



Брюно А.Д., Варин В.П.

Семейства с и  $i$   
периодических решений  
ограниченной задачи при  $\mu$   
 $= 5 \cdot 10^{-5}$

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д., Варин В.П. Семейства с и  $i$  периодических решений ограниченной задачи при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 22. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-22>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, В.П. Варин

СЕМЕЙСТВА  $c$  И  $i$   
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ  
ПРИ  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$

Москва, 2008 г.

А.Д. Брюно, В.П. Варин. Семейства  $c$  и  $i$  периодических решений ограниченной задачи при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел при значении массового параметра  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Вычислены два семейства периодических решений: семейство  $c$ , выходящие из коллинеарной неподвижной точки  $L_1$ , и начальная часть семейства  $i$ , которое начинается прямыми круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела большей массы. Вычисленные семейства весьма близки к порождающим, описанным нами ранее. В частности, подтверждено существование предсказанной зигзагообразной структуры характеристик семейства  $i$ . Обнаружены новые свойства плоского и вертикального следов.

A.D. Bruno, V.P. Varin. The families  $c$  and  $i$  of periodic solutions of the restricted problem for  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2008.

We consider the plane circular restricted three-body problem for the mass parameter value  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . We computed two families of periodic solutions: the family  $c$  originating at the collinear stationary point  $L_1$ , and an initial part of the family  $i$  which begins with the direct circular orbits of infinitely small radius around the body of bigger mass. The computed families are very close to the generating ones described by us in earlier studies. In particular, we confirmed the existence of the predicted zigzag structure of characteristics of the family  $i$ . We found new properties of the plane and the vertical traces.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.  
Москва, 2008 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: bruno@keldysh.ru, varin@keldysh.ru  
http: www.keldysh.ru

(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

## § 1. Введение

Пусть три точечных тела  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  движутся в одной плоскости под действием закона тяготения Ньютона. Тела  $P_1$  и  $P_2$  имеют массы  $m$  и  $m_2$  соответственно, а масса тела  $P_3$  настолько мала, что ее влиянием на тела  $P_1$  и  $P_2$  можно пренебречь. Будем говорить, что масса тела  $P_3$  равна нулю. Тогда тело  $P_2$  совершает кеплерово движение относительно тела  $P_1$ . Если тело  $P_2$  движется по окружности, то задача о движении тела  $P_3$  называется плоской круговой ограниченной задачей трех тел, коротко – ограниченной задачей.

Будем считать, что единицы массы, времени и расстояния выбраны так, что сумма  $m + m_2$ , гравитационная постоянная, расстояние  $P_1P_2$  и угловая скорость  $P_2$  относительно  $P_1$  равны единице. Единственным параметром тогда будет  $\mu = m_2/(m + m_2) \in [0, 1/2]$ . Если ввести вращающуюся вместе с  $P_2$  систему координат, то в этой (синодической) системе координат с центром в  $P_1$  положение  $x_1, x_2$  тела  $P_3$  описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром  $\mu$  (Брюно, 1990), гл. III, § 1:

$$\dot{x}_j = \partial H / \partial y_j, \quad \dot{y}_j = -\partial H / \partial x_j, \quad j = 1, 2, \quad \dot{\phantom{x}} = d/dt, \quad (1)$$

где

$$H = H_0 + \mu R, \quad H_0 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - r^{-1}, \quad (2)$$

$$R = r^{-1} + x_1 - r_2^{-1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2},$$

и точка над символом означает дифференцирование по времени  $t$ .

При  $\mu \neq 0$  задача не интегрируется в конечном виде. При  $\mu = 0$  задача интегрируется и можно описать все ее решения, что сделано в (Брюно, 1990), гл. III-VI. Фазовое пространство этой задачи при  $\mu = 0$  устроено сложно из-за столкновений тела  $P_3$  с телом  $P_2$ . При  $\mu > 0$  эти столкновения вызывают сингулярные возмущения, приводящие к дальнейшему усложнению строения фазового пространства. При этом наибольший интерес представляют семейства периодических решений, ибо они образуют как бы скелет некоторой части фазового пространства. При фиксированном значении параметра  $\mu$  периодические решения системы Гамильтона образуют однопараметрические семейства; при переменном  $\mu$  – двухпараметрические.

Орбита – это проекция решения  $x_j(t), y_j(t)$ ,  $j = 1, 2$  системы (1) на плоскость  $x_1, x_2$ . Будем называть глобальной кратностью синодического периодического решения число оборотов его орбиты вокруг тела  $P_1$ . И хотя кратность может изменяться вдоль семейства при переходе через орбиту столкновения  $P_3$  с  $P_1$ , она удобна для классификации семейств. Если пересекаются два семейства периодических решений и периоды на одном семействе в  $q$  раз боль-

ше периодов на другом семействе, то будем говорить, что первое семейство имеет локальную кратность  $q$ .

Система (1) переходит в себя при подстановке

$$t, x_1, x_2, y_1, y_2 \longrightarrow -t, x_1, -x_2, -y_1, y_2, \quad (3)$$

которая является ее симметрией. При симметрии (3) плоскость  $x_2 = y_1 = 0$  является инвариантной и называется (Брюно, 1990), гл. III плоскостью симметрии  $\Pi$ . Решения системы (1), переходящие в себя при подстановке (3), являются симметричными. Симметричное периодическое решение два раза пересекает плоскость симметрии. По этим пересечениям удобно отслеживать взаимные положения таких решений.

Семейство периодических решений системы (1) при фиксированном значении параметра  $\mu$  называется натуральным, если оно продолжено в обе стороны до естественных концов, которыми могут быть окончание в неподвижной точке или на другом семействе периодических решений, стягивание орбиты в точку или ее уход в бесконечность, стремление периода к нулю или бесконечности.

В (Брюно, Варин, 2008) была предложена программа изучения натуральных семейств периодических решений ограниченной задачи через их порождающие семейства, т.е. пределы семейств при  $\mu = 0$ . Дело в том, что порождающие семейства можно описать теоретически (Брюно, 1990; Непон, 1977, 2001) и относительно просто вычислить. Тогда при малых  $\mu$  семейства периодических решений являются регулярными и сингулярными возмущениями порождающих семейств. В (Брюно, Варин, 2007) приведены четыре предельные задачи, существующие при  $\mu \rightarrow 0$ : задача двух тел  $P_1$  и  $P_2$ , задача Хилла, промежуточная задача Хенона и основная предельная задача, которая описывается системой (1), (2) при  $\mu = 0$ .

В (Брюно, Варин, 2008) в рамках предложенной там программы были изучены два порождающих семейства: семейство  $s$ , выходящие из коллинеарной неподвижной точки Лагранжа  $L_1$ , и семейство  $i$ , начинающееся прямыми круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела большей массы  $P_1$ .

В настоящей работе мы изучаем (вычисляем) эти же семейства  $s$  и  $i$  при малом  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . При этом используются методы и обозначения, описанные в (Брюно, Варин, 2008). А именно, результаты вычислений приводятся в виде характеристик семейств на плоскости симметрии  $\Pi$  в разных координатах, описанных в (Брюно, Варин, 2008). Среди орбит выделяются критические.

Но здесь мы используем и новшество: *униформизацию семейств*, которая состоит в следующем. При фиксированном  $\mu$  на семействе выделяется начальная орбита  $M_0$  и направление отсчета униформизирующего параметра

$\Sigma$  так, чтобы между орбитами семейства и параметром  $\Sigma$  имелось взаимно однозначное соответствие. В качестве параметра  $\Sigma$  мы берем глобальную вариацию константы Якоби  $C$  вдоль семейства. Величина  $\Sigma$  вычисляется следующим образом. Пусть  $C_1, \dots, C_k$  суть экстремумы константы Якоби  $C$  между орбитами  $M_0$  и  $M$ , тогда

$$\Sigma = \pm \left( \sum_{j=1}^k |C_j - C_{j-1}| + |C - C_k| \right), \quad (4)$$

где  $C_0$  и  $C$  суть значения константы Якоби на орбитах  $M_0$  и  $M$  соответственно, и знак в формуле (4) выбирается в зависимости от направления отсчета  $\Sigma$  до орбиты  $M$ .

Теперь все величины, связанные с орбитами семейства, такие как константа Якоби  $C$ , нормированный период  $\tilde{T} = T/(2\pi)$ , плоский и вертикальный следы  $\text{Tr}$  и  $\text{Tr}_v$  можно изображать как функции от параметра  $\Sigma$ . Это существенно облегчает их сравнение при разных  $\mu$ .

Напомним, что в таблицах и рисунках используется модифицированный след

$$\tilde{\text{Tr}} = \begin{cases} \text{Tr}, & \text{если } |\text{Tr}| \leq 2, \\ (1 + \log_2 |\text{Tr}|) \text{sign Tr}, & \text{если } |\text{Tr}| > 2 \end{cases}$$

и аналогично для вертикального модифицированного следа  $\tilde{\text{Tr}}_v$ .

## § 2. Семейство $c$ при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$

Натуральное семейство  $c$  выходит из неподвижной коллинеарной точки  $L_1$  и заканчивается как локально двукратное на семействе  $h$ .

При  $\mu = 0$  порождающее семейство  $c$  состоит из двух частей: семейства  $c$  задачи Хилла и семейства  $c$  основной предельной задачи (т.е. ограниченной задачи с  $\mu = 0$ ). Будем их обозначать  $c'$  и  $c''$  соответственно.

Семейство  $c$  задачи Хилла вычислено в (Henon, 1969), а в (Henon, 1974) вычислены значения вертикального следа  $\text{Tr}_v$  на нем. В работах (Bruno, 1994; Брюно, 1996; Брюно, Варин, 2007) показаны характеристики семейства  $c$  задачи Хилла в координатах

$$\xi_1 = (x_1 - 1)/\mu^{1/3}, \quad \eta_2 = (y_2 - 1)/\mu^{1/3}.$$

На этих рисунках видно, что из точки  $L_1$  выходят две характеристики: одна идет вверх, а другая — вниз. Обе расположены слева от тела  $P_2$ . Верхняя характеристика удаляется от тела  $P_2$ , а нижняя приближается к нему.

Семейство  $c''$  при  $\mu = 0$  описано в (Брюно, Варин, 2008). На участке  $c'$  (т.е. на семействе  $c$  задачи Хилла) нормированный период  $\tilde{T}$  возрастает до

значения  $\tilde{T} = 1.406729$ . На участке  $c''$  нормированный период  $\tilde{T}$  убывает от этого значения.

При  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  критические орбиты  $M_k$  семейства  $c$  приведены в Табл. 1. В ее первом столбце указан номер  $k$  орбиты, затем начальные значения  $x_1(0)$ ,  $y_2(0)$  и значения через полупериод  $x_1(T/2)$ ,  $y_2(T/2)$ , далее нормированный период  $\tilde{T}$ , константа Якоби  $C$ , плоский  $\tilde{T}r$  и вертикальный  $\tilde{T}r_v$  модифицированные следы, затем начальные значения  $\tilde{a}(0)$ ,  $\tilde{e}(0)$  и значения через полупериод  $\tilde{a}(T/2)$ ,  $\tilde{e}(T/2)$  в астрономических координатах, величина  $w_1(T/2)$  согласно формуле (8) (Брюно, Варин, 2008), затем величина  $\Sigma$  и снова номер орбиты  $k$ . Здесь в качестве начальной орбиты с  $\Sigma = 0$  взята орбита с номером  $k = 5$ , где достигается максимум периода  $T$ . Поскольку на семействе  $c$  нет экстремумов константы Якоби  $C$ , то здесь  $\Sigma = 2.9767666 - C$ . Орбита 1 соответствует неподвижной точке  $L_1$ , орбита 8 является локально двукратной орбитой на семействе  $h$ . На ней семейство  $c$  заканчивается.

При  $\mu = 0$  орбиты участка  $c'$  суть зеркальные отражения орбит Фиг. 2 в (Непон, 1969), а участка  $c''$  – это орбита 45 рис. 32 (Брюно, 1990), орбита столкновения на рис. 7 (Брюно, Варин, 2008) и орбита 44 рис. 32 (Брюно, 1990). При  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  орбиты выглядят так же как и при  $\mu = 0$ . Участок от орбиты 1 до орбиты 5 является возмущением участка  $c'$ , а участок между орбитами 5 и 8 является возмущением участка  $c''$ . Поэтому орбиты для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  здесь не приводим. Орбита 6 – столкновительная, как орбита 2 семейства  $c$  в (Брюно, Варин, 2008).

В (Брюно, 1996) на рис. 1 и 2 показаны характеристики семейства  $c$  задачи Хилла ( $\mu = 0$ ) и семейства  $c$  при  $\mu = 0.00095388$  соответственно в координатах задачи Хилла  $\xi_1$ ,  $\eta_2$ . Видно совпадение. Еще больше совпадение с участком  $c'$  при  $\mu = 0$  будет при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

На рис. 1 и 2 показаны характеристики семейства  $c$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  в координатах  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{e}$  и  $w_1$ ,  $y_2$  соответственно. Крестиками отмечены критические орбиты. Система координат  $w_1$ ,  $y_2$  соответствует близким прохождениям тела  $P_3$  к телу  $P_2$ . Очевидна близость рис. 1 и 2 к правым частям рис. 5 и 3 из (Брюно, Варин, 2008) соответственно.

На рис. 3 показана зависимость нормированного периода  $\tilde{T}$  от  $\Sigma$  на семействе  $c$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  и на семействе  $c''$  при  $\mu = 0$ . Видно почти полное совпадение. Крестиками отмечены критические орбиты при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

На рис. 4 показана зависимость  $\tilde{T}$  от  $\Sigma$  в увеличенном масштабе при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  на участке  $\Sigma \leq 0$ .

На рис. 5 показана зависимость приведенных следов  $\tilde{T}r$  и  $\tilde{T}r_v$  от  $\Sigma$ , при этом кривая для  $\tilde{T}r$  располагается сверху. Напомним, что при  $\mu = 0$  на семействе  $c''$  следы  $\tilde{T}r = +\infty$ ,  $\tilde{T}r_v = -\infty$ , и только на последней орбите они

перескакивают к значению 2. Очевидно, что кривые рис. 5 являются возмущениями этих следов при  $\mu = 0$ . Отметим, что на орбите 8 плоский след  $\tilde{\text{Tr}} = 2$ , а вертикальный след  $\tilde{\text{Tr}}_v < 2$ ,

На рис. 6 показана зависимость следов  $\tilde{\text{Tr}}$  и  $\tilde{\text{Tr}}_v$  от  $\Sigma$  в увеличенном масштабе на участке  $\Sigma \leq 0$ , соответствующему семейству  $c'$  при  $\mu = 0$ . При сравнении рис. 4 и 6 с Табл. 2 и Фиг. 2 (Непон, 1969) и с Фиг. 1, 2 и Табл. 1 (Непон, 1974) видна их полная аналогия, включая число и расположение критических орбит.

На рис. 1 – 6 крестиками отмечены критические орбиты при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

### § 3. Семейство $i$ при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$

Семейство  $i$  начинается прямыми круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела  $P_1$  большей массы. Здесь приводятся результаты вычисления начального участка этого семейства при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

В табл. 2, устроенной так же как табл. 1, приведены критические орбиты вычисленного участка семейства  $i$ . Этот участок превосходит на один цикл начальный участок порождающего семейства  $i$  (т.е. при  $\mu = 0$ ), описанный в (Брюно, Варин, 2008). Некоторым критическим орбитам при  $\mu = 0$  (например, тем, у которых  $\tilde{\text{Tr}}, \tilde{\text{Tr}}_v = \pm 2$ ) соответствуют несколько критических орбит при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Орбиты при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  мало отличаются от орбит при  $\mu = 0$ , поэтому не приводятся.

На рис. 7 и 8 показаны, соответственно, левая и правая характеристики вычисленного участка семейства  $i$ . Видна их близость к характеристикам порождающего семейства  $i$ . Заметны бифуркации вблизи  $\tilde{e} = 1$ . Они согласуются с теорией в п.2.А и в § 3 гл. VIII книги (Брюно, 1990). (В (Брюно, 1993а) были вычислены куски семейства  $i$  для  $\mu = \mu_J = 0.00095388$  вблизи бифуркаций). В отличие от порождающего семейства, при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  эти две характеристики являются связными кривыми без самопересечений и наложений, хотя на рис. 7 и 8 это не заметно. Кроме того, верхняя и нижняя части правой характеристики почти совпадают с характеристиками семейства  $c$  (рис. 1).

На рис. 9 схематически показаны зигзаги правой характеристики семейства  $i$  при  $\tilde{e} > 1$  и справа от них – характеристика семейства  $c$ . Номера  $k = 1, \dots, 8$  соответствуют точкам пересечения характеристики семейства  $i$  с горизонталью  $\tilde{e} = 1.4$ , а точка с номером  $k = 9$  – пересечению с характеристикой семейства  $c$ . В табл. 3 приводятся значения  $\tilde{a}$  для каждой из этих точек пересечения  $k = 1, \dots, 9$ . Табл. 3 показывает, что зигзаги существуют (чего не видно на рисунках) и скапливаются у характеристики семейства  $c$ .

На рис. 10 показаны участки правой характеристики семейства  $i$  при



$\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  в координатах  $w_1, y_2$ , т.е. вблизи тела  $P_2$ . Этот рисунок почти совпадает с рис. 15 в (Брюно, Варин, 2008) для  $\mu = 0$ . Кроме того, верхняя и нижняя части этой характеристики почти совпадают с характеристикой семейства  $c$  (рис. 2).

Поскольку характеристики семейства  $i$  устроены сложно, то в качестве униформизирующего параметра на этом семействе возьмем вариацию  $\Sigma$  константы Якоби  $C$ , как это описано во введении. Зависимость  $C$  от  $\Sigma$  показана на рис. 11 для  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Критические орбиты при  $\mu = 0$  отмечены крестиками. Видно, что эти две характеристики очень близки, особенно на начальном участке, а также видно, что характеристика семейства  $i$  постепенно уклоняется от характеристики порождающего семейства даже при очень малом  $\mu$ . Это же явление наблюдается для характеристик семейства  $i$  в других координатах (см. ниже). Согласно (Брюно, Варин, 2007), для любого  $\mu > 0$  существует такое значение  $\Sigma(\mu)$ , что при  $\Sigma > \Sigma(\mu)$  порожденное семейство  $i$  радикально отличается от порождающего.

На рис. 12 показаны зависимости  $\tilde{\epsilon}$  от  $\Sigma$  для правой характеристики семейства  $i$  при  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Вертикальные отрезки соответствуют перескоку  $\tilde{\epsilon}$  от  $+2$  к  $-2$ . Критические орбиты при  $\mu = 0$  отмечены крестиками.

На рис. 13 показаны зависимости нормированного периода  $\tilde{T}$  от  $\Sigma$  при  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Критические орбиты при  $\mu = 0$  отмечены крестиками.

На рис. 14 показано изменение плоского следа  $\tilde{\text{Tr}}$  в зависимости от  $\Sigma$  для порождающего семейства  $i$  (т.е. при  $\mu = 0$ ) согласно (Брюно, Варин, 2008). Рис. 15 показывает соответствующую зависимость плоского следа для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . На регулярных участках эта зависимость соответствует теории гл. VII и VIII книги (Брюно, 1990). В частности, имеются интервалы неустойчивости  $\tilde{\text{Tr}} < -2$  вблизи резонансов второго порядка. При  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  эти интервалы неустойчивости для  $\tilde{\text{Tr}} < -2$  и  $\tilde{\text{Tr}}_v < -2$  очень малы. В Табл. 2 они представлены только одной орбитой с  $\tilde{\text{Tr}} = -2$ ,  $\tilde{\text{Tr}}_v = -2$  вместо четырех. Это орбиты 1, 8, 28. Кроме того, вблизи орбит 18, 43, 50, соответствующим сингулярным участкам семейства, нам не удалось вычислить все пересечения  $\tilde{\text{Tr}}$  и  $\tilde{\text{Tr}}_v$  с прямыми  $\pm 2$ . В (Брюно, 1993б) интервалы неустойчивости вычислялись для  $\mu = \mu_J = 0.00095388$ . В интервале

$$\Sigma \in [17, 19.5] \quad (5)$$

плоский след  $\tilde{\text{Tr}}$  вычислить не удалось ввиду потери значащих цифр при вычислении матрицы монодромии. Поэтому на рис. 15 этот интервал оставлен пустым. Во всяком случае, можно утверждать, что в этом интервале  $|\text{Tr}| > 10^{12}$ . Несмотря на эту потерю информации, рис. 15 позволил откорректировать рис. 14.

**Замечание.** В настоящее время нет теории, объясняющей поведение плоского и вертикального следов  $\tilde{\text{Tr}}$  и  $\tilde{\text{Tr}}_v$  на сингулярных участках порождающих семейств. Известно, что на этих участках  $\tilde{\text{Tr}}, \tilde{\text{Tr}}_v = \pm\infty$  и на экстремальных орбитах происходит перескок плоского следа  $\tilde{\text{Tr}}$  между  $\pm\infty$ . См. также подраздел *Период, след и их возмущения* раздела *Порождающее семейство  $i$*  статьи (Брюно, Варин, 2008).

По результатам вычислений плоского следа  $\tilde{\text{Tr}}$  для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  можно сделать следующие выводы для  $\mu = 0$ :

1. На стыках между регулярными и сингулярными участками имеются случаи, когда  $\tilde{\text{Tr}}$  падает от  $+2$  к  $-2$  и затем подскакивает до  $+\infty$  (орбиты  $11_2, 23_2, 39_2$ ).

2. На экстремальных орбитах, на которых правая характеристика семейства  $i$  имеет точку возврата, возможно, что  $\tilde{\text{Tr}}$  два раза перескакивает между  $\pm\infty$ : сначала от  $+\infty$  до  $-\infty$  и затем обратно (орбиты  $12_2, 24_2, 34_3$ ).

3. Перескок  $\tilde{\text{Tr}}$  между  $\pm\infty$  возможен и на не экстремальных орбитах (дополнительные орбиты  $14'$  и  $26'$ ). Пока не ясно, как расположены такие орбиты. Возможно, они соответствуют точке характеристики семейства  $B_1$  с наименьшим значением  $a$ , т.е. точке пересечения этой характеристики с кривой  $f$ , описанной в п.2.Б гл. IV книги (Брюно, 1990) и показанной там же на рис. 41.

На рис. 16 показано изменение вертикального следа  $\tilde{\text{Tr}}_v$  в зависимости от  $\Sigma$  для порождающего семейства  $i$  (т.е. при  $\mu = 0$ ) согласно (Брюно, Варин, 2008). Рис. 17 показывает соответствующую зависимость вертикального следа для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . В начале семейства  $i$  и вблизи прямой  $\tilde{e} = 1$  вертикальный след  $\tilde{\text{Tr}}_v$  близок к плоскому следу  $\tilde{\text{Tr}}$ . Семейство  $i$  также имеет интервалы неустойчивости  $\tilde{\text{Tr}}_v < -2$  вблизи резонансов второго порядка. Для  $\mu = \mu_J = 0.00095388$  эти интервалы вычислены в (Брюно, 1993б). В интервале (5) вертикальный след  $\tilde{\text{Tr}}_v$  вычислить не удалось в силу тех же причин, что и для плоского следа. Поэтому на рис. 17 интервал (5) оставлен пустым. Во всяком случае, можно утверждать, что в этом интервале  $|\text{Tr}_v| > 10^{12}$ . Несмотря на эту потерю информации, рис. 17 позволил откорректировать рис. 16 (см. Замечание выше).

По результатам вычислений вертикального следа  $\tilde{\text{Tr}}_v$  для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  можно сделать следующие выводы для  $\mu = 0$ :

1. На стыках между регулярными и сингулярными участками  $\tilde{\text{Tr}}_v$  перескакивает от  $2$  к  $-\infty$  или наоборот (орбиты  $5_1, 7_1, 11_2, 15_2, 17_1, 19_1, 23_2, 27_2, 29_1, 35_1, 39_2$ ).

2. На экстремальных орбитах, на которых правая характеристика семейства  $i$  имеет точку возврата, происходит перескок  $\tilde{\text{Tr}}_v$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  (орбиты

12<sub>2</sub>, 24<sub>2</sub>, 34<sub>3</sub>).

3. Перескок  $\tilde{\Gamma}$  между  $\pm\infty$  происходит и на не экстремальных орбитах (дополнительные орбиты 14' и 26').

### Литература

*Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

*Брюно А.Д.* Однократные периодические решения ограниченной задачи трех тел в случае Солнце – Юпитер. Препринт N 66. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1993а. 27 с.

*Брюно А.Д.* Двукратные периодические решения ограниченной задачи трех тел в случае Солнце – Юпитер. Препринт N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1993б. 29 с.

*Брюно А.Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. Препринт N 93. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1996. 32 с.

*Брюно А.Д., Варин В.П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // ПММ. М., 2007. т. 71, N 6, с. 1034-1066.

*Брюно А.Д., Варин В.П.* О семействах периодических решений ограниченной задачи трех тел // Астроном. Вестник, 2008, т. 42, N 2, с.

*Bruno A.D.* Singular perturbations in Hamiltonian mechanics // Hamiltonian Mechanics./ Ed. J. Seimenis. N.Y.: Plenum Press, 1994. P. 43-49.

*Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem V. Hill's case: periodic orbits and their stability // Astron. and Astrophys. 1969. V. 1. N. 2. P. 223–238.

*Hénon M.* Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem II. Hill's case // Astron. and Astrophys., **30**, (1974), 317-321.

Таблица 1. Критические орбиты семейства  $c$  для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

$k$	$x_1(0)$	$y_2(0)$	$x_1(T/2)$	$y_2(T/2)$	$T/2\pi$	$C$
1	0.97468	0.97468	0.97468	0.97468	0.47395	3.005756
2	0.97183	0.99406	0.97858	0.95443	0.48178	3.005332
3	0.96536	1.03529	0.99196	0.88729	0.65222	3.001532
4	0.95526	1.04736	0.99643	0.82882	0.89820	2.999795
5	0.80387	1.20106	0.99992	-0.12594	1.33779	2.976767
6	0.00000	$\pm\infty$	0.99998	-1.57440	0.99937	1.397662
7	0.86075	-1.11730	0.99795	-0.97598	0.94935	-0.847669
8	0.97241	-1.01493	0.97241	-1.01493	0.97959	-0.943718

$k$	$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$
1	12.045	1.956	0.90750	0.92598
2	11.833	2.000	0.93478	0.96037
3	9.435	2.000	1.00011	1.03475
4	8.259	-2.000	1.00335	1.04793
5	12.568	-7.838	0.95662	1.15968
6	18.409	-16.474	0.71309	$\pm 2$
7	3.540	-2.000	0.93012	-1.07458
8	2.000	1.967	0.97408	-1.00172

$k$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$	$w_1$	$\Sigma$
1	0.90750	0.92598	0.00197	-0.02899
2	0.88278	0.89148	0.00233	-0.02857
3	0.81375	0.78099	0.00622	-0.02477
4	0.75746	0.68452	0.01400	-0.02303
5	0.50396	-0.01586	0.62223	0
6	2.08847	-2.47881	2.51256	1.57910
7	0.95100	-0.95063	0.02443	3.82444
8	0.97408	-1.00172	0.00181	3.92048

Таблица 2. Критические орбиты семейства  $i$  для  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

$k$	$x_1(0)$	$y_2(0)$	$x_1(T/2)$	$y_2(T/2)$	$T/2\pi$	$C$
1	-0.48073	-1.44228	0.48074	1.44226	0.50002	3.466832
2	-0.60949	-1.30108	0.60948	1.30115	0.99790	3.174618
3	0.00000	$\mp\infty$	0.00000	$\pm\infty$	1.00003	1.587531
4	-0.63002	1.25972	0.63000	-1.25979	0.99995	0.000314
5	-0.99943	0.62407	0.99885	-0.65133	0.99134	0.364346
6	-0.99834	-0.63774	0.99713	0.59100	1.01369	2.870078
7	-0.64537	-1.23018	0.64538	1.23024	1.00352	3.173518
8	-0.71171	-1.18503	0.71149	1.18556	1.50000	3.092666
9	-1.06237	-0.75644	0.46400	1.73202	1.99996	2.917733
10	-1.09236	-0.72146	0.43400	1.81599	1.99999	2.886698
11	-1.42891	-0.29168	0.09423	4.46283	2.00164	2.148318
12	-1.42899	-0.29044	0.09366	4.47728	2.00189	2.145475
13	-1.42805	-0.28931	0.09341	4.48379	2.00252	2.143268
14	-1.42229	-0.29159	0.09598	4.41975	2.00427	2.150763
15	-0.99933	-0.64328	0.56628	1.55583	2.28982	2.873333
16	-0.99933	-0.64328	0.56628	1.55583	2.28982	2.873333
17	-0.99925	-0.64318	0.56625	1.55588	2.29034	2.873317
18	-0.99925	-0.64318	0.56625	1.55588	2.29034	2.873317
19	-0.99990	0.64239	0.18237	-3.08816	1.87457	0.302985
20	-0.99990	0.64239	0.18237	-3.08816	1.87457	0.302985
21	-1.05353	0.76219	0.46145	-1.73754	1.99465	-0.288436
22	-1.05338	0.76256	0.46206	-1.73594	1.99486	-0.289268
23	-0.76600	1.14029	0.76000	-1.14935	1.99974	-0.436185
24	-0.50888	1.61364	0.99849	-0.84264	1.98380	-0.315734
25	0.00000	$\pm\infty$	0.99998	-1.39846	1.99838	1.471325
26	-0.52593	-1.57756	0.99478	0.78092	2.03161	2.973453
27	-0.75006	-1.16534	0.77892	1.12248	2.01426	3.056636
28	-0.79820	-1.11985	0.79955	1.11841	2.50000	3.039366
29	-0.59600	-1.46433	0.59616	1.46411	2.99989	2.956936
30	-0.58000	-1.49560	0.58017	1.49536	2.99995	2.946355
31	-0.30489	-2.31205	0.30808	2.29873	3.00247	2.623814
32	-0.30294	-2.32106	0.30673	2.30514	3.00293	2.620745
33	-0.30071	-2.33134	0.30596	2.30910	3.00410	2.617764

Таблица 2. (Продолжение).

$k$	$x_1(0)$	$y_2(0)$	$x_1(T/2)$	$y_2(T/2)$	$T/2\pi$	$C$
34	-0.31080	-2.28301	0.32504	2.22686	3.01135	2.641748
35	-0.52962	-1.57027	0.79202	1.21507	3.33015	2.973836
36	-0.52960	-1.57030	0.79201	1.21509	3.33029	2.973832
37	0.00000	$\mp\infty$	0.00108	43.00108	3.01165	1.486286
38	-0.00095	45.91354	0.00000	$\pm\infty$	2.98997	1.401636
39	-0.52646	1.57740	0.49614	-1.65500	2.86129	-0.350188
40	-0.52646	1.57740	0.49614	-1.65500	2.86129	-0.350191
41	-0.52657	1.57717	0.49627	-1.65470	2.86140	-0.350399
42	-0.52657	1.57717	0.49627	-1.65470	2.86141	-0.350402
43	-0.64399	1.37476	0.64206	-1.37852	2.99262	-0.554105
44	-0.82500	1.10105	0.82490	-1.10127	2.99925	-0.604748
45	-0.99741	0.88414	0.99711	-0.90040	2.97957	-0.540122
46	-1.00040	-0.64746	0.99997	-1.02569	3.56999	2.875531
47	-1.43203	-0.28732	0.99998	-1.62602	3.11298	2.137128
48	-0.99361	-0.89392	0.99292	0.83852	3.04430	2.990284
49	-0.84064	-1.08160	0.84151	1.08124	3.03460	3.027825
50	-1.06127	-0.46373	0.99998	-1.44208	3.50000	2.653890
51	-1.26446	-0.64785	0.46053	1.78507	4.00291	2.800494
52	-1.27102	-0.64068	0.45460	1.80154	4.00475	2.791847
53	-1.27119	-0.64005	0.45481	1.80137	4.00581	2.791055
54	-1.23337	-0.67064	0.49956	1.69406	4.02254	2.826244
55	-0.98999	-0.89923	0.88252	1.11407	4.30203	2.992165
56	-0.99023	-0.89891	0.88173	1.11489	4.30485	2.992047
57	-1.30329	-0.51431	0.30435	2.31754	4.39064	2.610804
58	-1.30329	-0.51431	0.30435	2.31754	4.39064	2.610804
59	-0.29721	-2.34854	0.99998	-1.46122	4.21021	2.609386
60	-0.29721	-2.34854	0.99998	-1.46122	4.21021	2.609386
61	-0.30038	-2.33383	0.99998	-1.44785	4.20909	2.613290
62	-0.30038	-2.33383	0.99998	-1.44785	4.20909	2.613291
63	-0.85034	-1.09266	0.87852	1.05906	4.06750	3.016430
64	-0.87190	-1.07261	0.87686	1.06808	4.50000	3.013843
65	-0.56733	-1.54756	0.57118	1.54151	5.00317	2.886279

Таблица 2. (Продолжение).

$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$k$
-2.00000	-2.00000	-0.48075	1.00004	1
1.99934	1.99983	-0.62951	1.03180	2
				3
2.00000	2.00000	-0.62991	-0.99983	4
3.64925	-2.00000	-0.62048	-0.38926	5
4.96189	-2.00000	-0.62633	0.40606	6
2.00000	1.99949	-0.63068	0.97672	7
-2.00001	-2.00000	-0.71136	0.99951	8
1.98122	2.00000	-0.76315	0.60792	9
1.97982	2.00000	-0.76315	0.56861	10
-2.00000	1.90867	-0.76069	0.12157	11
-2.00000	1.83769	-0.76032	0.12055	12
2.00000	1.49313	-0.75941	0.11953	13
7.39354	-2.00000	-0.75691	0.12093	14
16.04900	-2.00000	-0.62992	0.41356	15
16.05223	2.00000	-0.62992	0.41356	16
2.00000	10.68062	-0.62980	0.41339	17
-2.00000	10.68038	-0.62980	0.41339	18
15.98052	2.00000	-0.62992	-0.41264	19
15.98021	-2.00000	-0.62992	-0.41264	20
-2.40222	-2.00000	-0.75906	-0.61207	21
-2.00000	-1.36391	-0.75923	-0.61257	22
2.00000	1.99999	-0.76299	-0.99606	23
3.59384	-2.00000	-0.75403	-1.32512	24
20.00000	-20.00000	0.00000	0.00000	25
7.12611	-2.00000	-0.76105	1.30894	26
2.00000	1.99160	-0.76431	1.01864	27
-2.00011	-1.99996	-0.79903	1.00103	28
1.92244	2.00000	-0.82553	1.27804	29
1.91871	2.00000	-0.82553	1.29742	30
-2.00000	1.98652	-0.82380	1.62990	31
-2.00000	1.97192	-0.82352	1.63214	32
2.00000	1.90420	-0.82266	1.63447	33

Таблица 2. (Продолжение).

$\tilde{\text{Tr}}$	$\tilde{\text{Tr}}_v$	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$k$
10.23196	-2.00000	-0.81799	1.62004	34
13.76335	-2.00000	-0.76309	1.30596	35
13.82770	2.00000	-0.76309	1.30598	36
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	37
0.00000	0.00000	-0.34539	-2.00275	38
9.42145	2.00000	-0.76299	-1.31000	39
9.40267	-2.00000	-0.76299	-1.31000	40
2.00000	-9.25102	-0.76305	-1.30991	41
-2.00000	-9.26802	-0.76305	-1.30990	42
-1.38653	-2.00000	-0.82267	-1.21719	43
2.00000	1.99991	-0.82518	-1.00021	44
3.46996	-2.00000	-0.81737	-0.77972	45
-31.11119	27.47863	-0.63292	0.41939	46
-18.13581	-15.50277	-0.76100	0.11822	47
8.61657	-2.00000	-0.82390	0.79402	48
2.00000	1.95011	-0.82697	0.98347	49
-20.00000	20.00000	-0.59899	0.22823	50
-2.00000	1.99600	-0.86060	0.53073	51
-2.00000	1.97823	-0.85981	0.52174	52
2.00000	1.95563	-0.85936	0.52078	53
11.70969	-2.00000	-0.85339	0.55474	54
13.27956	-2.00000	-0.82538	0.80056	55
13.82324	2.00000	-0.82531	0.80018	56
2.00000	24.01268	-0.78737	0.34476	57
-2.00000	24.01268	-0.78737	0.34476	58
2.00000	-14.28027	-0.82423	1.63940	59
-2.00000	-14.28027	-0.82423	1.63940	60
-2.00000	-14.30758	-0.82569	1.63620	61
2.00000	-14.30758	-0.82569	1.63620	62
2.00000	1.80843	-0.86354	1.01528	63
-2.00197	-1.99915	-0.87466	1.00316	64
-2.00000	1.99806	-0.88478	1.35879	65



Таблица 2. (Продолжение).

$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$	$w_1$	$\Sigma$	$k$
0.48076	1.00005	0.00010	-3.466	1
0.62957	1.03190	0.00013	-3.174	2
			-1.587	3
0.62993	-0.99990	0.00014	0.000	4
0.63369	-0.42376	0.04350	0.364	5
0.60370	0.34830	0.01743	2.869	6
0.63076	0.97683	0.00014	3.172	7
0.71155	1.00008	0.00017	3.253	8
0.76319	1.39202	0.00009	3.428	9
0.76319	1.43133	0.00009	3.459	10
0.76500	1.87683	0.00006	4.198	11
0.76528	1.87761	0.00006	4.200	12
0.76598	1.87805	0.00006	4.203	13
0.76788	1.87501	0.00006	4.210	14
0.90001	1.37081	0.00012	4.933	15
0.90001	1.37081	0.00012	4.933	16
0.90000	1.37083	0.00012	4.933	17
0.90000	1.37083	0.00012	4.933	18
0.69964	-1.73933	0.00006	7.503	19
0.69964	-1.73933	0.00006	7.503	20
0.76046	-1.39320	0.00009	8.094	21
0.76056	-1.39247	0.00009	8.095	22
0.76307	-1.00402	0.00021	8.242	23
0.77343	-0.70901	0.03302	8.363	24
22.59711	-1.95575	2.11193	10.15	25
0.71397	0.60669	0.00958	11.65	26
0.76474	0.98146	0.00023	11.73	27
0.79966	1.00015	0.00025	11.75	28
0.82572	1.27801	0.00012	11.83	29
0.82572	1.29738	0.00012	11.84	30
0.82829	1.62805	0.00007	12.16	31
0.82883	1.62993	0.00007	12.17	32
0.83008	1.63142	0.00007	12.17	33

Таблица 2. (Окончание).

$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$	$w_1$	$\Sigma$	$k$
0.83750	1.61190	0.00007	12.19	34
0.95355	1.16940	0.00024	12.53	35
0.95355	1.16941	0.00024	12.53	36
0.62442	2.00173	0.00005	14.01	37
0.00000	0.00000	0.00005	14.10	38
0.77402	-1.35901	0.00010	15.85	39
0.77402	-1.35901	0.00010	15.85	40
0.77406	-1.35887	0.00010	15.85	41
0.77406	-1.35887	0.00010	15.85	42
0.82336	-1.22018	0.00014	16.05	43
0.82531	-1.00050	0.00029	16.10	44
0.83679	-0.80841	0.01730	16.17	45
1.05491	-1.05207	1.98951	19.58	46
1.55273	-2.64402	3.01658	20.32	47
0.76271	0.69817	0.00706	21.18	48
0.82813	0.98385	0.00032	21.21	49
12.55138	-2.07967	2.80886	21.59	50
0.86489	1.46753	0.00009	21.73	51
0.86674	1.47550	0.00009	21.74	52
0.86778	1.47589	0.00009	21.74	53
0.88220	1.43373	0.00010	21.78	54
0.97558	1.09539	0.00043	21.94	55
0.97539	1.09602	0.00042	21.94	56
0.83328	1.63475	0.00007	22.33	57
0.83328	1.63475	0.00007	22.33	58
7.39506	-2.13522	2.83352	22.33	59
7.39507	-2.13522	2.83352	22.33	60
10.38032	-2.09633	2.80266	22.33	61
10.38045	-2.09633	2.80266	22.33	62
0.86589	0.98541	0.00041	22.73	63
0.87719	1.00037	0.00041	22.74	64
0.88876	1.35733	0.00012	22.86	65

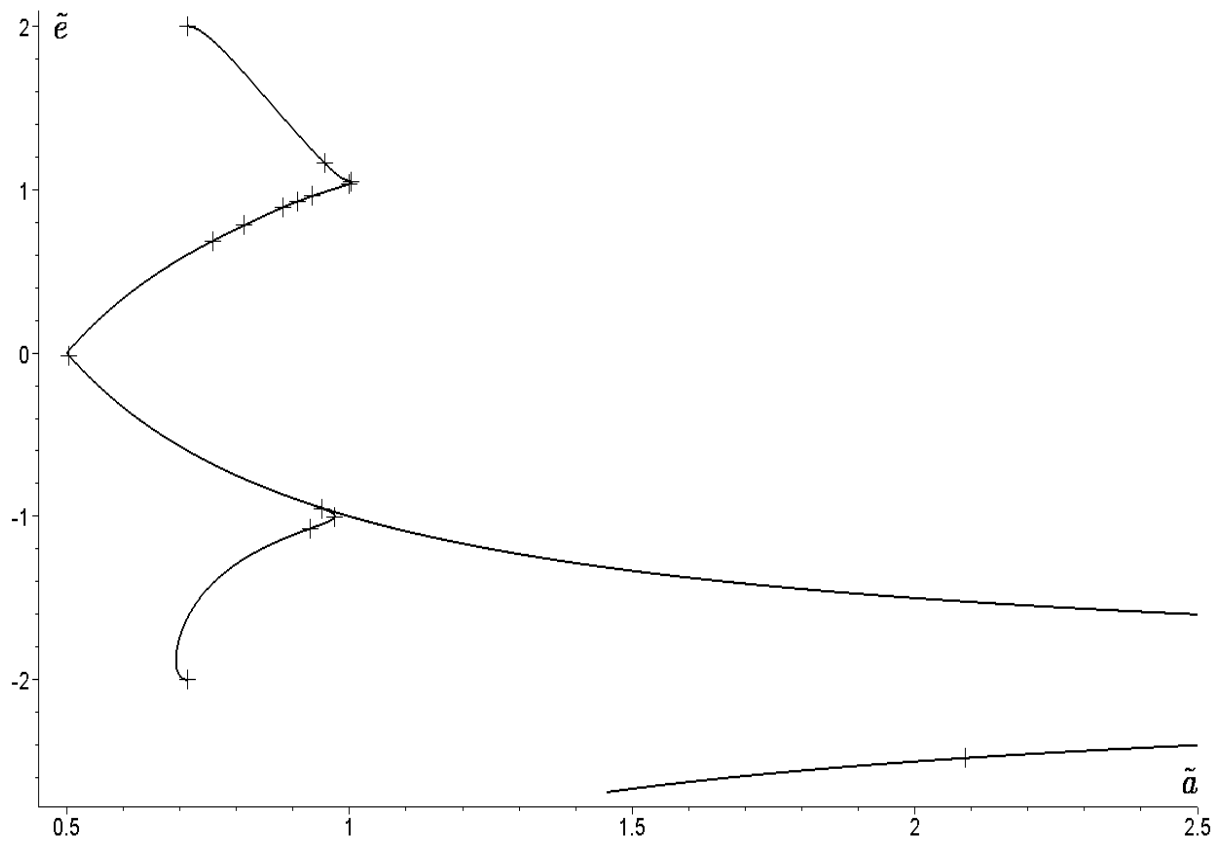


Рис. 1. Характеристики семейства  $c$  в координатах  $\tilde{a}, \tilde{e}$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

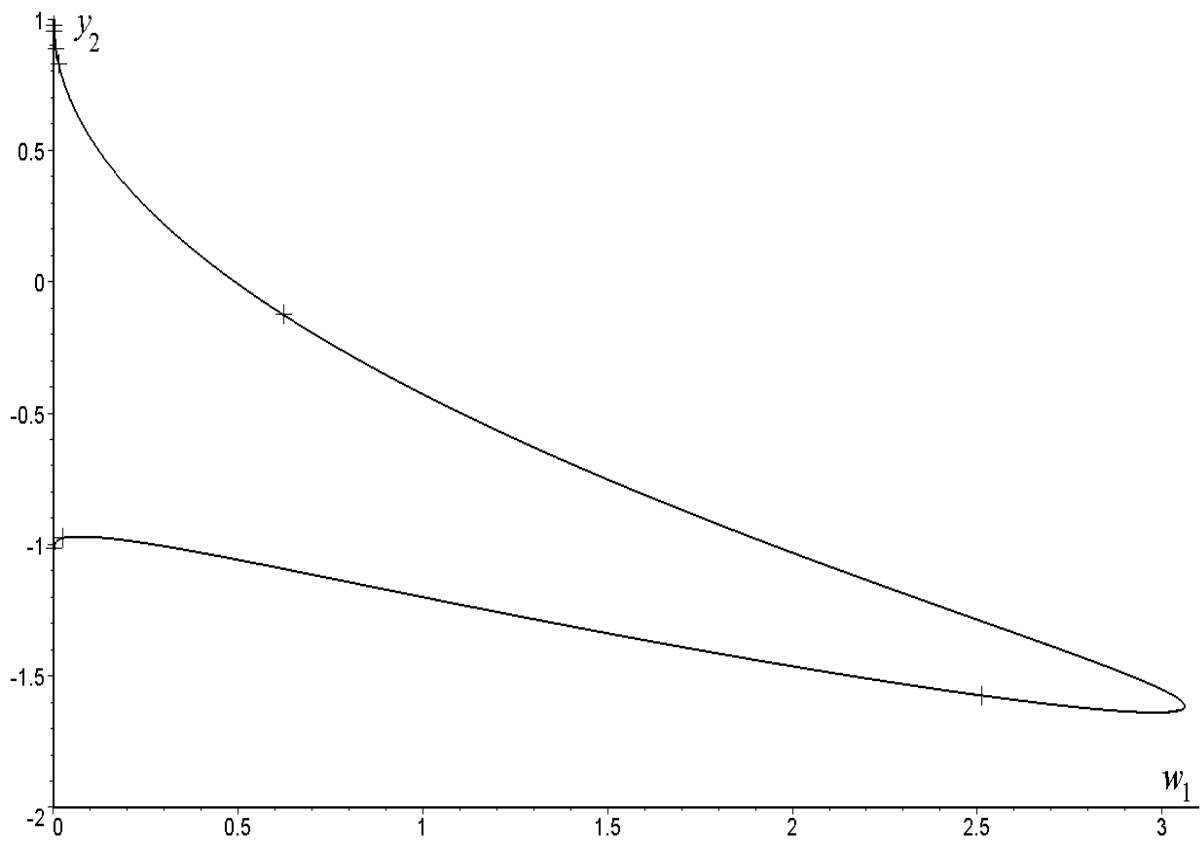


Рис. 2. Характеристика семейства  $c$  в координатах  $w_1, y_2$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

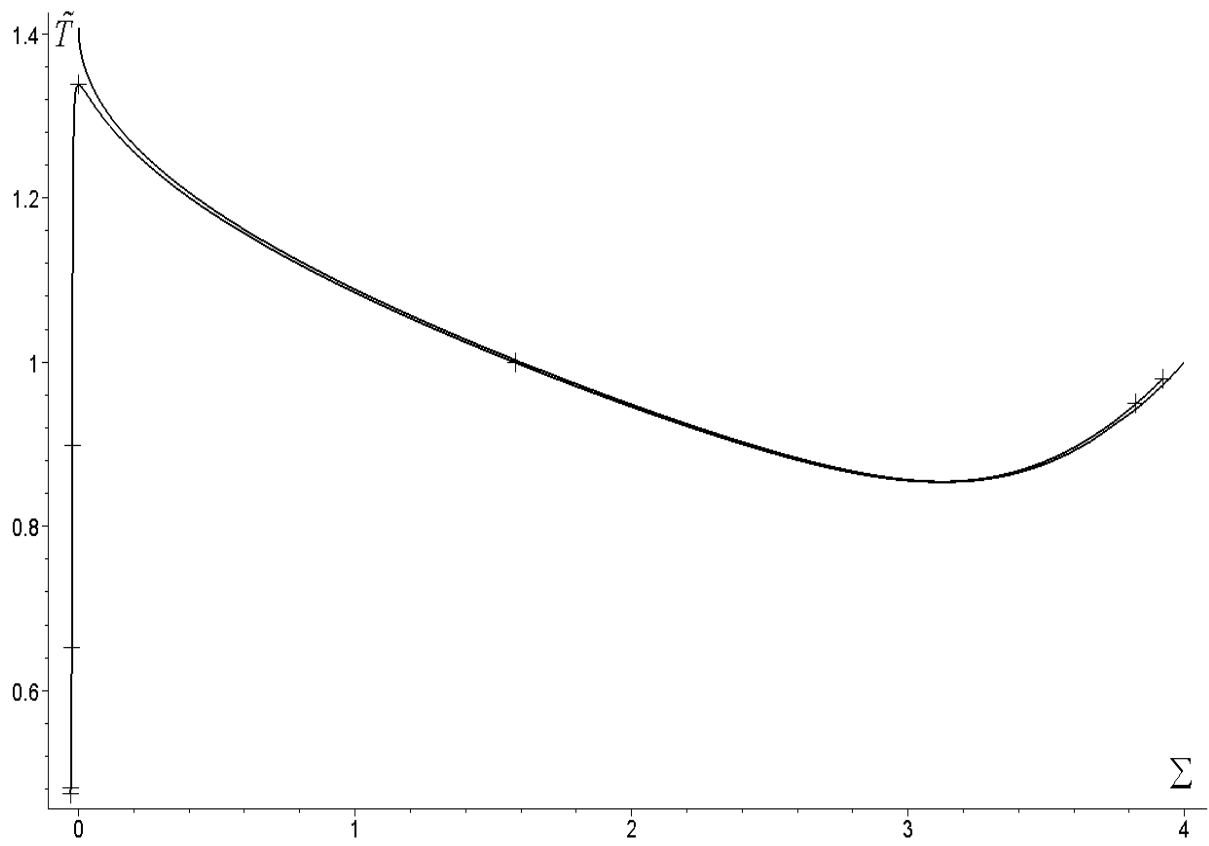


Рис. 3. Нормированный период семейства  $s$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

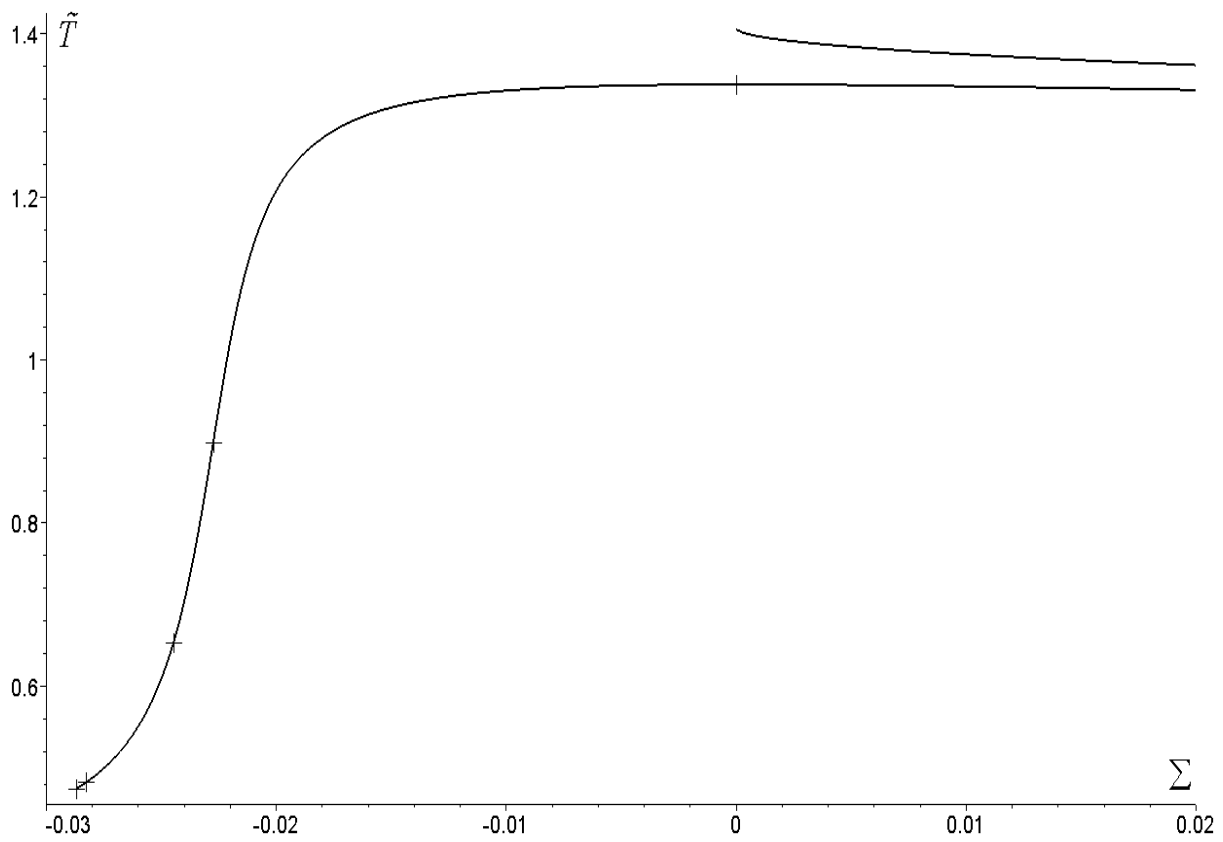


Рис. 4. Фрагмент рис. 3 при малых  $\Sigma$ .

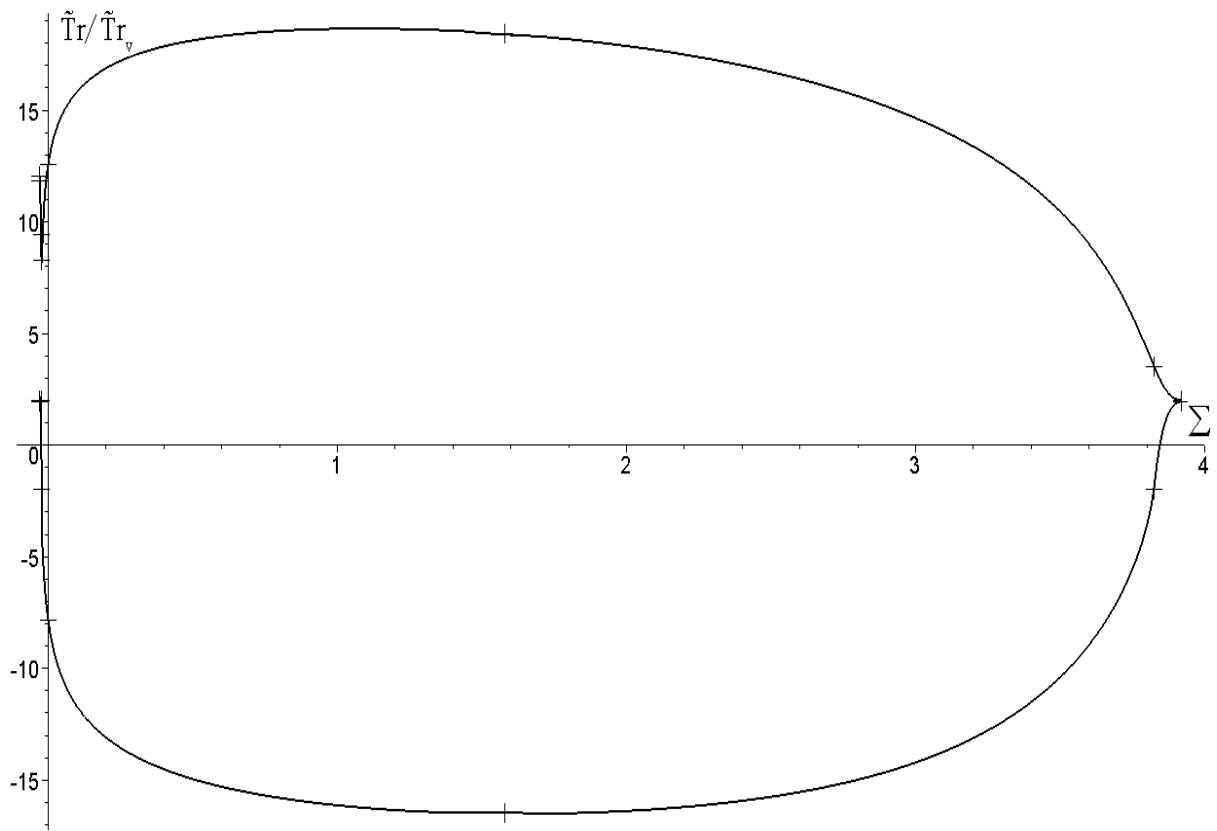


Рис. 5. Плоский и вертикальный следы на семействе  $c$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

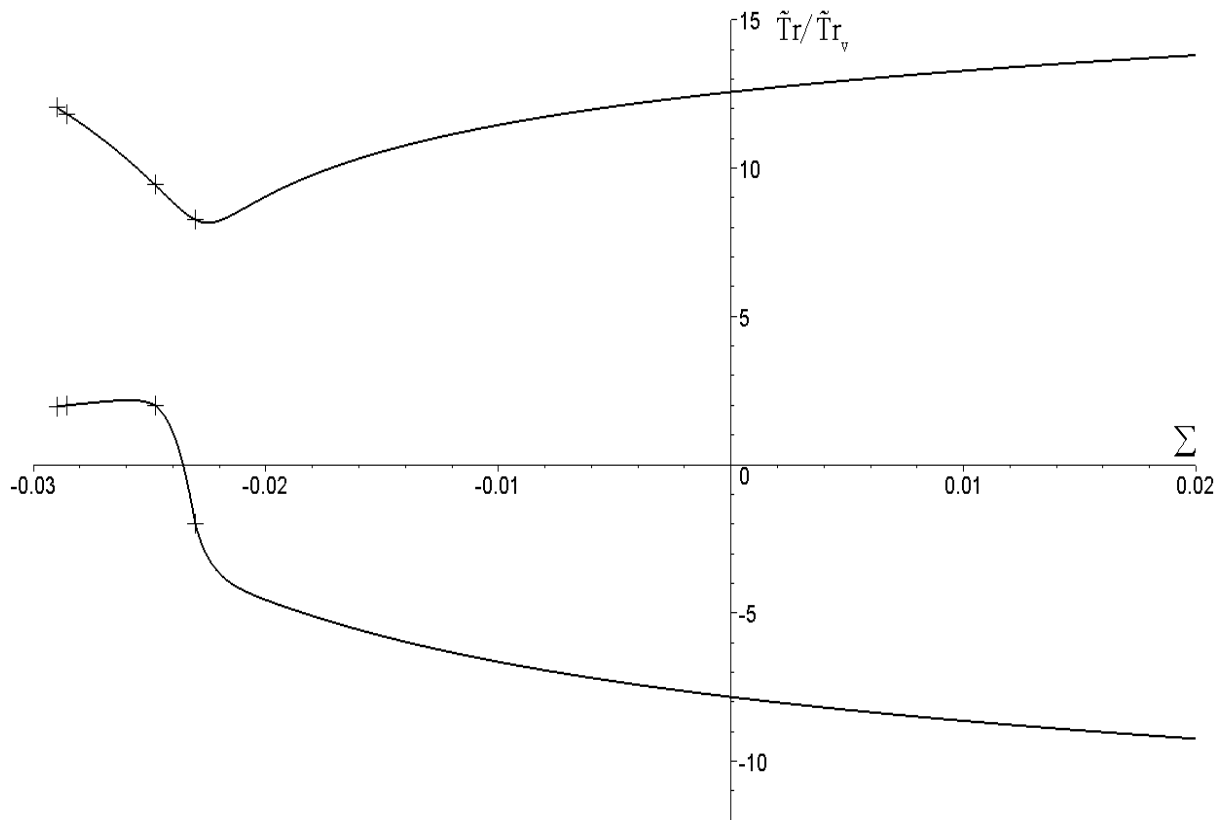


Рис. 6. Фрагмент рис. 5 при малых  $\Sigma$ .

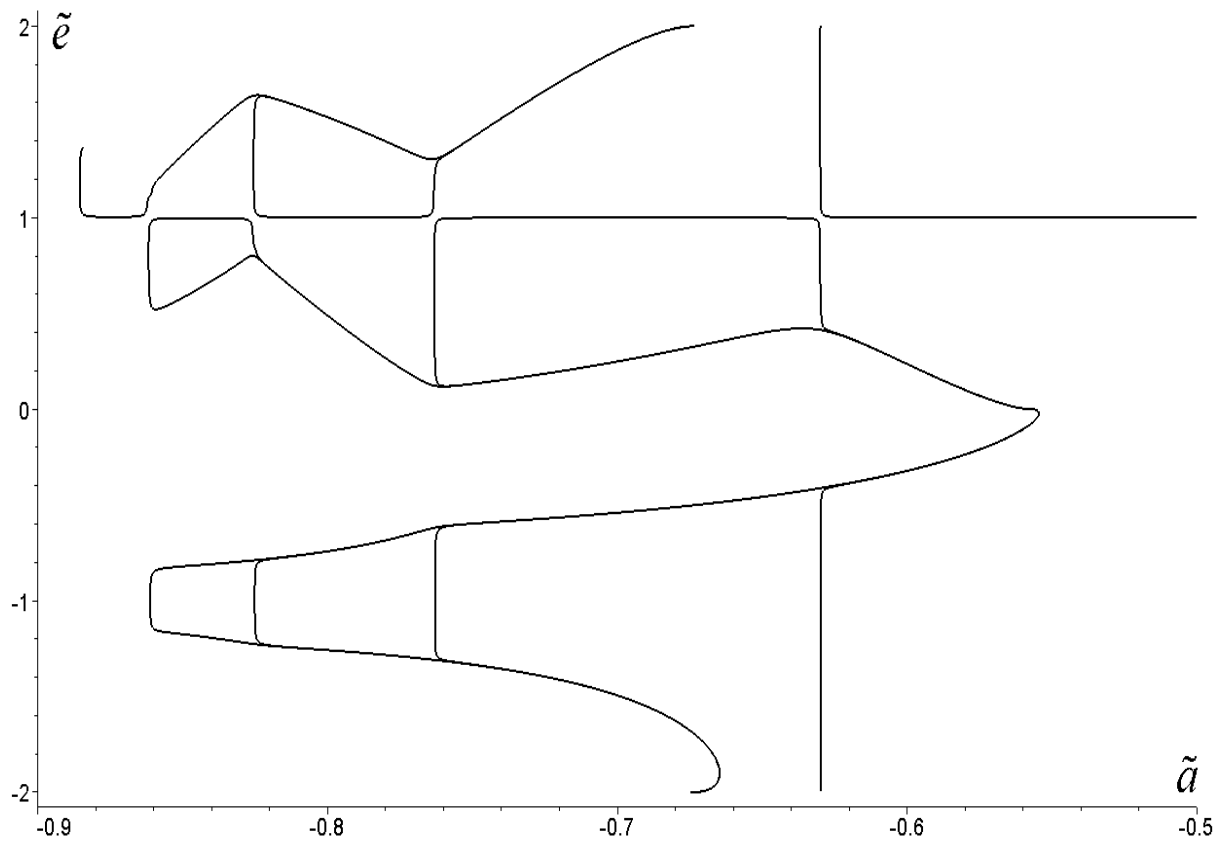


Рис. 7. Левая характеристика семейства  $i$  в коорд.  $\tilde{a}, \tilde{e}$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

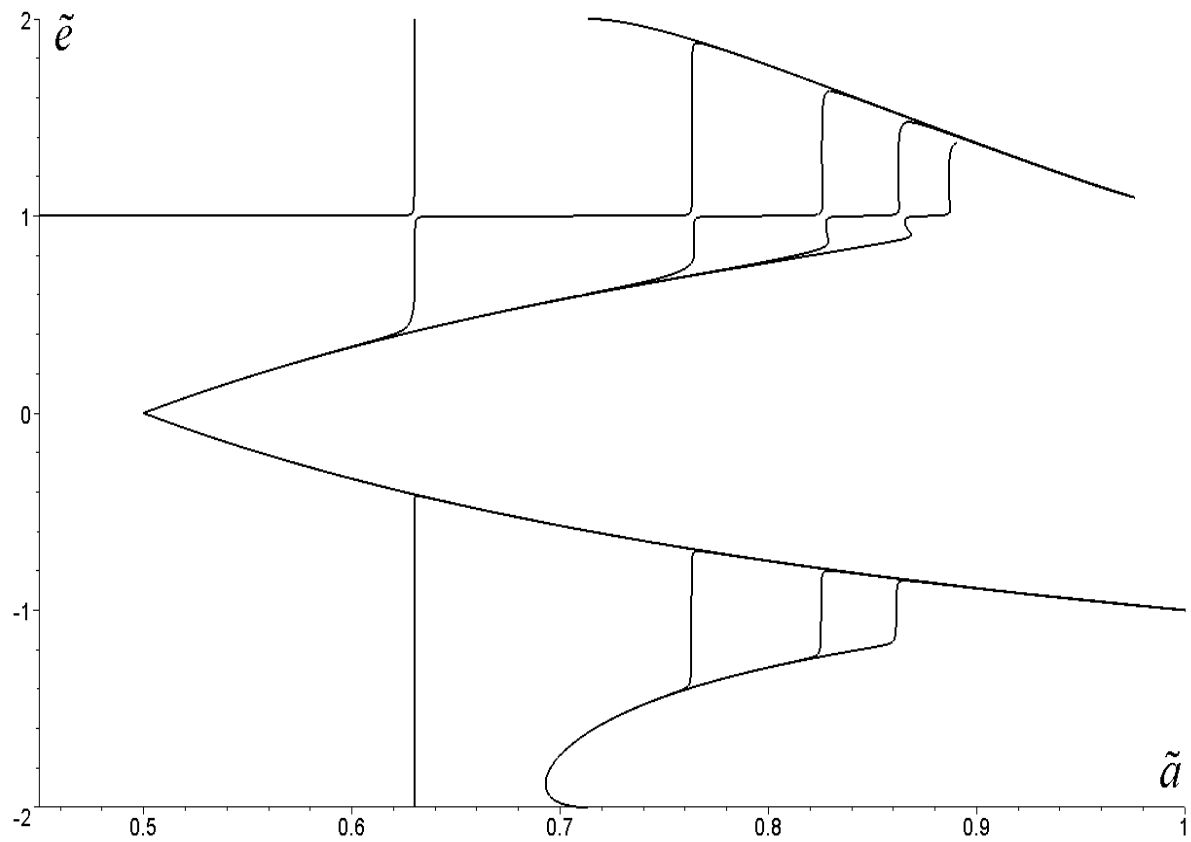


Рис. 8. Правая характеристика семейства  $i$  в коорд.  $\tilde{a}, \tilde{e}$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Таблица 3. Пересечение характеристик семейства  $i$  и  $s$   
с прямой  $\tilde{e} = 1.4$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$

$k$	$\tilde{a}$
1	0.891234634662
2	0.892129432180
3	0.892486112714
4	0.892550526104
5	0.892579399351
6	0.892584753124
7	0.892589909487
8	0.892589911249
9	0.892589912326

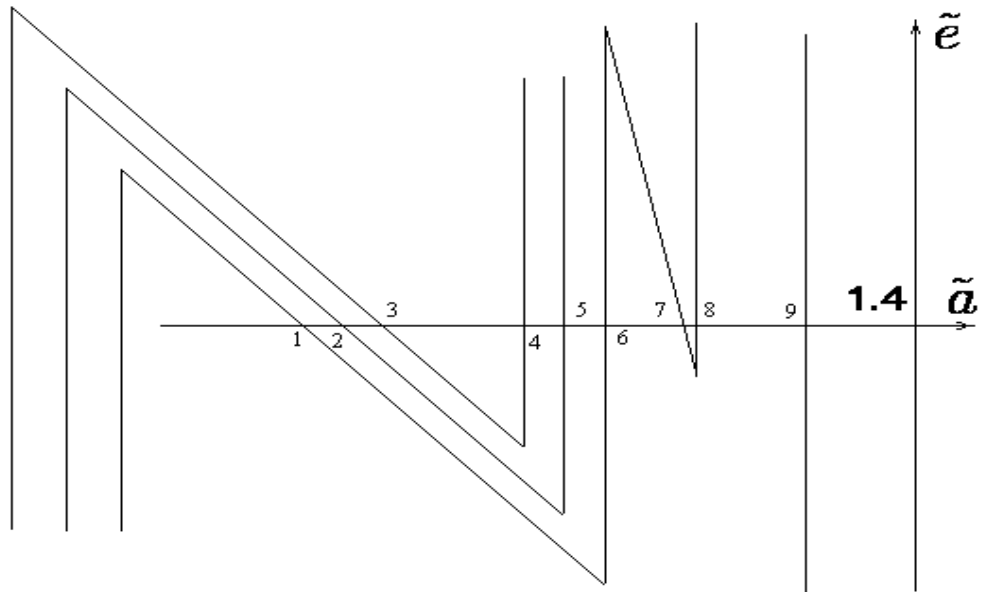


Рис. 9. Схема пересечения правой характеристики семейства  $i$   
с прямой  $\tilde{e} = 1.4$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  (см. Табл. 3).

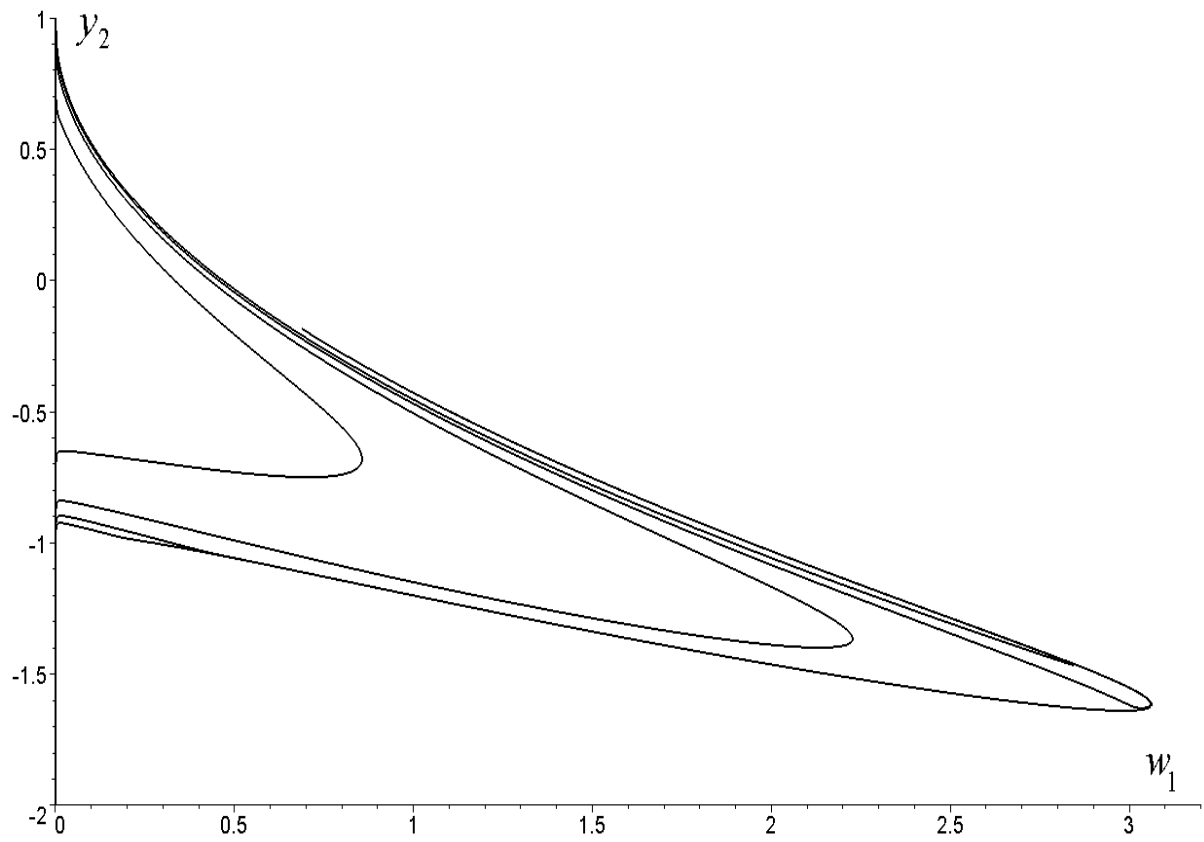


Рис. 10. Характеристика семейства  $i$  в координатах  $w_1, y_2$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

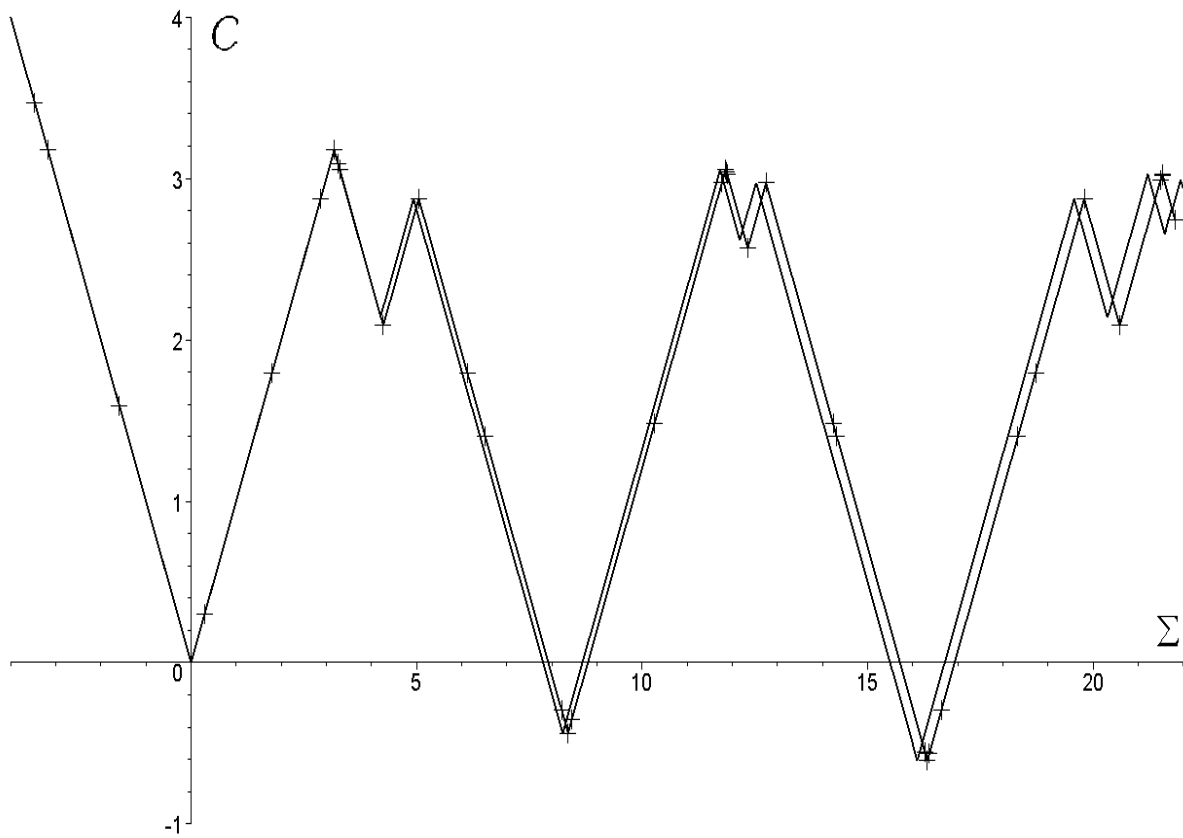


Рис. 11. Зависимость от  $\Sigma$  на семействе  $i$  при  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .



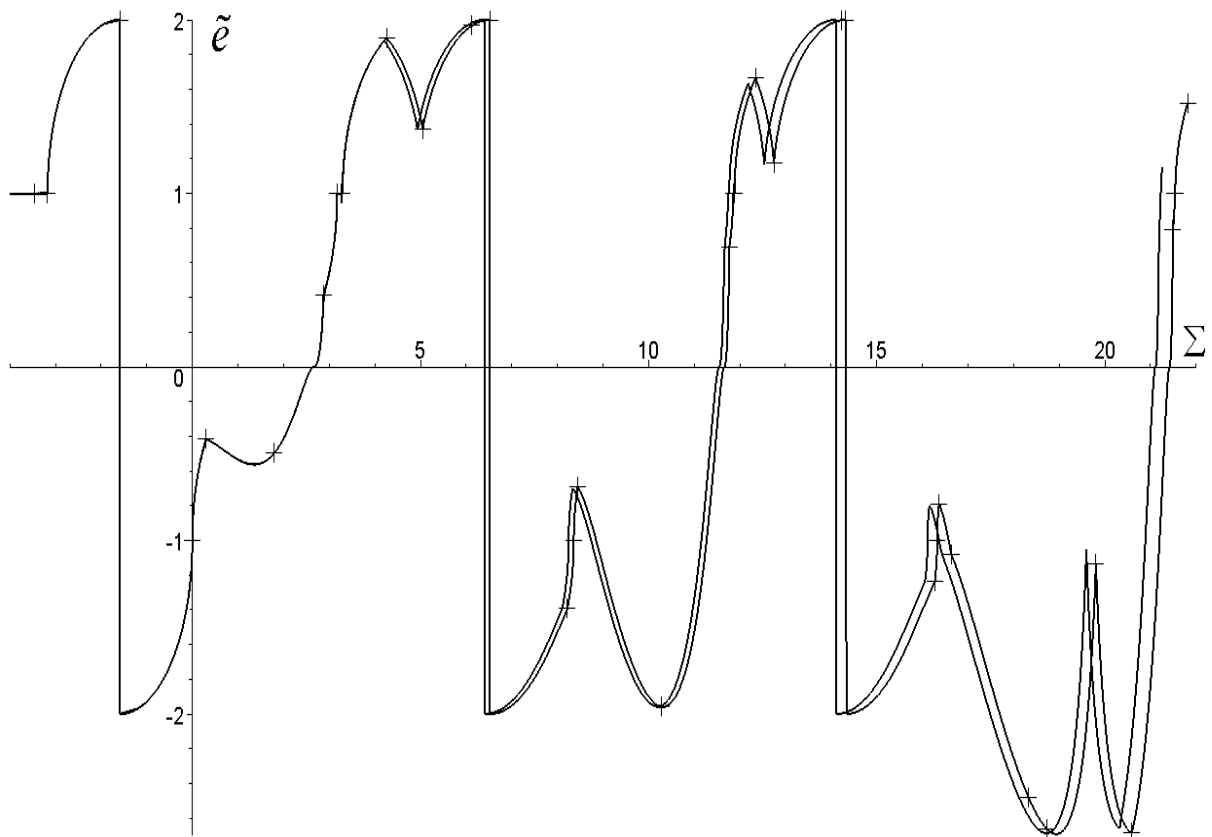


Рис. 12. Зависимость  $\tilde{e}$  от  $\Sigma$  на правой характеристике семейства  $i$  при  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

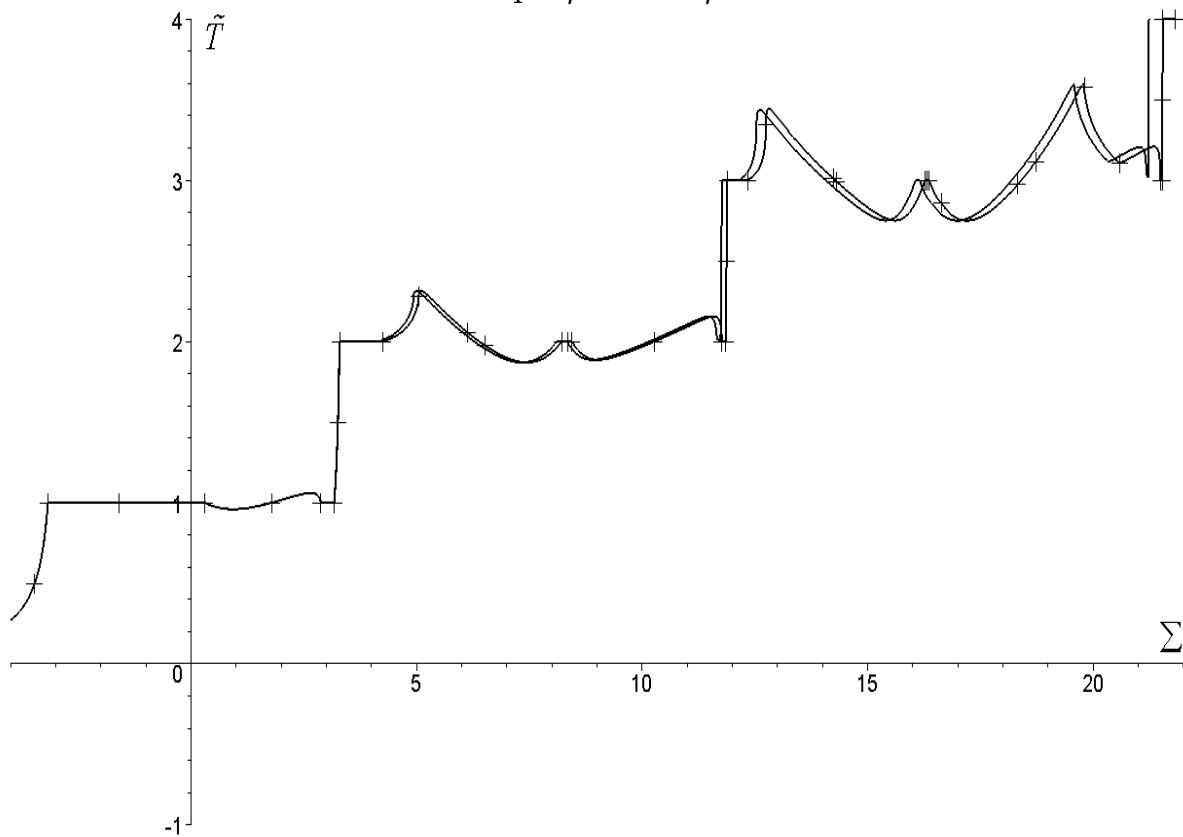


Рис. 13. Нормированный период  $\tilde{T}$  как функция от  $\Sigma$  на семействе  $i$  при  $\mu = 0$  и  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

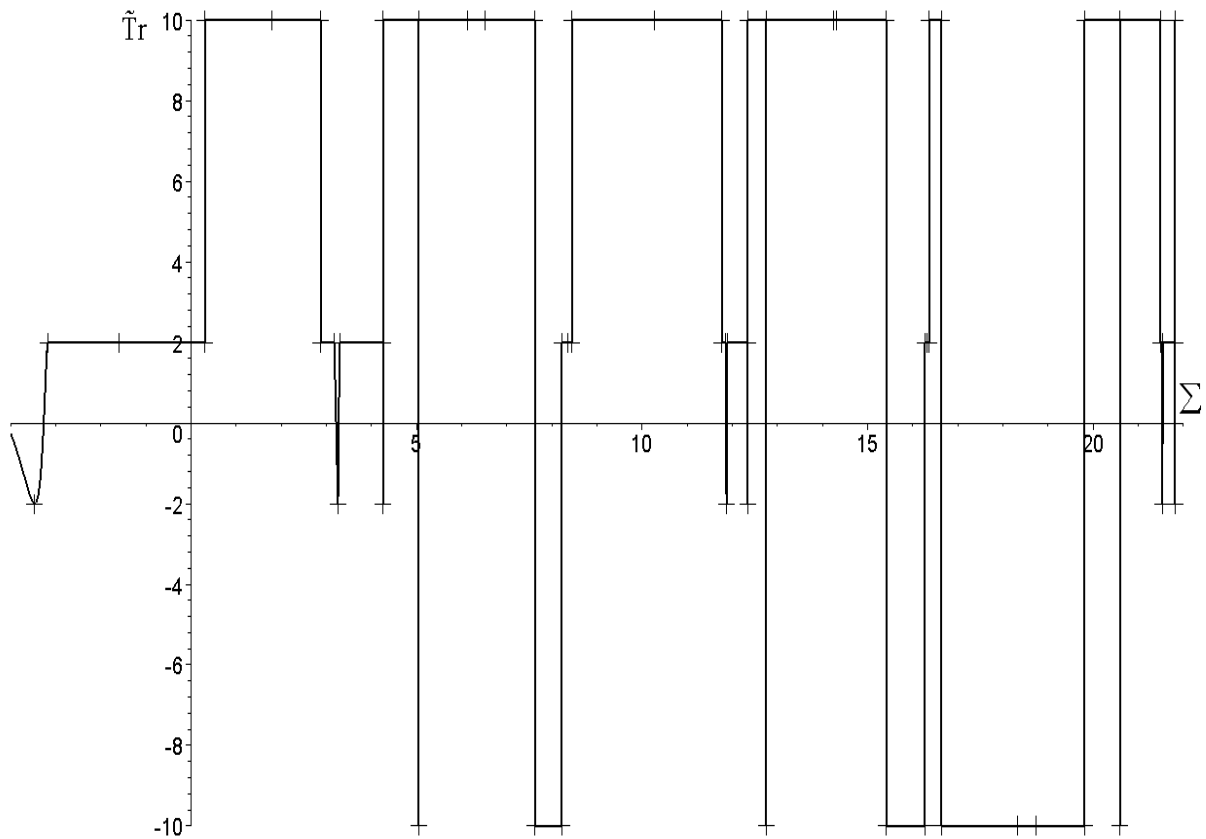


Рис. 14. Плоский след  $\tilde{T}_r$  как функция от  $\Sigma$   
на семействе  $i$  при  $\mu = 0$ .

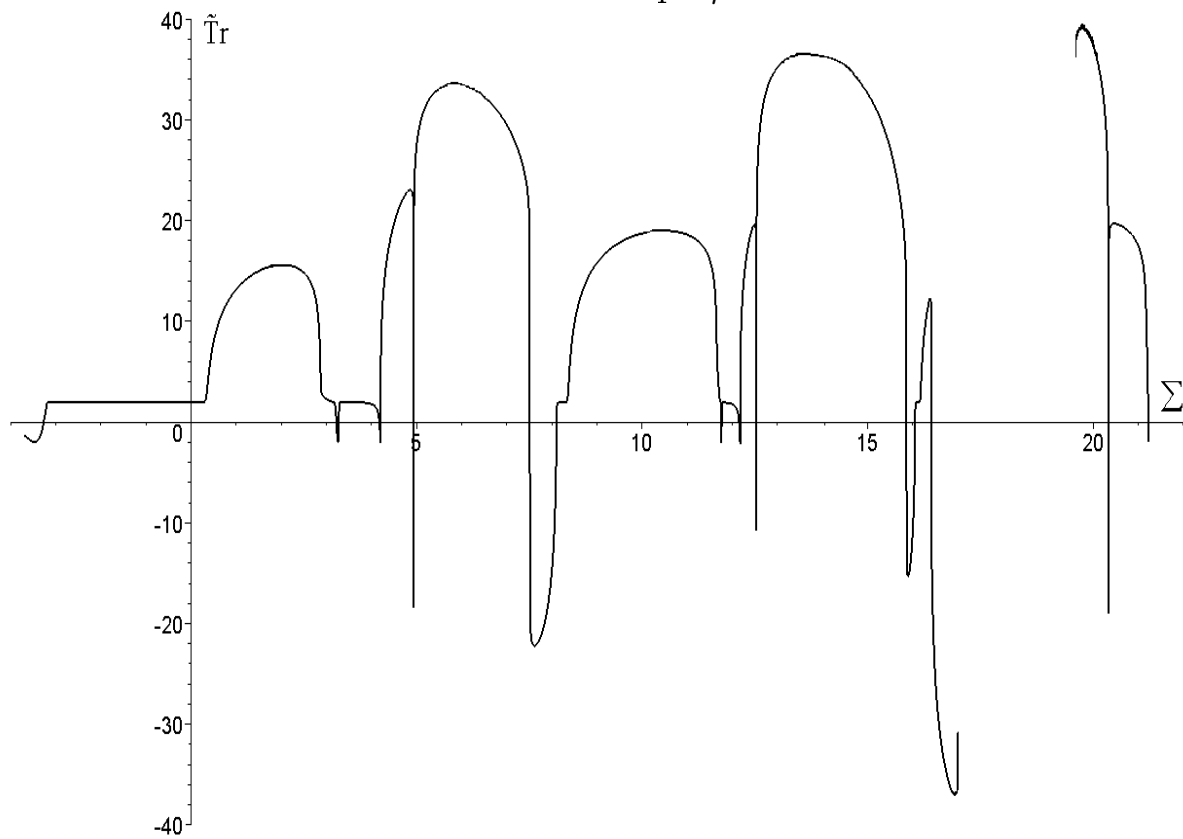


Рис. 15. Плоский след  $\tilde{T}_r$  как функция от  $\Sigma$   
на семействе  $i$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .

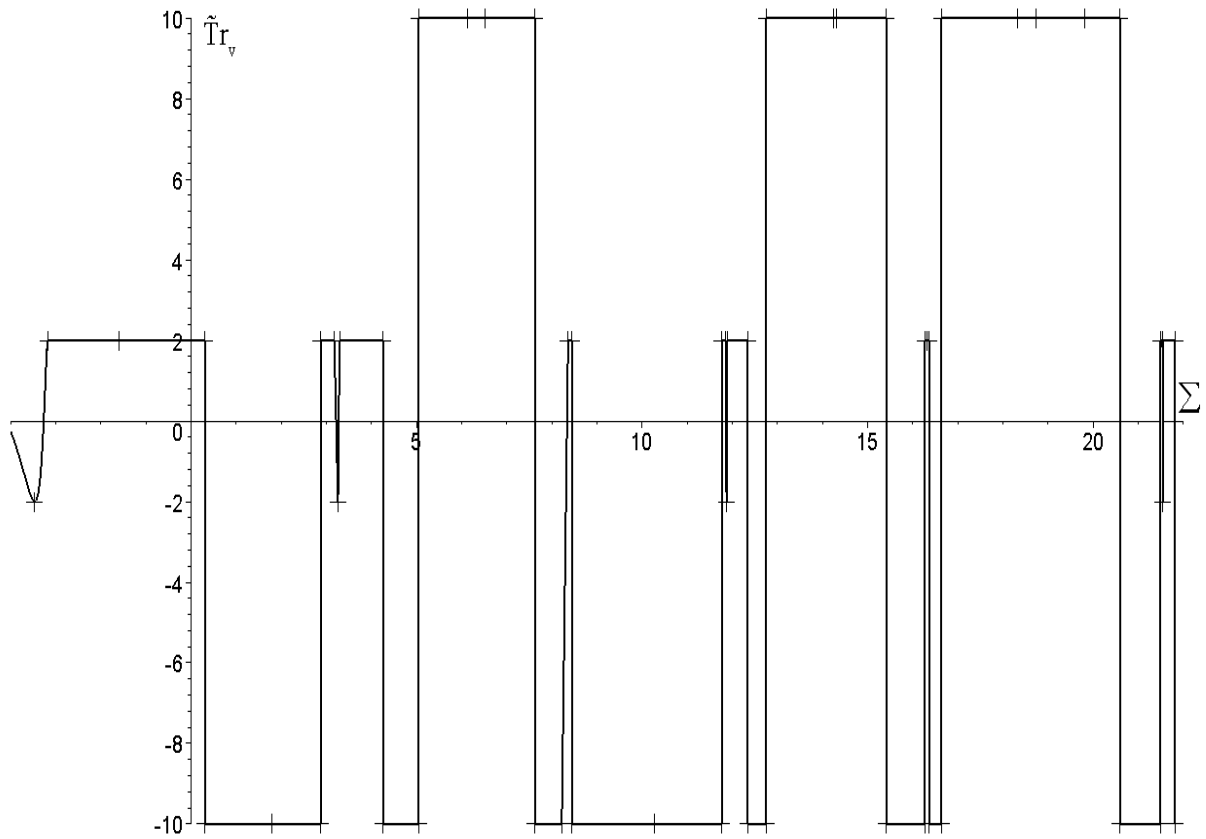


Рис. 16. Вертикальный след  $\tilde{\text{Tr}}_v$  как функция от  $\Sigma$  на семействе  $i$  при  $\mu = 0$ .

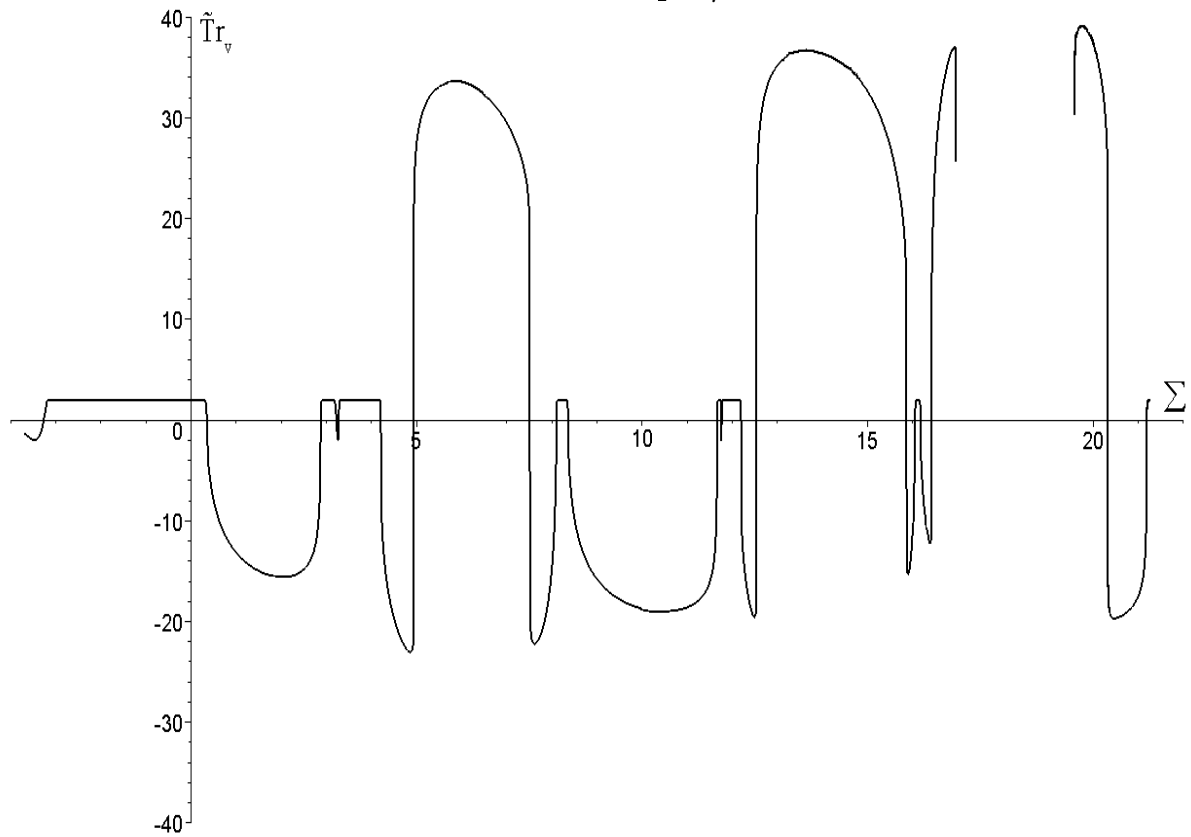


Рис. 17. Вертикальный след  $\tilde{\text{Tr}}_v$  как функция от  $\Sigma$  на семействе  $i$  при  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ .