Брюно А.Д., Парусников В.И.

Двустороннее обобщение цепной дроби

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, В.И. Парусников

ДВУСТОРОННЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Москва, 2008 г.

УДК 511.36

А.Д. Брюно, В.И. Парусников. Двустороннее обобщение цепной дроби. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Пусть в трехмерном вещественном пространстве заданы две формы: линейная и квадратичная, являющаяся произведением двух линейных комплексно сопряженных форм. Их корневые множества суть плоскость и прямая соответственно. Предполагается, что эта прямая не лежит в этой плоскости. Вороной (1896) и авторы (2005) предложили два разных алгоритма вычисления целочисленных точек, дающих наилучшие приближения к корням двух этих форм. Оба алгоритма односторонние: у Вороного алгоритм идет в сторону плоскости, а у авторов - в сторону прямой.

Здесь предлагается алгоритм, который работает в обе стороны. Приведены примеры двусторонних вычислений по этому новому алгоритму.

A.D. Bruno, V.I. Parusnikov. Two-sided generalization of the continued fraction. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

Let in a three-dimensional real space two forms be given: a linear form and a quadratic one which is a product of two complex conjugate linear forms. Their root sets are a plane and a straight line correspondingly. We assume that the line does not lie in the plane. Voronoi (1896) and authors (2005) proposed two different algorithms for computation of integer points giving the best approximations to roots of these two forms. The both algorithms are one-side: the Voronoi algorithms is directed to the plane and the authors algorithm is directed to the line.

Here we propose an algorithm, which works in both directions. We give also examples of two-sided computations by means of the new algorithm.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00085, 08-01-00082).

E-mails: bruno@keldysh.ru, parus@keldysh.ru

www.keldysh.ru

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами $X = (x_1, x_2, x_3)$ заданы две формы – линейная

$$l_1(X) = \langle J, X\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} j_1x_1 + j_2x_2 + j_3x_3 \tag{1.1}$$

и квадратичная

$$l_2(X) = \langle K, X\rangle\langle \overline{K}, X\rangle, \tag{1.2}$$

где $J = (j_1, j_2, j_3)$ – вещественный вектор, $K = (k_1, k_2, k_3)$ – комплексный вектор, $\overline{K}$ – комплексно сопряженный вектор и скобки $\langle K, X\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ означают скалярное произведение. Произведение форм $l_i(X)$ обозначим $f(X)$:

$$f(X) = l_1(X)l_2(X). \tag{1.3}$$

Очевидно, что для $X \in \mathbb{R}^3$ обе формы $l_1(X)$ и $l_2(X)$ вещественны. Корневое подпростанство $\mathcal{L}_1$ формы $l_1(X)$, т.е. множество $X: \ l_1(X) = 0,$ – это плоскость с нормалью J. Корневое подпространство $\mathcal{L}_2$ второй формы $l_2(X)$, т.е. множество вещественных $X: \ l_2(X) = 0,$ – это прямая, определяемая системой двух уравнений $\langle \mathrm{Re}K, X\rangle = \langle \mathrm{Im}K, X\rangle = 0$. Пусть прямая $\mathcal{L}_2$ натянута на вектор A, т.е. $\mathcal{L}_2 = \{X = \mu A, \mu \in \mathbb{R}\}$. Предположим, что прямая $\mathcal{L}_2$ не лежит на плоскости $\mathcal{L}_1$, т.е. $\det(J, \mathrm{Re}K, \mathrm{Im}K) \neq 0$. Положим

$$m_i(X) = |l_i(X)|, \quad i = 1, 2, \tag{1.4}$$

$$M(X) = (m_1(X), m_2(X)). \tag{1.5}$$

Говорят, что целочисленная точка $X \in \mathbb{Z}^3$ дает *наилучшее приближение* к прямой $\mathcal{L}_2$ и к плоскости $\mathcal{L}_1$, если нет такой целочисленной точки $Y \in \mathbb{Z}^3, \ Y \neq 0$, что

$$M(Y) \leq M(X), \quad m_1(Y) + m_2(Y) < m_1(X) + m_2(X). \tag{1.6}$$

Задача: Найти наилучшие целочисленные приближения X к прямой $\mathcal{L}_2$ и к плоскости $\mathcal{L}_1$ (не обязательно все).

Два разных алгоритма для решения этой задачи были предложены Вороным [1] и Брюно и Парусниковым [2, 3]. Алгоритм Вороного основан на поиске последовательных относительных минимумов $M(X)$ для $X \in \mathbb{Z}^3$. Алгоритм Брюно – Парусникова основан на вычислении границы модульного многогранника. Оба алгоритма односторонние: у Вороного алгоритм идет в сторону плоскости $\mathcal{L}_1$, т.е. $m_1(X)$ последовательно убывают, а $m_2(X)$ возрастают; а у Брюно – Парусникова алгоритм идет в сторону прямой $\mathcal{L}_2$, т.е., наоборот, $m_1(X)$ возрастает, а $m_2(X)$ убывает. При этом алгоритм Вороного более экономный: на каждом шаге он требует перебор 5 случаев и более удобен для ручного счета, а алгоритм Брюно – Парусникова на каждом шаге требует перебора сотен случаев и более удобен для вычислений на компьютере.

Здесь в § 2 предлагается алгоритм, который работает в обе стороны. Он является переработкой алгоритма из [2, 3], требует большого перебора на каждом шаге и реализован в виде компьютерной программы. В § 3 приведены примеры вычислений по этому алгоритму.

§ 2. Описание алгоритма

2.1. Ломаная $\partial\mathbf{M}$. Введенная по (1.4), (1.5) вектор-функция $M(X)$ отображает $\mathbb{R}^3$ в первый квадрант S_+ плоскости $S = \mathbb{R}^2$ с координатами $M = (m_1, m_2)$. При этом в одну точку $M \in S_+$ отображаются две окружности пространства $\mathbb{R}^3$ – одна при $l_1 < 0$ и другая при $l_1 > 0$. Поэтому ограничимся полупространством $\pi\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \cap \{X : \langle N, X\rangle > 0\}$, где

$$N = (n_1, n_2, n_3)$$

это некоторый вещественный вектор с попарно несоизмеримыми компонентами. Пусть при этом отображении множество целочисленных точек $X \in \mathbb{Z}^3$, исключая $X = 0$, переходит в множество $\mathbf{Z}^2$, т.е. $\mathbf{Z}^2 = M(\mathbb{Z}^2 \setminus 0)$. В случае общего положения в одну точку M может отображаться не более одной целочисленной точки $X \in \pi\mathbb{Z}^3 \overset{\text{def}}{=} \pi\mathbb{R}^3 \cap \mathbb{Z}^3$, т.е. целочисленный прообраз в $\pi\mathbb{Z}^3$ единственен.

Пусть $\mathbf{M}$ – выпуклая оболочка множества $\mathbf{Z}^2$ и $\partial\mathbf{M}$ – ее граница. Очевидно, что $\partial\mathbf{M}$ – это выпуклая ломаная линия. Она состоит из вершин и ребер. Все вершины являются образами $M(X)$ целочисленных точек $X \in \mathbb{Z}^3$. Но на $\partial\mathbf{M}$ могут быть еще образы целочисленных точек, расположенные внутри ребер.

В алгоритме, предложенном в [2, 3], используются точки из $\mathbf{Z}^2$, расположенные на ломаной $\partial\mathbf{M}$, и еще наименьшее число дополнительных точек из $\mathbf{Z}^2$ вне $\partial\mathbf{M}$. В предлагаемом ниже алгоритме каждой паре соседних точек из $\mathbf{Z}^2 \cap \partial\mathbf{M}$ соответствует третья точка из $\mathbf{Z}^2$, которая, как правило, не лежит на $\partial\mathbf{M}$. Кроме того, используются и другие дополнительные точки из $\mathbf{Z}^2$, чтобы обойти сложные места, двигаясь только по базисам в $\mathbb{R}^3$.

Пусть две точки $U = (u_1, u_2), V = (v_1, v_2) \in S_+$. В [2] формулой (25) была введена функция

$$\zeta_1(U, V) = \frac{v_2 - u_2}{u_2(u_1 - v_1)}, \tag{2.1}$$

которая равна значению, обратному значению координаты m_1 в точке пересечения прямой, проходящей через точки U и V, с осью m_1.

Переходим к описанию алгоритма.

Пусть базис в $\mathbb{R}^3$ состоит из векторов B_1,B_2,$B_3 \in \mathbb{Z}^3$, т.е. $\det(B_1^*,B_2^*,B_3^*)=\pm 1$. Звездочка означает транспонирование.

2.2. Первоначальное упорядочивание базиса. Пусть

$$M_i = (m_{1i}, \quad m_{2i}) = M(B_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Пусть i таково, что

$$m_{1i} < m_{1j}, \quad j \neq i, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Полагаем $C_1 = B_i$. Пусть согласно (2.1) максимум

$$\max_{j \neq i,\ 1 \leq j \leq 3} \zeta_1(M(C_1), M_j)$$

достигается на $j = k$. Полагаем $C_3 = M_k$ и $C_2 = M_l$, где $l \neq i, k,\ 1 \leq l \leq 3$. Упорядоченный базис состоит из векторов C_1, C_2, C_3. Это упорядочивание базиса делается только один раз перед началом вычислений. Теперь опишем один шаг алгоритма: переход от базиса B_1, B_2, B_3 к следующему базису $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3$.

2.3. Выбор экстремальной точки. Пусть в $\pi\mathbb{Z}^3$ задано некоторое конечное множество W точек X и точка $C = (c_1, c_2, c_3)$. Обозначим $M(C) = U = (u_1, u_2)$. *Точку* $G = (g_1, g_2, g_3) \in W$ назовем *экстремальной относительно точки* $C \in \pi\mathbb{Z}^3$, если

а) имеются точки $X \in W$, для которых

$$m_1(X) < u_1 = m_1(C), \quad m_2(X) < u_2 = m_2(C), \tag{2.3}$$

тогда G – та из этих точек, на которой достигается

$$\max \zeta_1(U, M(X)), \tag{2.4}$$

б) нет точек $X \in W$ со свойством (2.3), тогда G – та из точек $X \in W$ со свойством

$$m_1(X) > u_1 = m_1(C),$$

на которой достигается максимум (2.4).

2.4. Переход к следующему базису. Пусть базис B_1, B_2, B_3 получен либо упорядочиванием первоначального базиса, либо на предыдущем шаге алгоритма.

а) Теперь из множества точек

$$\begin{array}{lllll} X = & \pm\ B_1 & +a_2B_2 & +a_3B_3, & \langle N, X\rangle > 0, \\ Y = & a_1B_1 & \pm\ B_2 & +a_3B_3, & \langle N, Y\rangle > 0, \end{array}$$

где a_i – целые числа с $|a_i| \le 100$, выбираем экстремальную точку G относительно точки $C = B_3$ и полагаем $\tilde{B}_3 = G$.

б$_1$) Если $\tilde{B}_3 = X$ и $\tilde{B}_3 \ne Y$, то во множестве точек

$$Z = \qquad \pm\ B_2 \ +a_3B_3, \quad \langle N, Z\rangle > 0, \ \ |a_3| \le 100,$$

находим экстремальную точку G' относительно точки $C = B_3$ и полагаем $\tilde{B}_2 = G'$.

б$_2$) Если $\tilde{B}_3 = Y$ и $\tilde{B}_3 \ne X$, то во множестве точек

$$Z = \ \pm\ B_1 \qquad +a_3B_3, \quad \langle N, Z\rangle > 0, \ \ |a_3| \le 100,$$

находим экстремальную точку G' относительно точки $C = B_3$ и полагаем $\tilde{B}_2 = G'$.

б$_3$) Если $\tilde{B}_3 = X = Y$, т.е. $\tilde{B}_3 = \pm B_1 \pm B_2 + \tilde{a}_3B_3$, то во множестве точек

$$\begin{array}{lllll} Z_1 = & \pm\ C_1 & & +a_3C_3, & \langle N, Z_1\rangle > 0, \ \ |a_3| \le 100, \\ Z_2 = & & \pm\ C_2 & +a_3C_3, & \langle N, Z_2\rangle > 0, \ \ |a_3| \le 100, \end{array}$$

находим экстремальную точку G' относительно точки $C = B_3$ и полагаем $\tilde{B}_2 = G'$.

в) Полагаем $\tilde{B}_1 = B_3$.

Итак, от базиса B_1, B_2, B_3 мы перешли к новому базису $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3$ с помощью унимодулярного преобразования.

2.5. Замечания. Основные отличия нового алгоритма от алгоритма [2,3] таковы.

а) Упорядочивание базиса по $m_{11} < m_{12} < m_{13}$ теперь не требуется.

б) Перебираются не только точки X с $m_1(X) > m_{11}$, но и точки X со свойством (2.3).

в) Поэтому алгоритм симметричен относительно форм $l_1(X)$ и $l_2(X)$. Следовательно, эти формы можно поменять местами, и алгоритм будет двигаться в сторону уменьшения $|l_1(X)|$, т.е. приближаться к плоскости $l_1(X) = 0$.

г) Множества точек для перебора универсальны и не зависят от вида линейной и квадратичной форм в базисе B_1, B_2, B_3. Используя специфику этих форм, можно сократить перебор, как это сделал Вороной [1]. Кроме того, возможны случаи, когда ограничение $|a_i| \le 100$ не достаточно и в нем число 100 следует заменить большим. Но в приведенных ниже примерах это ограничение достаточно.

§ 3. Примеры

В приведенных ниже примерах сначала показана работа алгоритма в сторону прямой $\mathcal{L}_2$, а затем – в обратную сторону, т.е. в сторону плоскости $\mathcal{L}_1$. При этом примеры 2 – 7 аналогичны соответствующим примерам из [2]. В каждом случае результаты вычислений расположены в таблице, устроенной таким образом. В первой колонке (k) расположен последовательный номер базисного вектора B_k, компоненты которого приведены во второй – четвертой колонках. В следующих колонках приводятся значения $|fl_1(B_k)| = |l_1(B_k)l_2(B_k)|$, и $m_1(B_k), m_2(B_k)$ при $B_k \to \mathcal{L}_2$ или $m_2(B_k), m_1(B_k)$ при $B_k \to \mathcal{L}_1$. Далее идут значения таких $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$, что вектор B_k равен $\tilde{a}_1 B_{k-3} + \tilde{a}_2 B_{k-2} + \tilde{a}_3 B_{k-1}$, если k четное, $k \geq 4$, и равен $\tilde{a}_1 B_{k-4} + \tilde{a}_2 B_{k-3} + \tilde{a}_3 B_{k-2}$, если k нечетное, $k \geq 5$. Во всех примерах $N = (1, e, e^2) \approx (1, 2.718282, 7.389056)$. В каждом примере две таблицы: первая соответствует движению в сторону прямой $\mathcal{L}_1$, а вторая – в сторону плоскости $\mathcal{L}_2$.

В конце каждой таблицы указаны номера $i = k$ вершин ломаной $\partial\mathbf{M}$ и значения Δ_k модулей определителей $\det(B_i B_j B_k)$, где B_i, B_j, B_k – последовательные соседние вершины с $i < j < k$. Число шагов алгоритма на периоде равно половине числа точек на периоде. В каждой таблице после горизонтальной прямой начинается период, который заканчивается концом таблицы.

Пример 2. Уравнение $\lambda^3+22\lambda^2+11\lambda+25=0$, $J\approx(1,.393582,.861731)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	1	0	25	.2154E+02	.1160E+01			
3	0	0	1	625	.4641E+03	.1347E+01			
4	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
5	0	1	0	25	.2154E+02	.1160E+01	0	1	0
6	0	0	1	625	.4641E+03	.1347E+01	1	0	0
7	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	0	1	0
8	0	1	0	25	.2154E+02	.1160E+01	1	0	0
9	1	0	1	109	.4651E+03	.2344E+00	0	1	1
10	4	0	3	3871	.1396E+04	.2772E+01	1	0	3
11	2	1	2	113	.9087E+03	.1244E+00	0	1	2
12	5	2	5	1445	.2282E+04	.6331E+00	1	0	2
13	8	3	7	157	.3192E+04	.4918E-01	-2	1	3
14	18	7	16	2567	.7293E+04	.3520E+00	1	0	2
15	15	6	13	85	.5919E+04	.1436E-01	2	-1	2
16	38	15	33	1253	.1503E+05	.8336E-01	1	0	2
17	51	20	44	235	.2004E+05	.1173E-01	3	-1	3
18	66	26	57	529	.2596E+05	.2038E-01	1	0	1
19	94	37	81	1	.3689E+05	.2711E-04	2	-1	2
20	2698	1062	2325	16993	.1059E+07	.1605E-01	0	1	28
21	2025	797	1745	25	.7947E+06	.3146E-04	1	0	21
22	47248	18596	40715	132647	.1854E+08	.7153E-02	0	1	22
23	94	37	81	1	.3689E+05	.2711E-04	1	0	0
24	45744	18004	39419	1159	.1795E+08	.6456E-04	0	1	-16
25	43719	17207	37674	109	.1716E+08	.6353E-05	-1	1	-16
26	131251	51658	113103	3871	.5151E+08	.7515E-04	1	0	3
27	85413	33617	73603	113	.3352E+08	.3371E-05	0	-1	3
28	214545	84441	184880	1445	.8420E+08	.1716E-04	1	0	2
29	300052	118095	258564	157	.1178E+09	.1333E-05	-2	1	3

k	1	9	11	13	15	19	25	27	29
Δ_k			1	1	1	2	22	1	1

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	625	.1347E+01	.4641E+03			
3	0	1	0	25	.1160E+01	.2154E+02			
4	0	22	1	5425	.5513E+03	.9840E+01	0	1	22
5	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
6	22	1	0	217	.4751E+03	.4567E+00	1	0	22
7	10	22	1	85	.5297E+03	.1605E+00	0	1	10
8	8	65	3	113	.4587E+04	.2463E-01	0	-1	3
9	43	2	0	157	.1814E+04	.8653E-01	-1	2	0
10	53	24	1	205	.2773E+04	.7392E-01	1	0	1
11	8	65	3	113	.4587E+04	.2463E-01	0	1	0
12	-29	171	8	1	.3689E+05	.2711E-04	0	-1	3
13	96	26	1	109	.8645E+04	.1261E-01	1	1	0
14	200	117	5	25	.4281E+05	.5840E-03	1	0	2
15	-29	171	8	1	.3689E+05	.2711E-04	0	1	0
16	-838	3645	171	217	.1753E+08	.1238E-04	0	-1	22
17	4565	1009	37	85	.1954E+08	.4350E-05	-1	22	-9
18	12857	6672	282	113	.1692E+09	.6677E-06	0	1	3
19	-1647	7119	334	157	.6693E+08	.2346E-05	-1	2	0

k	1	7	9	8	13	12	17	19	18
Δ_k			2	1	1	1	22	2	1

Пример 3. Уравнение $\lambda^3+19\lambda^2+11\lambda+18=0$, $J\approx(1,-18.4569,340.655)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	1	0	191	.1638E-02	.2941E+00			
2	1	0	0	324	.2941E-02	.2778E+00			
3	0	0	1	1	.3016E-02	.8363E-03			
4	-1	0	20	10116	.5737E-01	.4447E+00	0	-1	20
5	0	-1	19	18	.5566E-01	.8156E-03	-1	0	19
6	0	-2	37	137	.1083E+00	.3190E-02	-1	0	2
7	1	-18	332	64	.9746E+00	.1656E-03	10	-1	18
8	4	-74	1365	1005	.4007E+01	.6325E-03	0	1	4
9	2	-37	683	8	.2005E+01	.1006E-04	1	0	2
10	9	-166	3064	144	.8994E+01	.4038E-04	1	0	4
11	37	-683	12606	144	.3701E+02	.9814E-05	3	1	15
12	83	-1532	28276	324	.8300E+02	.9844E-05	0	1	2
13	81	-1495	27593	1	.8100E+02	.3113E-07	-1	1	2
14	1541	-28442	524950	10116	.1541E+04	.1656E-04	0	1	18
15	1495	-27593	509280	18	.1495E+04	.3036E-07	1	0	18
16	2909	-53691	990967	137	.2909E+04	.1188E-06	-1	0	2
17	26179	-483182	8918020	64	.2618E+05	.6165E-08	10	-1	18

k	1	3	7	9	13	17
Δ_k			1	1	2	18

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	1	.8363E-03	.3016E-02			
2	1	0	0	324	.2778E+00	.2941E-02			
3	0	1	0	191	.2941E+00	.1638E-02			
4	-1	1	0	200	.3871E+00	.1303E-02	0	-1	1
5	0	-1	1	144	.2636E+00	.1378E-02	1	0	-1
6	0	-2	1	115	.1115E+01	.2602E-03	-1	0	1
7	-1	0	1	8	.2703E+00	.7464E-04	0	1	1
8	-18	1	17	1152	.8519E+02	.3410E-04	-1	0	18
9	-3	-2	4	64	.4448E+01	.3629E-04	0	1	3
10	-7	-4	9	18	.2191E+02	.2072E-05	1	0	2
11	-8	7	4	1	.2246E+02	.1123E-06	-1	1	-3
12	-137	130	63	144	.7080E+04	.5129E-07	0	-1	18
13	-57	-137	130	8	.7260E+04	.2779E-08	1	18	-9
14	-1163	-2336	2403	1152	.2288E+07	.1270E-08	0	1	18
15	111	-678	260	64	.1195E+06	.1351E-08	-1	-2	3
16	165	-1493	650	18	.5884E+06	.7716E-10	1	0	2
17	-1439	-165	1493	1	.6033E+06	.4113E-11	-1	1	-3

k	1	7	9	11	13	15	17
Δ_k			2	1	18	2	1

Пример 4. Уравнение $\lambda^3+16\lambda^2+8\lambda+20=0$, $J\approx(1,-15.5687,.242.383)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	1	0	108	.1820E-02	.2134E+00			
2	1	0	0	400	.5421E-02	.2653E+00			
3	0	0	1	1	.4220E-02	.8522E-03			
4	-1	0	20	10800	.7898E-01	.4917E+00	0	-1	20
5	0	-1	16	20	.6570E-01	.1095E-02	-1	0	16
6	1	-22	332	62416	.1366E+01	.1643E+00	0	-1	22
7	0	0	1	1	.4220E-02	.8522E-03	1	0	0
8	0	-1	16	20	.6570E-01	.1095E-02	1	0	0
9	1	-16	249	65	.1027E+01	.2276E-03	-6	1	13
10	2	-31	482	180	.1989E+01	.3255E-03	0	-1	2
11	2	-31	483	87	.1993E+01	.1570E-03	1	-1	2
12	3	-47	732	108	.3020E+01	.1286E-03	1	0	1
13	7	-109	1697	1	.7001E+01	.5137E-06	1	1	2
14	131	-2040	31760	10800	.1310E+03	.2964E-03	-1	0	19
15	109	-1697	26420	20	.1090E+03	.6599E-06	0	-1	16
16	2267	-35294	549480	62416	.2267E+04	.9902E-04	0	-1	22
17	7	-109	1697	1	.7001E+01	.5137E-06	1	0	0
18	109	-1697	26420	20	.1090E+03	.6599E-06	1	0	0
19	1704	-26529	413021	65	.1704E+04	.1372E-06	-6	1	13

k	1	3	9	11	13	19
Δ_k			1	1	1	16

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	1	.8522E-03	.4220E-02			
2	1	0	0	400	.2653E+00	.5421E-02			
3	0	1	0	108	.2134E+00	.1820E-02			
4	0	-2	1	129	.8005E+00	.5795E-03	1	0	-2
5	-1	0	1	87	.2605E+00	.1201E-02	1	-1	0
6	0	-2	1	129	.8005E+00	.5795E-03	0	1	0
7	-1	1	1	65	.3776E+00	.6191E-03	1	0	1
8	-1	3	0	20	.1816E+01	.3960E-04	0	-1	1
9	-2	-1	3	1	.1414E+01	.2544E-05	1	1	1
10	-33	-13	48	108	.3540E+03	.1097E-05	0	1	16
11	-27	41	17	87	.4321E+03	.7241E-06	-1	16	6
12	-79	124	48	400	.3870E+04	.3717E-06	-1	0	3
13	-6	-54	31	65	.6264E+03	.3732E-06	0	1	-1
14	-15	149	-45	27	.4347E+04	.2234E-07	1	0	-2
15	-85	70	79	1	.2345E+04	.1533E-08	0	1	1
16	-1290	1199	1140	108	.5872E+06	.6616E-09	0	1	15
17	-604	-1630	1479	87	.7169E+06	.4364E-09	-1	-16	10

k	1	5	7	9	11	13	15	17
Δ_k			1	1	16	1	1	16

Пример 5. Уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 25\lambda + 17 = 0$, $J \approx (1, -.165761, .0359480)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	289	.3735E+00	.7738E+03			
2	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
3	0	1	0	17	.6111E+00	.2782E+02			
4	0	5	-1	2839	.3429E+01	.8279E+03	-1	0	5
5	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	0	1	0
6	29	-5	1	113	.3243E+02	.3485E+01	0	-1	29
7	84	-14	3	61	.9368E+02	.6512E+00	1	-3	84
8	167	-28	6	551	.1864E+03	.2957E+01	-1	0	2
9	139	-23	5	11	.1549E+03	.7100E-01	0	-1	2
10	501	-83	18	43	.5584E+03	.7700E-01	1	0	3
11	2003	-332	72	27	.2233E+04	.1209E-01	2	1	12
12	5870	-973	211	991	.6543E+04	.1514E+00	-1	0	3
13	3505	-581	126	13	.3907E+04	.3327E-02	0	-1	2
14	30405	-5040	1093	2293	.3389E+05	.6765E-01	0	1	7
15	9013	-1494	324	1	.1005E+05	.9953E-04	1	0	2
16	50573	-8383	1818	167	.5637E+05	.2962E-02	-1	0	6
17	292283	-48449	10507	113	.3258E+06	.3468E-03	-5	1	31
18	826276	-136964	29703	367	.9211E+06	.3984E-03	0	-1	3
19	9013	-1494	324	1	.1005E+05	.9953E-04	1	0	0
20	844302	-139952	30351	61	.9412E+06	.6481E-04	0	1	2
21	1396321	-231455	50195	11	.1557E+07	.7067E-05	-1	2	4
22	5033265	-834317	180936	43	.5611E+07	.7664E-05	0	1	3
23	20124047	-3335774	723420	27	.2243E+08	.1204E-05	-1	4	12
24	58975820	-9775867	2120065	991	.6574E+08	.1507E-04	-1	0	3
25	35214829	-5837231	1265904	13	.3925E+08	.3312E-06	0	-1	2

k	1	3	2	9	11	13	15	21	23	25
Δ_k			1	5	4	1	0	5	4	1

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	289	.7738E+03	.3735E+00			
3	0	1	0	17	.2782E+02	.6111E+00			
4	0	1	1	221	.9299E+03	.2377E+00	0	1	1
5	1	1	0	13	.3343E+02	.3889E+00	1	0	1
6	1	2	1	169	.1118E+04	.1512E+00	0	1	1
7	1	2	0	27	.1215E+03	.2222E+00	1	0	1
8	2	3	0	47	.2820E+03	.1667E+00	1	0	1
9	-1	-1	1	11	.7134E+03	.1542E-01	-1	1	-1
10	-9	-8	11	261	.8794E+05	.2968E-02	0	1	11
11	6	8	-3	61	.6542E+04	.9324E-02	1	1	-3
12	7	9	-4	69	.1132E+05	.6096E-02	-1	0	1
13	11	18	0	1	.1005E+05	.9953E-04	-2	1	3
14	678	1107	-4	923	.3755E+08	.2458E-04	0	1	61
15	339	548	-11	159	.8774E+07	.1812E-04	1	2	29
16	1017	1655	-15	533	.8250E+08	.6460E-05	0	1	1
17	350	588	25	51	.1276E+08	.3998E-05	1	2	-3
18	1739	2900	89	627	.2941E+09	.2132E-05	1	0	4
19	317	479	-65	11	.7167E+07	.1535E-05	0	1	-2
20	984	1546	-105	61	.6573E+08	.9280E-06	1	0	2
21	121	396	324	1	.1009E+09	.9907E-08	-1	1	-4
22	10390	35678	30561	2853	.8889E+12	.3209E-08	0	-1	94
23	1587	9101	10643	433	.1019E+12	.4251E-08	-1	-2	32
24	3295	18598	21610	591	.4204E+12	.1406E-08	1	0	2
25	5387	7583	-2016	13	.3374E+10	.3852E-08	-2	1	-3
26	-3800	1518	12659	51	.1282E+12	.3982E-09	1	0	-1
27	10895	15562	-3708	27	.1226E+11	.2202E-08	-2	1	2
28	16282	23145	-5724	47	.2847E+11	.1650E-08	1	0	1
29	23377	40225	3227	11	.7201E+11	.1535E-09	1	1	2

k	1	5	7	9	13	19	21	25	27	29
Δ_k			0	1	4	18	18	5	0	1

Пример 6. Уравнение $\lambda^3-8\lambda^2+21\lambda+13=0$, $J\approx(1,-.335627,.0394273)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	169	.2627E+00	.6433E+03			
2	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
3	0	1	0	13	.5126E+00	.2536E+02			
4	0	5	-1	559	.2825E+01	.1978E+03	-1	0	5
5	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	0	1	0
6	5	-1	0	43	.5513E+01	.7800E+01	-1	0	5
7	27	-9	1	61	.3188E+02	.1914E+01	-4	-1	27
8	49	-17	2	153	.5824E+02	.2627E+01	0	-1	2
9	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
10	27	-9	1	61	.3188E+02	.1914E+01	1	0	0
11	51	-17	2	9	.6024E+02	.1494E+00	0	1	2
12	231	-77	9	617	.2728E+03	.2261E+01	0	1	4
13	101	-34	4	9	.1195E+03	.7533E-01	-1	0	2
14	736	-247	29	127	.8702E+03	.1459E+00	0	1	5
15	152	-51	6	11	.1797E+03	.6121E-01	1	0	1
16	253	-85	10	37	.2992E+03	.1237E+00	1	0	1
17	888	-298	35	29	.1050E+04	.2762E-01	0	1	1
18	1040	-349	41	39	.1230E+04	.3172E-01	1	0	1
19	2029	-681	80	3	.2399E+04	.1250E-02	0	1	2
20	11185	-3754	441	129	.1322E+05	.9754E-02	0	1	5
21	25287	-8487	997	67	.2990E+05	.2241E-02	1	2	11
22	39389	-13220	1553	17	.4657E+05	.3650E-03	0	-1	2
23	2029	-681	80	3	.2399E+04	.1250E-02	1	0	0
24	25287	-8487	997	67	.2990E+05	.2241E-02	1	0	0
25	41418	-13901	1633	13	.4897E+05	.2655E-03	0	1	1
26	149541	-50190	5896	841	.1768E+06	.4756E-02	0	1	3
27	80807	-27121	3186	1	.9554E+05	.1047E-04	-1	0	2
28	445453	-149506	17563	43	.5267E+06	.8164E-04	1	0	5
29	2575780	-864501	101556	61	.3046E+07	.2003E-04	2	1	29
30	4706107	-1579496	185549	153	.5564E+07	.2750E-04	0	-1	2
31	80807	-27121	3186	1	.9554E+05	.1047E-04	1	0	0

k	1	3	2	11	13	15	17	19	25	27
Δ_k			1	2	0	0	1	1	3	0

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	169	.6433E+03	.2627E+00			
3	0	1	0	13	.2536E+02	.5126E+00			
4	0	0	1	169	.6433E+03	.2627E+00	0	1	0
5	1	2	0	3	.1195E+03	.2511E-01	1	0	2
6	10	20	1	199	.1713E+05	.1162E-01	0	1	10
7	0	1	2	39	.3030E+04	.1287E-01	1	2	0
8	10	19	-1	9	.7197E+04	.1250E-02	0	1	-1
9	9	16	-3	29	.2639E+04	.1099E-01	-1	1	-2
10	10	19	-1	9	.7197E+04	.1250E-02	0	1	0
11	9	15	-5	11	.5848E+04	.1881E-02	-1	0	1
12	63	106	-33	73	.2459E+06	.2969E-03	1	0	6
13	10	19	-1	9	.7197E+04	.1250E-02	0	1	0
14	63	106	-33	73	.2459E+06	.2969E-03	0	1	0
15	1	4	4	9	.1427E+05	.6305E-03	-1	0	1
16	64	110	-29	61	.1828E+06	.3336E-03	0	1	1
17	12	27	7	1	.9554E+05	.1047E-04	1	0	2
18	320	754	253	131	.1007E+09	.1301E-05	0	-1	32
19	-91	-135	83	13	.2423E+07	.5365E-05	1	-2	3
20	320	754	253	131	.1007E+09	.1301E-05	0	1	0
21	-170	-243	173	3	.1142E+08	.2628E-06	1	0	2
22	-530	-461	1118	9	.6877E+09	.1309E-07	0	1	5
23	1889	3585	-196	29	.2521E+09	.1150E-06	1	3	-6
24	-530	-461	1118	9	.6877E+09	.1309E-07	0	1	0
25	4138	7388	-1337	11	.5588E+09	.1969E-07	1	-1	2
26	26717	47913	-8218	73	.2350E+11	.3107E-08	1	0	6
27	-530	-461	1118	9	.6877E+09	.1309E-07	0	1	0

k	1	3	5	9	11	8	15	17	19	21	23	25
Δ_k			0	3	1	1	0	0	2	0	3	1

Пример 7. Уравнение $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 11\lambda + 9 = 0$, $J \approx (1, -.387899, .0690079)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	81	.3857E+00	.2100E+03			
2	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
3	0	1	0	9	.6211E+00	.1449E+02			
4	0	4	-1	333	.2870E+01	.1160E+03	-1	0	4
5	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	0	1	0
6	4	-1	0	37	.4621E+01	.8007E+01	-1	0	4
7	16	-6	1	23	.2011E+02	.1144E+01	-2	-1	16
8	28	-11	2	17	.3560E+02	.4775E+00	0	-1	2
9	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
10	28	-11	2	17	.3560E+02	.4775E+00	0	1	0
11	44	-17	3	8	.5572E+02	.1436E+00	1	1	0
12	131	-51	9	239	.1661E+03	.1438E+01	-1	0	3
13	116	-45	8	1	.1470E+03	.6801E-02	0	1	2
14	536	-208	37	37	.6795E+03	.5446E-01	-1	0	5
15	2333	-905	161	23	.2957E+04	.7778E-02	-2	-1	22
16	4130	-1602	285	17	.5235E+04	.3247E-02	0	-1	2
17	116	-45	8	1	.1470E+03	.6801E-02	1	0	0

k	1	3	2	11	13
Δ_k			1	3	1

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	81	.2100E+03	.3857E+00			
3	0	1	0	9	.1449E+02	.6211E+00			
4	0	1	1	72	.3059E+03	.2353E+00	0	1	1
5	1	1	0	8	.2111E+02	.3789E+00	1	0	1
6	1	2	0	17	.7021E+02	.2421E+00	1	0	1
7	-1	-1	1	1	.1470E+03	.6801E-02	-1	1	-1
8	-35	-34	36	523	.1938E+06	.2698E-02	0	1	36
9	-22	-23	20	43	.5637E+05	.7628E-03	-1	-1	20
10	-101	-103	96	544	.1327E+07	.4100E-03	0	1	3
11	-25	-21	31	19	.1567E+06	.1212E-03	-1	2	-2
12	-172	-149	206	241	.6814E+07	.3537E-04	1	0	6
13	26	40	-3	1	.2162E+05	.4626E-04	0	-1	3
14	-198	-189	209	72	.6614E+07	.1089E-04	0	1	-1
15	53	99	22	8	.4564E+06	.1753E-04	1	0	3
16	80	158	47	17	.1518E+07	.1120E-04	-1	0	2
17	278	347	-162	1	.3179E+07	.3146E-06	-1	-1	2
18	9928	12334	-5879	523	.4190E+10	.1248E-06	0	-1	36
19	5693	7197	-3171	43	.1219E+10	.3528E-07	1	1	20

k	1	5	7	13	15	17	19
Δ_k			1	14	8	1	1

Пример 8. Уравнение $\lambda^3+9\lambda^2+39\lambda+32=0$, $J\approx(1, .259155, .0325658)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	1024	.1086E+01	.9429E+03			
3	0	1	0	32	.1042E+01	.3071E+02			
4	0	6	1	3008	.5167E+01	.5822E+03	0	1	6
5	1	1	0	1	.4211E-01	.2375E+02	1	0	1
6	-2	4	1	2646	.5082E+01	.5206E+03	0	1	-2
7	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	-1	0	1
8	6	1	0	94	.4958E+01	.1896E+02	1	0	5
9	31	8	1	1	.2375E+02	.4211E-01	4	1	29
10	645	167	21	284	.4938E+03	.5752E+00	0	-1	21
11	737	191	24	1	.5640E+03	.1773E-02	-1	-1	24
12	3654	947	119	94	.2796E+04	.3362E-01	-1	0	5
13	17503	4536	570	1	.1340E+05	.7465E-04	-3	1	23
14	363909	94309	11851	284	.2785E+06	.1020E-02	0	-1	21
15	415681	107726	13537	1	.3181E+06	.3143E-05	-1	-1	24

k	5	1	9	11	13	15
Δ_k			1	1	1	1

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	1	0	32	.3071E+02	.1042E+01			
3	0	0	1	1024	.9429E+03	.1086E+01			
4	0	1	0	32	.3071E+02	.1042E+01	0	1	0
5	1	2	0	117	.1079E+03	.1084E+01	1	2	0
6	1	2	1	1	.5640E+03	.1773E-02	1	0	1
7	0	1	0	32	.3071E+02	.1042E+01	0	1	0
8	1	2	1	1	.5640E+03	.1773E-02	0	1	0
9	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	-2
10	1	2	1	1	.5640E+03	.1773E-02	0	1	0
11	1	1	0	1	.2375E+02	.4211E-01	1	0	1
12	25	24	0	143	.1354E+05	.1056E-01	1	0	24
13	1	2	1	1	.5640E+03	.1773E-02	0	1	0
14	25	49	24	143	.3215E+06	.4448E-03	1	0	24
15	31	36	6	1	.1340E+05	.7465E-04	0	1	6
16	743	862	143	143	.7635E+07	.1873E-04	-1	0	24
17	161	167	12	1	.3181E+06	.3143E-05	0	-1	6

k	1	11	6	15	17
Δ_k			1	1	1

Пример 9. Уравнение $\lambda^3+26\lambda^2+13\lambda+33=0$, $J\approx(1,-25.5416,652.374)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	1	0	305	.7140E-03	.2091E+00			
2	1	0	0	1089	.2013E-02	.2648E+00			
3	0	0	1	1	.1558E-02	.3142E-03			
4	-1	0	31	42807	.4628E-01	.4527E+00	0	-1	31
5	0	-1	26	33	.3979E-01	.4059E-03	-1	0	26
6	1	-34	853	326943	.1306E+01	.1225E+00	0	-1	34
7	0	0	1	1	.1558E-02	.3142E-03	1	0	0
8	0	-1	26	33	.3979E-01	.4059E-03	1	0	0
9	1	-26	664	193	.1018E+01	.9281E-04	-8	1	19
10	2	-51	1302	477	.1996E+01	.1170E-03	0	-1	2
11	2	-51	1303	213	.1997E+01	.5219E-04	1	-1	2
12	3	-77	1967	423	.3015E+01	.6866E-04	1	0	1
13	4	-102	2605	197	.3993E+01	.2415E-04	0	1	1
14	6	-153	3908	437	.5990E+01	.3570E-04	1	0	1
15	7	-179	4572	243	.7008E+01	.1697E-04	0	1	1
16	11	-281	7177	305	.1100E+02	.1357E-04	1	0	1
17	24	-613	15657	1	.2400E+02	.2039E-07	1	1	2
18	713	-18211	465138	42807	.7130E+03	.2938E-04	-1	0	30
19	613	-15657	399905	33	.6130E+03	.2635E-07	0	-1	26
20	20129	-514127	13131632	326943	.2013E+05	.7949E-05	0	-1	34
21	24	-613	15657	1	.2400E+02	.2039E-07	1	0	0

k	1	3	9	11	13	15	17
Δ_k			1	1	1	1	26

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	0	0	1	1	.3142E-03	.1558E-02			
2	1	0	0	1089	.2648E+00	.2013E-02			
3	0	1	0	305	.2091E+00	.7140E-03			
4	0	-2	1	213	.8041E+00	.1296E-03	1	0	-2
5	-1	0	1	243	.2615E+00	.4549E-03	1	-1	0
6	0	-2	1	213	.8041E+00	.1296E-03	0	1	0
7	-1	1	1	197	.3720E+00	.2592E-03	1	0	1
8	-2	1	2	423	.1058E+01	.1957E-03	1	0	1
9	0	-2	1	213	.8041E+00	.1296E-03	0	1	0
10	-1	5	-1	1	.4841E+01	.1011E-06	1	0	-2
11	-2	-1	3	193	.1430E+01	.6606E-04	0	1	1
12	-4	-4	7	45	.8876E+01	.2481E-05	1	0	2
13	-1	5	-1	1	.4841E+01	.1011E-06	0	1	0
14	-21	129	-32	305	.3221E+04	.4635E-07	0	-1	25
15	-117	-28	164	243	.4028E+04	.2952E-07	-1	26	15
16	-352	-79	491	925	.3612E+05	.1253E-07	1	0	3
17	-138	101	132	197	.5732E+04	.1682E-07	0	1	1
18	-214	-180	359	193	.2203E+05	.4288E-08	0	1	-1
19	-41	253	-63	213	.1239E+05	.8414E-08	1	-1	2
20	-220	607	6	1	.7458E+05	.6580E-11	1	0	2
21	-214	-180	359	193	.2203E+05	.4288E-08	0	1	0
22	-387	-613	781	45	.1368E+06	.1611E-09	-1	0	2
23	-220	607	6	1	.7458E+05	.6580E-11	0	1	0

k	1	5	7	4	11	10	15	17	19	18	20
Δ_k			1	1	1	1	26	1	1	1	1

Пример 10. Уравнение $\lambda^3+31\lambda^2-16\lambda+38=0$, $J\approx(1,-.452753,.830142)$.

k	B_k			$f(B_k)$	$m_1(B_k)$	$m_2(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	1	0	38	.3155E+02	.1205E+01			
3	0	0	1	1444	.9951E+03	.1451E+01			
4	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
5	0	1	0	38	.3155E+02	.1205E+01	0	1	0
6	0	0	1	1444	.9951E+03	.1451E+01	1	0	0
7	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	0	1	0
8	0	1	0	38	.3155E+02	.1205E+01	1	0	0
9	1	0	1	338	.9961E+03	.3393E+00	0	1	1
10	4	0	3	11116	.2989E+04	.3719E+01	1	0	3
11	2	-1	2	318	.2024E+04	.1571E+00	0	-1	2
12	5	-3	5	6541	.5075E+04	.1289E+01	-1	0	3
13	5	-2	4	367	.4049E+04	.9065E-01	-3	1	2
14	7	-3	6	652	.6072E+04	.1074E+00	1	0	1
15	11	-5	9	249	.9125E+04	.2729E-01	-2	1	2
16	29	-13	24	534	.2432E+05	.2196E-01	0	1	2
17	53	-24	44	1	.4460E+05	.2242E-04	-1	2	4
18	1866	-845	1549	62304	.1570E+07	.3969E-01	1	0	35
19	1672	-757	1388	38	.1407E+07	.2701E-04	0	1	31
20	65402	-29611	54293	337044	.5503E+08	.6125E-02	0	1	38
21	53	-24	44	1	.4460E+05	.2242E-04	1	0	0
22	1672	-757	1388	38	.1407E+07	.2701E-04	1	0	0
23	52797	-23904	43829	338	.4442E+08	.7609E-05	-7	1	-17
24	158444	-71736	131531	11116	.1333E+09	.8338E-04	1	0	3
25	107266	-48565	89046	318	.9025E+08	.3524E-05	0	1	2
26	269001	-121791	223309	6541	.2263E+09	.2890E-04	-1	0	3
27	214585	-97154	178136	367	.1805E+09	.2033E-05	-3	1	2

k	1	9	11	13	15	17	23	25	27
Δ_k			1	1	1	2	31	1	1

k	B_k			$f(B_k)$	$m_2(B_k)$	$m_1(B_k)$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$
1	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01			
2	0	0	1	1444	.1451E+01	.9951E+03			
3	0	1	0	38	.1205E+01	.3155E+02			
4	0	32	1	18012	.1256E+04	.1434E+02	0	1	32
5	1	0	0	1	.1000E+01	.1000E+01	1	0	0
6	32	1	0	474	.1043E+04	.4546E+00	1	0	32
7	-17	31	1	249	.1217E+04	.2046E+00	-1	1	-17
8	-66	61	2	318	.7007E+04	.4538E-01	0	-1	2
9	63	2	0	367	.4043E+04	.9078E-01	-1	2	0
10	109	35	1	351	.1523E+05	.2304E-01	1	0	2
11	-66	61	2	318	.7007E+04	.4538E-01	0	1	0
12	-195	120	4	1	.4460E+05	.2242E-04	-1	0	2
13	43	96	3	338	.1513E+05	.2234E-01	0	1	1
14	152	131	4	38	.5372E+05	.7074E-03	-1	0	2
15	-195	120	4	1	.4460E+05	.2242E-04	0	1	0
16	-6392	3709	124	474	.4650E+08	.1019E-04	0	-1	32
17	1245	6317	199	249	.5427E+08	.4588E-05	1	31	18
18	-3902	16343	522	318	.3125E+09	.1018E-05	0	1	2
19	-12589	7298	244	367	.1803E+09	.2036E-05	-1	2	0
20	26423	-8279	-289	351	.6793E+09	.5167E-06	1	0	-2
21	-3902	16343	522	318	.3125E+09	.1018E-05	0	1	0

k	1	7	9	8	13	12	17	19	18
Δ_k			2	1	1	1	31	2	1

Список литературы

1. Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.

2. Брюно А.Д., Парусников В.И. Дальнейшее обобщение цепной дроби. Препринт N 40. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2005. 19 с.

3. Брюно А.Д., Парусников В.И. Дальнейшее обобщение цепной дроби // ДАН, 2006, т. 410, N 1, с. 12–16.