



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 66 за 2008 г.](#)



Сычугов К.Р., [Чечеткин В.М.](#),  
[Устюгова Г.В.](#)

Течение проводящей  
жидкости над вращающимся  
диском в магнитном поле

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сычугов К.Р., Чечеткин В.М., Устюгова Г.В. Течение проводящей жидкости над вращающимся диском в магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 66. 21 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-66>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

К.Р. Сычугов, В.М. Чечеткин, Г.В. Устюгова

Течение проводящей жидкости над вращающимся диском в  
магнитном поле

Грант РФФИ № 06-02-16608

Москва 2008

**К.Р. Сычугов, В.М. Чечеткин, Г.В. Устюгова**

**Течение проводящей жидкости над вращающимся диском в магнитном поле**

**Аннотация**

Проведено исследование некоторых типов вращательных стационарных течений проводящей несжимаемой жидкости в магнитном поле. Исследована зависимость характера течения от внешних параметров (таких как кинематическая и магнитная вязкость, величина магнитного поля). Получен ответ на вопрос о наличии единственного характерного масштаба длины, на котором меняются компоненты скорости и поля. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 06-02-16608.

**K.R. Sychugov, V.M. Chechetkin, G.V. Ustyugova**

**The flow of conducting fluid over the rotating disk in magnetic field**

**Abstract**

Research of rotating stationary flows of conducting fluid in magnetic field was carried out. The dependence of flow on prescribed parameters, such as kinematic and magnetic viscosity, magnitude of magnetic field and angular velocity of rotating disk, is researched. The problem of the presence of a single space scale, which describes the boundary layer near the disk is solved. The work was supported by Russian Fond of Fundamental Researches, grant No. 06-02-16608.

**Содержание**

Введение .....	3
1. Течение Гартмана - Экмана .....	4
2. Течение над вращающимся диском в магнитном поле .....	7
3. Методы численного моделирования .....	10
4. Результаты .....	13
Заключение .....	21
Список литературы .....	21

## Введение

В работе исследуется стационарное течение проводящей жидкости над вращающимся бесконечным диском. Подобное исследование было проведено в работе [1], где было рассмотрено течение проводящей жидкости между двумя цилиндрами, ограниченными по высоте, и получены приближенные аналитические выражения, описывающие поведение жидкости и магнитного поля. Нашей целью является исследование течений в полупространстве, заполненном жидкостью и ограниченном одной плоскостью (диск бесконечного радиуса). Рассматривались два вида подобных течений: при отсутствии перпендикулярной к диску компоненты скорости, и при ее наличии. В первом случае представляется возможным рассмотреть течение жидкости аналитически, во втором картину течения можно установить только с помощью численного анализа. В дальнейшем полученные результаты можно использовать для проведения анализа устойчивости данного течения, и исследования магниторотационной неустойчивости (МРН), если данное явление будет иметь место. Анализ МРН в случае аксиальной симметрии проведен в работах [2] и [3].

Основной задачей данной работы является ответ на вопрос о количестве пограничных слоев – характерных масштабов длины, на которых меняются функции скорости и поля. Возможность существования более чем одного характерного масштаба длины обусловлена тем, что из заданных параметров задачи, таких как кинетическая и магнитная вязкость, угловая скорость вращения диска, значение магнитного поля на диске, можно составить более одного параметра, имеющего размерность длины.

Задача о течении жидкости над вращающимся диском без магнитного поля (жидкость не проводящая) была рассмотрена в [4, гл. II § 23]. В данном случае все функции изменялись на одном характерном расстоянии, которое определялось вязкостью жидкости и угловой скоростью диска ( $z_{\text{хар}} \sim \sqrt{\nu/\Omega}$ ). Единственным механизмом передачи момента вращения от диска к жидкости в таком течении является вязкость. В нашем случае, помимо вязкости, на течение будет оказывать влияние магнитное поле.

Течения при отсутствии перпендикулярной к диску компоненты скорости рассмотрено как течение Гартмана во вращающейся системе координат (т.е. при наличии фиктивных сил). Выяснено, что размеры пограничных слоев в случае течения Гартмана во вращающейся системе отсчета и в случае течения жидкости над вращающимся диском абсолютно одинаково зависят от некоторого соотношения между параметрами задачи.

## 1. Течение Гартмана - Экмана

Течение Гартмана (J. Hartmann) является МГД - аналогом пуазелевского течения между двумя параллельными плоскостями. Рассмотрим течение Гартмана в полуограниченной области  $z > 0$ : нижняя плоскость имеет координату  $z = 0$ , а верхняя плоскость отсутствует (или бесконечно удалена от первой). Кроме того, предположим, что плоскость  $z = 0$  вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$ . Будем решать задачу в системе координат, вращающейся вместе с плоскостью. Вследствие неинерциальности данной системы, в систему уравнений магнитной гидродинамики войдет сила Кориолиса, отнесенная к единице массы жидкости  $2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]$  и центробежная сила  $\mathbf{f}_{in} = \rho \Omega^2 \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  - радиус вектор относительно оси вращения,  $\boldsymbol{\Omega}$  - вектор угловой скорости, направленный вдоль оси  $z$ . Эту силу можно отнести к общему давлению, записав в виде градиента по координатам:

$$\mathbf{f}_{in} = \rho \Omega^2 \mathbf{r} = \nabla \left( \frac{\rho \Omega^2 \mathbf{r}^2}{2} \right).$$

Таким образом система стационарных уравнений МГД примет вид:

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{\rho \Omega^2 \mathbf{r}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) = \\ = \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости,  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  - коэффициент магнитной диффузии (магнитная вязкость),  $\sigma$  - проводимость вещества,  $\mathbf{B}$  - вектор магнитной индукции,  $\mathbf{v}$  - вектор скорости элемента жидкости. Величину, стоящую под градиентом, можно обозначить как суммарное давление:

$$P = p + \frac{\rho \Omega^2 \mathbf{r}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$$

В качестве граничных условий берется условие прилипания вязкой жидкости к вращающейся плоскости, а так же условие непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на плоскости  $z = 0$  (такое возможно когда на диске нет поверхностных токов):

$$\mathbf{v} = 0, \quad B_x = B_y = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Естественно предположить, что все компоненты скорости и поля (в системе координат, вращающейся вместе с плоскостью) зависят только от координаты  $z$ . Тогда в силу уравнения непрерывности для линий поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и

уравнения несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  следует, что  $z$  - компоненты скорости и поля будут постоянны во всей области течения. Таким образом,  $B_z = B_{z0} = \text{const}$  и  $v_z \equiv 0$  (течение по  $z$  отсутствует во всей области).

Из  $z$  - компоненты уравнения (2) следует, что суммарное давление  $P$  будет постоянно по  $z$ . А зависимость этой величины от координат  $x$  и  $y$  можно выбрать таким образом, чтобы градиент этой величины был постоянен во всей области. Рассмотрим уравнение (2) на  $z = \infty$ , в результате получится следующие равенство:

$$\nabla P = \text{const} = 2\rho[\mathbf{v}_\infty \boldsymbol{\Omega}], \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}_\infty = (v_{x\infty}, v_{y\infty}, 0)$  - вектор скорости на бесконечности во вращающейся системе координат. Как уже упоминалось выше, вследствие равенства нулю дивергенции поля и скорости а также предполагаемой независимости физических величин от координат  $x$  и  $y$ , компоненты скорости и магнитного поля  $v_z$  и  $B_z$  постоянны во всей области. Величина  $v_z$  тождественно равна нулю из-за условия непротекания жидкости сквозь диск, в связи с этим в системе МГД - уравнений зануляются слагаемые, содержащие:

$$(\mathbf{v}\nabla) = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

Если выписать  $x$ - и  $y$ - компоненты уравнений (1) и (2) с учетом сказанного выше, то получится система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$B_{z0} \frac{dv_x}{dz} + \nu_m \frac{d^2 B_x}{dz^2} = 0, \quad (1)_x$$

$$B_{z0} \frac{dv_y}{dz} + \nu_m \frac{d^2 B_y}{dz^2} = 0, \quad (1)_y$$

$$\frac{B_{z0}}{4\pi\rho} \frac{dB_x}{dz} + \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} + 2v_y \Omega - 2v_{y\infty} \Omega = 0, \quad (2)_x$$

$$\frac{B_{z0}}{4\pi\rho} \frac{dB_y}{dz} + \nu \frac{d^2 v_y}{dz^2} - 2v_x \Omega + 2v_{x\infty} \Omega = 0. \quad (2)_y$$

В уравнениях (2)<sub>x</sub> и (2)<sub>y</sub> учтено равенство (3).

Удобно ввести комплексные переменные:

$$\begin{cases} B = B_x + i B_y \\ v = v_x + i v_y, \end{cases}$$

Если уравнения (1)<sub>y</sub> и (2)<sub>y</sub> помножить на мнимую единицу и сложить соответственно с уравнениями (1)<sub>x</sub> и (2)<sub>x</sub>, то получится система двух дифференциальных уравнений на комплексные функции  $B$  и  $v$ :

$$B_{z0} \frac{dv}{dz} + \nu_m \frac{d^2 B}{dz^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{B_{z0}}{4\pi\rho} \frac{dB}{dz} + \nu \frac{d^2v}{dz^2} - 2i\Omega(v - v_\infty) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) можно проинтегрировать с учетом граничных условий на бесконечности, в результате получится соотношение:

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{B_{z0}}{\nu_m}(v - v_\infty),$$

после подстановки которого в (5), получаем уравнение:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \left[ \frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\nu} + i \frac{2\Omega}{\nu} \right] (v - v_\infty), \quad (6)$$

с граничными условиями  $v = 0$  при  $z = 0$  и  $v = v_\infty$  при  $z = \infty$ .

Решением этого уравнения с такими граничными условиями будет:

$$v = v_\infty \left( 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\nu} + i \frac{2\Omega}{\nu}} \cdot z \right] \right) \quad (7)$$

(знак „-“ перед корнем в показателе экспоненты выбран при условии положительности  $\Omega$ ). Таким образом поведение скорости определяется двумя параметрами: толщинами слоя Гартмана  $\delta_H = (B_{z0}^2/4\pi\rho\nu_m\nu)^{-1/2}$  и слоя Экмана  $\delta_E = (2\Omega/\nu)^{-1/2}$ . В случае, если  $\Omega = 0$ , величина скорости меняется на гартмоновском слое, и мы получаем течение Гартмана в полубесконечной области, если же магнитное поле  $B_{z0}$  равно нулю, то течение меняется на характерном слое Экмана.

Если произвести следующую замену:

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\nu} + i \frac{2\Omega}{\nu} &= \frac{1}{z_0^2} e^{i\Theta} \\ \frac{1}{z_0^2} &= \sqrt{\left(\frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\nu}\right)^2 + \left(\frac{2\Omega}{\nu}\right)^2} = \frac{2\Omega}{\nu} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} \\ \Theta &= \arctg\left(\frac{2}{\alpha}\right), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

то решение (7) можно записать в виде:

$$v = v_\infty \left( 1 - \exp \left[ -\left(\cos \frac{\Theta}{2} + i \sin \frac{\Theta}{2}\right) Z \right] \right), \quad (9)$$

где  $Z = z/z_0$  - безразмерная координата. Предположим, что на бесконечности жидкость течет только по направлению  $x$  (то есть  $\text{Im } v_\infty = 0$ ), тогда

в покомпонентной форме решение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} V_x = \frac{v_x}{v_\infty} &= 1 - \exp\left(-Z \cos \frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(Z \sin \frac{\Theta}{2}\right) \\ V_y = \frac{v_y}{v_\infty} &= \exp\left(-Z \cos \frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(Z \sin \frac{\Theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

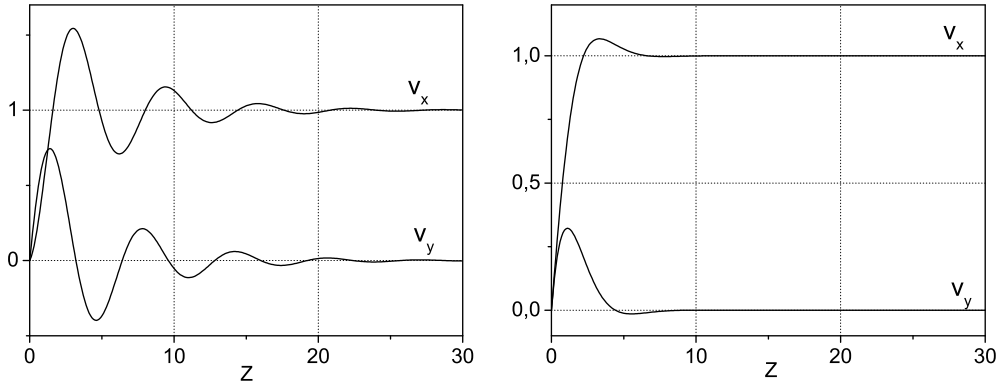


Рис. 1: Зависимость безразмерных скоростей  $V_x$  и  $V_y$  от безразмерной координаты  $Z$ , при  $\alpha = 0.4$  (слева) и  $\alpha = 2$  (справа)

Следует отметить, что задача решалась во вращающейся системе координат, и графики скорости на рис. 1 тоже даны во вращающейся системе.

## 2. Течение над вращающимся диском в магнитном поле

Теперь рассмотрим течение жидкости над вращающимся диском в магнитном поле с наличием  $z$ -компоненты скорости (перпендикулярно вращающемуся диску), что является существенным отличием от рассмотренного выше течения Гартмана-Экмана. В данном случае задача уже не имеет аналитического решения, но можно провести численный анализ, предварительно упростив систему уравнений МГД.

Запишем систему уравнений МГД для стационарного течения с учетом аксиальной симметрии в цилиндрических координатах:



$$v_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial B_r}{\partial z} = B_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + B_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \nu_m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} - \frac{B_r}{r^2} \right) \quad (11)$$

$$v_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi B_r}{r} = B_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + B_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r B_\varphi}{r} + \nu_m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right) \quad (12)$$

$$v_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = B_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + B_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \nu_m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{B_\varphi^2}{r} \right) + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (14)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{B_r B_\varphi}{r} \right) + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \quad (15)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Использованы следующие обозначения:  $B_r$ ,  $B_\varphi$  и  $B_z$  – радиальная, угловая и  $z$ - компоненты поля соответственно,  $v_r$ ,  $v_\varphi$  и  $v_z$  – компоненты скорости,

$P = p + B^2/8\pi$  – суммарное давление поля и жидкости,  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  – магнитная вязкость,  $\sigma$  – проводимость вещества,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\rho$  – плотность вещества.

Первые три уравнения являются уравнениями магнитной индукции, (14) - (16) – уравнения для компонент скорости (получены из уравнений Навье - Стокса), уравнение (17) – это уравнения соленоидальности линий магнитного поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , (18) – уравнение несжимаемости жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Решение системы (11) - (18) будем искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} B_r(r, z) &= \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{\nu_m} B_{z0} r F(z) & B_\varphi(r, z) &= \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{\nu_m} B_{z0} r G(z) \\ B_z(r, z) &= B_{z0} H(z) \\ v_r(r, z) &= \Omega r U(z) & v_\varphi(r, z) &= \Omega r V(z) & v_z(z) &= \sqrt{\nu\Omega} W(z) \\ P(r, z) &= \frac{r^2}{2} P_1 + P_2(z), \text{ где } P_1 = \text{const} & z &= \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} Z, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $B_{z0}$  – это "вмороженное" поле на диске,  $\Omega$  - угловая скорость вращения диска,  $Z$  – безразмерная координата,  $F, G, H, U, V, W$  – некие безразмерные функции переменной  $Z$ , которые можно найти, решая систему численно. После такого преобразования система примет следующий вид:

$$\frac{d^2 F}{dZ^2} = \varepsilon W \frac{dF}{dZ} - H \frac{dU}{dZ} \quad (11a)$$

$$\frac{d^2 G}{dZ^2} = \varepsilon W \frac{dG}{dZ} - H \frac{dV}{dZ} \quad (12a)$$

$$\frac{d^2 H}{dZ^2} = \varepsilon \left( W \frac{dH}{dZ} - H \frac{dW}{dZ} \right) \quad (13a)$$

$$\frac{d^2 U}{dZ^2} = U^2 - V^2 - \alpha \varepsilon (F^2 - G^2) + W \frac{dU}{dZ} - \alpha H \frac{dF}{dZ} + \tilde{P}_1 \quad (14a)$$

$$\frac{d^2 V}{dZ^2} = 2UV - 2\alpha \varepsilon FG - \alpha H \frac{dG}{dZ} + W \frac{dV}{dZ} \quad (15a)$$

$$\frac{d^2 W}{dZ^2} = W \frac{dW}{dZ} - \frac{\alpha}{\varepsilon} H \frac{dH}{dZ} + \frac{d\tilde{P}_2}{dZ} \quad (16a)$$

$$\frac{dH}{dZ} = -2\varepsilon F \quad (17a)$$

$$\frac{dW}{dZ} = -2U \quad (18a)$$

(здесь соблюден изначальный порядок следования уравнений: уравнение (11) перешло в уравнение (11a) и т.д.). Безразмерные величины  $\varepsilon$  и  $\alpha$  выражаются через исходные параметры задачи:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\nu_m}, \quad \alpha = \frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho\nu_m\Omega}.$$

Граничные условия после замены (19) примут вид: при  $Z = 0$  задаем поле на диске и условие прилипания жидкости к вращающемуся диску:

$$\begin{aligned} U(Z = 0) = 0 \quad V(Z = 0) = 1 \quad W(Z = 0) = 0 \\ H(Z = 0) = 1; \end{aligned} \quad (20)$$

при  $Z = \infty$  ставим условие отсутствия угловой и радиальной компонент скорости и поля:

$$\begin{aligned} U(Z = \infty) = 0 \quad V(Z = \infty) = 0 \\ F(Z = \infty) = 0 \quad G(Z = \infty) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Значения радиальной и угловой компонент поля на диске а также значения  $z$ -компонент скорости и поля на бесконечности определяются при решении этой системы.

В системе осталось два безразмерных параметра:  $\varepsilon$  и  $\alpha$ . Величина  $\alpha$  характеризует напряженность магнитного поля на диске. Если  $\alpha$  сделать очень малым, то данное течение не должно сильно отличаться от течения без магнитного поля. Если рассматривать течение жидкого натрия, то параметр  $\varepsilon$  будет порядка  $10^{-5} \div 10^{-4}$  (для жидкого натрия:  $\nu = 7.1 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с,  $\nu_m = 810$  см<sup>2</sup>/с). Таким образом можно упростить систему уравнений (11a) - (18a), положив параметр  $\varepsilon$  равным нулю. Следует отметить, что такое предположение равносильно приближению малых магнитных чисел Рейнольдса [5, гл. VIII]:

$$Re_m = \frac{vL}{\nu_m} \ll 1, \quad ,$$

где  $v$  и  $L$  - характерные скорость и масштаб течения.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что при малых  $\varepsilon$  компонента магнитного поля  $B_z$  будет приблизительно равна константе во всем пространстве над диском – это видно из уравнений (13a) и (17a).

### 3. Методы численного моделирования

Для решения системы дифференциальных уравнений (11a) - (18a) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматической коррекцией шага. Так как необходимо решать задачу с граничными условиями в двух

точках (на диске и на бесконечности), то приходится так же использовать метод „стрельбы“, который заключается в подборе граничных условий на диске таким образом, чтобы решение удовлетворило граничным условиям на бесконечности. Бесконечно удаленной точкой в данном случае считается координата  $Z$ , на которой все искомые функции становятся константами.

Прежде чем решать систему дифференциальных уравнений численно, ее необходимо свести к системе уравнений первого порядка. Рассмотрим систему (11a) - (18a). Первое уравнение системы

$$F'' = \varepsilon WF' - HU'$$

можно проинтегрировать с учетом граничных условий на бесконечности ( $F \rightarrow 0$  и  $U \rightarrow 0$  при  $Z \rightarrow \infty$ ) и последних двух уравнений системы ( $H' = -2\varepsilon F$  и  $W' = -2U$ ). В итоге получается дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F' = \varepsilon WF - HU$$

(штрих означает дифференцирование по  $Z$ ). Третье уравнение системы ( $H'' = \varepsilon(WH' - HW')$ ) с учетом последних двух переходит в первое уравнение, так что его можно не учитывать. Шестое уравнение

$$W'' = WW' - \frac{\alpha}{\varepsilon} HH' + \tilde{P}'_2$$

служит только для определения функции  $\tilde{P}_2$ , которая не входит в остальные уравнения, значит его тоже можно не учитывать при численных расчетах.

После замены  $G' = G_1$ ,  $U' = U_1$  и  $V' = V_1$ , получается система из девяти дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} F' &= \varepsilon WF - HU \\ G' &= G_1 \\ H' &= -2\varepsilon F \\ U' &= U_1 \\ V' &= V_1 \\ W' &= -2U \\ G'_1 &= \varepsilon WG_1 - HV_1 \\ U'_1 &= U^2 - V^2 - \alpha\varepsilon(F^2 - G^2) + WU_1 - \alpha HF' + \tilde{P}'_1 \\ V'_1 &= 2(UV - \alpha\varepsilon FG) + WV_1 - \alpha HG_1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Граничные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= 1, & U &= 0, & V &= 1, & W &= 0, & \text{при } Z &= 0 \\ F &= 0, & G &= 0, & U &= 0, & V &= 0, & \text{при } Z &= \infty, \end{aligned}$$

(как уже оговаривалось, функции  $F$ ,  $G$ ,  $H$  соответствуют трем компонентам поля, а функции  $U$ ,  $V$ ,  $W$  - трем компонентам скорости). Таким образом получилось 8 граничных условий для системы из 9 уравнений. Формально объяснить это не представляется возможным, можно лишь сказать, что при решении системы дифференциальных уравнений накладывается требование обращения всех производных в ноль на бесконечности (все функции должны стремиться к константам). Так же нельзя сказать сразу, какое поле получится при стационарном течении на самом диске, можно только наложить граничное условие на  $B_z$ , а значение поля в тангенциальном направлении определить заранее нельзя - оно будет определяться установившемся профилем скорости во всем пространстве над диском.

Константа  $\tilde{P}_1$  определяется из граничных условий на бесконечности а так же из условия обращения в ноль всех производных, таким образом:

$$\tilde{P}_1 \equiv 0.$$

Как уже говорилось, для численного решения этих систем используется метод „стрельбы“: подбираются незаданные граничные условия в точке  $Z = 0$  (на диске) таким образом, чтобы решение системы совпало с граничными условиями на бесконечности. Для отыскания отсутствующих граничных условий на диске вводится модуль отклонения значений функций на бесконечности от граничных условий на бесконечности как функция граничных условий на диске. Для системы (22), в которой не хватает пяти граничных условий при  $Z = 0$ , функция невязки будет зависеть от пяти величин:

$$\delta = \delta( F(0), G(0), G_1(0), U_1(0), V_1(0) ).$$

Необходимо найти минимум этой функции в пятимерном пространстве. Для нахождения этого минимума использовался симплекс-метод. Основная сложность заключается в том, что система из девяти нелинейных дифференциальных уравнений (22) очень неустойчива относительно малого изменения начальных условий. Для отыскания минимума функции  $\delta$  сначала приходится брать в качестве „бесконечности“ очень близкую к нулю точку  $Z_{end}$ , задавать на ней граничные условия как на бесконечности и искать минимум для нее. Затем можно немного увеличить  $Z_{end}$  и использовать найденный минимум для предыдущего  $Z_{end}$  в качестве стартовой точки для симплекс-метода. Таким образом, постепенно увеличивая  $Z_{end}$ , можно прийти до момента, когда значение функции  $\delta$  в минимуме станет меньше какого-то заданного минимального значения  $\delta_{min}$  - при выполнении этого условия решение считается найденным.

## 4. Результаты

На рисунках 2 и 4 приведены графики функций  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , полученные в результате численных расчетов для различных значений  $\alpha$ . Как видно из этих графиков, при увеличении  $\alpha$  (что равносильно увеличению магнитного поля или уменьшению скорости вращения диска) подавляется движение жидкости в радиальном и в вертикальном направлениях.

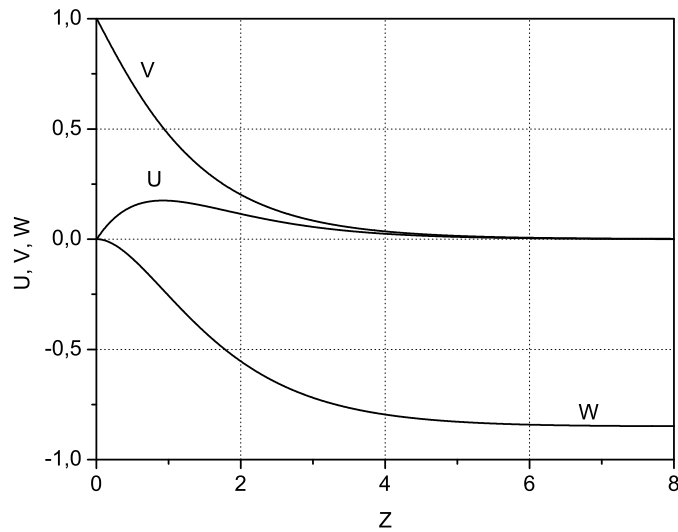


Рис. 2: Графики функций  $U$ ,  $V$ ,  $W$  для  $\alpha = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .  $W(\infty) = -0.848$

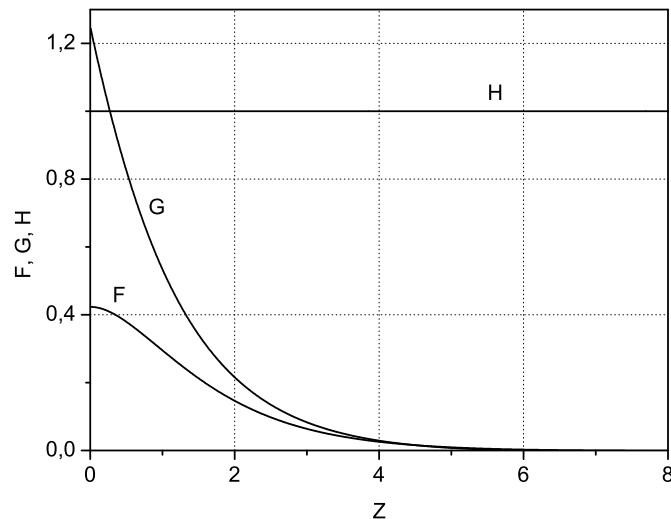


Рис. 3: Графики функций  $F$ ,  $G$ ,  $H$  для  $\alpha = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .  $F(0) = 0.423$ ,  $G(0) = 1.24$ ,  $H(\infty) = 1.00$

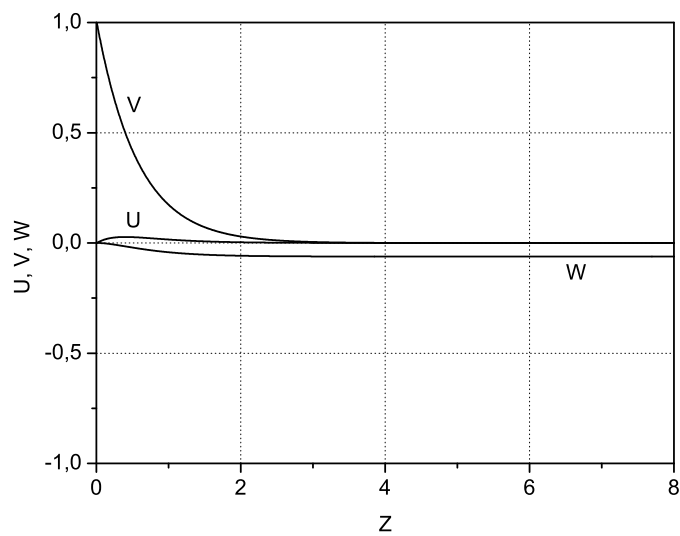


Рис. 4: Графики функций  $U, V, W$  для  $\alpha = 3, \varepsilon = 10^{-5}$ .  $W(\infty) = -0.062$

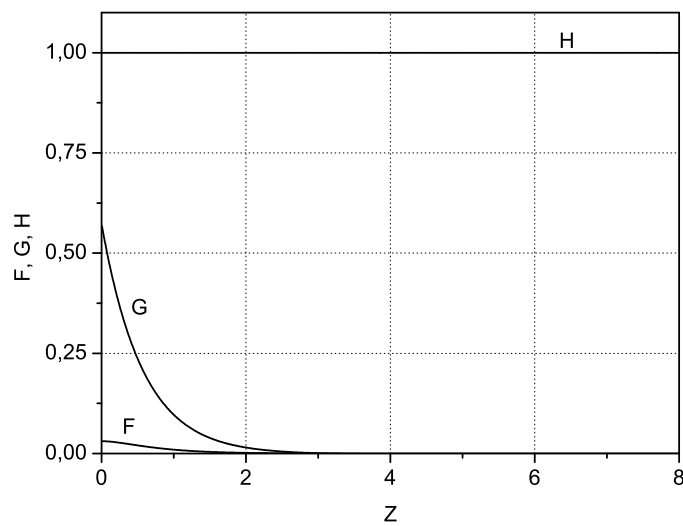


Рис. 5: Графики функций  $F, G, H$  для  $\alpha = 3, \varepsilon = 10^{-5}$ .  $F(0) = 0.031, G(0) = 0.567, H(\infty) = 1.00$

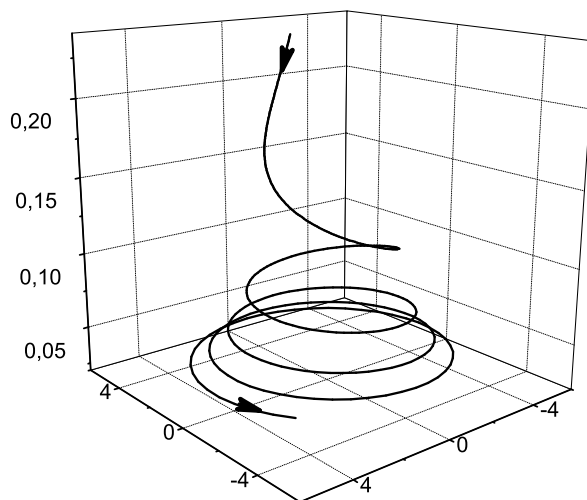


Рис. 6: Линия тока для  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\Omega = 2$  рад/сек,  $\nu = 7.1 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/сек, выходящая из точки  $x=2$  см,  $y=0$  см,  $z=0.04$  см (соответствует безразмерной координате  $Z = 2$ )

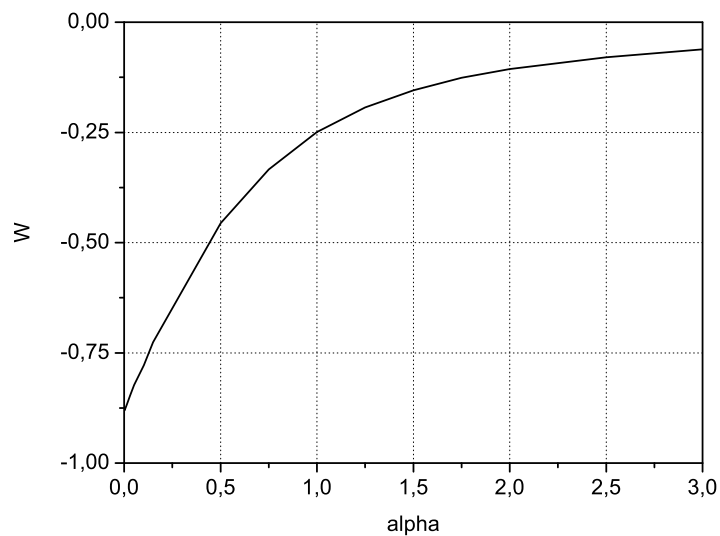


Рис. 7: Зависимость значения функции  $W$  на бесконечности от величины  $\alpha$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$



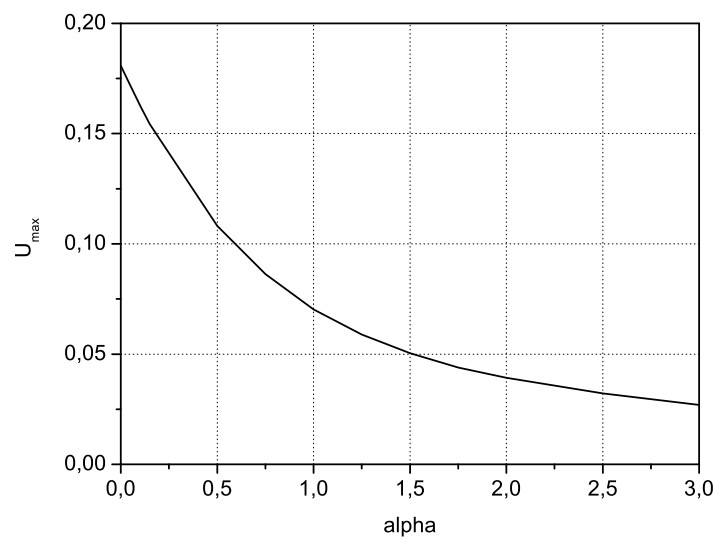


Рис. 8: Зависимость значения максимума функции  $U$  от величины  $\alpha$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$

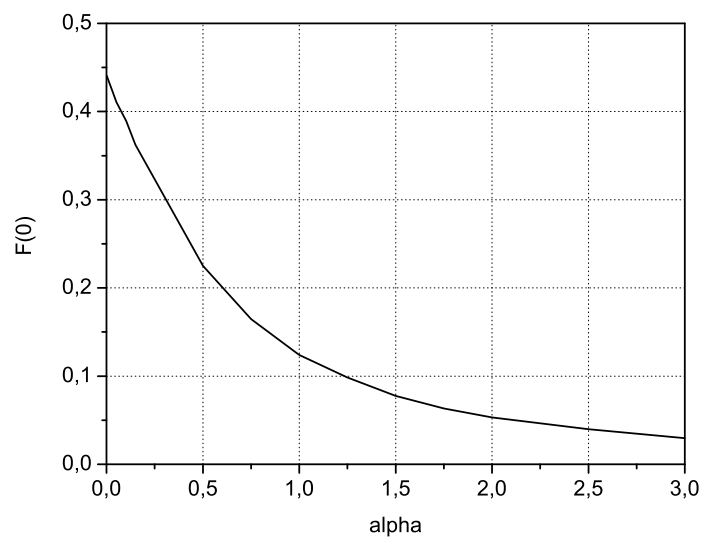


Рис. 9: Зависимость значения функции  $F$  на диске ( $Z = 0$ ) от величины  $\alpha$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$

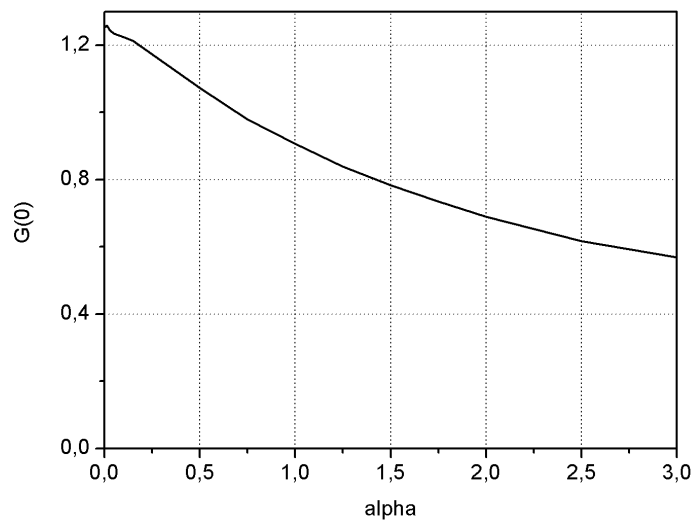


Рис. 10: Зависимость значения функции  $G$  на диске ( $Z = 0$ ) от величины  $\alpha$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$

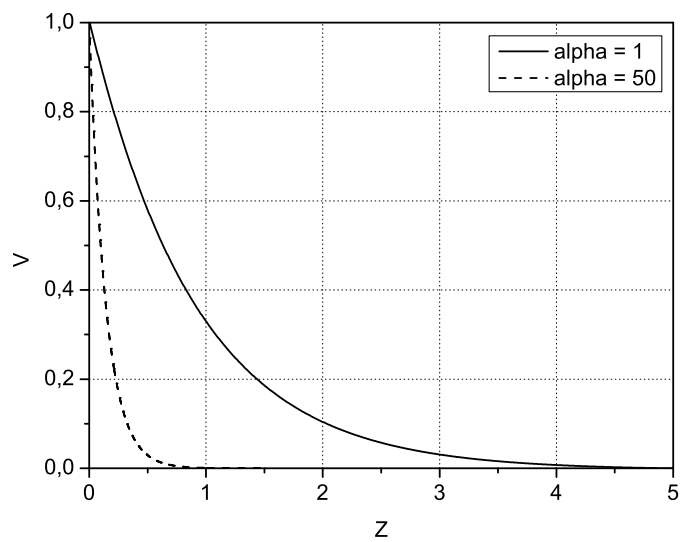


Рис. 11: Графики функций  $V$  для  $\alpha = 1$  (сплошная линия) и  $\alpha = 50$  (пунктирная линия) при  $\varepsilon = 10^{-5}$

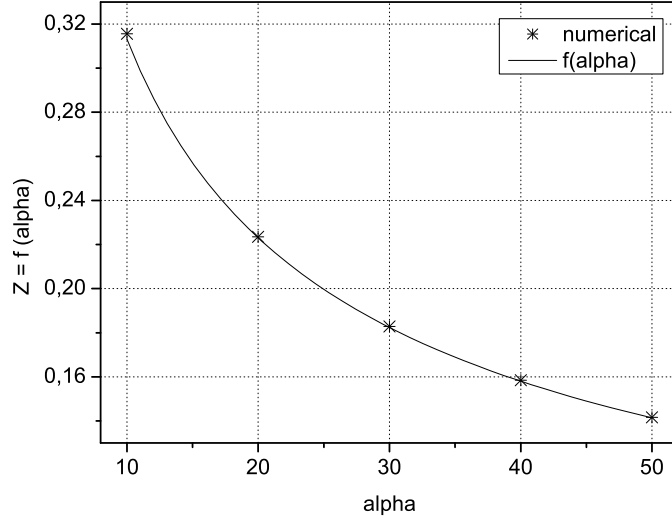


Рис. 12: Сравнение функции  $Z_{\text{хар}} = f(\alpha)$  (сплошная линия на графике) с измененными численно значениями  $Z_{\text{хар}}$  (обозначены точками) при  $\varepsilon = 10^{-5}$

На рисунке 11 показано, что при больших значениях параметра  $\alpha$  характерный масштаб  $Z_{\text{хар}}$  (в безразмерных единицах) заметно меняется. Из этого можно сделать вывод, что зависимость характерного масштаба изменения угловой скорости (расстояние, на котором угловая скорость уменьшается в  $\varepsilon$  раз) величины от  $\alpha$  такая же, как в случае течения Гартмана во вращающейся системе координат. Для течения Гартмана было (см. замену (8) на стр. 6):

$$z_0^2 = \frac{\nu}{2\Omega} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \quad (23)$$

И, если безразмерить характерную длину на величину  $\sqrt{\nu/\Omega}$ , то получится:

$$Z_{\text{хар}} = z_0 \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + 1 \right]^{-1/4} \equiv f(\alpha) \quad (24)$$

Из рис. 12 видно, что найденные численно значения безразмерной переменной  $Z_{\text{хар}}$ , лежат на кривой  $Z_{\text{хар}} = f(\alpha)$ .

#### 4.1 Трение и диссипация

Поверхностная плотность силы трения, действующей на диск со стороны вязкой жидкости, в направлении, перпендикулярном радиусу, определяется  $z\varphi$ -компонентой тензора вязких напряжений (см. [4, гл. II, §23]):

$$\sigma_{z\varphi} = \nu\rho \left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho\Omega r\sqrt{\nu\Omega} V'(0)$$

Момент вязких сил, действующий на диск радиуса  $R$  (радиус должен быть достаточно большим, чтобы можно было пренебречь эффектами от краев диска):

$$M_\nu = 2 \int_0^R r \sigma_{z\varphi} 2\pi r dr = \pi R^4 \rho \Omega \sqrt{\nu \Omega} V'(0) \quad (25)$$

Помимо силы трения, вызванной вязкостью, на диск так же действует сила со стороны магнитного поля, возникающая из-за поверхностных токов в диске, появление которых, в свою очередь, связано с разрывом вектора магнитной индукции: внутри диска присутствует только вертикальная составляющая поля, а в объеме, занимаемом жидкостью появляется ненулевая составляющая поля в плоскости диска. Сила, действующая на диск со стороны магнитного поля, определяется максвелловским тензором напряжений (его  $z\varphi$ -компонентой):

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( B_i B_k - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ik} \right)$$

$$T_{z\varphi}|_{z=0} = \frac{B_{z0} B_\varphi}{4\pi} \Big|_{z=0} = \frac{\sqrt{\nu \Omega}}{4\pi \nu_m} r B_{z0}^2 G(0).$$

К такому же выражению для силы можно прийти, если выразить поверхностный ток через разрыв тангенциальной компоненты поля и написать силу, которая действует на него со стороны поля  $B_{z0}$ .

Момент сил, действующих на поверхностные токи:

$$M_j = 2 \int_0^R r T_{z\varphi} 2\pi r dr = \frac{1}{4} R^4 \frac{\sqrt{\nu \Omega}}{\nu_m} B_{z0}^2 G(0). \quad (26)$$

Интересно посчитать отношение этих моментов:

$$\frac{M_j}{M_\nu} = \frac{B_{z0}^2}{4\pi \rho \nu_m \Omega} \frac{G(0)}{V'(0)} \equiv \alpha \frac{G(0)}{V'(0)}. \quad (27)$$

Если считать, что отношение  $G(0)/V'(0) \sim 1$ , то отношение моментов есть безразмерная величина  $\alpha$ .

Диссипация энергии в единице объема жидкости за единицу времени так же будет состоять из двух частей (если жидкость считать изотермической) - из вязкой диссипации (трение слоев жидкости между собой) и диссипации, связанной с конечной электропроводностью жидкой среды (джоулево тепло, см. [5, гл. VIII, §66]):

$$R_v = \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$$R_j = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\text{rot } \mathbf{B})^2,$$

где  $\mathbf{j}$  - объемная плотность тока,  $\sigma$  - проводимость,  $\sigma_{ik}$  - вязкий тензор напряжений:

$$\sigma_{ik} = \rho\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Выражение для вязкой диссипации с учетом несжимаемости жидкости ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ), отсутствия зависимости угла  $\varphi$  и независимости  $z$ -компоненты скорости от радиуса принимает вид:

$$R_v = \rho\nu \left( 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 4 \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) = \\ = \rho\nu \Omega^2 \left( 4U^2(Z) + \frac{r^2}{z_0^2} U'^2(Z) + \frac{r^2}{z_0^2} V'^2(Z) + 2W'^2(Z) \right) \quad (28)$$

где  $z_0 = \sqrt{\nu/\Omega}$ . Чтобы найти диссипацию за счет джоулевого тепла  $R_j$ , необходимо расписать  $\text{rot } \mathbf{B}$  в цилиндрических координатах, с учетом того, что все компоненты поля не зависят от  $\varphi$ , а  $z$ -компонента не зависит от  $r$ :

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial B_r}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z$$

Таким образом, можно написать выражения для  $R_j$  (с учетом того, что  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ ):

$$R_j = \frac{\nu_m}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{B})^2 = \frac{B_{z_0}^2}{4\pi\nu_m} \Omega (r^2 \Omega F'^2(Z) + r^2 \Omega G'^2(Z) + 4\nu G^2(Z)) = \\ = \frac{\varepsilon \Omega B_{z_0}^2}{4\pi} \left( \frac{r^2}{z_0^2} F'^2(Z) + \frac{r^2}{z_0^2} G'^2(Z) + 4G^2(Z) \right) \quad (29)$$

(в последнем выражении учтены тождества  $\Omega = \nu/z_0^2$  и  $\varepsilon = \nu/\nu_m$ ). Если считать безразмерные величины, стоящие в скобках в выражениях (28) и (29) порядка единицы, то отношения двух диссипаций будет следующим:

$$\frac{R_j}{R_v} \sim \frac{B_{z_0}^2}{4\pi\rho\nu_m\Omega} \equiv \alpha. \quad (30)$$

Следовательно, отношение диссипаций, как и отношение моментов сил, действующих на диск, пропорционально величине  $\alpha$ .

## Заключение

В ходе работы выяснено, что все функции, определяющие течение проводящей жидкости над вращающимся диском изменяются на одном характерном расстоянии, а значит в данной задаче присутствует только один пограничный слой. Так же была проведена аналогия между течением Гартмана во вращающейся системе координат ( $v_z \equiv 0$ ) и похожим течением с ненулевой  $v_z$ . Оказалось, что пограничные слои в обоих случаях одинаково зависят от исходных параметров задачи. Кроме того, исследованы сила трения, действующая на диск (в том числе и сила, действующая на поверхностные токи) и интенсивность диссипации энергии в единице объема. Найдено соотношение между силой трения за счет вязкости и силой, действующей на поверхностные токи (27). Аналогичное соотношение найдено для диссипаций (30). Таким образом, отношение энергии, диссипируемой за счет магнитной вязкости к энергии, диссипируемой за счет кинематической вязкости пропорционально параметру  $\alpha = B_{z0}^2 / 4\pi\rho\nu_m\Omega$ . При большом параметре  $\alpha$  (при большом поле и малой угловой скорости) будет преобладать диссипация за счет токов в жидкости, а при малых  $\alpha$  основную роль будет играть вязкая диссипация.

## Список литературы

- [1] Е. П. Велихов, С. В. Захаров, В. С. Захаров, А. О. Ливадный, К. С. Серебренников „Стационарное состояние при раскрутке жидкого металла радиальным током между двумя проводящими цилиндрами“, РИЦ „Курчатовский Институт“;
- [2] J. Goodman, and H. Ji, „Magnetorotational instability of dissipative Couette flow“, J. Fluid Mech. 462, 365-382 (2002);
- [3] H. Ji, J. Goodman, and A. Kageyama, „Magnetorotational Instability in a Rotating Liquid Metal Annulus“, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 325 (2001) L1;
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, „Теоретическая Физика“, том 6 – „Гидродинамика“, Физматлит, 2006г;
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, „Теоретическая Физика“, том 8 – „Электродинамика Сплошных Сред“, Физматлит, 2006г.