при критических $\mu = \mu', \mu''$.

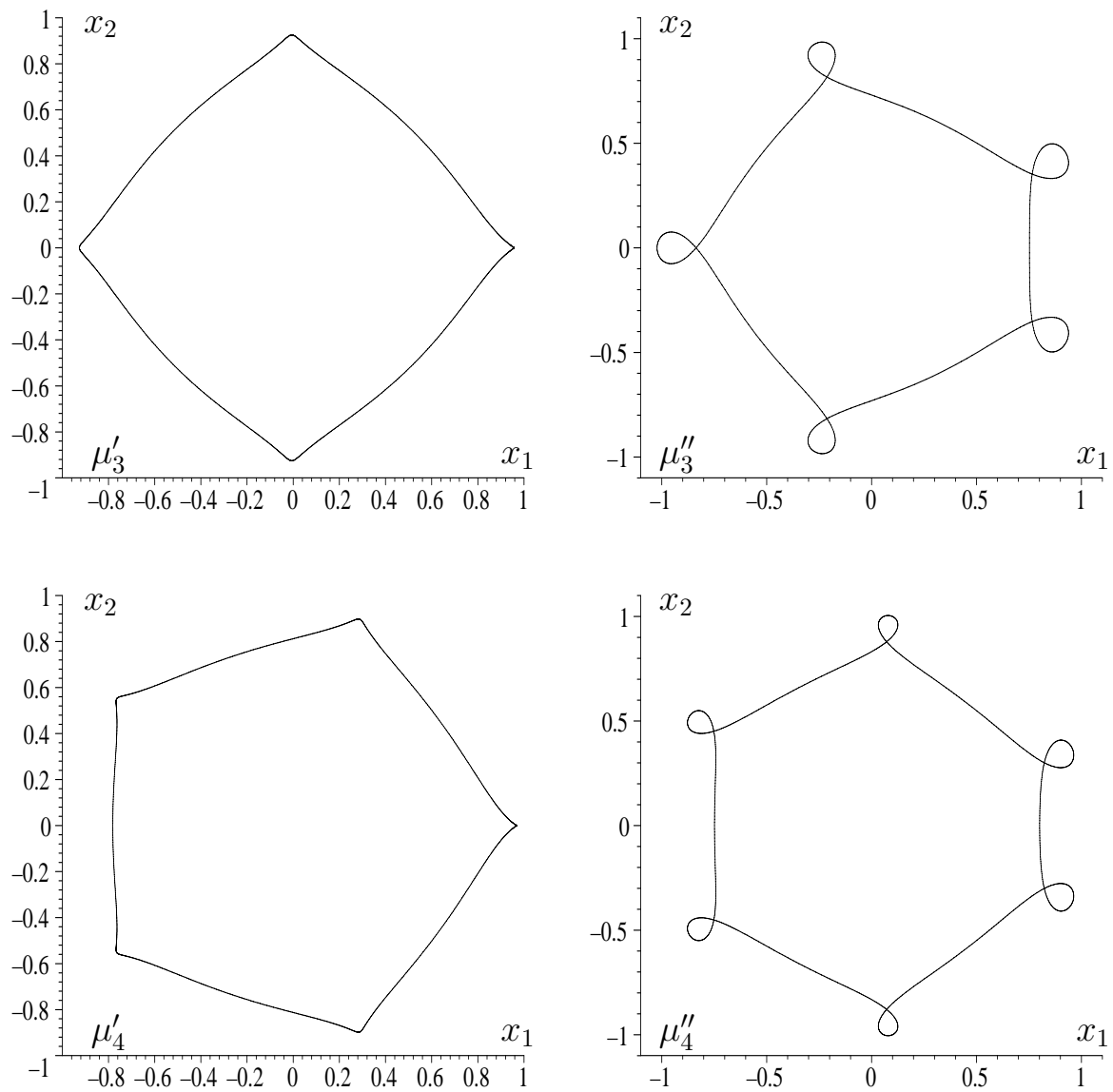


Рис. 14. Орбиты семейств i_3, i_4 при критических $\mu = \mu', \mu''$.