



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2008 г.



**Боровин Г.К., Дягель Р.В.,
Лапшин В.В.**

Нелинейная вязкоупругая
модель коллинеарного
удара

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Боровин Г.К., Дягель Р.В., Лапшин В.В. Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 53. 18 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-53>



Орден Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

**Г.К.Боровин, Р.В.Дягель,
В.В.Лапшин**

**НЕЛИНЕЙНАЯ
ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ
КОЛЛИНЕАРНОГО УДАРА**

Препринт №

Москва

Ордена Ленина
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Г.К.Боровин, Р.В.Дягель, В.В.Лапшин

Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара

Москва, 2008 г.

Боровин Г.К., Дягель Р.В., Лапшин В.В., Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара.

Рассмотрена нелинейная вязкоупругая модель удара тела о неподвижное препятствие. Получен первый интеграл уравнения движения. Определены коэффициент восстановления, потерянная при ударе кинетическая энергия и их зависимость от скорости соударения. Получено решение уравнение движение тела в квадратурах с помощью специальной функции W Ламберта. Приведены результаты математического моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00286) и по гранту № НШ-1311.2008.8 по поддержке ведущих научных школ РФ.

Ключевые слова: удар, коэффициент восстановления.

Borovin G.K., Diagel R.V., Lapshin V.V. Nonlinear viscoelastic model of the collinear collision.

Nonlinear viscoelastic model of a body collinear collision with a fixed obstacle is investigated. The first integral of the motion equation is obtained. The coefficient of restitution and kinetic energy loss dependences from the impact velocity are analytically constructed. The solution of body motion equation during collision is obtained as the quadrature formula with respect the special Lambert W function. The mathematical simulation results are presented.

Work is executed at support RFBR (the grant № 07-01-00286) and leading scientific of schools (the grant № НШ-1311.2008.8).

Key words: collision, coefficient of restitution.

Содержание

Введение.....	3
1. Нелинейная вязкоупругая модель удара.....	5
2. Коэффициент восстановления и потерянная кинетическая энергия.....	10
3. Результаты математического моделирования	13
Приложение. Специальная функция W Ламберта.....	16
Литература.....	17

Введение

В работе рассматривается наиболее простой случай задачи об ударе тела о неподвижную поверхность (препятствие) в предположении, что до и после удара тело движется поступательно вдоль одной и той же оси. Форма тела и препятствия может быть различной, но при этом ударные силы их взаимодействия сводятся к равнодействующей направленной вдоль этой оси и линия действия равнодействующей проходит через центр масс тела. Предполагается, что ударные силы взаимодействия существенно больше остальных сил и действием последних можно пренебречь [1-5]. Задача о коллинеарном соударении двух тел решается аналогично [1, 3].

Коэффициентом восстановления при ударе называется отношение модулей скоростей тела после удара V^+ и до удара V^- [1-5]

$$k = \left| \frac{V^+}{V^-} \right| = -\frac{V^+}{V^-} \quad (1)$$

Наиболее точная модель удара связана с исследованием динамики движения вязко-упруго-пластичных деформируемых тел [1-3] сложна и требует большого объема численных расчетов [1-3].

Модель удара Ньютона (стереомеханический удар) [1-3] основана на предположении, что время удара бесконечно мало и перемещением тела в процессе удара можно пренебречь. Ньютон сделал предположение, что коэффициент восстановления определяется материалом, из которого изготовлены тела, и не зависит от скорости соударения. Он разбил процесс удара на две фазы. В фазе деформации скорость тела уменьшается до нуля и накапливается энергия упругих деформаций. В фазе восстановления, накопленная потенциальная энергия освобождается, и тело разгоняется в противоположном направлении.

Пуассон ввел другое определение коэффициента восстановления, как отношение импульсов ударной силы взаимодействия в фазах восстановления и деформации. В рассматриваемой задаче эти два определения эквивалентны. В более сложных случаях, например, при косом ударе тела о неподвижное препятствие (движение тела до удара и после удара произвольное) эти определения не эквивалентны и следует использовать определение Пуассона [3].

Модель удара Ньютона не позволяет определить многие важные параметры удара, его продолжительность, максимальную величину силы взаимодействия тел, их деформацию и т.д.

Широкое распространение получила линейная вязкоупругая модель удара Кельвина-Фойхта [1-3], в которой предполагается, что контактная сила взаимодействия тел при ударе сводятся к линейной силе упругости и линейной силе сопротивления

$$F = F(x, \dot{x}) = -cx - \mu\dot{x} \quad ,$$

где c и μ – постоянные коэффициенты упругости и сопротивления, x – деформация тела и препятствия при ударе. В процессе удара $x \geq 0$. Уравнение движения тела при ударе является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение. Коэффициент восстановления при ударе при этом постоянный. Модель противоречит естественным физическим представлениям. Сила взаимодействия тел в начале и конце удара равна силе сопротивления и отлична от нуля. Если в процессе деформации меняется пятно контакта, то представляется не естественным предположение о линейной зависимости упругой силы взаимодействия и силы сопротивления от деформации.

Потерянная при ударе кинетическая энергия

$$\Delta T = \frac{m(V^-)^2}{2} - \frac{m(V^+)^2}{2} = \frac{m(V^-)^2}{2}(1 - k^2) \quad (2)$$

при постоянном значении коэффициента восстановления пропорциональна квадрату скорости соударения V^- .

Экспериментальные данные, приведенные в монографии Гольдсмита [1], опровергают этот результат и показывают, что с ростом скорости соударения тел коэффициент восстановления монотонно убывает. При малых значениях V^- потерянная кинетическая энергии пропорциональна кубу скорости, а коэффициент восстановления убывает пропорционально скорости V^-

$$k \approx 1 - \alpha V^- \quad , \quad (3)$$

где $\alpha = const$.

Из (2)-(3) следует, что с точностью до членов более высокого порядка малости

$$\Delta T \approx \alpha m(V^-)^3 \quad . \quad (4)$$

Для различных материалов (стекло, сталь, бронза, латунь, слоновая кость) значения коэффициента α изменяются в пределах от 0.08 с/м до 0.32 с/м [1, 5].

Герц [4] предположил, что упругая сила контактного взаимодействия тел при ударе зависит от деформации x так же, как и в случае статического равновесия. Он показал, что если тело и препятствие в окрестности точки соприкосновения имеют сферическую поверхность и их деформации малы по сравнению с их радиусами, то с учетом увеличения пятна контакта с ростом деформации x сила упругого взаимодействия равна

$$F(x) = -cx^{\frac{3}{2}},$$

где c – константа, значение которой определяется радиусами этих сферических поверхностей и материалом, из которого изготовлены тела. Герц [4] рассмотрел абсолютно упругий удар. Уравнение движение тела при этом имеет интеграл энергии и интегрируется в квадратурах, т.е. его решение сводится к вычислению определенного интеграла. Результаты Герца хорошо согласуются с экспериментальными данными [1].

В статье рассмотрена нелинейная вязко-упругая модель удара тела о неподвижное препятствие Ханта-Кроссли, являющаяся развитием модели Герца. Получен первый интеграл уравнений движения. Определены коэффициент восстановления, потерянная при ударе кинетическая энергия и их зависимость от скорости соударения. Получено решение уравнение движение тела в квадратурах с помощью специальной функции W Ламберта. Приведены результаты математического моделирования.

В приложении приведено определение и некоторые свойства малоизвестной специальной функции W Ламберта.

Работа выполнена по гранту РФФИ № 07-01-00286 и по гранту № НШ-1311.2008.8 по поддержке ведущих научных школ РФ.

§1. Нелинейная вязкоупругая модель удара

Хант и Кроссли [5] обобщили модель удара Герца, ввели в нее силу сопротивления и показали, что контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется соотношением

$$F = F(x, \dot{x}) = -cx^n - bcx^n \dot{x}, \quad (5)$$

где c – коэффициент упругости, b – постоянная сопротивления, n – постоянная, которая определяется формой поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения, x – перемещение тела (деформация), причем $x \geq 0$. В частности для сферической поверхности тел $n = \frac{3}{2}$, для плоской поверхности $n = 1$. В работе [5] показано, что при малых скоростях соударения V^- коэффициент восстановления линейным образом зависит от V^- и в формуле (3) коэффициент $\alpha = \frac{2}{3}b$.

Эту модель можно обобщить, положив

$$F = F(x, \dot{x}) = -f(x) - bf(x)\dot{x} \quad , \quad (6)$$

где $f(x)$ – упругая сила взаимодействия тел при ударе, причем $f(0) = 0$ и $f(x)$ является возрастающей функцией при $x \geq 0$.

Тогда уравнение движения тела при ударе имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) = -f(x) - bf(x)\dot{x} \quad , \quad (7)$$

где m – масса тела, и в процессе удара деформация

$$x \geq 0 \quad , \quad (8)$$

$x = 0$ в начале и в конце удара.

Обозначим через $V = \dot{x}$ скорость движения. Легко видеть, что $V = -b^{-1} = const$ является решением дифференциального уравнения движения (7). Этому решению на фазовой плоскости соответствует фазовая траектория, которая является прямой линией и делит фазовую плоскость на две полуплоскости. В силу принципа детерминированности фазовые траектории не пересекаются и полностью лежат в одной из этих полуплоскостей. В начальный момент времени $t = 0$ скорость соударения $V^- > 0 > -\frac{1}{b}$, тогда в любой момент времени t справедливо неравенство

$$V > -\frac{1}{b} \quad . \quad (9)$$

Фазовые траектории системы при ударе, т.е. при $x \geq 0$ и $V^- > 0$, приведены на рис. 1. Пунктирная линия соответствует фазовой траектории $V = -b^{-1} = const$, нереализуемой при ударе.

Обозначим через $\Pi(x)$ – потенциальную энергию упругой деформации

$$\Pi(x) = \int_0^x f(x)dx \quad . \quad (10)$$

В частности $\Pi(x) = \frac{cx^{n+1}}{n+1}$ при $f(x) = cx^n$.

Исключим время t из дифференциального уравнения движения с помощью преобразования $\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}$. Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя из начального положения в конечное, имеем

$$\int_{V^-}^V \frac{VdV}{1+bV} = -\frac{1}{m} \int_0^x f(x)dx = -\frac{\Pi(x)}{m} \quad ,$$

$$\int \frac{VdV}{1+bV} = \frac{1}{b} \int \frac{(1+bV-bV)dV}{1+bV} = \frac{1}{b^2} (\ln|1+bV| - bV) + const \quad .$$

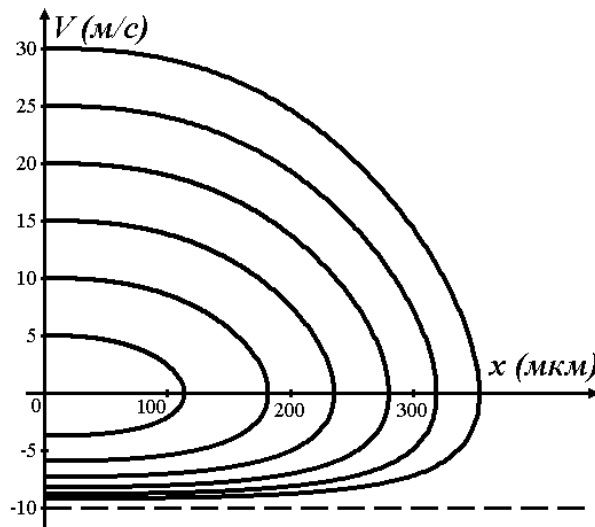


Рис. 1. Фазовые траектории при $b = 0.1$. Пунктирная линия соответствует фазовой траектории $V = -b^{-1} = const$, нереализуемой при ударе.

В силу (9) знак модуля в этом выражении можно опустить. В итоге получаем, что уравнение движения (7) имеет первый интеграл

$$\ln(1 + bV) - bV = \ln(1 + bV^-) - bV^- + \frac{b^2}{m}\Pi(x) \quad , \quad (11)$$

который можно разрешить относительно скорости V . Для этого преобразуем его к виду

$$\ln \varphi - \varphi = g \quad , \quad (12)$$

где $\varphi = 1 + bV$,

$$g = g(x) = \ln(1 + bV^-) - 1 - bV^- + \frac{b^2}{m}\Pi(x) \quad . \quad (13)$$

Трансцендентное уравнение (12) решается с помощью специальной функции W Ламберта [6]. Определение, некоторые свойства этой функции и решение уравнения (13) приведены в приложении. Функция W Ламберта многозначная. Учитывая, что в фазе деформации $V > 0$, а в фазе восстановления $-\frac{1}{b} < V < 0$, получим

$$V(x) = -\frac{1}{b} \left\{ 1 + W_i \left(-e^{g(x)} \right) \right\} = -\frac{1}{b} \left\{ 1 + W_i \left[-\frac{1 + bV^-}{\exp(1 + bV^-)} \exp\left(\frac{b^2}{m}\Pi(x)\right) \right] \right\}, \quad (14)$$

где фазе восстановления соответствует $i = 0$ или основная ветвь W функции Ламберта, а фазе деформации $i = -1$ или вторая действительная ветвь W функции Ламберта.

Обозначим через

$$z = -e^{g(x)} = -\frac{1 + bV^-}{\exp(1 + bV^-)} \exp\left(\frac{b^2}{m}\Pi(x)\right) \quad .$$

Потенциальная энергия $\Pi(x)$ является монотонно возрастающей функцией, тогда $z(x)$ – монотонно убывающая функция и $z(x) < 0$. График зависимости

$$V(z) = -\frac{1}{b} (1 + W_i(z)),$$

приведен на рис. 2. Сплошная линия соответствует фазе восстановления (основная ветвь $W_0(z)$), пунктирная линия соответствует фазе деформации (вторая действительная ветвь $W_{-1}(z)$). Реальному движению тела при ударе

соответствует движение изображающей точки по участку этой кривой, выделенному жирной линией. Скорость $V(x)$ является монотонно убывающей функцией перемещения тела x в фазе деформации, и монотонно возрастающей в фазе восстановления. В фазе деформации ее значение меняется от $V^- > 0$ до нуля, а в фазе восстановления от нуля до $V^+ < 0$.

Обозначим через x_{\max} – максимальное перемещение тела при ударе или значение x конце фазы деформации. Значение x_{\max} как решение уравнения $V(x_{\max}) = 0 \Leftrightarrow W(z) = -1 \Leftrightarrow z = -e^{-1} \Leftrightarrow g(x_{\max}) = -1$. В результате в силу (13) x_{\max} является решением

$$\ln(1 - bV^-) - bV^- + \frac{b^2}{m} \Pi(x_{\max}) = 0 \quad . \quad (15)$$

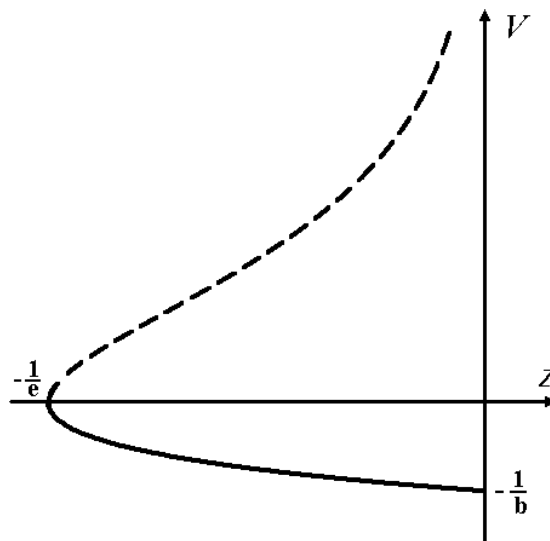


Рис. 2. Зависимость скорости от параметра z . Пунктирная линия соответствует фазе деформации, сплошная – фазе восстановления.

При $f(x) = cx^n$ потенциальная энергия упругой деформации $\Pi(x) = \frac{cx^{n+1}}{n+1}$ и решением (15) является

$$x_{\max} = \left[\frac{(n+1)m}{cb^2} (bV^- - \ln(1 - bV^-)) \right]^{\frac{1}{n+1}} .$$

Соотношения (14) позволяет получить решение уравнения движения (7) в квадратурах, как решение уравнения с разделяющимися переменными $\dot{x} = V(x)$. В фазе деформации

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + W_{-1}(-e^{g(x)})} = -\frac{1}{b}t , \quad (16)$$

а в фазе восстановления

$$\int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{1 + W_{-1}(-e^{g(x)})} + \int_{x_{\max}}^x \frac{dx}{1 + W_0(-e^{g(x)})} = -\frac{1}{b}t , \quad (17)$$

где x_{\max} – является решением (15). Уравнения (16)–(17) определяют в неявном виде закон движения тела при ударе.

§2. Коэффициент восстановления и потерянная кинетическая энергия

Из первого интеграла уравнений движения, в силу того, что в начале и конце удара $x = 0$, получим, что начальная и конечная скорость при ударе связаны соотношением

$$\ln(1 + bV^+) - bV^+ = \ln(1 + bV^-) - bV^- , \quad (18)$$

причем $V^- \in (0, +\infty)$, $V^+ \in (-\frac{1}{b}, 0)$. Это соотношение можно разрешить относительно V^+ , из (14) следует

$$V^+ = -\frac{1}{b} \left\{ 1 + W_0 \left(-\frac{1 + bV^-}{\exp(1 + bV^-)} \right) \right\}, \quad (19)$$

Скорость в конце удара $V^+ = -kV^-$, где k – коэффициент восстановления (1).

Коэффициент восстановления является решением трансцендентного уравнения

$$bV^-(1+k) - \ln(1+bV^-) + \ln(1-kbV^-) = 0, \quad (20)$$

которое в силу (19) имеет аналитическое решение

$$k = \frac{1}{bV^-} \left\{ 1 + W_0 \left(-\frac{1 + bV^-}{\exp(1 + bV^-)} \right) \right\}, \quad (21)$$

где W_0 основная ветвь функции Ламберта.

Коэффициент восстановления является функцией одной безразмерной переменной

$$\beta = bV^-, \quad (22)$$

и не зависит от вида функции $f(x)$ – силы упругой деформации. График зависимости коэффициента восстановления от безразмерного параметра β приведен на рис 3.

Исследуем зависимость коэффициента восстановления от $\beta = bV^-$ при малых значениях этого параметра (относительно небольших скоростях соударения).

Используя разложения в ряд Маклорена функции

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \dots,$$

в уравнении (20) оставим только члены до третьего порядка малости по β . Получим

$$\beta(1+k) - (1+\beta) + \frac{1}{2}(1+\beta)^2 - \frac{1}{3}(1+\beta)^3 + (1-k\beta) - \frac{1}{2}(1-k\beta)^2 + \frac{1}{3}(1-k\beta)^3 = 0,$$

откуда

$$1 - k - \frac{2}{3}\beta(1 - k + k^2) = 0. \quad (23)$$

При малых β (см. рис. 3) в силу (20)-(21) коэффициент восстановления принимает значения близкие к единице или $1 - k = \delta$ является малой величиной. Подставим $k = 1 - \delta$ в (23), тогда с точностью до членов первого порядка малости по δ получим

$$\delta - \frac{2}{3}\beta(1 - \delta) = 0$$

или с точностью до членов первого порядка малости по β

$$k = 1 - \frac{2}{3}\beta = 1 - \frac{2}{3}bV^- \quad . \quad (24)$$

Кинетическая энергия, потерянная при ударе, ΔT определяется соотношением (2). Обозначим через T^- кинетическую энергию тела до удара, тогда

$$\frac{\Delta T}{T^-} = 1 - k^2 \quad ,$$

зависит только от безразмерного параметра $\beta = bV^-$. График этой зависимости приведен на рис. 3.

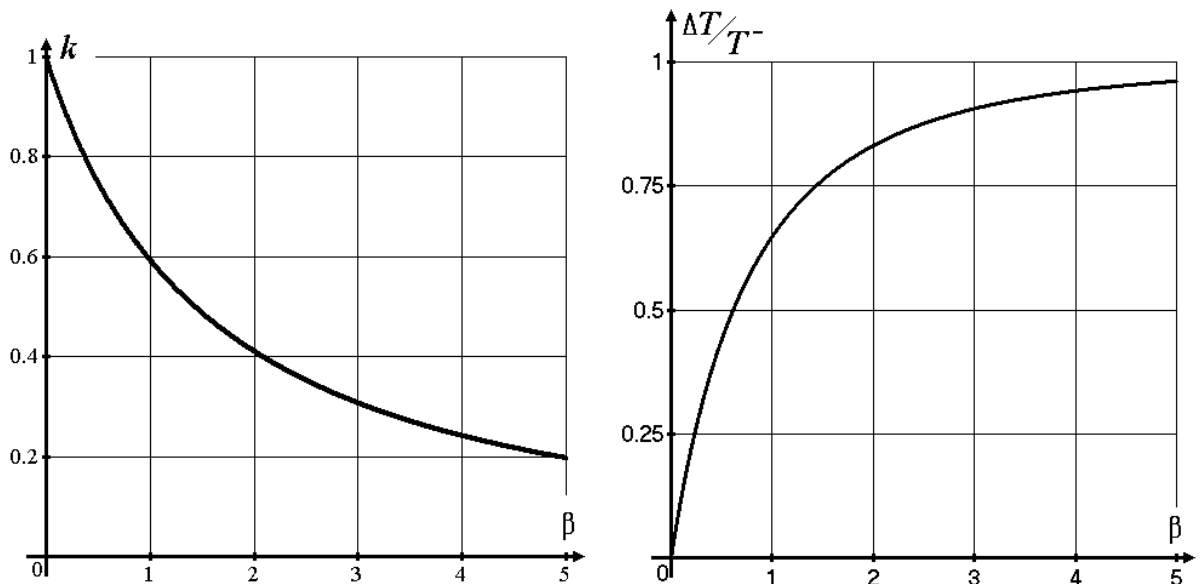


Рис. 3. Зависимость коэффициента восстановления k и $\Delta T/T^-$ от безразмерного параметра $\beta = bV^-$, где b – постоянная сопротивления, V^- – скорость соударения, ΔT – потерянная при ударе кинетическая энергия, T^- – кинетическая энергия в начале удара.

§3. Результаты математического моделирования

В этом разделе приведены результаты численных расчетов в предположении, что поверхность тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения сферическая. Сила упругой деформации в соответствии с результатами Герца [4] имеет вид

$$f(x) = cx^{\frac{3}{2}},$$

где [4]

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{4} \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right) \sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

$E_{1,2}$ – модули упругости, $\mu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона, $R_{1,2}$ – радиусы поверхности тела и препятствия.

В качестве примера рассмотрим удар стального шарика массой $m = 0,1 \text{ кг}$ о массивную стальную плиту. Положим для стали $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2 * 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.25$, тогда радиус шарика $R = 1.452 \text{ см}$, коэффициент упругости $c = 1.7135 * 10^{10} \text{ Н/м}^{3/2}$. В расчетах положим, что постоянная сопротивления $b = 0.1 \text{ с/м}$, что соответствует приведенным в [1] экспериментальным данным для закаленной стали.

Фазовые траектории системы приведены на рис. 1. На рис. 4 показана зависимость от времени перемещения тела (деформации) и контактной силы взаимодействия тела и препятствия при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и 5 м/с . На рис. 5 – зависимость максимального перемещения тела (максимальной деформации), максимальной контактной силы и продолжительности удара от скорости соударения V^- . На рис. 6. зависимость контактной силы от перемещения тела (деформации) при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и 5 м/с . Площадь, ограниченная этой кривой равна потере кинетической энергии при ударе. Зависимость потерянной при ударе кинетической энергии от скорости соударения V^- показана на рис. 7.

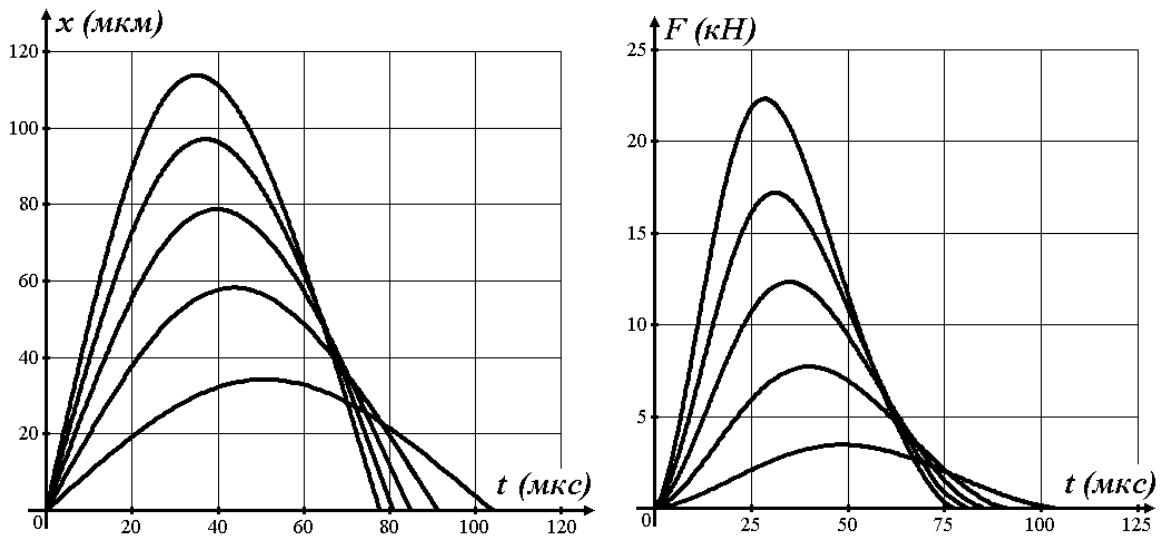


Рис. 4. Зависимость от времени перемещения тела (деформации) и контактной силы взаимодействия тела и препятствия при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и 5 м/с .

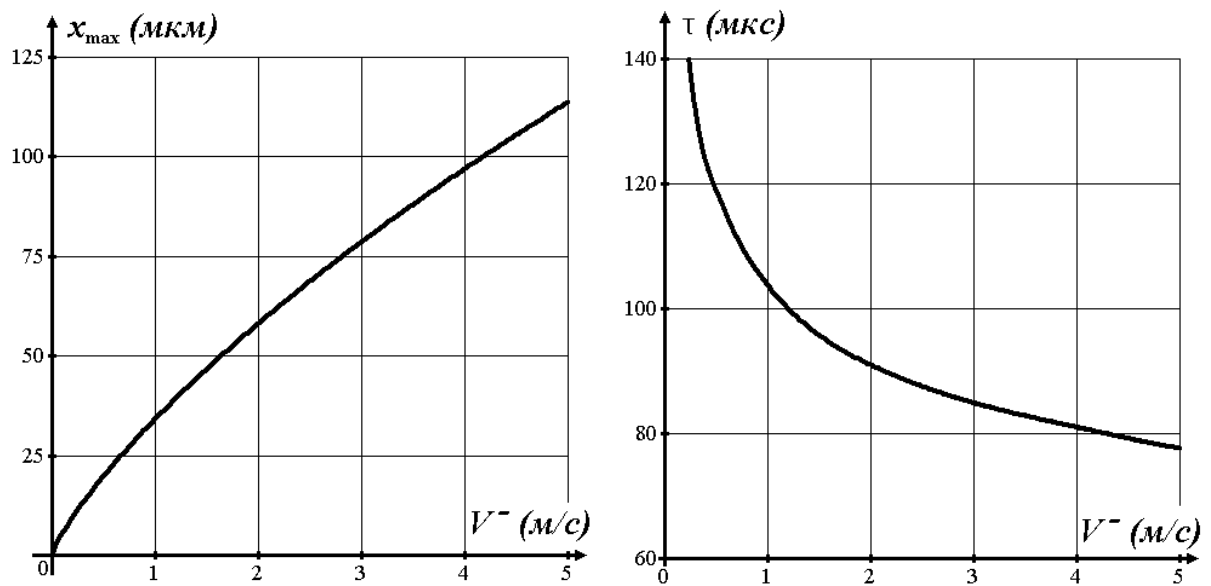


Рис. 5. Зависимость максимального перемещения тела (максимальной деформации), максимальной контактной силы и продолжительности удара от скорости соударения V^- .

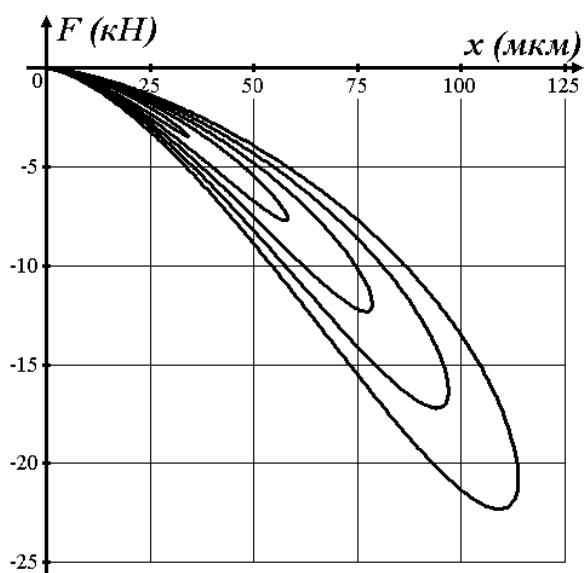


Рис. 6. Зависимость контактной силы от перемещения тела (деформации) при $V^- = 0.5; 1; 2; 3; 4$ и 5 м/с.

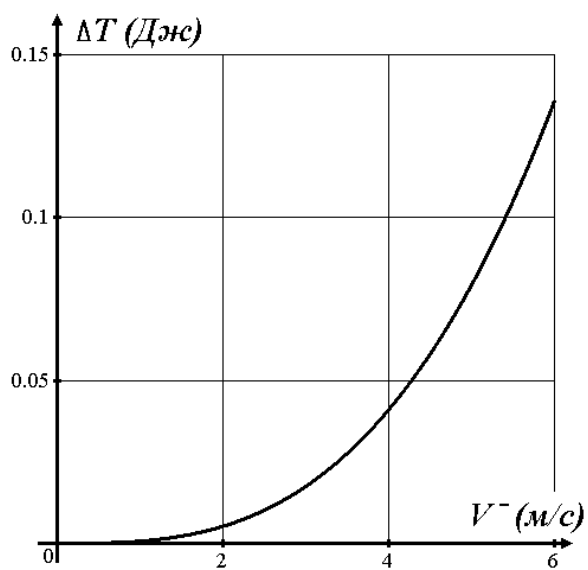


Рис. 7. Зависимость потерянной при ударе кинетической энергии от скорости соударения V^- .

Приложение. Специальная функция W Ламберта

Специальная функция W Ламберта получила известность после ее введения в систему компьютерной алгебры MAPLE в 80-е годы прошлого века [6]. Ранее эта функция использовалась рядом авторов, начиная с Эйлера, при решении различных математических проблем. Эта функция дифференцируема, интегрируема, построены эффективные процедуры вычисления ее значений на компьютере. С помощью W функции Ламберта получено аналитическое решение ряда задач математики, механики [6].

Функция Ламберта $W(x)$ задается в неявном виде, как решение уравнения $We^W = x$. Над полем комплексных чисел это уравнение имеет счетное множество решений, которым соответствуют ветви функции Ламберта $W_k(x)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$. Над полем действительных чисел функция Ламберта имеет две ветви, которые показаны на рис. 8. Сплошной линией показана главная действительная ветвь $W_0(x)$, пунктирной – вторая действительная ветвь $W_{-1}(x)$.

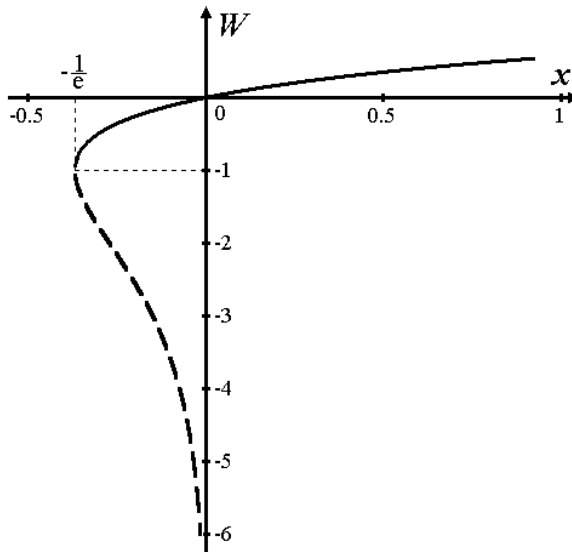


Рис. 8. W функция Ламберта. Сплошная линия главная действительная ветвь $W_0(x)$, пунктирная – вторая действительная ветвь $W_{-1}(x)$.

Функция Ламберта позволяет получить решение некоторых трансцендентных уравнений. Например, рассмотрим уравнение (12) данной работы. Требуется определить $\varphi(x)$, такое что

$$\ln \varphi - \varphi = x \Leftrightarrow \ln(\varphi e^{-\varphi}) = x \Leftrightarrow -\varphi e^{-\varphi} = -e^x \Leftrightarrow \varphi = -W(-e^x) \quad .$$

В соответствии с правилом дифференцирования неявных функций производная $W'(x) = \frac{1}{(1+W)e^W}$, тогда $W'(x) = \frac{W}{(1+W)x}$ при $x \neq 0$.

Функция Ламберта интегрируема [6]

$$\int W(x) dx = (W^2(x) - W(x) + 1)e^{W(x)} + const \quad .$$

Аналитически вычисляется интеграл

$$\int \frac{dx}{1+W(-e^x)} = x - W(-e^x) + const \quad ,$$

похожий на интегралы в формулах (16)–(17) данной статьи.

Литература

1. Гольдсмит В. Удар. Теоретические и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. – 232 с.
3. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. –336 с.
4. Hertz Н. Über die berührung fester elastischer körper. Journal reine und angewandte mathematik, 1882, В. 92, s. 156-171.
5. Hunt К.Н., Crossley F.R.E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. ASME Journal of applied mechanics, 1975, № 6, pp. 440-445.
6. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. Advances in computational mathematics, 1996, v.5, pp. 329-359.