



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 27 за 2008 г.



**Бахолдин И.Б.**

Методы исследования  
резонансных структур  
разрывов в  
слабодиссипативных средах  
с дисперсией

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бахолдин И.Б. Методы исследования резонансных структур разрывов в слабодиссипативных средах с дисперсией // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 27. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-27>

ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Бахолдин И.Б.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ  
В СЛАБОДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

Москва-2008

УДК 532.59+533.6+533.95

**Бахолдин И.Б. Методы исследования резонансных структур разрывов в слабодиссипативных средах с дисперсией**

На примере обобщенного уравнения Кортевега-Бюргера установлено, что для слабодиссипативных сред с дисперсией и нелинейностью встречаются три типа структур разрывов: стационарные, периодические по времени и стохастические. Стационарные слабодиссипативные структуры внутри себя содержат бездиссипативные структуры разрывов типа переходов между однородными или волновыми состояниями. Структура разрыва может быть не единственной. В связи с этим возникают гистерезисы, т. е. тип разрыва зависит от пути эволюции системы. Проведен анализ всех возможных разрывов для рассматриваемой модели. Выявлено соответствие между типами структуры разрыва и бифуркациями ветвей стационарных решений.

**Bakholdin I.B. Methods of analysis of resonance shock structures in low-dissipative media with dispersion**

Investigation of generalized Korteweg–Burhgers equation showed that three types of shock structures are observed for low-dissipative media with dispersion and nonlinearity. Stationary low-dissipative structures may contain internal non-dissipative structures. These structures are transitions between uniform and wave states. Not only one shock structure may be found. This fact leads to hysteresis. Shock structure depends on the way of evolution of the system. Analysis of all types of shock structures for the system under consideration is fulfilled. Correspondence between shock structure types and bifurcations of branches of stationary solutions is found.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Простейшие прогнозируемые типы разрывов и численный эксперимент.</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Стационарные решения и зависимость типа разрыва от амплитуды.</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Переход к нестационарным решениям, зависимость типа разрыва от диссипации.</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Физическая интерпретация решений.</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Не наблюдаемые структуры разрывов.</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Обобщенные решения и проблемы неединственности.</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Обсуждение.</b>	<b>24</b>

## Введение

Согласно теории бездиссипативных разрывов [1]-[5] при решении ряда бездиссипативных эволюционных уравнений в частных производных с дисперсией в случае начальных данных типа сглаженной ступеньки со временем возникают решения, в которых имеются волновые зоны и однородные состояния, описываемые некоторыми усредненными и упрощенными уравнениями. При таком описании решения оказываются автомодельными, а переходы между волновыми зонами или однородными состояниями рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. В некоторых случаях решения со временем становятся хаотическими. Слабодиссипативные стационарные структуры разрывов представляют собой переходы между однородными состояниями, но внутри этих переходов имеются волновые зоны, описываемые при стремлении параметра диссипации к нулю, усредненными уравнениями, отличающимися от усредненных уравнений в бездиссипативном случае только дополнительными недифференциальными членами [5], [6]. Переходы между волновыми зонами или однородными состояниями, имеющиеся внутри слабодиссипативной структуры, как и в чисто бездиссипативном случае, рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. Опыт исследований показывает, что целесообразно вначале развивать методику для наиболее простых моделей, а

затем переносить ее на аналогичные более сложные. В этом смысле представляют интерес обобщенные уравнения Кортевега–де Вриза и Бюргерса.

$$a_t + [b_1 a + b_n a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = 0 \quad (0.1)$$

$$a_t + [b_1 a + b_n a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = \varepsilon a_{xx} \quad (0.2)$$

Уравнение (0.1) описывает широкий круг физических явлений, например, распространение длинных волн в жидкости при наличии ледового покрытия [7], [8] ( $b_n = 3/2\sqrt{g/H}$ ,  $b_1 = \sqrt{gH}$ ,  $b_3 = 1/2\sqrt{gH}(H^2/3 + Hh - \sigma/(\rho g))$ ,  $b_5 = 1/2\sqrt{H/g}Eh^3/(12(1 - \nu^2)\rho)$ ,  $H$  — глубина жидкости,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — толщина льда,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\sigma$  — начальное натяжение) и гравитационно-капиллярные волны [11], в этих случаях  $a$  — отклонение поверхности жидкости; частный случай ( $b_3 = 0$ ) уравнения (0.1) можно вывести для описания магнитозвуковых волн в плазме [9]; уравнения такого типа (но с кубической нелинейностью) применяются в теории упругости для материалов с включениями [12]; дисперсия проявляется в различных средах за счет молекулярных эффектов для ударных волн большой интенсивности. В рассматриваемые модели можно включать диссипацию и получать уравнение (0.2). В частности для волн подо льдом можно формально включить член соответствующий турбулентной вязкости [5], для волн в канале можно включить силу трения льда о стенку в предположении о том, что из-за наличия жидкой прослойки между льдом и стенкой эта сила носит гидродинамический характер и пропорциональна скорости перемещения поверхности льда в вертикальном направлении, можно рассматривать лед как вязкоупругую среду, но в этом случае в левой части уравнения (0.2) будет член  $-\varepsilon a_{xxxx}$ , разработанная ниже методика исследования допускает рассмотрение и такого уравнения, причем зависимость типа разрыва от амплитуды (п.2) не изменится. Задачей настоящей работы является получение полного представления о всех типах слабодиссипативных разрывов и возникающих при этом внутренних бездиссипативных разрывах для уравнения (0.2).

## 1 Простейшие прогнозируемые типы разрывов и численный эксперимент.

Тип бездиссипативного разрыва зависит от числа пересечений ветвей дисперсионной кривой по обе стороны разрыва и прямой, соответствующей его фазовой скорости [1]. Для определения конкретного типа разрыва в решениях

уравнений (0.1) и (0.2) следует найти значения  $k$  как решения системы

$$\omega = (b_1 + a_{1,2})k - b_3k^3 + b_5k^5, \quad U = \omega/k, \quad k > 0 \quad (1.1)$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены значения справа и слева от разрыва,  $U$  — скорость разрыва,  $k$  — волновое число,  $\omega$  — циклическая частота. При наличии диссипации  $U = (a_1 + a_2)/2$  [5], [6], в бездиссипативном случае эта величина может быть получена только в результате решения уравнений в частных производных или системы усредненных уравнений [3], [5]. При  $b_3b_5 < 0$  для одной из сторон имеется одно пересечение при  $k > 0$  и два действительных и два мнимых корня, для другой — либо четыре действительных корня (малые амплитуды разрыва), либо четыре комплексных (большие амплитуды). В первом случае прогнозируется эволюционный разрыв солитонного типа (переход между однородным состоянием и периодическим, приближающимся к последовательности уединенных волн), а во втором — эволюционный разрыв с излучением (переход между однородным и периодическим состоянием). При  $b_3b_5 > 0$  либо (большие амплитуды) для одной из сторон разрыва пересечения нет, корни уравнения (1.1) комплексны, а для другой имеется два действительных и два мнимых, может существовать эволюционный разрыв с излучением, либо (малые амплитуды) для одной из сторон разрыва два действительных и два мнимых корня (одно пересечение), а для другой — четыре действительных (два пересечения). Теория прогнозирует для малых амплитуд наличие решений типа обобщенной уединенной волны (суперпозиция уединенной и периодической волны). Можно предполагать наличие разрывов обобщенно-солитонного типа (переход между периодическим состоянием и двоякопериодическим, стремящимся к последовательности уединенных волн), но эволюционность этих разрывов не ясна.

Численный эксперимент, направленный на выявление зависимости типа структуры разрыва от его амплитуды и диссипативного параметра  $\varepsilon$  состоит в исследовании установившихся численных решений уравнения (0.2), возникающих в результате эволюции начальных данных типа сглаженной ступеньки:  $a = \Delta(1 - \tanh((x - \delta)/l))/2$ ,  $b_1 = -U = -(a_1 + a_2)/2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \Delta$ ;  $b_n = 1$ ,  $b_3 = \pm 1$ ,  $b_5 = 1$ , эти коэффициенты приводятся к единичным растяжением осей  $x$ ,  $t$ ,  $a$ ;  $\varepsilon$  и  $\Delta$  становятся безразмерными параметрами задачи (для волн подо льдом описано в [5]; при необходимости поменять знак  $b_5$  или  $b_n$  для некоторых моделей требуется применить еще и зеркальное отражение по осям  $x$  и  $a$ ). Встречаются стационарные, периодические и стохастические структуры, причем для одних и тех же значений параметров  $\Delta$  и  $\varepsilon$ , меняя начальные данные (параметр  $l$ ) или меняя  $\varepsilon$  в процессе расчета, можно получить разные решения. Удобным способом определения типа решения является

построение графика  $\max_x a(t)$ , при  $t \rightarrow \infty$  этот график может выходить на стационарный, периодический или стохастический режим.

При  $b_3 b_5 < 0$  расчет подтверждает прогноз: солитонный тип при  $\Delta < 0.5$ , разрыв с излучением при  $\Delta > 0.5$ . Дальнейшие исследования здесь не требуются. При  $b_3 b_5 > 0$  для достаточно больших амплитуд подтверждается наличие разрыва с излучением. Расчет для умеренных амплитуд показывает появление решений стохастического типа. Но такие решения наблюдаются и тогда, когда корни комплексны,  $\Delta > 0.5$ , при  $\Delta < 0.5$  помимо стохастических встречаются еще стационарные и периодические структуры, требующие дальнейшего анализа. Обнаруженные стационарные структуры качественно можно интерпретировать как структуры, где имеется внутренний переход между периодическим состоянием (справа) и несимметричными двоякопериодическим состоянием (слева) с целым отношением периодов:  $1/2$  (рис.1а),  $1/3$  (рис.1б),  $1/4$ , ... .

## 2 Стационарные решения и зависимость типа разрыва от амплитуды.

Уравнения бегущих волн для (0.1) имеют вид:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T, \quad u_i = \frac{\partial^i a}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F} = \left( u_1, u_2, u_3, \frac{c - b_1 u_0 - u_0^2/2 - b_3 u_2}{b_5} \right)^T, \quad c = const$$

Существует [4] счетное множество трехпараметрических семейств симметричных периодических решений (2.1), одно из семейств соответствует однопериодному решению, другие семейства — двоякопериодическим решениям с рациональным отношением периодов. По своим параметрическим свойствам семейства однопериодных и двоякопериодических решений равноценны. На базе семейств и тех и других можно вывести усредненные уравнения, описывающие волновые зоны в решениях уравнений (0.1) и (0.2). Построим бифуркационные диаграммы ветвей периодических и двоякопериодических волн с целым отношением периодов и сопоставим их с типом наблюдаемого разрыва. Для построения ветвей найдем численные решения системы (2.1) с начальными данными  $u_{00} = u_e + z$ ,  $u_{10} = 0$ ,  $u_{20} = w$ ,  $u_{30} = 0$ , где  $u_e = \Delta$  — состояние равновесия;  $c = u_e + u_e^2/2$ . Варьируем величину  $x$  так, чтобы при заданных  $z$  и  $w$  найти значение  $x = x_*$  (полупериод волны), где  $u_3(x) = 0$ , затем варьируем

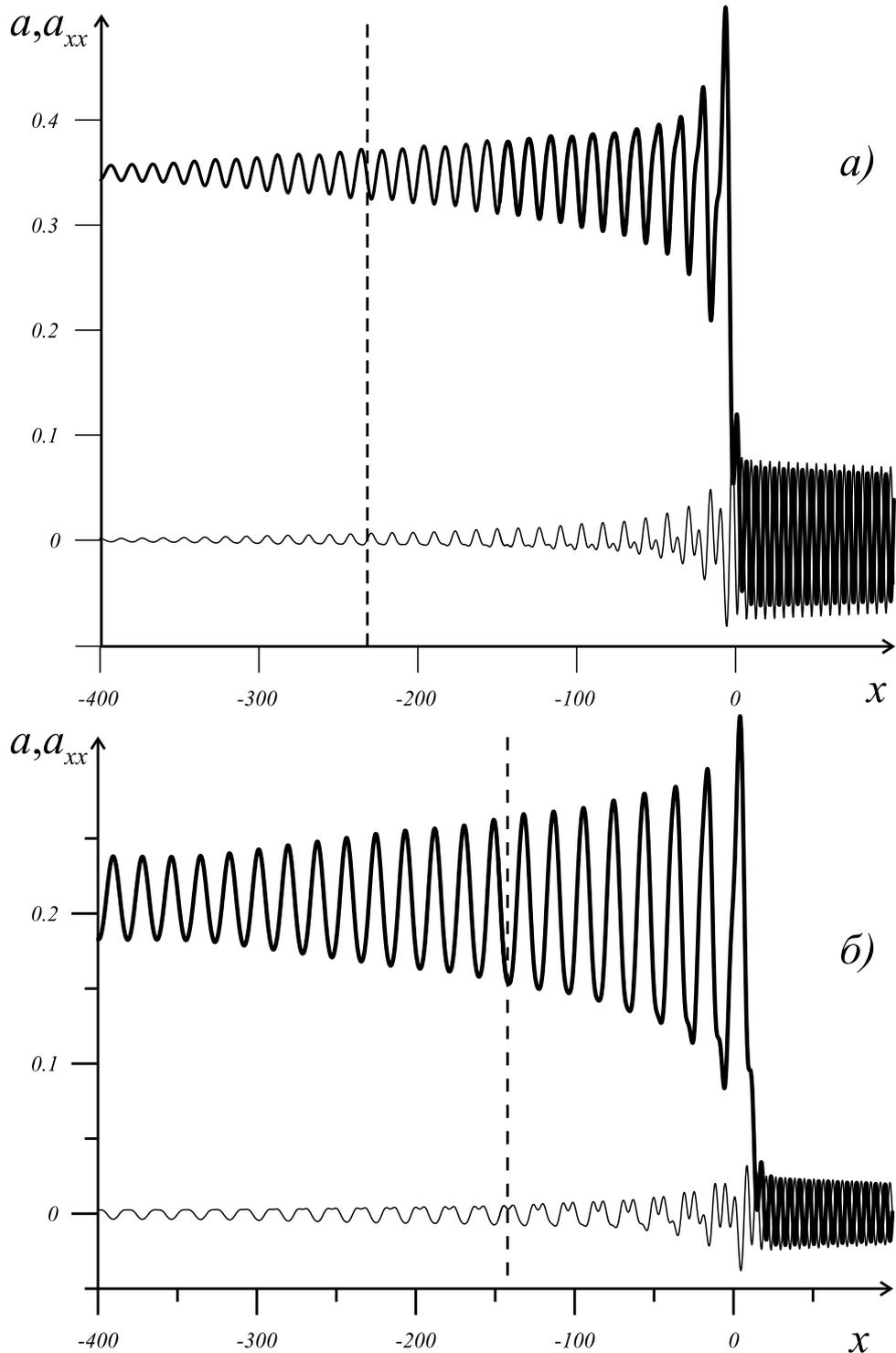


Рис. 1

величину  $w$  так, чтобы найти значение, для которого и  $u_1(x_*) = 0$ . В стационарном решении может быть много точек, где  $u_3(x_*) = 0$ . Задание на поиск периодических решений было составлено так, что вводилось целое число  $p$ , чтобы была пропущена первая, вторая, и.т.д. точка, а учитывалась только  $p$ -я. Одно и то же решение может быть выявлено при разных значениях  $p$ .

Величину  $q = \min\{p\}$  назовем отношением периодов в двоякопериодическом решении. Эта величина совпадает с отношением периодов волн в периодическом двухволновом решении [10], если это отношение целое. Эта методика в отличие от методики поиска периодических решений, описанной в [4], [5] позволяет выделить среди всего множества двоякопериодических решений определенные типы решений, в частности резонансные двухволновые решения с отношениями периодов волн  $1/m$  и  $m/(m+1)$ ,  $m$  — целое. В результате для заданного значения  $k$  на некотором интервале значений  $z$  определяется некоторая (в общем случае неоднозначная) функция  $w(z)$ . Графики этой функции будем называть ветвями двоякопериодических решений на плоскости  $(z, w)$ , ветви будем обозначать  $1/q+$  или  $1/q-$ , в зависимости от того интерпретируются ли при качественном анализе графика  $a(x)$  рассматриваемое решение как синфазное или противофазное взаимодействие двух волн.

Анализ дисперсионного соотношения в случае  $\Delta < 0.5$  заставляет предположить наличие одноволновой коротковолновой ветви, одноволновой длинноволновой ветви, а метод нормальных форм, пригодный при  $\Delta \rightarrow 0$  [11] — гибридных двухволновых двоякопериодических ветвей с отношением периодов волн  $1/m$ . Назовем эти ветви основными. Кроме того должны быть и иные двухволновые гибридные ветви с другим рациональным отношением периодов. Длинноволновая и коротковолновая ветви должны пересекаться в начале координат, а гибридные ветви — иметь вид колец с центром в начале координат. Эти ветви действительно определяются, но их конфигурация вдали от начала координат сильно отличается от ожидаемой. Схема расположения рассматриваемых ветвей в типичном случае для области  $z > 0$  показана на рис.2.

Длинноволновая ветвь действительно выходит из начала координат. Но затем она переходит в ветвь  $1/n-$ , при этом имеется еще ветвь  $1/n+$ , переходящая в следующий фрагмент длинноволновой ветви, этот фрагмент переходит в ветвь  $1/(n+1)-$ . Длинноволновые одноволновые фрагменты определяются как участки пересекаемые вторичными кольцеобразными гибридными ветвями. Согласно этому определению одноволновое решение не обязательно является однопериодным. Характерное для данного рисунка число  $n$  при  $n > 2$  равно целой части отношения периодов длинной и короткой линейных волн при рассматриваемом значении фазовой скорости. Таким образом возникает то, что можно называть дислокациями: основные гибридные ветви как бы разрезаны и склеены со смещением на единицу через участки одноволновой ветви или без таких участков. В пределе такая последовательность дислокаций ветвей дает ветвь обобщенных уединенных волн. Представление о фактическом

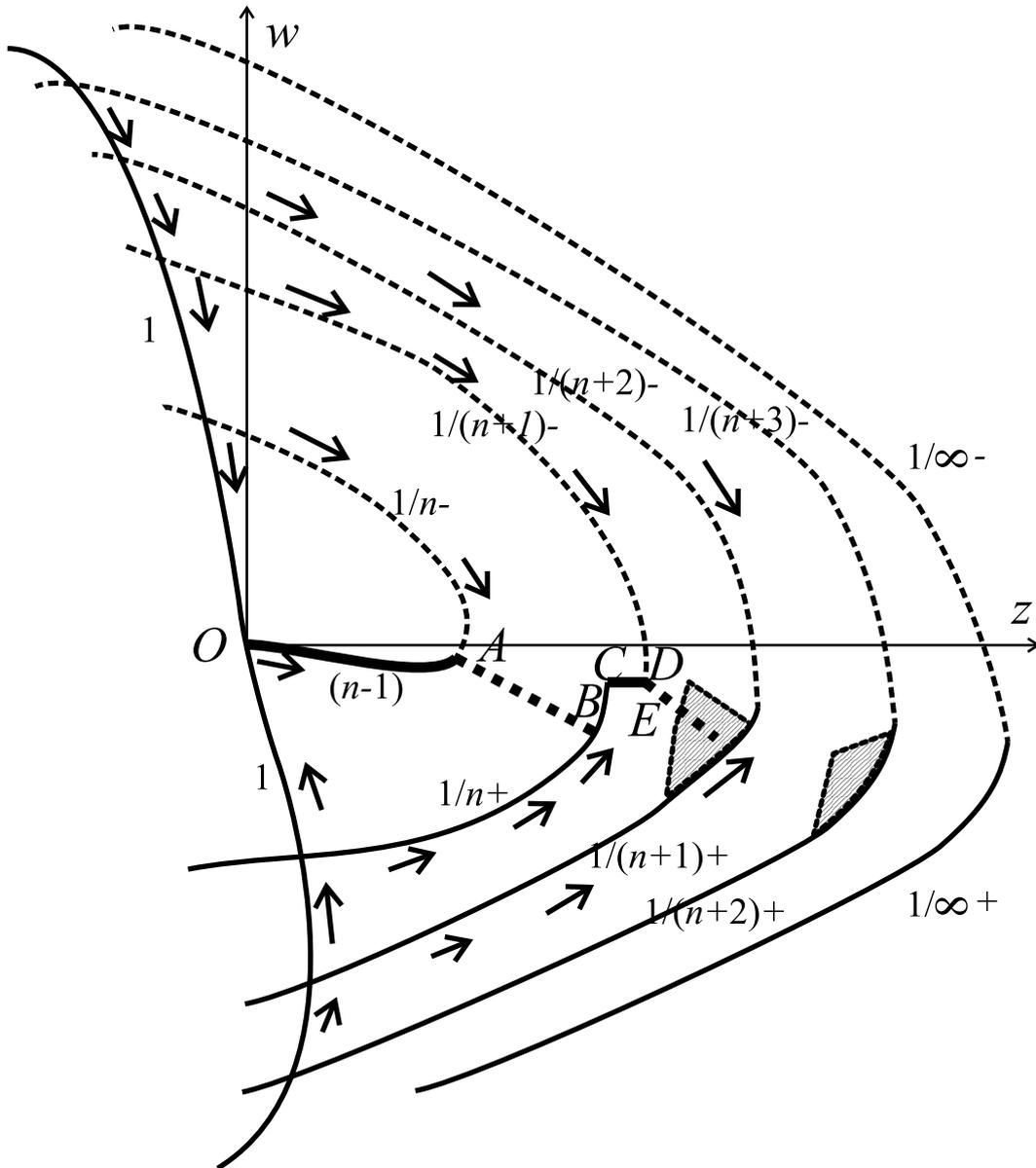


Рис. 2

расположении ветвей в типичном случае дают рис.3 и рис.4, соответствующие  $n = 3$  и  $n = 4$ . На данных рисунках крупными цифрами отмечены фрагменты ветвей, определяемые при различных значениях  $q$ , мелкими — переходы между различными значениями  $q$ , т.е. бифуркации, длинноволновые фрагменты тоже определяются как двоякопериодические. В связи с тем, что для каждой периодической волны можно определить величину  $z$  двумя способами (имеется две точки симметрии) фрагменты ветвей при  $z > 0$  и  $z < 0$  дублируют друг друга, в частности при  $z < 0$  тоже обнаруживаются участки длинноволновой ветви. Гибридные ветви с целым отношением периодов и фрагменты длинноволновой ветви склеиваются так, что образуются замкнутые подковообразные кривые. В четном случае одна из таких кривых (проходящая через начало ко-

ординат) приобретает вид полукруга, концы которого соединены хордой. Имеется участок значений  $0.32 > \Delta > \Delta_* \approx 0.3$ , при котором расположение такой ветви не типичное, рис.5, здесь можно было бы ожидать соединения с ветвью  $1/3$ —, поскольку при  $\Delta = 0.32$  достигается линейный резонанс  $1/2$ . Но длинноволновая ветвь, исходящая из начала координат соединяется с ветвью, определяемой при  $n = 2$ , причем соответствующая замкнутая кривая, проходящая через начало координат расположена нетипично. На этом рисунке тонкой линией показана также некоторая контрольная аналитическая кривая, вычисленная из предположения о том, что в бифуркационных точках производная третьего порядка равна нулю. Она проходит через некоторые бифуркационные точки, что позволяет контролировать качество расчета. На участке  $0.5 > \Delta > 0.32$ , расположение ветвей соответствует  $n = 2$  и в целом типично для четных значений  $n$ , см. рис.6. При  $\Delta = 0.32$  длинноволновая ветвь отсутствует совсем.

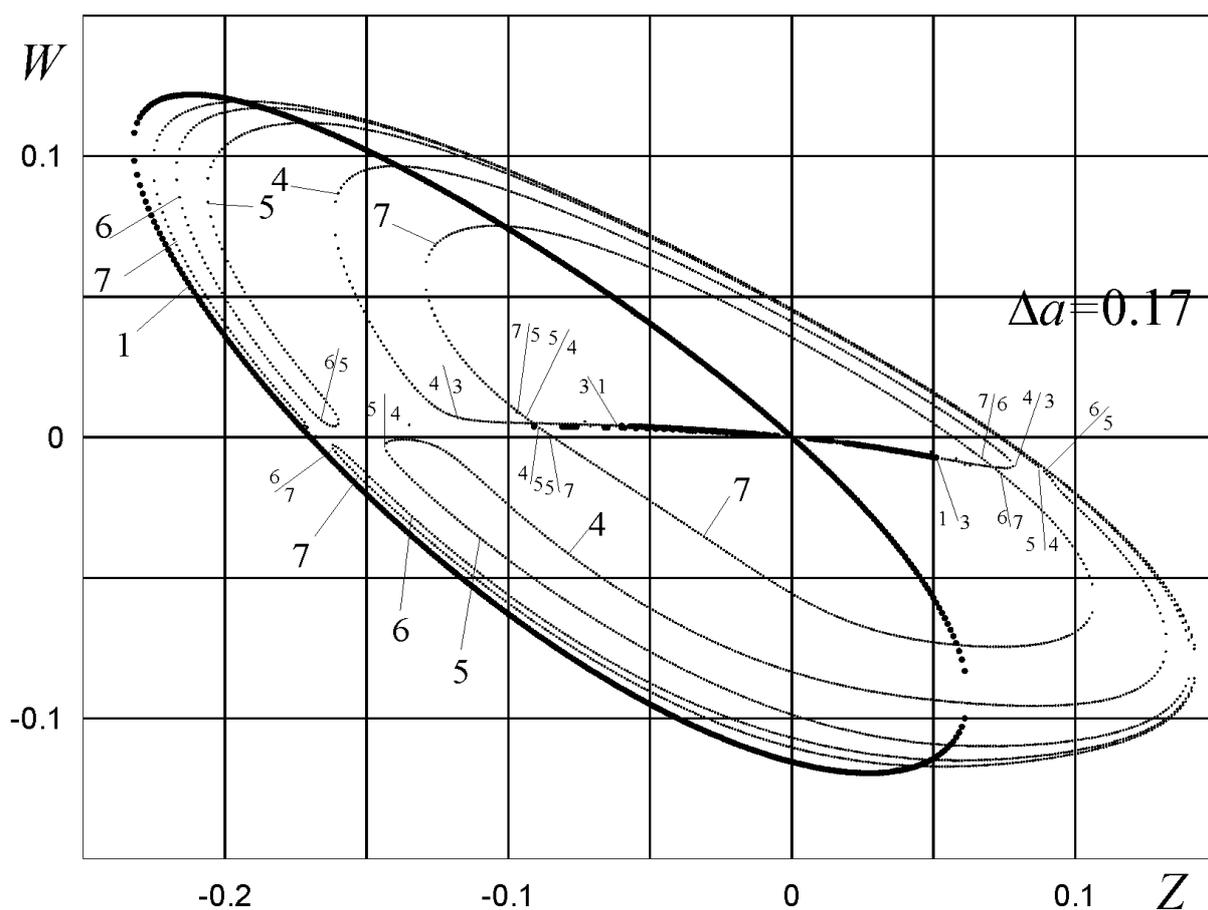


Рис. 3

Конфигурация других типов ветвей более сложная, поэтому рассмотрим только те особенности, которые важны для исследования структуры разрыва. На рис.7 в области  $z < 0$  показаны ветви, рассчитанные при  $p = 1, \dots, 35$ .

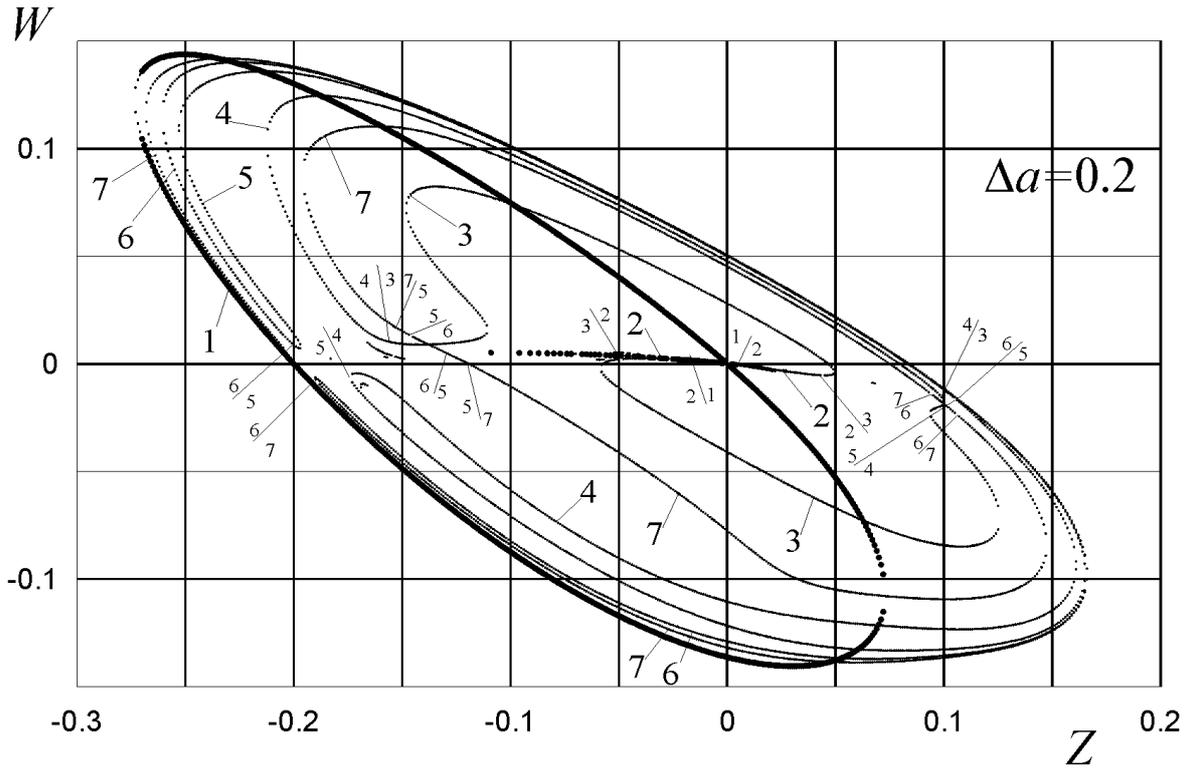


Рис. 4

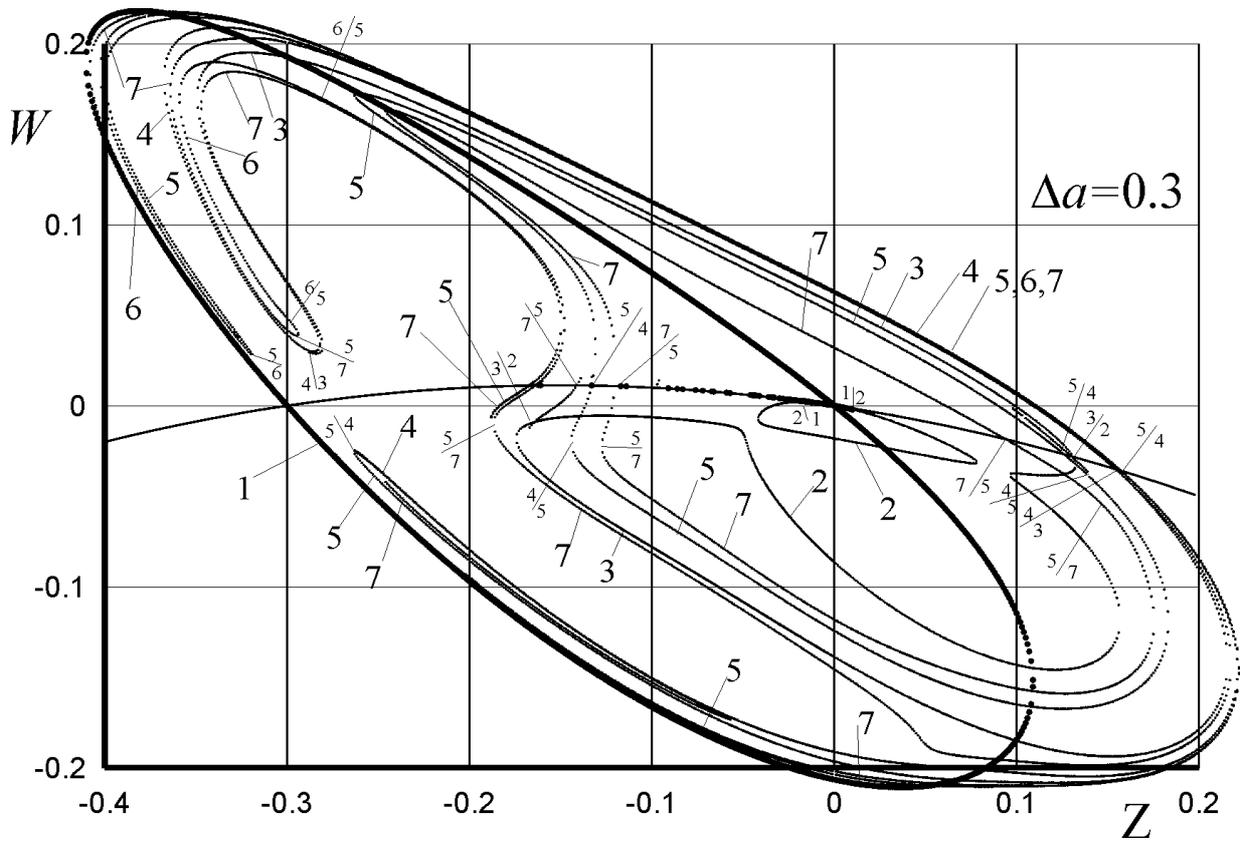


Рис. 5

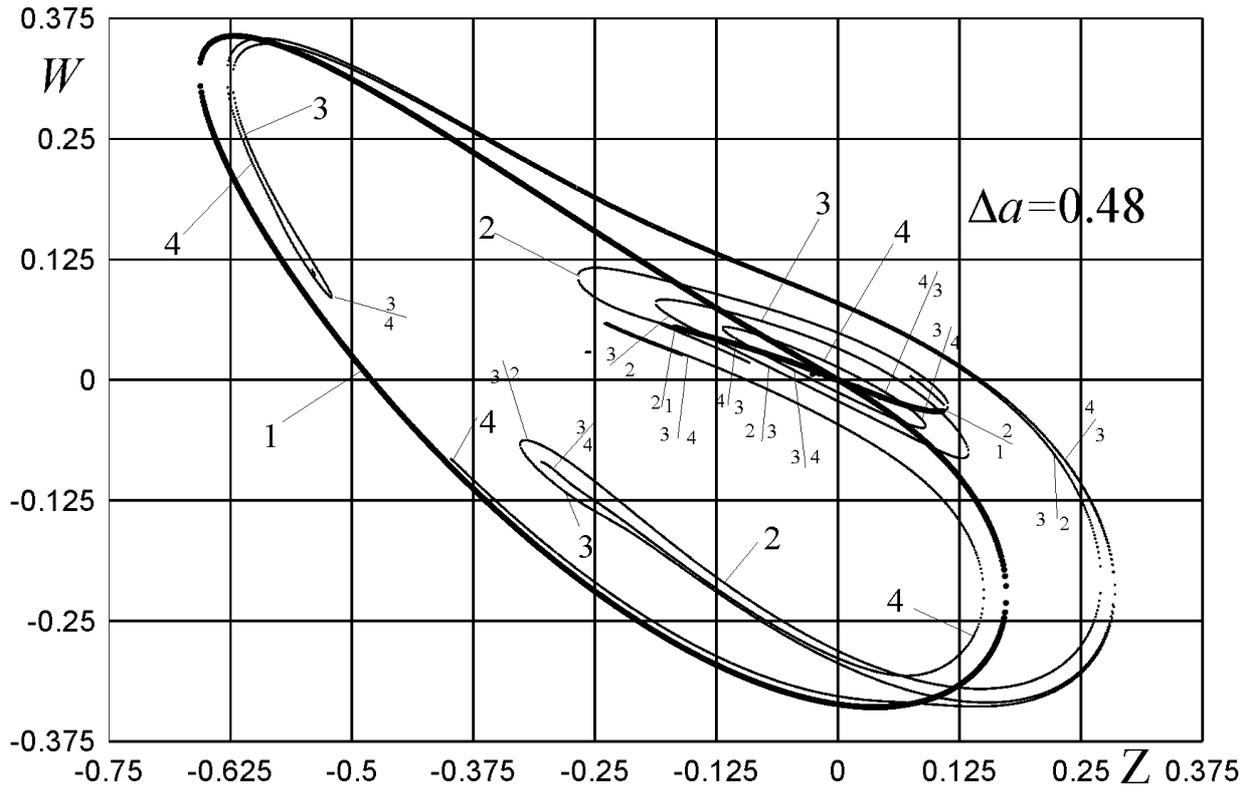


Рис. 6

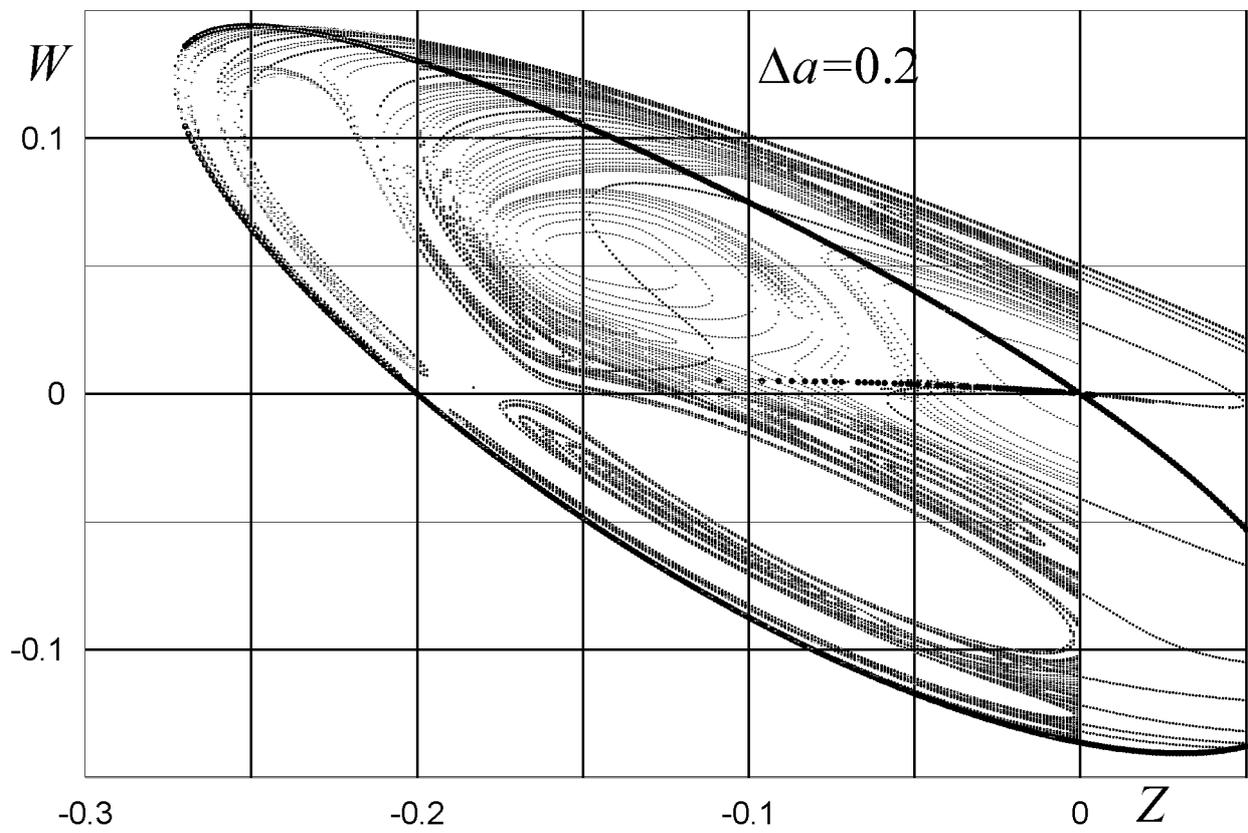


Рис. 7

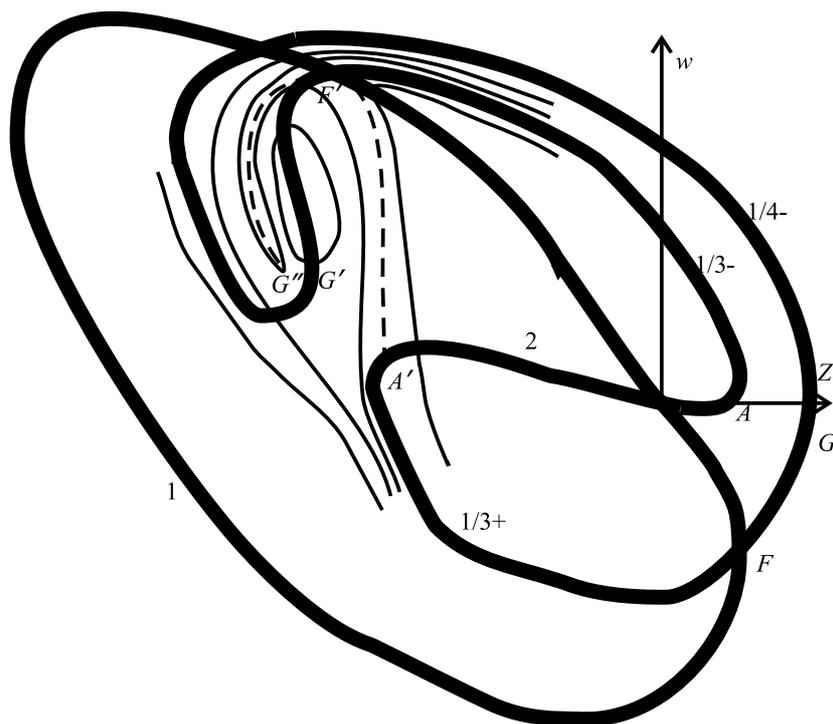


Рис. 8

Видно что только часть неосновных гибридных ветвей имеет кольцеобразную форму и пересекает соответствующий длинноволновый одноволновый участок. Другая часть заворачивает в некоторую область и затем выходит из нее. В этой области есть еще и замкнутые ветви, наличие которых не прогнозировалось. Все это проявление того, что в работе [10], где исследовалась область ограниченных стационарных решений, было названо резонансным листом, решения в соответствующей зоне интерпретировались как резонансные двухволновые решения с фазовыми колебаниями. Под резонансом понималось то, что отношение периодов волн равно рациональному числу. На границах резонансного листа период фазовых колебаний стремился к бесконечности и возникали уединенные волны огибающей резонансного решения. В данном случае такие границы тоже выявляются, они схематично показаны на рис.8 штриховыми линиями. Геометрически они имеют смысл сепаратрис. Расположение неосновных ветвей вблизи этих кривых показано тонкими линиями. В отличие от уединенных волн, найденных в [10], для уединенных волн выявленных здесь периодическая волна, соответствующая подошве, являются симметричной волной. Для уединенной волны в отличие от периодической величины  $(z, w)$  можно определить уже тремя способами: значения на гребне и два значения на подошве. Поэтому кривые  $A'F'$  и  $G''F'$  в этом смысле эквивалентны гибридным основным ветвям  $A'F$  и  $G'F'$ . При подходе к границе  $A'F'$  с наружной стороны стороны резонансного листа можно получить

уединенные волны. Тот же тип уединенных волн можно получить используя нечетные ветви при подходе с внутренней стороны резонансного листа. Используя четные ветви можно получить два типа уединенных волн (интерпретация этого эффекта как фазовых колебаний дана в [10]). Для границы  $G''F'$  при подходе с обеих сторон получается один и тот же тип уединенных волн. Наличие двух разных типов уединенных волн и двух разных типов границ отмечалось в [10]. Внутри резонансного листа имеется большое число замкнутых ветвей, наличие которых не прогнозировалось. Все это говорит о том, что резонансный лист очень сложный объект, возможно он сам представляет собой систему из вложенных друг в друга резонансных листьев. При численных исследованиях всех ограниченных решений [10] трудно достоверно определить ограничены они или нет из-за того что интервал значений  $x$  на котором требуется исследовать решение, имеет бесконечную длину, поэтому трудно сказать, представляет ли собой резонансный лист область или же это дискретный счетный набор ветвей. Исследование же периодических решений, имеет высокую степень достоверности.

На основании проведенных исследований очевидно что решение, описывающее структуру разрыва, состоит слева из фрагментов длинноволновых ветвей, описываемых усредненными уравнениями, а справа из участка коротковолновой ветви, также описываемого. Периодические волновые зоны можно описать с помощью усредненных уравнений [5], в стационарном случае эти уравнения принимают вид:

$$\frac{dE}{dX} = -\varepsilon \langle a_x^2 \rangle, \quad E(z) = zP + Vz^2/2 - z^3/6 + b_5 w(z)/2, \quad P = const \quad (2.2)$$

Здесь  $X$  — медленная переменная,  $\langle a_x^2 \rangle$  — соответствующая величина усредненная по периоду стационарного периодического решения, некоторая функция от  $z$ . Согласно уравнению (2.2) поток энергии  $E$  должен уменьшаться при увеличении  $X$ . На рис.2 стрелками показаны направления уменьшения потока энергии, что позволяет оценивать возможность построения решений различных типов. Коротковолновая и длинноволновая часть разделяются внутренним бездиссипативным разрывом. Слева одноволновые фрагменты соединяются участками с несимметричными волновыми зонами, соответствующим границам резонансных листьев серии  $1/n$ , несимметричные периодические решения составляют двухпараметрическое семейство с параметрами  $(z, w)$  и соответствуют подошвам уединенных волн. Сравнение числа начальных данных системы (2.1) и числа параметров, которые нужно приравнять к начальным при получении такого решения методом пристрелки показывает на то, что такого семейства нет, оно может быть только однопараметрическим (численная

проверка показала, что подходящего однопараметрического семейства нет). Таким образом, речь идет о приближенных решениях. Для этого семейства решений можно вывести усредненные уравнения, например добавив и усреднив еще один имеющийся дополнительный закон сохранения, приведенный в [5] и имеющий смысл уточнения закона сохранения энергии :

$$\frac{dE}{dX} = -\varepsilon \langle a_x^2 \rangle \quad (2.3)$$

$$\frac{dE^*}{dX} = -\varepsilon \langle y \rangle, \quad (2.4)$$

здесь  $y = y(x)$  — некоторая периодическая функция. Тогда стационарному решению усредненных уравнений будет соответствовать некоторая фазовая кривая на плоскости  $(z, w)$ . Ранее [4] были найдены структуры разрывов типа переходов между периодическим и двоякопериодическим симметричными состоянием. Для заданного значения скорости они определялись с точностью до одного свободного параметра. Можно предположить что существуют структуры разрывов типа перехода между несимметричным двоякопериодическим и симметричным периодическим состоянием и такие решения будут зависеть от двух параметров и образовывать некоторую область на плоскости  $(z, w)$  (речь очевидно также идет о приближенных решениях), эта область обведена и отмечена на рис.2 штриховкой. Решение типа структуры слабодиссипативного разрыва можно получить, найдя пересечение фазовой кривой с границей этой области (точка  $E$  на рис.2). В принципе решение определено с точностью до одного свободного параметра, поскольку кривая продолжаема и в область существования структуры. По видимому в реальности континууму решений усредненных уравнений соответствует конечное число структур и это число тем больше, чем меньше параметр  $\varepsilon$ . Но наблюдаться будет только простейшая из них, с минимальным числом горбов слева от разрыва, а остальные либо неустойчивы либо требуют предварительной установки специальных начальных данных. Итак решение слева от разрыва состоит из участков периодических симметричных волновых зон и переходных несимметричных участков. Для точного определения числа таких участков следует проанализировать возможность построения решения на каждом из таких переходов. Так для варианта, соответствующего рис.4 и рис.7, актуален только анализ перехода от участка начинающегося от начала координат к следующему участку, поскольку другие фрагменты одноволновой ветви отсутствуют. В качестве приближенного способа определения проходимости резонансного листа можно предложить анализ изменения потока энергии. Согласно уравнению (2.3) поток энергии должен уменьшаться с ростом  $X$ . При перемещении вдоль

одноволновой ветви от начала координат к ее концу поток энергии действительно уменьшается, далее решение выходит на границу резонансного листа и либо доходит до области структур разрыва либо до другой его границы, которая совпадает с гибридной ветвью, по которой можно продолжить движение далее на следующий одноволновой фрагмент. Такой переход возможен только если поток энергии в точке  $A'$  меньше чем поток энергии в точке  $G''$ . Тогда решение можно продолжить на следующий резонансный лист и повторить все снова. Расчеты непосредственно уравнения в частных производных показывают, что этот критерий определения типа решения подтверждается. Фактически были выявлены решения с одним переходом и без перехода. Эти решения схематично представлены на рис.9б,в, для сравнения на рис.9а показано строение решения в случае разрыва с излучением, формально это случай 1:1 резонанса, он был исследован в работе [6]. На рис.2 отмечены кривые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$ , соответствующие аналогичным волновым зонам на рис.9в

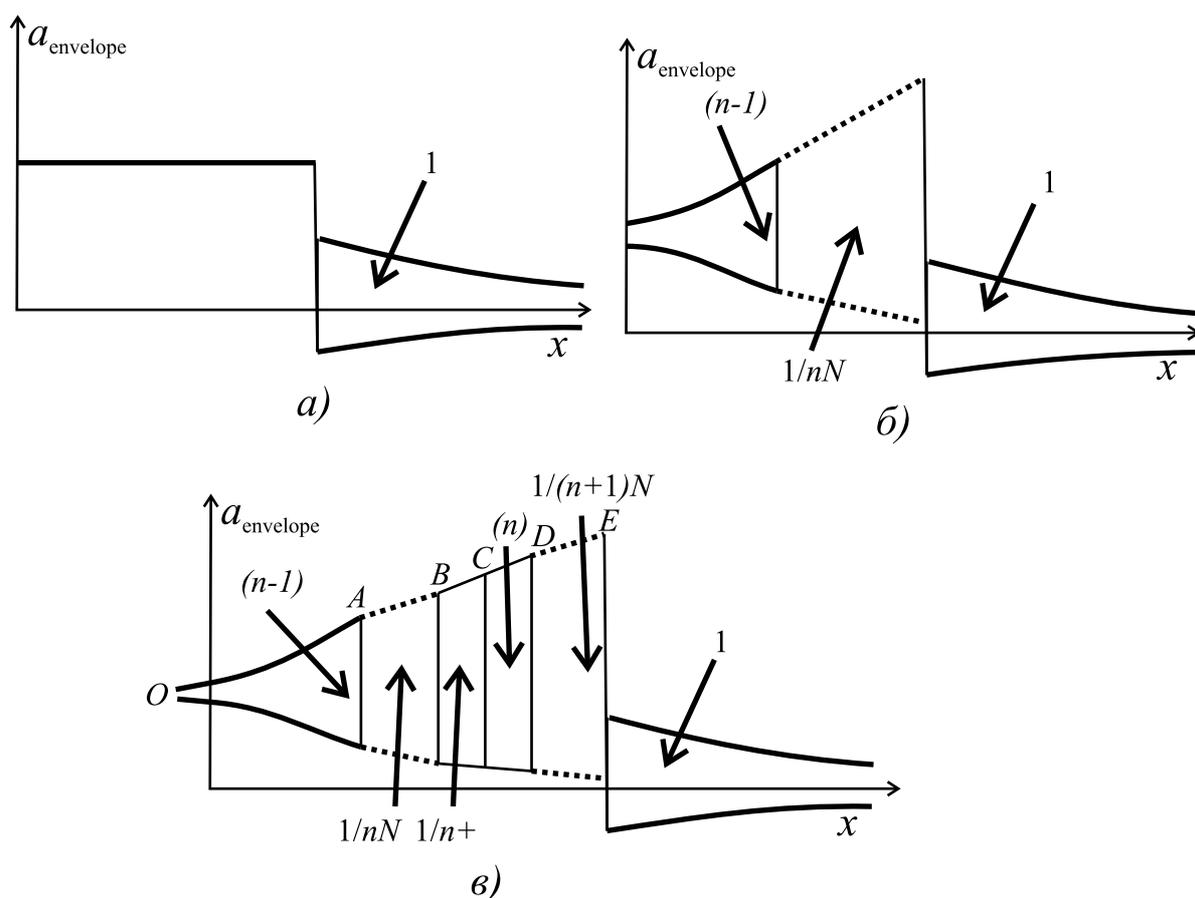


Рис. 9

Таким образом методика определения типа решений при  $\Delta < 0.5$  установлена. Характерные типы расположения ветвей при  $\Delta > 0.5$  показаны на рис.10 и рис.11.

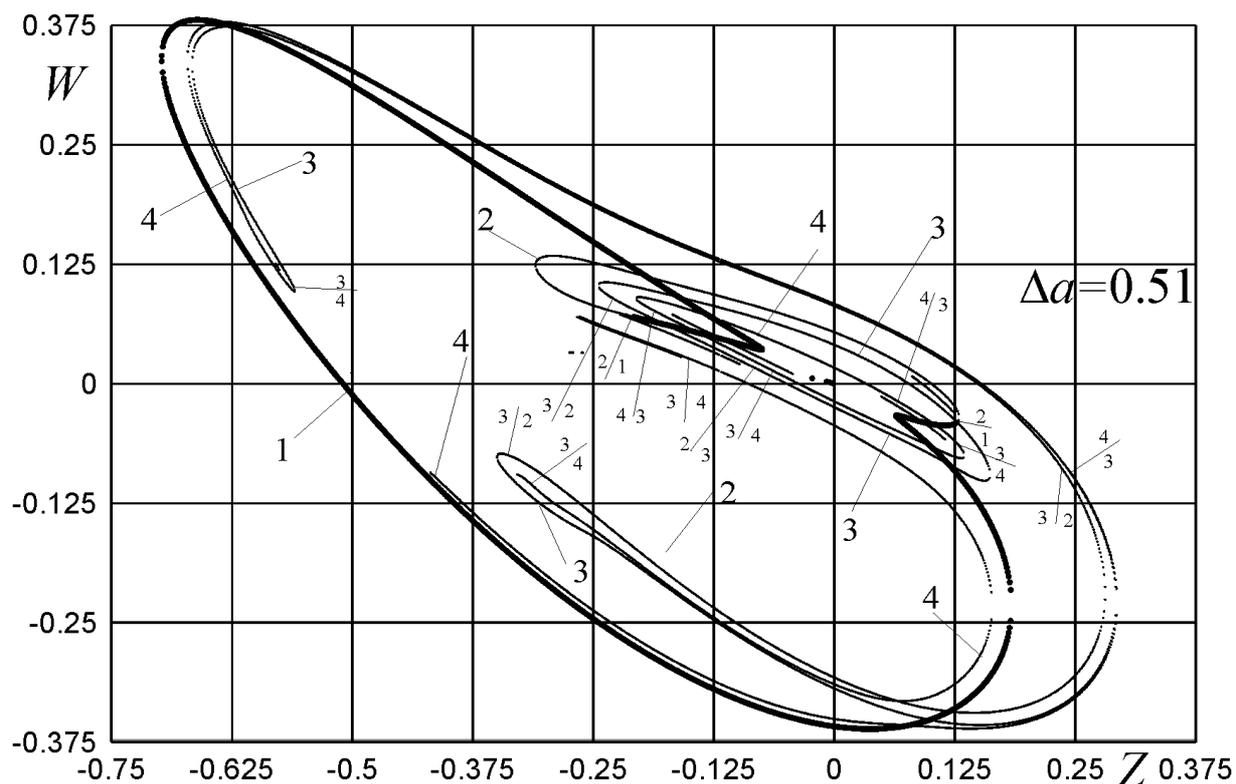


Рис. 10

В варианте, представленном на рис.10,  $\Delta = 0.51$ , длинноволновая ветвь не исходит из начала координат, а соединяется с коротковолновой в особых точках  $A$  и  $B$ . Эти точки соответствуют двум разным 1:1 солитонам. Вторичные ветви (серии  $m/(m+1)$ ) имеют кольцеобразный вид. Других уединенных волн здесь нет, поэтому можно предполагать, что нет и структуры разрыва с излучением. Расчеты показывают, что такой разрыв действительно не наблюдается. Соответствующий диапазон  $0.5 < \Delta < \Delta_{**} \approx 0.59$ . Заметим, что наличие подобного диапазона можно было предвидеть исходя из результатов работы [13], где исследуются мультисолитонные решения для рассматриваемых здесь уравнений (2.1).

В варианте, представленном на рис.11, длинноволновая ветвь также не исходит из начала координат, а вторичные ветви спиралеобразно сходятся к нему. Кроме того, имеются и другие точки притяжения ветвей, в частности точки  $A$  и  $B$  соответствующие 1:1 солитону, с вершиной вверх и вершиной вниз. Другие точки соответствуют 1:1 мультисолитонам. В данном случае можно предполагать, что существует структура разрыва типа перехода между однородным и периодическим состоянием (разрыв с излучением). Такая структура строится как предел последовательности мультисолитонов [3]. Таких структур может быть много, но наблюдается только простейшая из них, остальные видимо неустойчивы. Такой вид имеет бифуркационная диаграмма



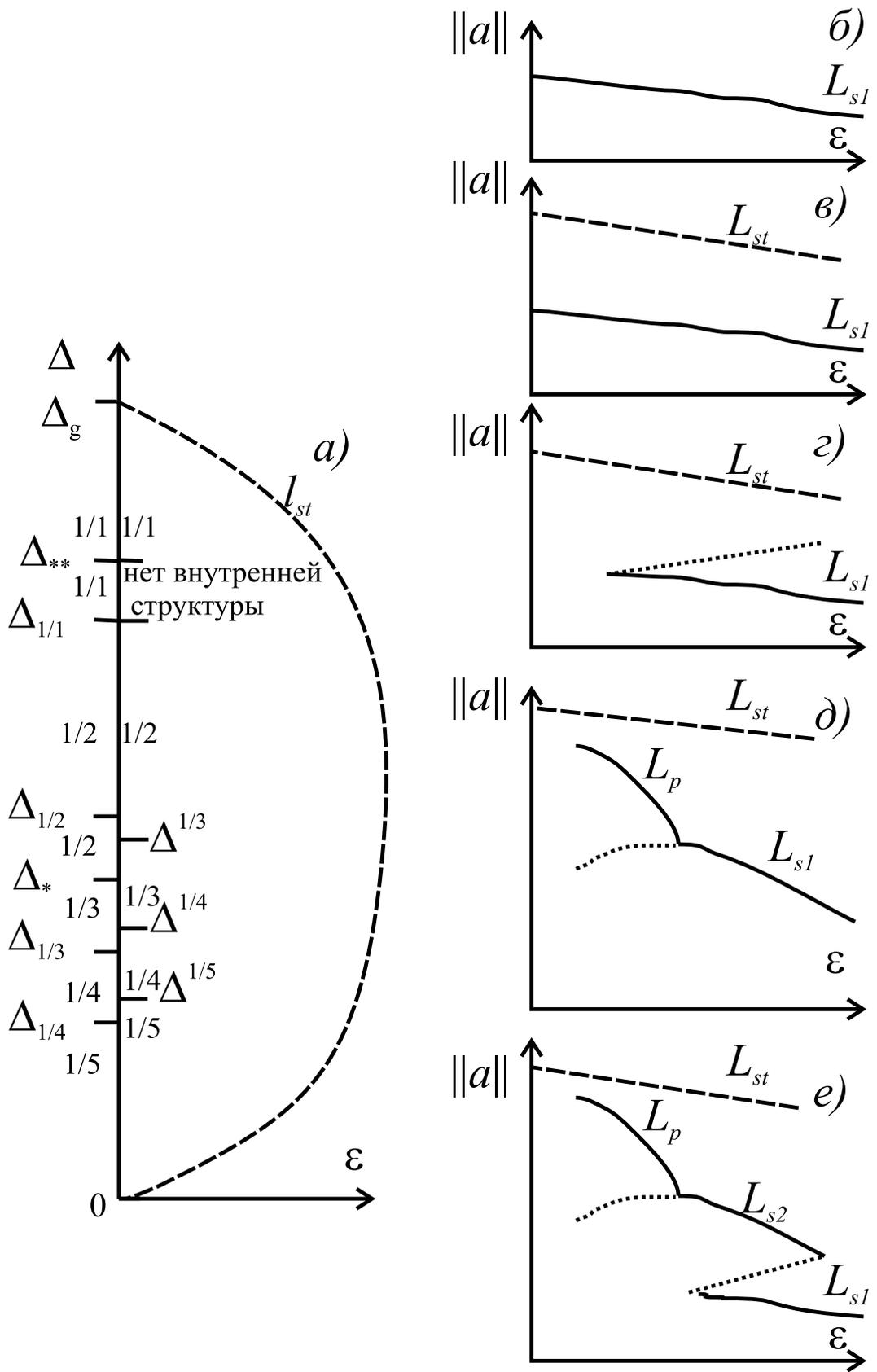


Рис. 12

### 3 Переход к нестационарным решениям, зависимость типа разрыва от диссипации.

Для турбулентных процессов имеется хорошо развитая теория бифуркаций решений при изменении числа Рейнольдса [15]. При малых числах Рейнольдса устанавливается стационарное решение, называемое первичным решением. При увеличении числа Рейнольдса появляются другие решения: стационарные (устойчивые или неустойчивые), периодические и стохастические, называемые вторичными. Подобная методика исследования была использована и в данном случае, аналогом числа Рейнольдса здесь является величина  $1/\varepsilon$ , второй безразмерный параметр задачи — число  $\Delta$ , стационарные решения становятся аналогами ламинарных решений, а стохастические — аналогами турбулентных. Это сходство не случайно: уравнения с высшими производными в принципе можно применять для описания турбулентных процессов при использовании для исследования пространственно двумерных уравнений вместо одного измерения полиномиальных разложений высокого порядка по аналогии с тем, как это делается при выводе уравнений мелкой воды или Буссинеска.

Имеется пять типов эволюции решения, которые последовательно выявляются при уменьшении  $\Delta$ , поэтому и на рис.12 соответствующие им схемы рис.12б-е, показаны сверху вниз. Эволюция по первому типу наблюдается при больших значениях  $\Delta$ . В этом случае есть только стационарное решение, наблюдаемое при сколь угодно малых значениях  $\varepsilon$ . При втором типе эволюции стационарное решение тоже можно получить при сколь угодно малых значениях  $\varepsilon$ , но только если уменьшать его при расчете постепенно, иначе при малых  $\varepsilon$  возникнет нестационарное решение. Такой тип эволюции наблюдается на интервале  $\Delta_{**} < \Delta < \Delta_g$ . В качестве оценки для  $\Delta_g$  можно взять значение 0.9.  $\Delta = 0.9$  соответствует случаю  $U = \min_k c_g$ ,  $c_g(k) = \partial^2 \omega / \partial k^2$  — групповая скорость слева от разрыва. При  $\Delta > 0.9$  слева от разрыва с излучением не могут распространяться линейные волны, аналогичное критическое значение для бездиссипативного уравнения (0.1) анализировалось в работе [2]. Третий вариант эволюции наблюдается при  $0.5 < \Delta < \Delta_*$ : при постепенном уменьшении  $\varepsilon$  обнаруживается значение, когда стационарное решение резко заменяется стохастическим (точка разворота согласно терминологии [15]). Далее при  $\Delta < 0.5$  наблюдается четвертый тип эволюции, когда начиная с некоторого значения  $\varepsilon$  возникают периодические по времени колебания и установившееся решение становится периодическим (бифуркация Хопфа согласно терминологии [15]), что указывает на то, что стационарное решение сохраняется, но становится неустойчивым. На участках перехода между различными

типами резонансных решений наблюдается еще один, пятый тип эволюции: при уменьшении  $\varepsilon$  возникает точка разворота, но первичное стационарное решение скачкообразно замещается другим стационарным решением, где отношение периодов справа от внутреннего резонансного разрыва на единицу больше, чем у первичного решения. Описанная в предыдущем разделе методика определения структуры разрыва не предполагает такой неоднозначности, но данный факт ей не противоречит, поскольку она относится именно к тому решению, для которого возникает бифуркация Хопфа. В связи с тем, что переходных несимметричных зон может быть много, допускается возможность более сложных вариантов эволюции, где может быть более двух различных стационарных типов решений, но такие участки выявлены не были. На рис.12а кривая  $l_{st}$  обозначает зону, где имеется стохастическое решение, на рис.12б-е кривая  $L_{st}$  соответствует стохастическому решению, кривая  $L_{s1}$  — первичному стационарному решению,  $L_{s2}$  — вторичному стационарному решению,  $L_p$  — периодическому решению. Пунктирными линиями указаны предполагаемые неустойчивые стационарные решения.

Анализ периодических решений показывает, что они отличаются от стационарных в основном тем, что несимметричная волновая зона, прилегающая к внутреннему разрыву замещается зоной с периодическими по времени колебаниями. Таким образом для определения типа периодической по времени структуры применима методика п.2.

Для описания нестационарных волновых зон можно применить статистические методы усреднения и получить уравнения, связывающие средние по времени показатели нестационарной структуры разрыва:

$$-UM(a)_x + [(M(a)^2 + D(a))/2]_x + b_3M(a)_{xx} + b_5M(a)_{xxxx} = \varepsilon M(a)_{xx}$$

$$M(a) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a(t)}{T}, \quad D(a) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{[a(t) - M(a)]^2}{T}, \quad T = t_2 - t_1$$

Здесь  $T$  — достаточно протяженный интервал времени. Интегралы аппроксимируются конечными суммами значений  $a(t)$  в последовательные расчетные моменты времени. Подразумевается, что речь идет о псевдослучайном процессе, детерминированном начальными данными. Можно вывести и усредненные уравнения для моментов более высокого порядка. Такой подход дает законченный количественный результат только если цепочку моментных уравнений можно усечь, пренебрегая моментами высшего порядка. Статистический подход корректен именно для диссипативного случая. В бездиссипативном случае фактор, тормозящий нарастание хаоса, отсутствует, поэтому при рассмотрении автомоделных зависимостей  $M(a) = g_1(x/t)$ ,  $D(a) = g_2(x/t)$  может

оказаться, что эти величины вовсе не выходят на предельные стационарные значения. Методика применима и к периодическим по времени решениям с той разницей, что для них делается усреднение по периоду.

#### **4 Физическая интерпретация решений.**

На основе анализа дисперсионного соотношения можно прийти к выводу, что решение, представляющее собой структуру слабодиссипативного разрыва, должно содержать внутренний бездиссипативный разрыв, на котором излучаются две волны. Одна из них (короткая) излучается вправо, а другая (длинная) — влево. Но левая волна должна отражаться, поскольку соответствующая дисперсионная кривая имеет точку перегиба, что порождает каустику и отраженную короткую волну, излучаемую вправо. В свою очередь отраженная волна после взаимодействия с внутренним бездиссипативным разрывом может вызвать вновь отраженную волну, направленную влево, процесс отражений может повторяться многократно. В результате этого процесса возникнет хаос, что и наблюдается в наиболее общем случае. С другой стороны многократные отражения могут стать упорядоченными при возникновении резонанса в системе, тогда решение станет периодическим по времени. Такие решения аналогичны собственным функциям, описывающим захваченные периодические волны в волноводах. Продолжая эту аналогию, можно вспомнить, что наличие таких решений и их период зависит от ширины волновода, поэтому и наблюдаются они только при конечных значениях  $\varepsilon$ , т.е. при конечной ширине волновой зоны. Наконец многократных отражений может и не быть, тогда решение станет стационарным.

#### **5 Не наблюдаемые структуры разрывов.**

Упомянутые в п.2 бездиссипативные структуры разрывов типа перехода от периодического состояния к двоякопериодическому таковы, что это двоякопериодическое состояние соответствует двухволновой ветви  $1/(n1)+$  или  $1/(n+2)+$ , а потому такие структуры не возникают в рассмотренной в п.4 задаче, за исключением быть может отдельных значений  $\Delta$ . Они возможны в другой задаче: пусть имеется некоторый источник излучения двоякопериодической волны, соответствующий некоторой точке на соответствующей двухволновой ветви. Тогда на некотором расстоянии от этой точки может находиться рассматриваемый разрыв, приводящий к тому, что излучение становится одноволновым. Такое решение определено с точностью до одного неопределенного

параметра, поскольку положение точки разрыва на этой ветви может быть в некоторых пределах произвольным.

Результаты исследований уравнений (0.1) и (0.2) показали, что существуют бездиссипативные структуры разрывов, не реализующиеся в задаче о распаде произвольного разрыва в классической постановке. Более общая постановка этой задачи такова, что в качестве начальных данных по разные стороны от начального разрыва рассматриваются не только однородные, но и волновые однородные состояния всех возможных типов. Возможно, что при исследовании задачи о распаде произвольного разрыва в таком широком смысле выявляются все эволюционные типы разрывов.

## 6 Обобщенные решения и проблемы неединственности.

Примеры неединственности слабодиссипативной структуры разрыва были приведены в п.4. При исследовании системы (2.1) были обнаружены [3] примеры неединственности и для бездиссипативных структур разрыва с излучением вблизи границы существования такого решения: для фиксированного значения  $U$  имеется несколько структур с одинаковыми параметрами однородных состояний, эти структуры отличаются друг от друга только порядком расположения 1:1-уединенных волн, из которых они собраны, расположение уединенных волн в таких случаях "разреженное". Структуры такого типа при непосредственных расчетах уравнений (0.1) и (0.2) не наблюдались, они могут быть неустойчивыми. Неединственность бездиссипативной структуры (два решения) была обнаружена и для композитного материала в случае перехода между однородным и резонансным двухволновым состоянием [16]. В п.4 выявлена неединственность именно устойчивых структур. Вопрос об их единственности актуален при нахождении обобщенных решений гиперболических уравнений.

Для уравнения  $a_t + P(a)_x = 0$ , где  $P(a)$  некоторая нелинейная функция, обобщенное решение ищется как предельное решение уравнения:

$$a_t + P(a)_x = \varepsilon_2 a_{xx} + \varepsilon_3 a_{xxx} + \dots, \quad \{\varepsilon_i\} \rightarrow \{0\} \quad (6.1)$$

Обобщенное решение зависит от выбора соотношений между коэффициентами  $\varepsilon_i$ , например, исходя из результатов работы [2] можно прийти к выводу, что для модифицированного уравнения Кортевега–Бюргерса при разном выборе знака коэффициента при производной третьего порядка получаются совершенно разные предельные решения. При некоторых вариантах выбора

соотношений коэффициентов можно рассматривать только предельное среднестатистическое решение, это видно, например, из результатов данной работы.

Неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва означает некорректность постановки задачи об обобщенном решении в пространстве с интегральной среднеквадратической нормой. В этом случае можно перейти к исследованию непрерывных решений полных уравнений типа (6.1), а можно применять методы решения гиперболических уравнений и рассматривать эволюцию кусочно-гладких данных с разрывами конкретной структуры. Тогда фундаментальной становится не задача о распаде разрыва, а задача о столкновении разрывов. При наличии единственности решения задачи о распаде задача о столкновении всегда имеет единственное решение, а в случае неединственности требует специального исследования. Для уравнения  $a_t + (a^2/2)_x = 0$  задача о распаде разрыва решается однозначно, на макроскопическом уровне безразлично, какова структура разрыва: стохастическая, периодическая по времени или стационарная. Но тип структуры становится не безразличным, если уравнение (0.2) рассматривается как модельное, а данные структуры исследуются с целью дальнейшего приложения к более точной не скалярной или сложнонелинейной модели, где возможна неединственность решения задачи о распаде разрыва [17].

Вторая проблема состоит в том, что при использовании усредненных уравнений может быть получено не одно решение, а семейство решений, зависящее от некоторого параметра, см. п.б. Однопараметрическому семейству решений усредненных уравнений при конечном значении  $\varepsilon$  соответствует конечное число решений. Проблема связана с приближенным характером описания при использовании усредненных уравнений.

## 7 Обсуждение.

Проанализирован тип решения при всех значениях амплитуды начального разрыва. В особенности следует отметить, что проведен анализ при малых амплитудах. Это позволяет пользуясь преобразованиями координат определять тип решения при малых значениях параметра  $b_5$ , что является актуальной задачей, поскольку в случае асимптотических моделей члены с высшими производными рассматриваются как уточняющие более низкое приближение.

Обнаруженные здесь закономерности качественного поведения решений очевидно справедливы не только для рассмотренного здесь уравнения, но и для аналогичных моделей, в которых имеется дисперсионная ветвь с точкой

перегиба и соответственно возможен резонанс линейных волн, связанный с тем, что прямая, соответствующая фазовой скорости, пересекает эту ветвь при  $k > 0$  два раза. Таким свойством обладает, например, быстрая магнитозвуковая ветвь в холодной плазме. Однако в различных моделях механики сплошной среды, например в случае волн в композитных материалах, встречается и другой случай резонанса, связанный с пересечением двух разных ветвей, также приводящий к появлению бездиссипативных структур типа переходов между одноволновыми и двухволновыми резонансными состояниями и требующий дальнейшего исследования [16].

Исследование различных решений задачи о структуре разрыва представляет прежде всего непосредственный практический интерес для определения результатов воздействия ударной волны и разработки способов модификации ее структуры с целью снижения этого воздействия. Выявленные свойства периодических стохастических и стационарных структур разрывов могут быть использованы для обнаружения распространяющейся волны, оценки ее амплитуды и параметров среды при помощи акустических, оптических и электромагнитных измерений. Это исследование актуально также с математической точки зрения для развития методов решения гиперболических уравнений.

## Список литературы

- [1] Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных разрывов в бездиссипативных системах// Прикл. матем. механ. - 1999. - Т. 63. - Вып. - 1. - С. 52-62.
- [2] Бахолдин И.Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортвега – де Вриза// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 1999. - № 4. - С.95-109.
- [3] Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортвега-де Вриза// Прикл. матем. механ. - 2001. - Т. 65. - вып. 1. - С. 59-68.
- [4] Бахолдин И.Б. Уединенные волны и структуры разрывов в бездиссипативных моделях с усложненной дисперсией// Прикл. матем. механ. - 2003. - Т. 67. - вып. 1. - С. 49-64.
- [5] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
- [6] Бахолдин И.Б. Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией// Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45. № 2. — С. 330–343.

- [7] Ильичев А. Т. , Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газов. 1989. № 1. С. 88–95.
- [8] Бахолдин И.Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 2000. - № 4. - С. 139-146.
- [9] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
- [10] Бахолдин И. Б. Нелинейные резонансы и волновые разрывы в средах с дисперсией высокого порядка // Изв. РАН. Мех. жидк. и газов. 1996. № 4. С. 113–124.
- [11] Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- [12] Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов. гос. тех. ун-т. Саратов 1999, 130 с.
- [13] Buffoni B., Champneys A.R., Toland J.F. Bifurcation and coalescence of a plethora of Homoclinic orbits for a Hamiltonian system// J. Dynam. Diff. Eq. 1993. V.8. P.221-228.
- [14] Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. S. Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Physica D. 1994. V. 77. P. 473–485.
- [15] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.:Физматлит. 2005. 287с.
- [16] Бахолдин И. Б., Томашпольский В. Я. Уединенные волны в модели предварительно напряженного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 527-538.
- [17] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А., Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.:Физматлит. 2001. 607с.