



Бородай В.Э., [Галанин М.П.](#),
Лазарева С.А., Паршенцев В.А.,
Шипилов А.В.

Применение метода
конечных суперэлементов
для расчета распределений
электрического потенциала
и плотности тока в
проводящих объектах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Применение метода конечных суперэлементов для расчета распределений электрического потенциала и плотности тока в проводящих объектах / В.Э.Бородай [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 17. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-17>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша

В.Э. Бородай, М.П. Галанин, С.А. Лазарева,

В.А. Паршенцев, А.В. Шипилов

**Применение метода конечных суперэлементов
для расчета распределений
электрического потенциала и плотности тока
в проводящих объектах**

Москва – 2008

Аннотация

Метод конечных суперэлементов Федоренко применен для расчета распределений электрического потенциала и плотности тока в проводящих объектах. Материал проводника содержит малые диэлектрические поры. Реализованы различные варианты метода. Рассмотрен модельный пример. Получены количественные данные о величине средней проводимости материала. Метод показывает свою эффективность при правильном выборе способа построения и реализации его аппроксимаций.

V. Boroday, M. Galanin, V. Parshentcev, S. Lazareva, A. Shipilov

Finite Superelement Method for the computation of the electric potential and current density distribution of conductive materials

Abstract

Fedorenko finite superelement method is applied for computing of the electric potential and current density distribution of conductive materials. The conductor contains small dielectric air-bubbles. Different variants of FSEM are implemented. Model problem is considered. Quantity conductivity averages are obtained. When choosing the correct way of constructing and realization of FSEM approximations the method is of high efficiency.

Содержание

<i>Введение</i>	3
<i>1 Постановка тестовой задачи</i>	4
<i>2 Алгоритм МКСЭ для определения электрического потенциала</i>	6
<i>3 Тестовый расчет плотности тока</i>	8
<i>4 Расчет усредненной проводимости пористого материала</i>	8
<i>4.1 Способ I. Расчет работы электрического поля</i>	10
<i>4.2 Способ II. Расчет полного тока через сечение области</i>	10
<i>4.3 Способ III. Расчет полного тока по множественным параллельным сечениям</i>	11
<i>4.4 Способ IV. Сведение к поверхностному интегралу</i>	12
<i>5 Результаты расчетов</i>	12
<i>5.1 Зависимость средних проводимости σ и удельного сопротивления ρ от объемной пористости материала</i>	13
<i>5.2 Зависимость σ от размера полости</i>	15
<i>5.3 Зависимость от проводимости материала σ^0</i>	16
<i>5.4 Зависимость от числа суперэлементов</i>	18
<i>5.5 Зависимость от способа граничной интерполяции МКСЭ</i>	20
<i>5.6 Зависимость проводимости от расположения пор в области</i>	21
<i>5.7 Данные о числовых значениях</i>	22
<i>Заключение</i>	24
<i>Список литературы</i>	24

Введение

Существует широкий класс задач, решение которых содержит резкие неоднородности, проявляющиеся на мелких по отношению к размеру области пространственных масштабах. Численное решение таких задач сеточными методами требует специальных сеток для разрешения особенностей. Для этого необходимо использовать либо адаптивные к решению сетки, сгущающиеся в окрестности особенностей, либо достаточно мелкие сетки с шагом h и огромным количеством точек. Первый вариант требует применения специальных алгоритмов, второй – соответствующей памяти ЭВМ. В то же время проявления особенностей зачастую являются локальными, сосредоточенными в мелкомасштабных подобластях. Наличие областей сосредоточения неоднородностей позволяет ввести сетку с характерным размером $H \gg h$, узлы и ребра которой проходят по участкам относительной гладкости решения. При этом сетка размером H заведомо не позволит разрешить особенности при использовании обычных численных методов, но зато число ее узлов достаточно мало.

Для решения таких задач на сетках размером H в работах Л.Г. Страховской и Р.П. Федоренко [1 – 4] предложен метод конечных суперэлементов (МКСЭ). Разработка метода продолжена в работах авторов [5 – 14].

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на представлении решения задачи в виде разложения по системе базисных функций, имеющих конечный носитель. При этом мера таких носителей предполагается малой (сетка h) и стремящейся к нулю. Базисные функции в МКЭ берутся в виде функций сравнительно простой структуры, как правило, полиномиальной. МКСЭ также основан на представлении решения задачи в виде разложения по системе базисных функций, имеющих конечный носитель. Однако в случае МКСЭ мера таких носителей (сетка H) не предполагается стремящейся к нулю и столь велика, что она заведомо не позволяет (при использовании МКЭ) передать особенности решения. Другое отличие касается построения базисных функций. В МКСЭ базисные функции строятся для данной рассматриваемой задачи специальным образом так, чтобы в них самих содержалась значительная информация

о решении задачи. Именно специальный, под задачу, выбор базисных функций и позволяет с помощью очень грубого разбиения исходной области получить хорошее численное решение.

Целью данной работы является применение МКСЭ к решению задачи определения приведенных (эффективных) электрофизических характеристик материала проводника с малыми диэлектрическими порами.

1 Постановка тестовой задачи

Рассматриваемая задача состоит в решении с помощью МКСЭ системы уравнений, описывающих протекание постоянного тока в проводнике, содержащем малые по сравнению с размерами всей области непроводящие подобласти (диэлектрические поры).

Поставим для начала упрощенную модельную задачу и проведем демонстрацию расчетной эффективности. Пространственная область представляет собой куб с гранями, параллельными координатным плоскостям. Выделим Ω , ω – подобласти, занятые проводящим материалом и порами в нем соответственно. Через $\partial\Omega$, $\partial\omega$ обозначаем границы этих областей, $\partial\Omega_b$, $\partial\Omega_t$ – основания куба, $\partial\Omega_{fl}$ – его боковую границу.

Целью решаемой задачи является определение приведенных (эффективных) удельного электрического сопротивления ρ и удельной электрической проводимости σ пористого материала. Пусть проводящий материал, занимающий область Ω , обладает заданной проводимостью σ^0 и удельным сопротивлением $\rho^0 = 1 / \sigma^0$.

Плотность электрического тока j в материале подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} j = 0, \quad (1)$$

выражающему закон сохранения полного заряда.

Электрическое поле потенциально и удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} E = 0. \quad (2)$$

Связь плотности тока j и напряженности поля E определяется свойст-

вами вещества и выражается законом Ома

$$j = \sigma^0 E. \quad (3)$$

В однородном проводнике $\sigma^0 = \text{const}$, откуда $\text{div} E = 0$. Поэтому в нем потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$-\nabla^2 \varphi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где $E(x) = -\nabla \varphi(x)$, $x \in \Omega$. (5)

На границах раздела пор и проводника нормальные компоненты плотности тока и напряженности обращаются в нуль (изнутри, из подобласти Ω):

$$j_n = 0 \text{ или } E_n = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (6)$$

Поставим задачу в области Ω . Применим МКСЭ к решению уравнения для определения потенциала φ

$$-\nabla^2 \varphi = 0 \text{ в } \Omega \subset R^3, \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega_f, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \cap \partial\omega, \quad (8)$$

$$\varphi = 1 \text{ на } \partial\Omega_t, \quad (9)$$

$$\varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega_b. \quad (10)$$

При этом считаем, что ток через боковую границу куба $\partial\Omega_f$ не вытекает. На нижней по x_3 границе $\partial\Omega_t$ считаем заданным единичный потенциал, на верхней по x_3 границе $\partial\Omega_b$ - нулевой.

В области ω потенциал электрического поля также удовлетворяет уравнению Лапласа (7):

$$-\nabla^2 \varphi(x) = 0, \quad x \in \omega.$$

Для однозначного определения потенциала в диэлектрической подобласти необходимо добавить условие непрерывности потенциала при переходе через границу поры. Потенциал на границе проводника определяется из решения задачи (7 – 10).

2 Алгоритм МКСЭ для определения электрического потенциала

В соответствии с МКСЭ [1 – 14] расчетная область $\Omega \cup \omega$ разбита на $K_E = K^3$ подобластей - суперэлементов. В данном случае разбиение проведено плоскостями, перпендикулярными осям декартовой системы координат:

$$\Omega \cup \omega = \bigcup_{k=1}^{K^3} \Omega_k, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \text{ если } k \neq l.$$

Подобласти пор в материале расположены строго внутри суперэлементов.

Аппроксимацию неизвестного поля потенциала внутри каждого суперэлемента Ω_k осуществляем одинаковым образом. Потенциал φ внутри суперэлемента может быть найден в виде линейной комбинации некоторого числа базисных функций МКСЭ Φ_i

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x),$$

где a_i – неизвестные коэффициенты разложения.

Базисные функции МКСЭ являются решениями рассматриваемой системы уравнений внутри суперэлемента, а на его внешней границе совпадают с некоторыми функциями φ_i :

$$-\nabla^2 \Phi_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_k, \quad (11)$$

$$\Phi_i(x) \Big|_{x \in \partial\Omega_k} = \varphi_i(x) \Big|_{x \in \partial\Omega_k}.$$

Функции φ_i далее называются граничными базисными функциями МКСЭ.

На границе суперэлемента потенциал аппроксимируется соответствующей линейной комбинацией граничных базисных функций $\varphi_i(x)$. В узлах суперэлемента P_j и на границах области эти функции принимают следующие значения:

$$\varphi_i \Big|_{P_j} = \delta_{ij}; \quad (12)$$

$$\varphi_i = 1 \text{ на } \partial\Omega_a; \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \partial\Omega_b. \quad (13)$$

При этом на части границы $\partial\omega$, находящейся внутри Ω_k , в соответствии с решаемой задачей (7 - 10) заданы условия

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega_{j_l}; \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\omega; \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

С узлов на каждую грань суперэлемента граничные базисные функции продолжены одним из следующих способов:

- линейная конечно - элементная интерполяция на треугольниках;
- квадратичная конечно-элементная интерполяция на треугольниках;
- сокращенная кубическая интерполяция на треугольниках.

Соответствующее число и расположение узлов P_j на каждой из граней показано на рис. 1 – рис. 3. Число таких треугольников может быть различно.

Базисные функции $\Phi_i(x)$ МКСЭ рассчитаны приближенно в каждом из суперэлементов Ω_k . Для расчета использована конечно-элементная сетка из тетраэдров с характерным шагом h_{FE} . На каждое из ребер суперэлемента приходится $(N_{FE} / 6)^{1/3}$ ребер этой сетки, где N_{FE} – общее число расчетных тетраэдральных элементов в суперэлементе.

Узловые значения a_i , $i = 1, \dots, n$ определяются из уравнений метода Бубнова - Галеркина в определенном пространстве функций, удовлетворяющих заданной системе уравнений в каждом из суперэлементов в отдельности

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\Phi_j(x) = 0 \quad \forall\Phi_j, \quad (15)$$

соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\sum_{i=1}^n a_i (\nabla\Phi_i, \nabla\Phi_j) = 0 \quad \forall\Phi_j.$$

Таким образом определено и приближенное решение $\varphi(x)$ МКСЭ во всей проводящей подобласти $\Omega = \bigcup_k \Omega_k \setminus \omega$. Потенциал электрического поля в подобласти ω может быть рассчитан независимо.

Поставленная выше в разделе 0 модельная задача решена с помощью

схемы МКСЭ. Получено решение $\varphi(x)$ в области Ω , рассчитаны напряженность $E(x)$ и плотность электрического тока $j(x)$.

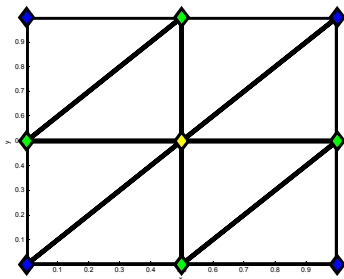


рис. 1 Линейная интерполяция на 8 треугольниках на грани суперэлемента

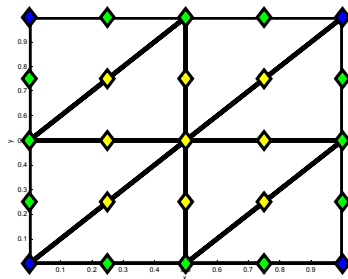


рис. 2 Квадратичная интерполяция на 8 треугольниках на грани суперэлемента

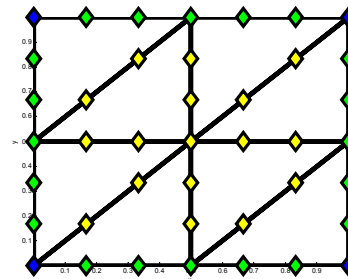


рис. 3 Кубическая интерполяция на 8 треугольниках на грани суперэлемента

3 Тестовый расчет плотности тока

Результаты тестового расчета плотности $j(x)$ и потенциала $\varphi(x)$ МКСЭ в сечениях области для материала с несколькими кубическими порами показаны на рис. 4 и рис. 5. Потенциал $\varphi(x)$ внутри одной поры иллюстрирует рис. 5.

4 Расчет усредненной проводимости пористого материала

Пусть однородный материал, заключенный в куб $\Xi = \Omega \cup \omega$, имеет искомым усредненный коэффициент проводимости $\sigma < \sigma^0$. Потенциал поля φ^0 в таком материале описывается следующей задачей, аналогичной (7 – 10),

$$-\nabla^2 \varphi^0 = 0 \text{ в } \Xi \subset R^3, \tag{16}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega_f, \tag{17}$$

$$\varphi^0 = 1 \text{ на } \partial\Omega_t, \tag{18}$$

$$\varphi^0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_b. \tag{19}$$

Решение такой задачи – линейная по x_3 функция. Тогда напряженность электрического поля E^0 постоянна и составляет

$$E^0 \equiv \left\{ 0, 0, \frac{1}{L} \right\}^T \text{ в } \Xi, \quad (20)$$

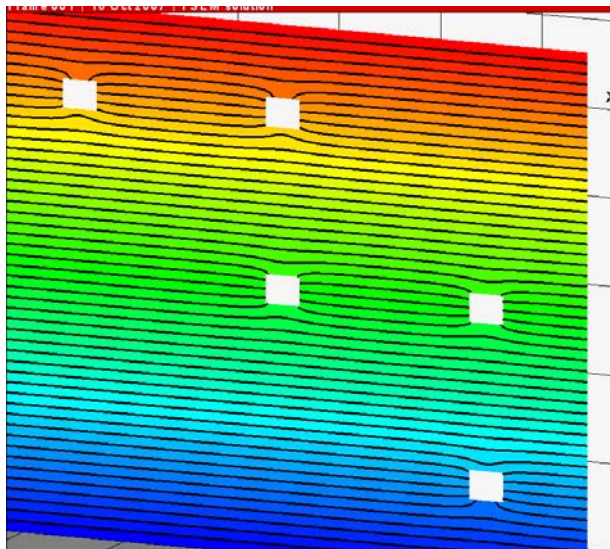


рис. 4 Потенциал $\varphi(x)$, $x \in \Omega$. Сечение области $\{0.5, x_2, x_3\}$

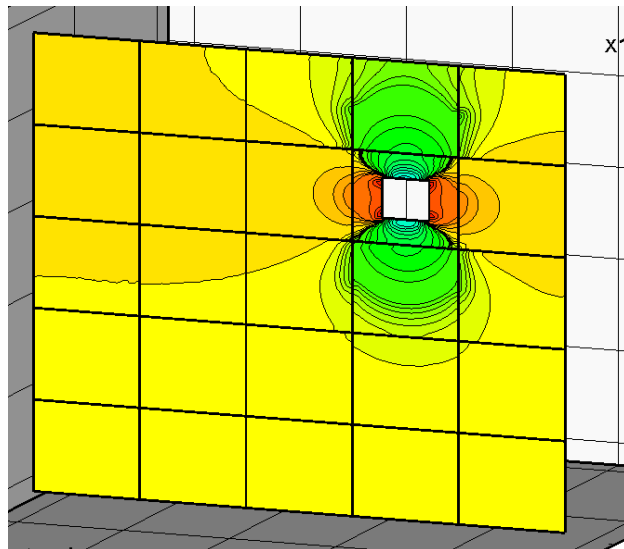


рис. 5 Плотность электрического тока $|j(x)|$, $x \in \Omega$. Области суперэлементов выделены

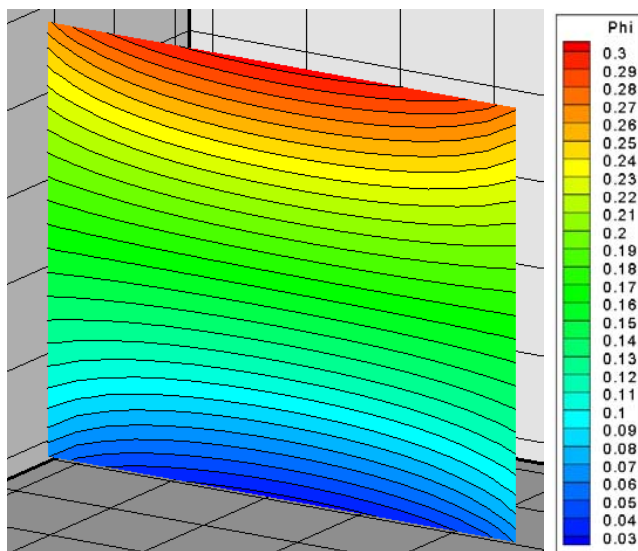


рис. 6 Потенциал $\varphi(x)$ в части области ω , занимаемой нижней порой, показанной на рис. 4 где L – длина ребра кубической области Ξ . Плотность электрического тока j^0 соответственно равна

$$j^0 = \sigma E^0 \equiv \left\{ 0, 0, \frac{\sigma}{L} \right\}^T \text{ в } \Xi. \quad (21)$$

Здесь $E^0 = \{E_1^0, E_2^0, E_3^0\}^T$, $j^0 = \{j_1^0, j_2^0, j_3^0\}^T$ – компоненты напряженности и плотности тока, соответствующие направлениям координатных осей Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 .

4.1 Способ I. Расчет работы электрического поля

Совершаемая электрическим полем в объеме $V = mes\Xi$ материала работа переходит в тепловую энергию. Количество тепла, выделяющегося в объеме V однородного проводника, согласно закону Джоуля - Ленца составляет

$$Q = \int_{\Xi} j E dV = \sigma \int_{\Xi} E^2 dV.$$

В свою очередь для однородного материала с искомым коэффициентом проводимости σ , полем $E^0 \equiv \{0, 0, 1/L\}^T$ и плотностью $j^0 \equiv \{0, 0, \sigma/L\}^T$

$$\int_{\Xi} j^0 E^0 dV = \sigma \int_{\Xi} (E^0)^2 dV = \sigma \frac{V}{L^2}.$$

Приравнивая полученные выражения, найдем следующее выражение для расчета усредненной проводимости σ :

$$Q = \int_{\Xi} j E dV = \sigma \frac{V}{L^2}. \quad (22)$$

4.2 Способ II. Расчет полного тока через сечение области

Поток плотности электрического тока через сечение площади S области Ω может быть выражен поверхностным интегралом вида:

$$\int_S j dS = \int_S j_1 dx_1 dx_2 + j_2 dx_3 dx_1 + j_3 dx_1 dx_2.$$

В качестве сечения S выберем границу $\partial\Omega_i$, расположенную перпендикулярно оси Ox_3 . Выбранное нами сечение есть граница расчетной области и в данном случае не проходит через поры. Тогда полный ток через сечение пористого материала равен

$$I = \int_S j dS = \int_S j_3 dx_1 dx_2 .$$

Полный ток через то же сечение для материала с усредненными характеристиками даст величину

$$\int_S j^0 dS = \frac{\sigma}{L} S .$$

Равенство потоков приводит к соотношению

$$\int_S j_3 dx_1 dx_2 = \sigma \frac{S}{L} , \quad (23)$$

откуда может быть найдена искомая проводимость σ .

4.3 Способ III. Расчет полного тока по множественным параллельным сечениям

Вычислим сумму полных токов по различным сечениям S_i области Ω , $i = 1, \dots, n_{fe}$, перпендикулярным оси Ox_3 . Расстояние между ними мало и равно шагу сетки h_{FE} , введенному ранее (разд. 0). Здесь $n_{fe} = K_E^{1/3} (N_{FE} / 6)^{1/3}$ равно числу ребер расчетной сетки, приходящихся на ребро области - куба Ξ . Полученное значение уточнит результат расчета, определенный предыдущим способом, где единственное сечение выбрано достаточно произвольно. Тогда для пористого материала получим

$$\sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{S_i} j dS_i = \sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{S_i} j_3 dx_1 dx_2 .$$

Для материала с усредненным коэффициентом σ в области Ξ с сечениями Ξ_i , $i = 1, \dots, n_{fe}$, соответственно имеем

$$\sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{\Xi_i} j^0 d\Xi_i = \sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{\Xi_i} j_3 dx_1 dx_2 = \sigma \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n_{fe}} \Xi_i .$$

Отсюда рассчитываем искомое значение σ :

$$\sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{S_i} j_3 dx_1 dx_2 = \sigma \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n_{fe}} \Xi_i , \quad (24)$$

Считаем h_{FE} постоянным по всей области. Тогда, т.к. $j = -\sigma \nabla \varphi$ – постоянная величина в пределах каждого сеточного тетраэдра, выражение (24) можно умножить на h_{FE} и получить

$$\sum_{i=1}^{n_{fe}} \int_{S_i \cdot h_{FE}} j_3 dx_1 dx_2 dx_3 = \sigma \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n_{fe}} \Xi_i \cdot h_{FE},$$

что приводит к формуле

$$\int_{V_\Omega} j_3 dV_\Omega = \sigma \frac{V}{L},$$

где $V_\Omega = mes(\Omega) = \sum_{i=1}^{n_{fe}} S_i \cdot h_{FE}$.

4.4 Способ IV. Сведение к поверхностному интегралу

Пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса, перепишем полученное соотношение следующим образом:

$$\int_{V_\Omega} j_3 dV_\Omega = \int_{V_\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dV_\Omega = \int_{\partial \Omega} \varphi \cdot n_3 d(\partial \Omega) = \sigma \frac{V}{L}.$$

Далее значение коэффициента проводимости σ рассчитываем из равенства:

$$\int_{\partial \Omega} \varphi \cdot n_3 d(\partial \Omega) = \sigma \frac{V}{L}, \quad (25)$$

где интегрирование по $\partial \Omega$ проходит как по части внешней границы области, так и по границам пор $\partial \omega$ в ней.

5 Результаты расчетов

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных для различных распределений и размеров пор в области. При этом использованы различные разбиения области на суперэлементы, шаги h_{FE} расчетной сетки, типы граничной интерполяции МКСЭ, разные значения проводимости σ^0 материала.

5.1 Зависимость средних проводимости σ и удельного сопротивления ρ от объемной пористости материала

В расчете использовано значение $\sigma^0 = 0.33$ исходного материала, отношение объема одной поры к единице объема области Ξ составляет 0.125.

В проведенных расчетах количество суперэлементов изменялось в пределах от $K_E = 8$ до $K_E = 216$, шаг расчетной сетки – от $h_{FE} = 1/32$ до $h_{FE} = 1/16$, использован простейший линейный метод интерполяции МКСЭ на двух или восьми граничных треугольниках на грани суперэлемента.

На рис. 7 показана зависимость средней проводимости σ от объемной пористости $V^{\%} = 100\% \cdot \text{mes}(\omega) / \text{mes}(\Xi)$. Различные графики представляют результаты различных способов расчета, описанных в разд. 4. Маркеры показывают рассчитанные значения для $V^{\%} \in [0, 5.556]$. Пунктирная линия дает прямую, проходящую через точки с координатами $(0, \sigma^0)$ и $(100, 0)$.

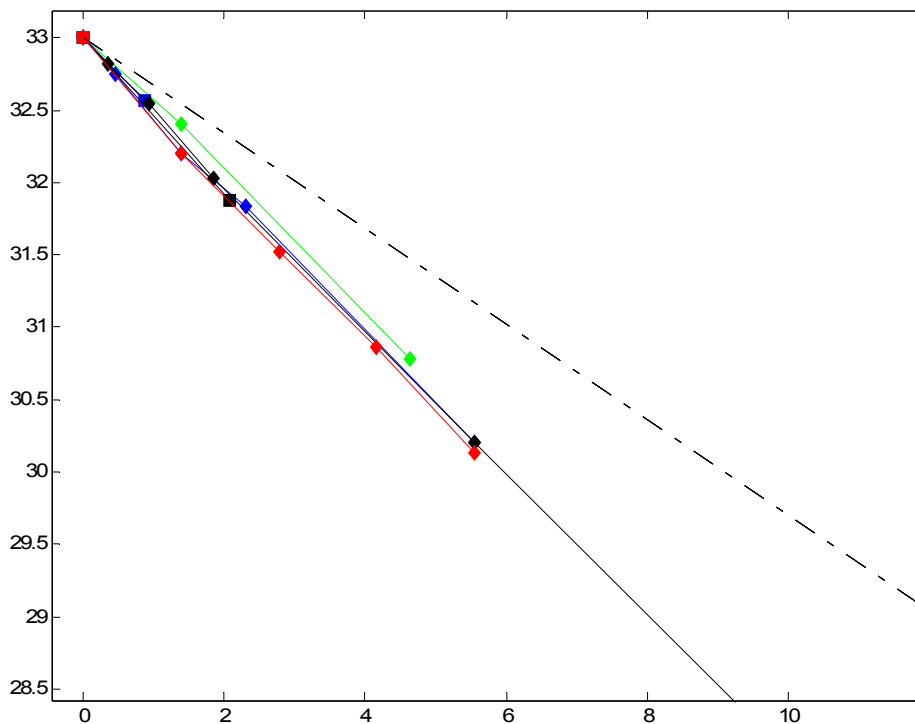
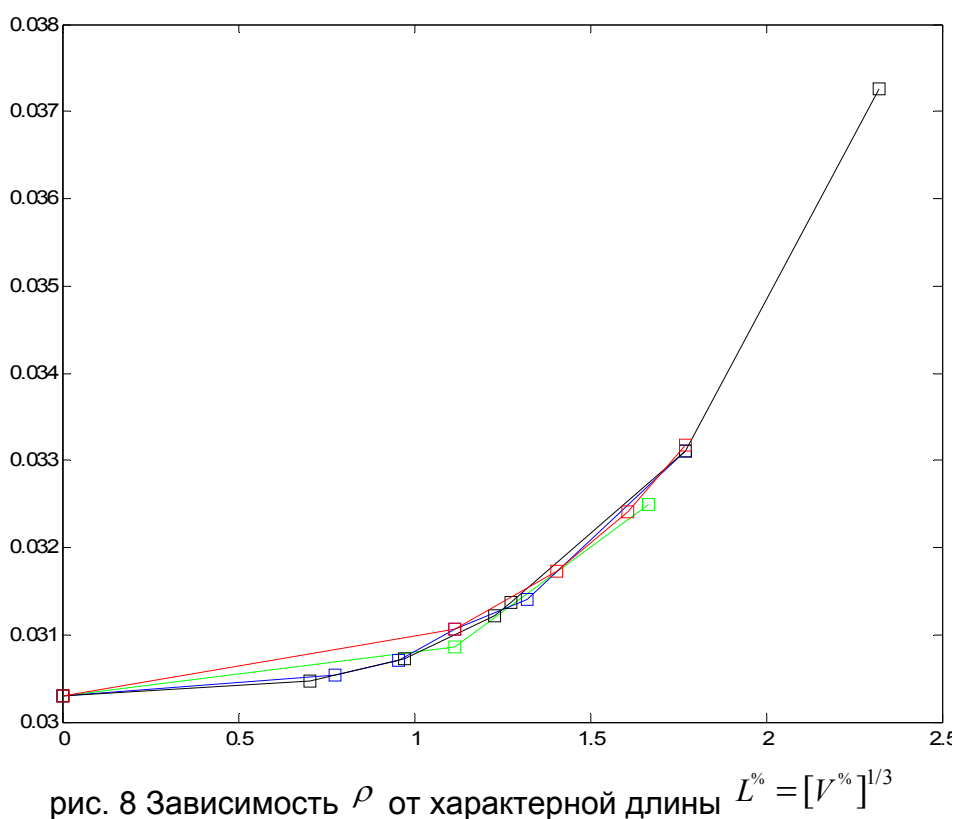


рис. 7 Зависимость σ от объемной пористости $V^{\%}$

На рис. 8 показана зависимость удельного сопротивления $\rho = 1/\sigma$ от характерного размера $L^{\%} = [V^{\%}]^{1/3}$ для пор в виде кубов малого размера.

Все полученные графики качественно сходятся в одну прямую, а различие значений, рассчитанных разными способами, невелико.

Приведем график зависимости проводимости σ от объемной пористости $V\%$ при бóльшем разбросе параметров. В частности, введем разброс в размерах пор в материале. Отношение объема поры к единице объема области Ξ может изменяться в промежутке от 0.0046 до 0.4219. Кроме этого, зависимость продолжена: показаны рассчитанные значения для промежутка $V\% \in [0, 42.188]$. Число суперэлементов K_E изменяется в расчетной области от 8 до 216, шаг расчетной сетки – от $h_{FE} = 1/36$ до $h_{FE} = 1/16$. Аппроксимация проведена для разных граничных интерполянтов (см. разд. 0) на числе треугольников от 2 до 18 по грани суперэлемента.



Разброс рассчитанных значений показан на рис. 9 и рис. 10. Результаты расчетов, полученных способами I и IV, приведены на рис. 9. Они практически совпадают и хорошо ложатся на одну линию.

На рис. 10 приведены результаты всех описанных в разд. 4 способов рас-

чета. Способы II и III дают отклонение от результатов других вариантов. При этом способ II дает максимальное локальное отклонение, равное 0.02.

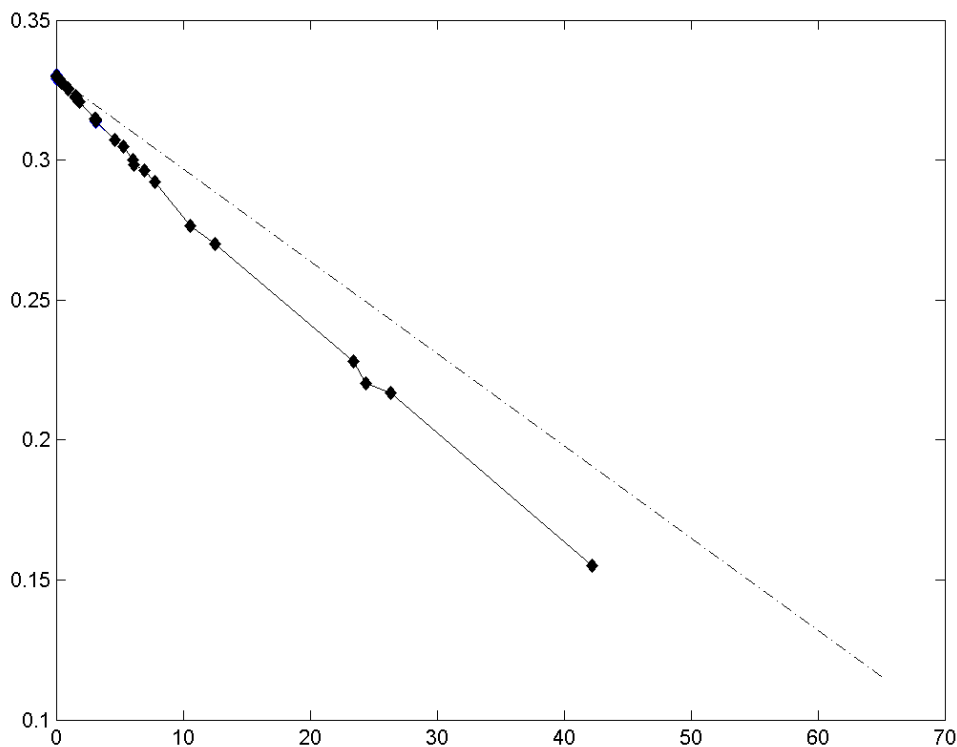


рис. 9 Зависимость σ от объемной пористости $V\%$. Способы расчета I, IV

5.2 Зависимость σ от размера полости

Приведем зависимость средней проводимости от размера пор в материале. Значение проводимости материала $\sigma^0 = 0.33$. Поры одинаковы. При этом отношение объема одной поры к единице объема области Ξ варьируется в промежутке от 0.0046 до 0.4219.

Число суперэлементов $K_E = 27$, шаг расчетной сетки изменяется от $h_{FE} = 1/32$ до $h_{FE} = 1/16$, использован линейный способ граничной интерполяции по двум треугольникам на грани суперэлемента. Зависимость для случая наличия в материале одной поры показана на рис. 11 – рис. 12. Расчеты проведены I, II, IV способами. Совпадение рассчитанных способами I, IV значений показано на рис. 11. Максимальное отклонение расчетных значений наблюдается на рис. 12 и составляет $6 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 13 показаны аналогичные зависимости для двух пор в области в

расчетах с количеством суперэлементов $K_E = 8$.

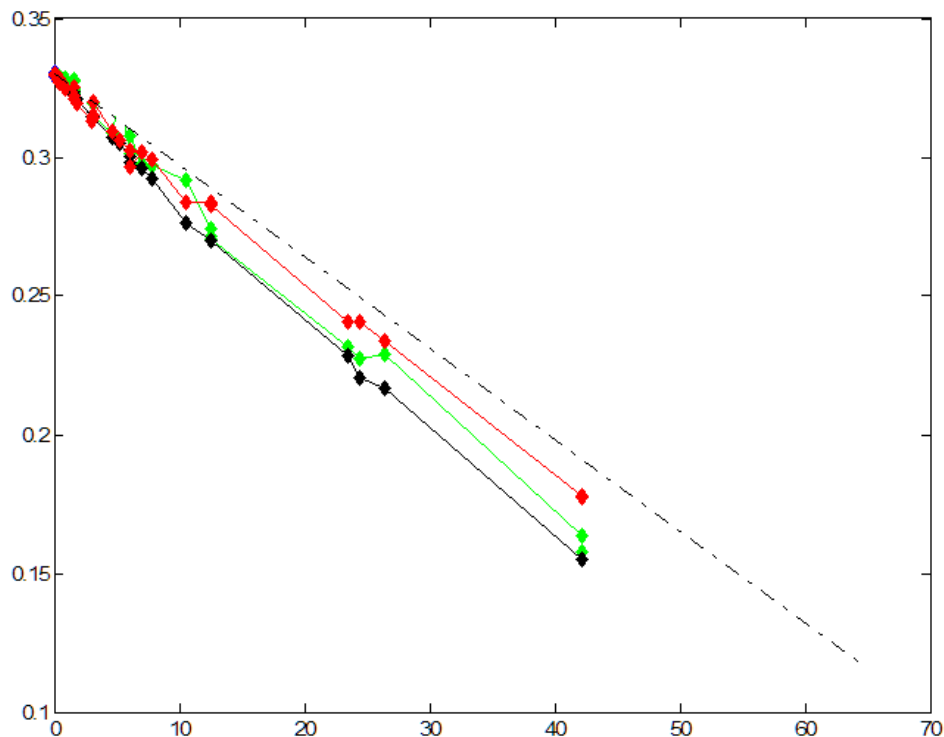


рис. 10 Зависимость σ от объемной пористости $V\%$. Способы расчета I – IV

5.3 Зависимость от проводимости материала σ^0

На рис. 14 представлены зависимости искомой средней проводимости от величины проводимости материала σ^0 . Последняя величина изменяется в пределах $\sigma^0 \in [0.33, 1.5]$. Используются I, II и IV способы расчета. Видно, что графически их результаты практически совпадают.

Параметры данных расчетов являются следующими: число суперэлементов – $K_E = 27$, характерный размер шага сетки – $h_{FE} = 1/16$, метод интерполяции на границе – сокращенный кубический по двум треугольникам на грани, число пор – 5, их объем – 0.125 по отношению к объему области Ξ .

На рис. 15 показана зависимость среднего удельного сопротивления ρ от $\sigma^0 \in [0.33, 1.5]$ при тех же параметрах МКСЭ и данных о порах в материале.

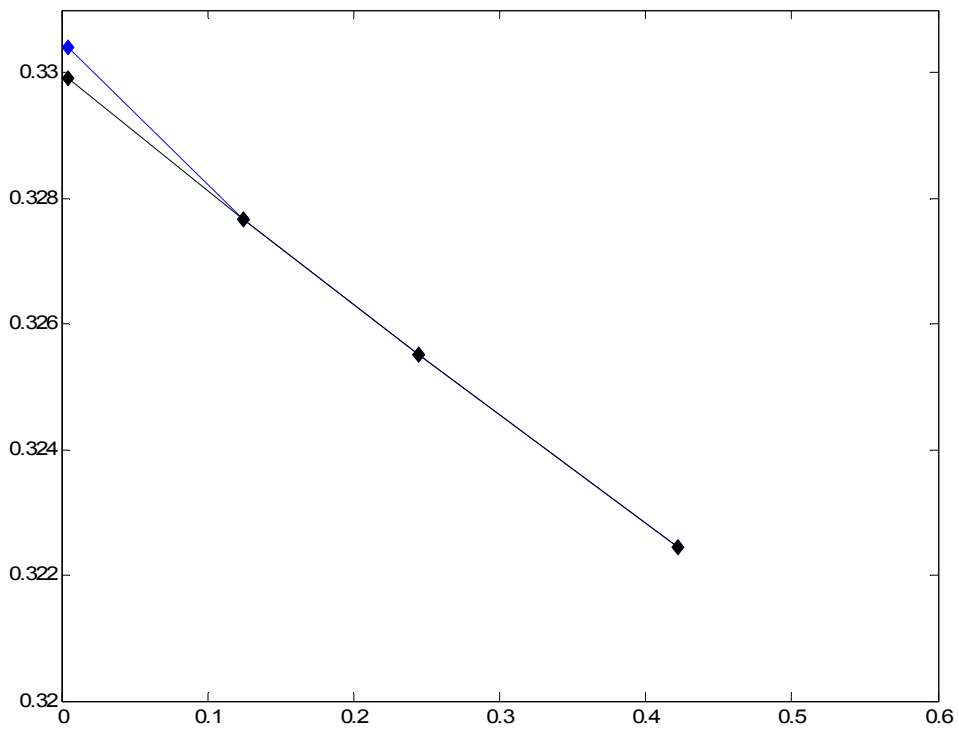


рис. 11 Зависимость σ от размера поры. Способы расчета I и IV. Одна пора

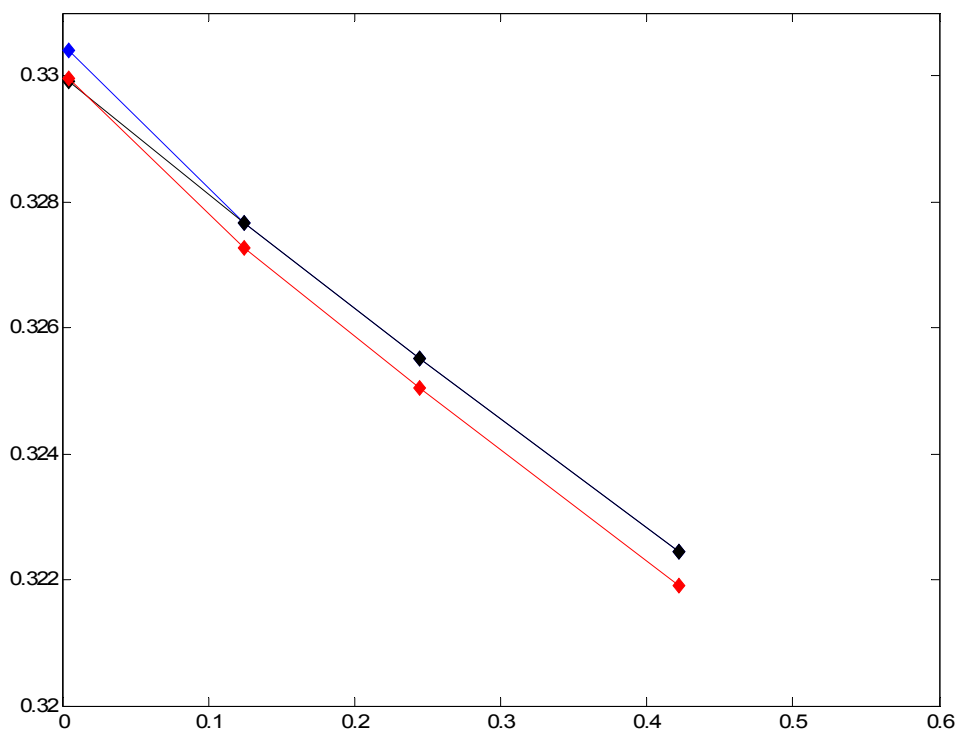


рис. 12 Зависимость σ от размера поры. Способы расчета I, II, IV. Одна пора

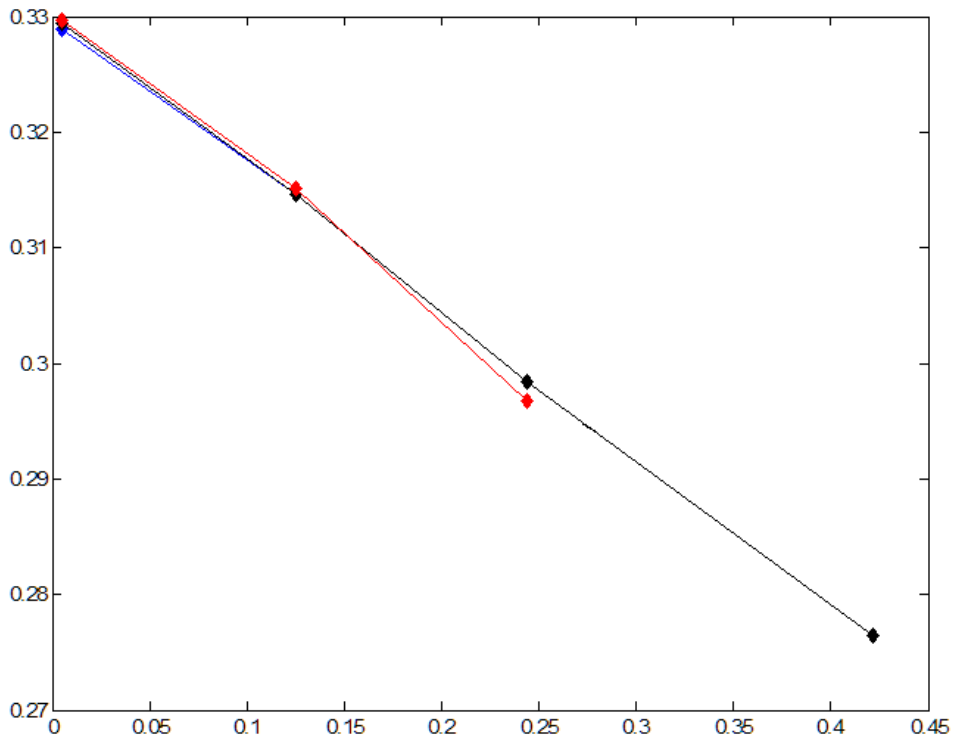


рис. 13 Зависимость σ от размера поры. Способы расчета I, II, IV. Две поры

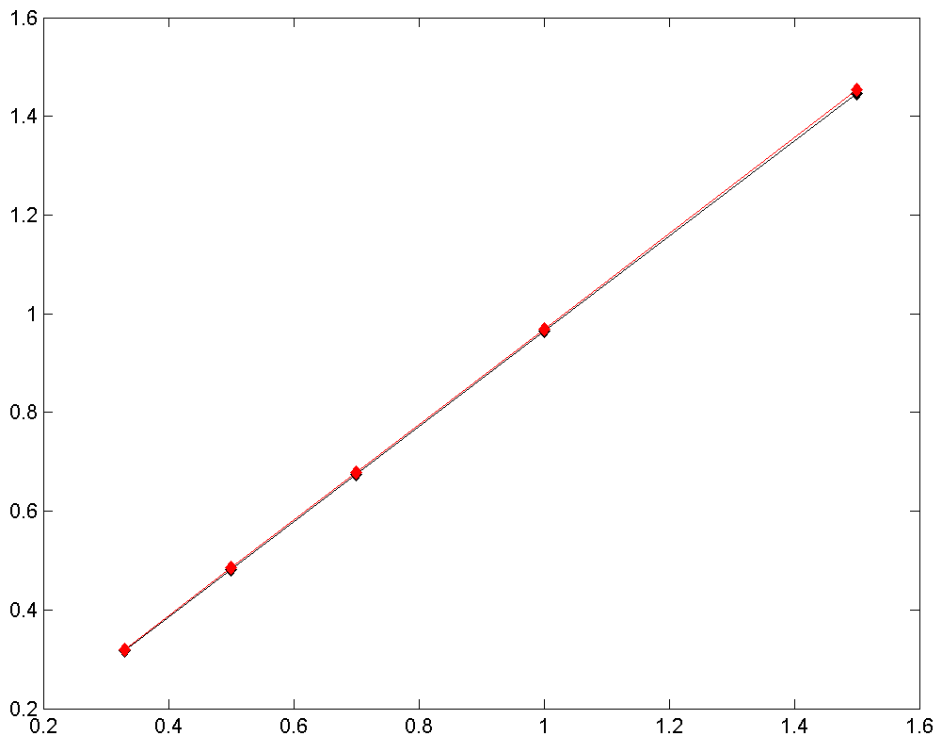


рис. 14 Зависимость σ от σ^0 . Способы расчета I, II, IV

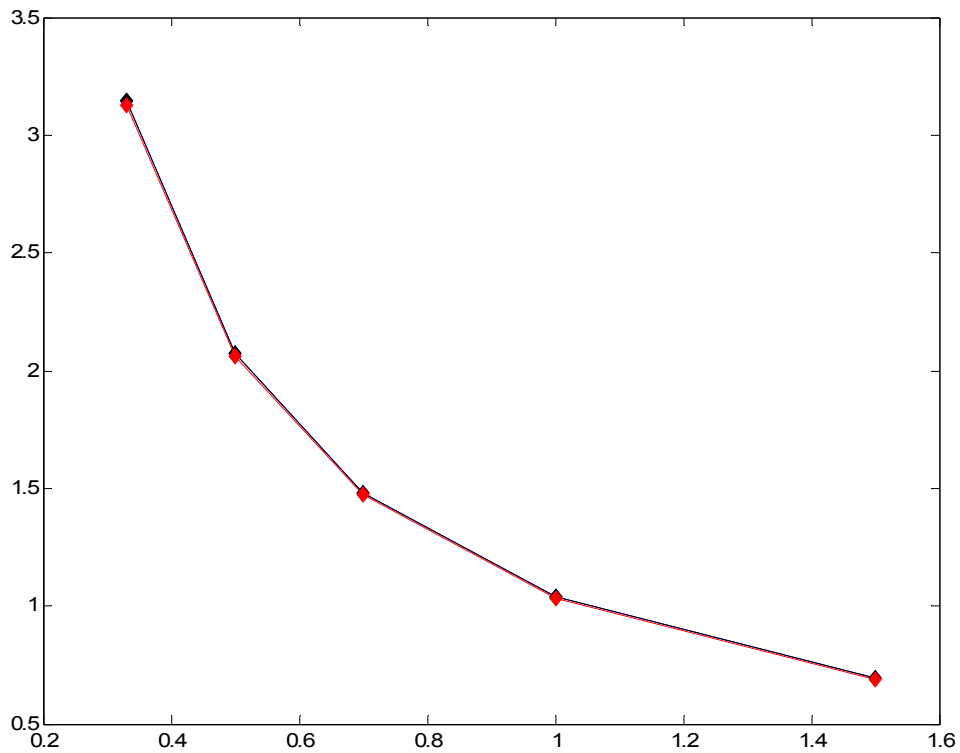


рис. 15 Зависимость ρ от σ^0 . Способы расчета I, II, IV

5.4 Зависимость от числа суперэлементов

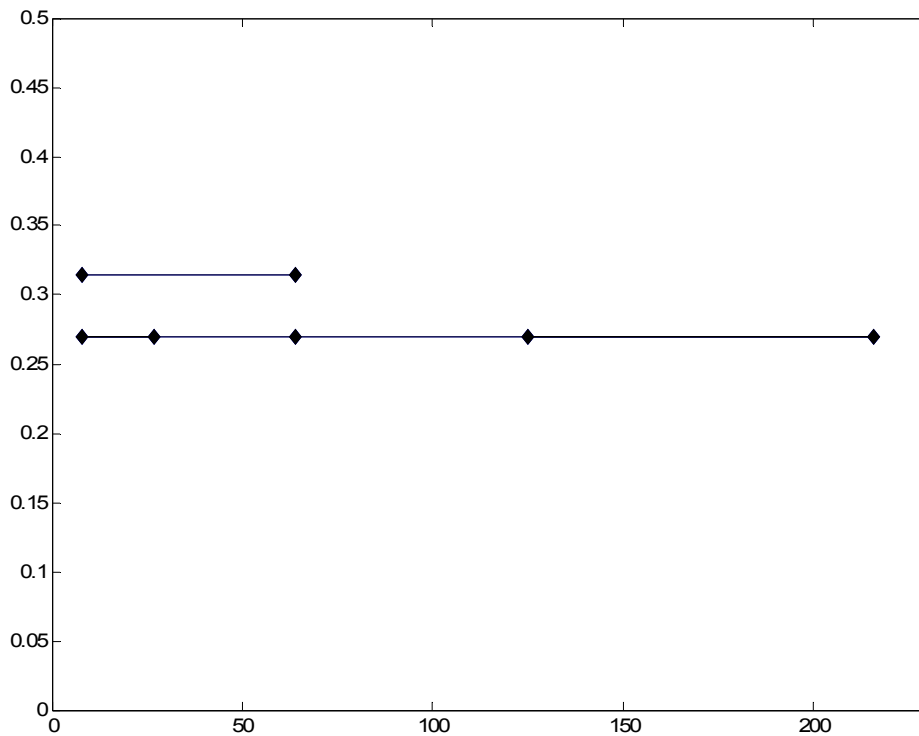


рис. 16 Зависимость σ от числа K_E . Способы расчета I и IV

Покажем, что при изменении числа суперэлементов в расчетной области искомое среднее значение σ практически неизменно. В данной группе расче-

тов $\sigma^0 = 0.33$, отношение объема одной поры к единице объема области Ξ составляет 0.125, шаг сетки – $h_{FE} = 1/16$, вид граничной интерполяции – линейный по двум треугольникам на грани.

На рис. 16 и рис. 17 показаны расчетные зависимости, из которых верхняя прямая соответствует количеству пор K_E , а нижняя – суммарному числу $0.25 \cdot K_E$ пор в материале. Максимальный разброс полученной проводимости при изменении числа суперэлементов в области составляет $5 \cdot 10^{-3}$ для I, IV способов расчетов и $9 \cdot 10^{-4}$ – для II и III вариантов.

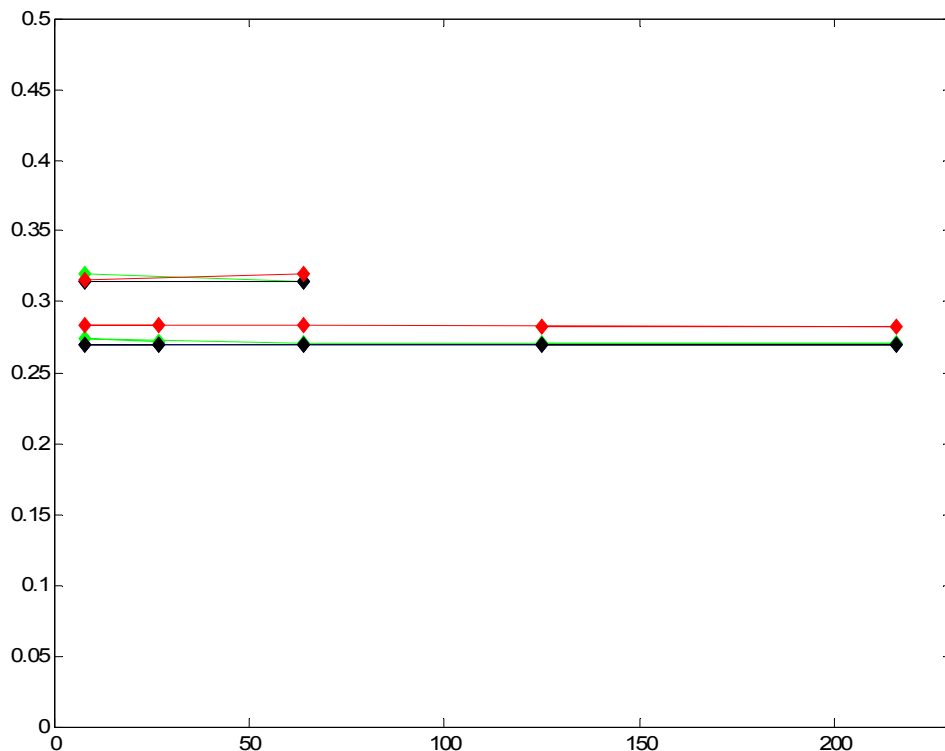


рис. 17 Зависимость σ от числа K_E . Способы расчета I – IV

5.5 Зависимость от способа граничной интерполяции МКСЭ

Результаты расчетов показывают, что при изменении метода граничной интерполяции МКСЭ, а также числа треугольников, на которых она проведена, величина σ также практически не меняется. Это связано с достаточной гладкостью тестового решения в окрестностях границ суперэлементного разбиения.

Различные способы граничной интерполяции МКСЭ, показанные в разд. 0, требуют различного числа суперэлементных узлов P_i в области Ω . Их число

совпадает с числом искомым параметров разложения решения a_i .

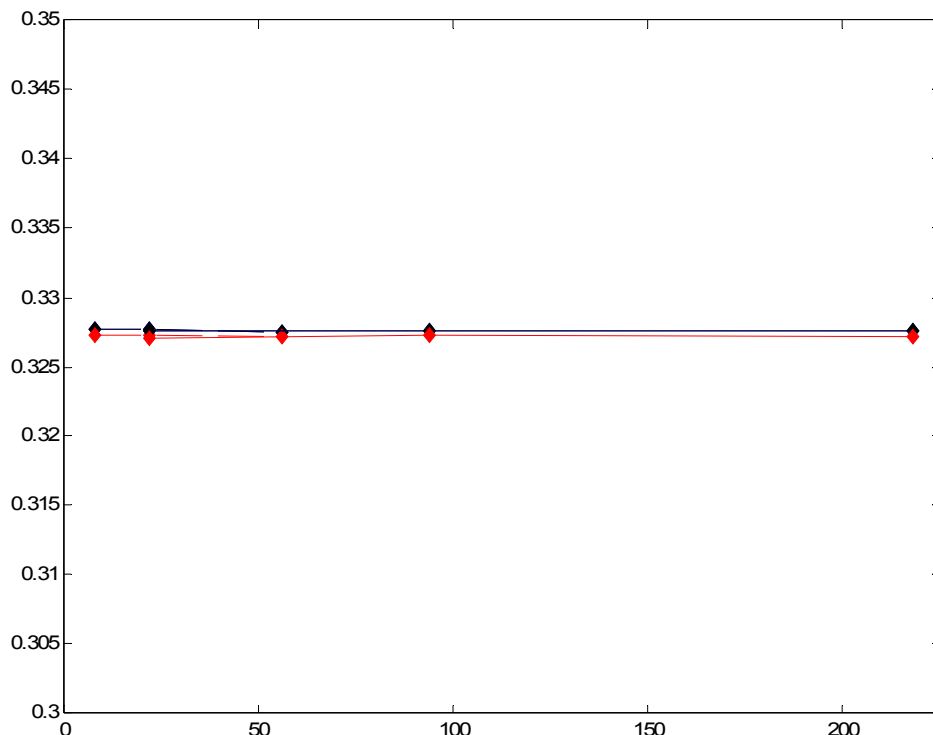


рис. 18 Зависимость σ от граничной интерполяции МКСЭ. Способы расчета I, II, IV.
Зависимость σ от числа узлов в одном суперэлементе

Зависимость проводимости σ от числа узлов P_i в одном суперэлементе приведена на рис. 18. Здесь $\sigma^0 = 0.33$, $K_E = 27$, $h_{FE} = 1/16$, число пор – 1, отношение объема одной поры к единице объема области Ξ составляет 0.125. Число треугольников на грани суперэлемента составляет от 2-х до 18-ти.

5.6 Зависимость проводимости от расположения пор в области

Расчеты проведены для значений $\sigma^0 = 0.33$, $K_E = 27$, $h_{FE} = 1/16$, число пор – 26, отношение объема одной поры к единице объема области Ξ составляет 0.125, метод граничной интерполяции - сокращенный кубический на 2-х треугольниках. Поры разбросаны по области случайным образом.

Графики, показывающие значения рассчитанных σ для каждого из вариантов расположения пор, показаны на рис. 19. Расчеты σ проведены I – IV способами. Максимальный разброс в пределах одного из них составляет $7 \cdot 10^{-4}$ для II варианта расчета и $1 \cdot 10^{-4}$ – для остальных.

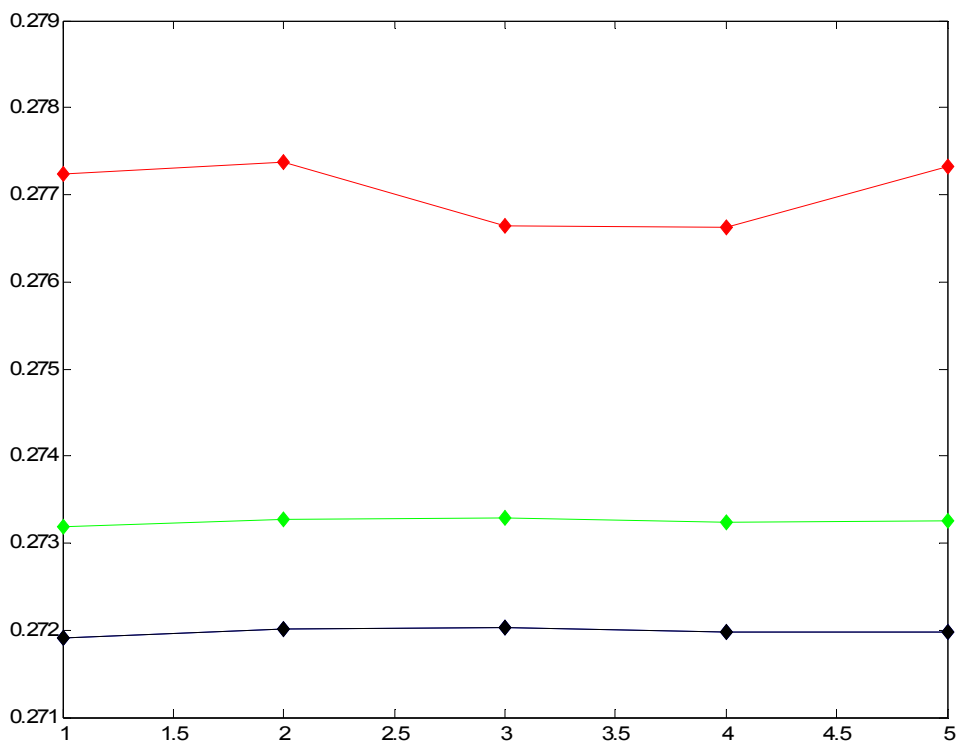


рис. 19 Зависимость σ от варианта распределения пор. Способы расчета I – IV

5.7 Данные о числовых значениях

Набор данных о полученных числовых значениях можно представить в виде таблицы в зависимости от объемной пористости $V\%$.

$V\%$	σ , сп. I	σ , сп. II	σ , сп. III	σ , сп. VI	% поры на ед. об.	Кол. K_E	Кол. пор	Тэтр. на СЭ	Инт. Тип	Кол. треуг	σ^0
0.002143	0.329360	0.330315	0.329992	0.330013	0.004630	216	1	279936	1	12	0.33
0.017147	0.329337	0.330206	0.329916	0.329925	0.004630	27	1	279936	1	12	0.33
0.017147	0.329333	0.330395	0.329916	0.329959	0.004630	27	1	279936	1	48	0.33
0.057870	0.329342	0.329178	0.329708	0.329802	0.004630	8	1	279936	1	12	0.33
0.115741	0.329094	0.328975	0.329412	0.329656	0.004630	8	2	279936	1	12	0.33
0.171468	0.328573	0.329081	0.329129	0.329227	0.004630	27	10	279936	1	12	0.33
0.214335	0.328405	0.328891	0.328910	0.329447	0.004630	216	100	279936	1	12	0.33
0.222908	0.328434	0.328684	0.328867	0.329022	0.004630	27	13	279936	3	12	0.33
0.289352	0.328348	0.328223	0.328529	0.328708	0.004630	8	5	279936	1	12	0.33
0.428669	0.327523	0.327632	0.327820	0.328356	0.004630	27	25	279936	1	12	0.33
0.462963	0.327769	0.327589	0.327646	0.328292	0.004630	8	8	279936	1	12	0.33
0.462963	0.329232	0.327709	0.327711	0.327247	0.125000	27	1	24576	1	12	0.33
0.462963	0.329189	0.327666	0.327666	0.327272	0.125000	27	1	24576	1	48	0.33
0.462963	0.329101	0.327566	0.327571	0.327085	0.125000	27	1	24576	2	12	0.33
0.462963	0.329136	0.327612	0.327613	0.327311	0.125000	27	1	24576	2	48	0.33
0.462963	0.329134	0.327610	0.327613	0.327209	0.125000	27	1	24576	2	108	0.33

0.462963	0.329079	0.327540	0.327548	0.327224	0.125000	27	1	24576	1	108	0.33
0.904225	0.328477	0.325512	0.325512	0.325055	0.244141	27	1	24576	1	48	0.33
0.925926	0.326802	0.325293	0.325290	0.324963	0.125000	27	2	24576	1	48	0.33
1.562500	0.327301	0.322189	0.322191	0.325262	0.125000	8	1	24576	1	12	0.33
1.562500	0.327846	0.322853	0.322818	0.321072	0.421875	27	1	196608	1	12	0.33
1.562500	0.327567	0.322453	0.322450	0.321903	0.421875	27	1	24576	1	48	0.33
1.808449	0.323699	0.320772	0.320772	0.319660	0.244141	27	2	24576	1	48	0.33
2.314815	0.319634	0.318152	0.318156	0.319625	0.125000	27	5	24576	3	12	0.33
2.314815	0.484292	0.482048	0.482050	0.484600	0.125000	27	5	24576	3	12	0.50
2.314815	0.678012	0.674868	0.674875	0.677988	0.125000	27	5	24576	3	12	0.70
2.314815	0.968584	0.964096	0.964099	0.969199	0.125000	27	5	24576	3	12	1.00
2.314815	1.452871	1.446145	1.446145	1.454328	0.125000	27	5	24576	3	12	1.50
3.051758	0.324548	0.314646	0.314645	0.313111	0.244141	8	1	24576	1	48	0.33
3.125000	0.319666	0.314670	0.314671	0.315102	0.125000	8	2	24576	1	12	0.33
3.125000	0.319371	0.314389	0.314383	0.313838	0.421875	27	2	24576	1	48	0.33
3.125000	0.314467	0.313846	0.313853	0.320116	0.125000	64	16	24576	1	48	0.33
4.629630	0.308560	0.307136	0.307133	0.309077	0.125000	27	10	24576	1	12	0.33
5.273438	0.321950	0.304944	0.304965	0.305987	0.421875	8	1	196608	1	12	0.33
6.018519	0.301579	0.300184	0.300183	0.302483	0.125000	27	13	24576	3	12	0.33
6.103516	0.307741	0.298355	0.298350	0.296738	0.244141	8	2	24576	1	48	0.33
6.944444	0.297600	0.296223	0.296222	0.301623	0.125000	27	15	24576	1	12	0.33
7.812500	0.296900	0.292260	0.292261	0.299259	0.125000	8	5	24576	1	12	0.33
10.546875	0.291877	0.276452	0.276480	0.283691	0.421875	8	2	196608	1	12	0.33
12.037037	0.273182	0.271917	0.271918	0.277239	0.125000	27	26	24576	3	12	0.33
12.037037	0.273275	0.272009	0.272011	0.277371	0.125000	27	26	24576	3	12	0.33
12.037037	0.273296	0.272033	0.272032	0.276637	0.125000	27	26	24576	3	12	0.33
12.037037	0.273244	0.271981	0.271981	0.276632	0.125000	27	26	24576	3	12	0.33
12.037037	0.273247	0.271981	0.271983	0.277327	0.125000	27	26	24576	3	12	0.33
12.500000	0.274460	0.270171	0.270171	0.283849	0.125000	8	8	24576	1	12	0.33
12.500000	0.271428	0.270170	0.270171	0.283719	0.125000	27	27	24576	1	12	0.33
12.500000	0.271414	0.270158	0.270159	0.283307	0.125000	27	27	24576	1	48	0.33
12.500000	0.274440	0.270152	0.270153	0.283278	0.125000	8	8	24576	1	48	0.33
12.500000	0.270689	0.270161	0.270162	0.283179	0.125000	64	64	24576	1	48	0.33
12.500000	0.270320	0.270165	0.270165	0.282635	0.125000	216	216	24576	1	48	0.33
12.500000	0.270432	0.270163	0.270163	0.282949	0.125000	125	125	24576	1	48	0.33
23.437500	0.231854	0.228214	0.228217	0.240718	0.421875	27	15	196608	1	12	0.33
24.414063	0.227197	0.220263	0.220264	0.240471	0.244141	8	8	24576	1	48	0.33
26.367188	0.228941	0.216862	0.216874	0.233868	0.421875	8	5	196608	1	12	0.33
42.187500	0.163642	0.155012	0.155008	0.177661	0.421875	8	8	196608	1	12	0.33
42.187500	0.157474	0.155013	0.155009	0.177285	0.421875	27	27	196608	1	12	0.33

Заключение

Работа посвящена применению метода конечных суперэлементов Федоренко для расчета распределений электрического потенциала и плотности тока в проводящих объектах. Материал таких объектов содержит малые диэлектрические поры. Область, занятая проводником, составляет значительную величину по сравнению с областью, занятой порами. На примере модельной задачи реализованы различные варианты МКСЭ. Исследованы зависимости искомого решения от величин объемной пористости, проводимости среды, размеров полостей в материале. Показаны зависимости, имеющие непосредственное отношение к исследуемому методу: удельной проводимости от изменения числа суперэлементов в области, от способа граничной интерполяции и различного взаимного расположения пор. Получены необходимые данные о численных значениях. МКСЭ показывает свою эффективность при правильном выборе способа построения и реализации аппроксимаций.

Список литературы

1. *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 950-960.
2. *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1987. 171. 26 с.
3. *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1994. 97. 26 с.
4. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд - во МФТИ. 1994. 528 с.
5. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43, № 5. С. 713-729.

6. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Метод конечных суперэлементов в задачах математической физики в неоднородных областях // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. № 3. С. 34 - 49.
7. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Совместное использование метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46, № 2. С. 270 – 283.
8. *Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б.* Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. № 79. 30 с.
9. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Метод конечных суперэлементов для задачи о скоростном скин – слое // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2004. № 3. 32 с.
10. *Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б.* Метод конечных суперэлементов для решения трехмерных задач теории упругости. Численное исследование // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 44. 28 с.
11. *Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б.* Качественный анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // Тезисы всероссийской конференции по вычислительной математике “КВМ – 2007”, 18 – 20 июня, 2007, Академгородок, Новосибирск, Россия, с. 23.
12. *Galanin M., Savenkov E., Temis J.* Finite Superelements Method for Elasticity Problems. // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2005. V. 10. N 3. P. 237 – 246.
13. *Galanin M., Lazareva S., Savenkov E.* Fedorenko Finite Superelement Method and its Applications // *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2007. V. 7, N 1. P. 3 – 24.
14. *Galanin M., Lazareva S., Savenkov E.* Numerical investigation of the Finite Superelement Method for the 3D elasticity problems // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2007. V. 12, N 1. P. 39 – 50.