ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2008 г.

Брюно А.Д., Горючкина И.В.

Все разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Горючкина И.В. Все разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 75. 30 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-75

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ВСЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ВБЛИЗИ ЕГО НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

Москва, 2008 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Здесь для шестого уравнения Пенлеве при всех значениях его четырех комплексных параметров a, b, c, d вблизи его неособой точки $x = x_0 \neq 0, 1, \infty$ ищутся все асимптотические разложения решений четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные, экзотические и еще экспоненциальные асимптотики. Всего они образуют 17 семейств и все являются степенными. Разложения остальных трех типов и экспоненциальные асимптотики отсутствуют, как и должно быть для уравнения Пенлеве. Восемь из этих 17 семейств новые. Остальные 9 семейств известны.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. All expansions of solutions to the sixth Painlevé equation near its nonsingular point. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

Here we consider the sixth Painlevé equation for all values of four its complex parameters a, b, c, d near its nonsingular point $x = x_0 \neq 0, 1, \infty$ and we look for all asymptotic expansions of its solutions of four types: power, power-logarithmic, complicated, exotic and also exponential asymptotic forms. Altogether they form 17 families and all of them are power. Expansions of other three types and exponent asymptotic forms are absent, as it must be for a Painlevé equation. Eight of these 17 families are new. The other 9 families were known.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и Фонда содействия отечественной науке.

e-mail: brunoa@mail.ru, chukhareva@yandex.ru

сайт: www.keldysh.ru

1. Случай $a, b \neq 0$

§1. Общие свойства уравнения

Шестое уравнение Пенлеве [1] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) +$$
$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{1.1.1}$$

где a, b, c, d – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$.

Здесь будем исследовать асимптотические разложения решений шестого уравнение Пенлеве (1.1.1) в окрестности неособой точки $x = x_0$, $x_0 \neq 0,\ 1,\ \infty$. Для этого в уравнении (1.1.1) сделаем замену независимой переменной $x = z + x_0$, которая переводит точку $x = x_0$ в точку $z = 0$. При этом уравнение (1.1.1) принимает вид

$$y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z-x_0}\right) - y'\left(\frac{1}{z+x_0} + \frac{1}{z+x_0-1} + \right.$$
$$\left.\frac{1}{y-z-x_0}\right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{(z+x_0)^2(z+x_0-1)^2}\left[a + b\,\frac{z+x_0}{y^2} + \right. \tag{1.1.2}$$
$$\left. c\,\frac{z+x_0-1}{(y-1)^2} + d\,\frac{(z+x_0)(z+x_0-1)}{(y-z-x_0)^2}\right],$$

где $y' = dy/dz$.

При всех значениях параметров уравнения в окрестности точки $z = 0$ ищем асимптотические разложения его решений вида

$$y = c_r z^r + \sum_s c_s z^s, \quad s \in \mathbf{K} \tag{1.1.3}$$

где показатели степени r и s – комплексные числа, $\operatorname{Re} r \leq \operatorname{Re} s$, $\operatorname{Re} s$ возрастают.

Согласно [2], [3], [5] будем различать четыре типа разложений (1.1.3); в первых трех из них конечно число показателей s с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s$.

Тип 1. c_r и c_s – постоянные (*степенные разложения*);

Тип 2. c_r – постоянный, c_s – многочлены от $\ln z$ (*степенно-логарифмические разложения*);

Тип 3. c_r и c_s – степенные ряды по убывающим степеням $\ln z$ (*сложные разложения*).

Тип 4. Имеется бесконечно много показателей s с фиксированной $\operatorname{Re} s$ и на комплексной плоскости выпуклая оболочка точек r и s из (1.1.3) содержится в угле с вершиной в точке r, у которого один из граничных лучей параллелен мнимой оси и раствор угла меньше π; комплексные коэффициенты: c_r – постоянный, c_s – многочлены от $\ln z$ (*экзотические разложения*).

Мы также предполагаем, что $\arg z$ ограничен с одной стороны.

Кроме того, мы ищем экспоненциальные асимптотики решений уравнения (1.1.1), которые соответствуют горизонтальным ребрам [2, п. 5.3].

Представим уравнение (1.1.2) в виде дифференциальной суммы. Для этого домножим его на $2(z+x_0)^2(z+x_0-1)^2y(y-1)(y-z-x_0)$ и перенесем в левую сторону правую часть уравнения, раскроем скобки, сгруппируем слагаемые и получим уравнение

$$
\begin{aligned}
&f(z,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} ((1-2y)y'^2+(-2y+2y^2)y'')z^5+((3y^2+(2-10x_0)y+5x_0-\\
&2)y'^2+(-2y+2y^2)y'+(-2y^3+(-2+10x_0)y^2+(4-10x_0)y)y'')z^4+\\
&(((12x_0-6)y^2+(-20x_0^2+2+8x_0)y+1-8x_0+10x_0^2)y'^2+(-4y^3+(8x_0+\\
&2)y^2+(-8x_0+2)y)y'+((4-8x_0)y^3+(20x_0^2-8x_0-2)y^2+(16x_0-20x_0^2-\\
&2)y)y''+(2c+2b)y^2-4by+2b)z^3+(((18x_0^2-18x_0+3)y^2+(12x_0^2-20x_0^3+\\
&6x_0-2)y+10x_0^3-12x_0^2+3x_0)y'^2+((6-12x_0)y^3+(6x_0+12x_0^2-6)y^2+\\
&(6x_0-12x_0^2)y)y'+((12x_0-12x_0^2-2)y^3+(-12x_0^2-6x_0+20x_0^3+2)y^2+\\
&(-20x_0^3-6x_0+24x_0^2)y)y''+(2a+2d)y^4+(-4a-4c-4b-4d)y^3+(-2c+\\
&2a+8b+6cx_0+6bx_0+2d)y^2+(-4b-12bx_0)y+6bx_0)z^2+(((6x_0-18x_0^2+\\
&12x_0^3)y^2+(-10x_0^4+6x_0^2+8x_0^3-4x_0)y-8x_0^3+3x_0^2+5x_0^4)y'^2+((12x_0-\\
&12x_0^2-2)y^3+(2+6x_0^2-12x_0+8x_0^3)y^2+(6x_0^2-8x_0^3)y)y'+((12x_0^2-8x_0^3-\\
&4x_0)y^3+(-6x_0^2+10x_0^4-8x_0^3+4x_0)y^2+(-6x_0^2+16x_0^3-10x_0^4)y)y''-\\
&4ay^5+(4dx_0+8a+2c+4ax_0-2d+2b)y^4+(-4b+4c-8bx_0-8ax_0-\\
&4a+4d-8dx_0-8cx_0)y^3+(4dx_0+6bx_0^2+2b-4cx_0+16bx_0+4ax_0-2d+\\
&6cx_0^2)y^2+(-8bx_0-12bx_0^2)y+6bx_0^2)z+((3x_0^2-6x_0^3+3x_0^4)y^2+(-2x_0^5-\\
&2x_0^2+2x_0^3+2x_0^4)y+x_0^5+x_0^3-2x_0^4)y'^2+((6x_0^2-4x_0^3-2x_0)y^3+(2x_0^4+\\
&2x_0^3+2x_0-6x_0^2)y^2+(-2x_0^4+2x_0^3)y)y'+((4x_0^3-2x_0^4-2x_0^2)y^3+(2x_0^2-\\
&2x_0^3+2x_0^5-2x_0^4)y^2+(4x_0^4-2x_0^5-2x_0^3)y)y''+2ay^6+(-4ax_0-4a)y^5+\\
&(2cx_0+2ax_0^2+8ax_0-2c-2dx_0+2dx_0^2+2a+2bx_0)y^4+(4cx_0-4cx_0^2-\\
&4ax_0^2-4bx_0+4dx_0-4bx_0^2-4dx_0^2-4ax_0)y^3+(2bx_0-2dx_0+8bx_0^2-\\
&2cx_0^2+2ax_0^2+2bx_0^3+2dx_0^2+2cx_0^3)y^2+(-4bx_0^3-4bx_0^2)y+2bx_0^3=0.
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

При $a,\ b \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ левой части уравнения (1.1.4) и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 1.

Заметим, что носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (1.1.4) лежит в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и $\mathbf{U}_j^{(0)}$ ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и вершин Q_j изображены на рис. 2.

Нас будут интересовать только те ребра и вершины многоугольника $\Gamma(f)$, нормальные конусы которых пересекаются с полуплоскостью $p_1 \leq 0$, что соответствует $z \to 0$ ($\omega = -1$), то есть вершины Q_1 – Q_4 и ребра $\Gamma_1^{(1)}$ – $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$. Решения, соответствующие вершинам Q_1 и Q_4, отсутствуют по замечанию 1 из [2], поскольку им соответствуют алгебраические укороченные уравнения $\hat{f}_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2bx_0 = 0$ и $\hat{f}_4^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2ay^6 = 0$. Горизонтальному ребру $\Gamma_6^{(1)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение $\hat{f}_6^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2b(z+x_0)^3 = 0$, которое не содержит y и не дает подходящих решений.

Замечание 1.1. Если носитель укороченного уравнения $\hat{f}(z,\ y) = 0$ расположен на оси $q_2 = 0$, то это уравнение не содержит зависимую переменную y и не имеет решений $y(z)$, т. е. не может дать подходящих решений.

§2. Разложения, соответствующие вершинам Q_2 и Q_3

Вершине Q_2 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(0)}(z,\ y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^3(x_0-1)^2(-2y''y + y'^2) = 0. \tag{1.2.1}$$

Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_2 < 0,\ p_2 > p_1\}$. Характеристическое уравнение $x_0^3(x_0-1)^2(-r^2+2r) = 0$ имеет два корня $r_1 = 0$, $r_2 = 2$. Согласно рис. 2 векторы $P_1 = (-1,\ 0)$ и $P_2 = (-1,\ -2)$ не лежат в $\mathbf{U}_2^{(0)}$, поэтому уравнение (1.2.1) не дает степенных асимптотик. Решения уравнения (1.2.1) имеют вид $y = (C_1 z + C_2)^2$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные. Среди этих решений нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.2.1) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

Вершине Q_3 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(0)}(z,\ y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^2(x_0-1)^2y^2(-2y''y + 3y'^2) = 0. \tag{1.2.2}$$

Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > 0,\ p_2 < -p_1\}$. Характеристическое уравнение $x_0^2(x_0-1)^2(r^2+2r) = 0$ имеет два корня $r_1 = 0$, $r_2 = -2$. Согласно рис. 2 векторы $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} -(1, r_1) = (-1,\ 0)$ и $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} -(1, r_2) = (-1,\ 2)$ не лежат в вещественном нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$. Поэтому уравнение (1.2.2) не дает степенных асимптотик. Решения уравнения (1.2.2) имеют вид $y = (C_1 z + C_2)^{-2}$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные. Среди этих решений нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.2.2) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

§3. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(z,\ y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^3(x_0-1)^2\left(-2y''y + y'^2\right) + 2bx_0^3 = 0. \tag{1.3.1}$$

и вещественный нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1,-1),\ \lambda > 0\}$. Поскольку $r_1 = 1$, то ищем степенные решения уравнения (1.3.1) в виде $y = c_1 z,\ c_1 \neq 0$. Определяющее уравнение есть

$$\tilde{\tilde{f}}\ (c_1) = c_1^2 x_0^3 (x_0 - 1)^2 + 2b x_0^3 = 0,$$

откуда получаем $c_1^2 = -2b(x_0-1)^{-2}$, т. е.

$$c_{1i} = (-1)^i \frac{\sqrt{-2b}}{|x_0 - 1|},\ i = 1, 2. \tag{1.3.2}$$

Будем искать критические числа решения $y = c_1 z$. Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}(z,\, y)}{\delta y} = x_0^3 (x_0 - 1)^2 \left(-2y \frac{d^2}{dz^2} - 2y'' + 2y' \frac{d}{dz} \right).$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) = -2x_0^3 (x_0 - 1)^2 c_{1i} \left(\frac{d^2}{dz^2} z - \frac{d}{dz} \right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) = z^{-k+1} \mathcal{L}(z) z^k = -2x_0^3 (x_0 - 1)^2 c_{1i} (k - 2) k = 0$$

имеет два корня $k_1 = 0,\ k_2 = 2$. Конус задачи есть $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 1\}$. Только k_2 лежит в множестве $\mathcal{K}$, следовательно, является единственным критическим числом. Носитель разложений решений есть $\mathbf{K} = \{1 + m,\ m \in \mathbb{N}\}$. Критическое число $k_2 = 2$ лежит в множестве $\mathbf{K}$. Здесь имеем два однопараметрических семейства разложений

$$\mathcal{O}_i : y = c_{1i} z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{ki} z^k,\ i = 1, 2, \tag{1.3.3}$$

где коэффициент c_{1i} определен формулой (1.3.2), согласно п. 3.3 [2] коэффициент $c_{2i} = \alpha_{2i} + \beta_{2i} \ln z$, α_{2i} – произвольная постоянная, β_{2i} – постоянный и однозначно определенный, все остальные коэффициенты c_{ki} – многочлены от $\ln z$, которые также однозначно определены.

С помощью Maple подставляем ряд (1.3.3) в уравнение (1.1.4) и получаем, что для $k_2 = 2$ выполняется условие совместности, т. е. в разложениях (1.3.3) коэффициент $\beta_{2i} = 0$ и все остальные коэффициенты c_{ki} – постоянны и однозначно определены.

Согласно теореме 3.4 [2] ряд (1.3.3) сходится для достаточно малых $|z|$.

Уравнение (1.3.1) имеет решения вида $y = C_2 z^2 + C_1 z + \dfrac{C_1^2 (x_0 - 1)^2 + 2b}{4C_2 (x_0 - 1)^2}$ и $y = c_{1i} z + C_0$, где C_2, C_1, C_0 – произвольные постоянные, коэффициент c_{1i} – постоянный и однозначно определенный из (1.3.2). Среди этих решений нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.3.1) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

§4. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$

Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{*(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_0^2(x_0-1)^2[-2y(y^2-(x_0+1)y+x_0)y''+(3y^2-2(x_0+1)y+x_0)y'^2] = 0.$$

Но поскольку $x_0 \neq 0,\ 1$, то его можно записать в виде

$$\hat{f}_2^{(1)}(z,\ y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2y(y^2-(x_0+1)y+x_0)y''+(3y^2-2(x_0+1)y+x_0)y'^2 = 0. \quad (1.4.1)$$

Вещественный нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(-1,\ 0),\ \lambda > 0\}$. Следовательно, $r_2 = 0$ и степенные решения уравнения (1.4.1) ищем в виде $y = c_0,\ c_0 \neq 0$. Определяющее уравнение $\tilde{\tilde{f}}\,(c_0) \equiv 0$, следовательно, коэффициент c_0 – произвольный. Вычислим критические числа решения $y = c_0$.

Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_2^{(1)}(z,\ y)}{\delta y} = -2x_0 y\frac{d^2}{dz^2} - 2x_0 y'' + 2x_0 y'\frac{d}{dz} + 2(x_0+1)\frac{d^2}{dz^2}y^2 + 4(x_0+1)y''y -$$

$$-2(x_0+1)2y'y\frac{d}{dz} - 2(x_0+1)y'^2 - 2\frac{d^2}{dz^2}y^3 - 6y''y^2 + 6y'y^2\frac{d}{dz} + 6y'^2y.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) = -2c_0(c_0-x_0)(c_0-1)\frac{d^2}{dz^2}. \quad (1.4.2)$$

При $c_0 = x_0$ и при $c_0 = 1$ имеем $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Эти случаи надо исследовать отдельно.

4.1. Общий случай. Характеристическое уравнение оператора (1.4.2)

$$\nu(k) = -2c_0(c_0-x_0)(c_0-1)k(k-1) = 0 \quad (1.4.3)$$

при $c_0 \neq x_0$ и $c_0 \neq 1$ имеет два корня $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Конус задачи есть $\mathcal{K} = \{\mathrm{Re}\,k > 0\}$. Только k_2 лежит в конусе задачи $\mathcal{K}$, т. е. является единственным критическим числом. Носитель разложения решений есть $\mathbf{K} = \mathbb{N}$. Критическое число $k_2 = 1$ лежит в множестве $\mathbf{K}$. Поэтому здесь имеем двупараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{O}_3: \quad y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad (1.4.4)$$

где комплексные коэффициенты: $c_0 \neq 0,\ x_0,\ 1$, c_0 – произвольная постоянная, $c_1 = \alpha_1 + \beta_1 z$, α_1 – произвольная постоянная, β_1 – постоянный и однозначно определенный, все остальные c_k – многочлены от $\ln z$, которые однозначно определены. С помощью Maple подставляем ряд (1.4.4) в уравнение (1.1.4) и получаем, что коэффицент c_1 – произвольная постоянная, поскольку $\beta_1 = 0$, и все остальные c_k – постоянны и однозначно определены.

Согласно теореме 3.4 [2] ряд (1.4.4) сходится для достаточно малых $|z|$.

Первый интеграл уравнения (1.4.1) есть

$$y'^2 = C_0 y(y-1)(y-x_0), \tag{1.4.5}$$

где C_0 – произвольная постоянная. Уравнение (1.4.5) эллиптического типа. Все его решения $y = \varphi(z,\, C_0,\, x_0)$ при $z \to 0$ представляются в виде рядов по целым степеням z. Среди них нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.4.5) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

На самом деле, решения (1.4.4) при $c_0 \neq 0,\, x_0,\, 1$ можно получить из теоремы Коши [8, § 5], примененной к уравнению (1.1.2).

4.2. Случай $\mathbf{c_0 = x_0}$. Здесь линейный дифференциальный оператор, определенный формулой (1.4.2), $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Чтобы вычислить разложения решений уравнения (1.1.2) с первым членом $y = x_0$, сделаем в уравнении (1.1.4) замену зависимой переменной $y = x_0 + u$, которая переводит точку $y = x_0$ в точку $u = 0$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned}
g(z,\ u) &\stackrel{\text{def}}{=} (2u''u^2 + ((4x_0-2)u'' - 2u'^2)u + (-2x_0+2x_0^2)u'' + (1-\\
&2x_0)u'^2)z^5 + (-2u''u^3 + ((4x_0-2)u'' + 2u' + 3u'^2)u^2 + ((4+14x_0^2-\\
&14x_0)u'' + (2-4x_0)u'^2 + (4x_0-2)u')u + (-12x_0^2+8x_0^3+4x_0)u'' + (-7x_0^2-\\
&2+7x_0)u'^2 + (-2x_0+2x_0^2)u')z^4 + (((4-8x_0)u''-4u')u^3 + ((-2+4x_0-\\
&4x_0^2)u'' + (12x_0-6)u'^2 + (2-4x_0)u' + 2b + 2c)u^2 + ((12x_0+16x_0^3-\\
&2-24x_0^2)u'' + (-4x_0+4x_0^2+2)u'^2 + (-4x_0+4x_0^2+2)u' + 4cx_0 - 4b+\\
&4x_0b)u + (-2x_0+12x_0^4-24x_0^3+14x_0^2)u'' + (12x_0^2-8x_0^3+1-6x_0)u'^2+\\
&(4x_0^3+2x_0-6x_0^2)u' + 2b - 4x_0b + 2cx_0^2 + 2x_0^2b)z^3 + ((2d+2a)u^4 + ((12x_0-\\
&12x_0^2-2)u'' + (6-12x_0)u' - 4a - 4c + 8x_0d + 8x_0a - 4b - 4d)u^3 + ((24x_0^2-\\
&16x_0^3 + 2 - 12x_0)u'' + (18x_0^2 - 18x_0 + 3)u'^2 + (-24x_0^2 + 24x_0 - 6)u'+\\
&2d - 12x_0a - 6cx_0 - 12x_0d + 2a + 12x_0^2d + 8b + 12x_0^2a - 2c - 6x_0b)u^2+\\
&((6x_0^2 - 8x_0^3 - 2x_0 + 4x_0^4)u'' + (12x_0 + 16x_0^3 - 2 - 24x_0^2)u'^2 + (-6x_0-\\
&12x_0^3 + 18x_0^2)u' - 12x_0^2d + 4x_0a + 8x_0^3d - 12x_0^2a + 8x_0^3a + 4x_0b - 4cx_0-\\
&4b + 4x_0d)u + (8x_0^5 + 16x_0^3 - 20x_0^4 - 4x_0^2)u'' + (4x_0^3 + x_0 - 3x_0^2 - 2x_0^4)u'^2-\\
&2cx_0^2 - 4x_0^2b + 2cx_0^3 + 2bx_0^3 + 2x_0^4d - 4x_0^3d - 4x_0^3a + 2x_0^2a + 2x_0^4a + 2x_0^2d+\\
&2x_0b)z^2 + (-4u^5a + (4x_0d - 2d + 8a - 16x_0a + 2b + 2c)u^4 + ((-8x_0^3+\\
&12x_0^2 - 4x_0)u'' + (12x_0 - 12x_0^2 - 2)u' - 16x_0d + 4c - 4b + 24x_0a + 16x_0^2d-\\
&4a - 24x_0^2a + 4d)u^3 + ((-18x_0^2 + 28x_0^3 + 4x_0 - 14x_0^4)u'' + (-18x_0^2 + 12x_0^3+\\
&6x_0)u'^2 + (-28x_0^3 - 18x_0 + 42x_0^2 + 2)u' + 2b + 24x_0^2a - 2d + 4x_0b - 16x_0^3a-\\
&6cx_0^2 - 6x_0^2b - 36x_0^2d - 8x_0a + 16x_0d + 24x_0^3d + 8cx_0)u^2 + ((-4x_0^5 + 2x_0^2+\\
&10x_0^4 - 8x_0^3)u'' + (18x_0^2 + 14x_0^4 - 4x_0 - 28x_0^3)u'^2 + (-20x_0^4 - 24x_0^2 + 4x_0+
\end{aligned}$$

$$40x_0^3)u' + 8x_0^3a - 4bx_0^3 - 32x_0^3d - 4x_0d - 4x_0b - 4x_0^2a + 8x_0^2b - 4cx_0^3 + 20x_0^2d - 4x_0^4a + 16x_0^4d + 4cx_0^2)u + (-6x_0^5 - 2x_0^3 + 2x_0^6 + 6x_0^4)u'' + (-5x_0^4 + 4x_0^3 - x_0^2 + 2x_0^5)u'^2 + (-4x_0^5 + 2x_0^2 + 10x_0^4 - 8x_0^3)u' + 4x_0^5d - 10x_0^4d + 8x_0^3d - 2x_0^2d)z + 2u^6a + (-4a + 8x_0a)u^5 + (2x_0^2d + 2cx_0 - 2x_0d + 2x_0b + 12x_0^2a - 12x_0a + 2a - 2c)u^4 + ((-2x_0^2 + 4x_0^3 - 2x_0^4)u'' + (-2x_0 - 4x_0^3 + 6x_0^2)u' + 8x_0^3d - 4x_0b - 12x_0^2d + 4x_0^2b - 12x_0^2a + 8x_0^3a + 4x_0d + 4cx_0^2 + 4x_0a - 4cx_0)u^3 + ((-4x_0^5 + 2x_0^2 + 10x_0^4 - 8x_0^3)u'' + (3x_0^2 + 3x_0^4 - 6x_0^3)u'^2 + (-12x_0^2 + 2x_0 + 20x_0^3 - 10x_0^4)u' + 14x_0^2d + 2cx_0^3 + 2x_0b - 4x_0^3a + 12x_0^4d - 24x_0^3d - 4x_0^2b + 2x_0^4a - 2x_0d + 2x_0^2a + 2bx_0^3 - 2cx_0^2)u^2 + ((-2x_0^6 + 6x_0^5 - 6x_0^4 + 2x_0^3)u'' + (-10x_0^4 + 4x_0^5 - 2x_0^2 + 8x_0^3)u'^2 + (4x_0^2 + 20x_0^4 - 16x_0^3 - 8x_0^5)u' + 16x_0^3d - 4x_0^2d + 8x_0^5d - 20x_0^4d)u + (x_0^6 - 3x_0^5 + 3x_0^4 - x_0^3)u'^2 + (-2x_0^6 + 6x_0^5 - 6x_0^4 + 2x_0^3)u' - 6x_0^5d + 2x_0^6d + 6x_0^4d - 2x_0^3d = 0. \tag{1.4.6}$$

Ищем его решения при $z \to 0$ и $u \to 0$, a, $b \neq 0$, $x_0 \neq 1$, 0.

Носители левой части уравнения (1.4.6) и их выпуклые оболочки при разных значениях параметров изображены на рис. 3. При этом на границе $\partial\Gamma$ встретятся разные ребра, показанные на рис. 3 и имеющие нормальные конусы натянутые на векторы $-(1,\,1)$, или $-(1,\,3)$, или $-(1,\,4)$, или $-(0,\,1)$ и показанные на рис. 4. В дальнейшем нам потребуются суммы g_Q, соответствующие некоторым точкам Q. Они суть

$$\begin{aligned}
&g_{(-2,\,2)} = x_0^3(x_0-1)^3(u'^2 - 2u''u),\\
&g_{(-1,\,1)} = x_0^3(x_0-1)^3(-u' + zu''),\\
&g_{(0,\,0)} = 2dx_0^3(x_0-1)^3,\\
&g_{(1,\,0)} = 2dx_0^2(2x_0-1)(x_0-1)^2z,\\
&g_{(2,\,0)} = 2(x_0-1)x_0((a+d)x_0^2 + (c+b-a-d)x_0 - b)z^2,\\
&g_{(3,\,0)} = 2((b+c)x_0^2 - 2bx_0 + b)z^3.
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Нас интересуют только те ребра и вершины, вещественные нормальные конусы которых пересекаются с конусом задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0,\ p_2 < 0\}$.

Отметим, что всегда $g_{(-2,\,2)} \not\equiv 0$ и $g_{(-1,\,1)} \not\equiv 0$, но

$$g_{(0,\,0)} \not\equiv 0 \text{ при } d \neq 0;$$

$$g_{(0,\,0)} \equiv g_{(1,\,0)} \equiv 0 \text{ и } g_{(2,\,0)} \not\equiv 0 \text{ при } d = 0 \text{ и } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} ax_0^2 + (b+c-a)x_0 - b \neq 0;$$

$$g_{(0,\,0)} \equiv g_{(1,\,0)} \equiv g_{(2,\,0)} \equiv 0 \text{ и } g_{(3,\,0)} \not\equiv 0 \text{ при } d = \alpha = 0 \text{ и}$$
$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} (b+c)x_0^2 - 2bx_0 + b \neq 0;$$

$$g_{(0,\,0)} \equiv g_{(1,\,0)} \equiv g_{(2,\,0)} \equiv g_{(3,\,0)} \equiv 0 \text{ при } d = \alpha = \beta = 0.$$

Носитель уравнения (1.4.6) всегда содержит точки $(-2,\,2)$ и $(-1,\,1)$. При $d \neq 0$ он содержит точку $(0,\,0)$ и интересующая нас часть границы многоугольника состоит из вершины $(-2,\,2)$ и ребра, связывающего вершины $(-2,\,2)$ и $(0,\,0)$. При $d=0$ и $\alpha\neq 0$ носитель не содержит точки $(0,\,0)$ и $(1,\,0)$, но содержит точку $(2,\,0)$. Поэтому нужная часть $\partial\Gamma$ состоит из вершин $(-2,\,2)$, $(-1,\,1)$ и ребер, соединяющих пары точек $(-2,\,2)$, $(-1,\,1)$ и $(-1,\,1)$, $(2,\,0)$. Если же $d=\alpha=0$, но $\beta\neq 0$, то последнее ребро заменяется ребром, соединяющим точки $(-1,\,1)$ и $(3,\,0)$. Наконец, если $d=\alpha=\beta=0$, то последнее ребро заменяется горизонтальным ребром с $q_2=1$. Итого получаем 4 разных случая. Рассмотрим их последовательно. Согласно замечанию 1.1 укорочения, носители которых лежат на оси $q_2=0$, не рассматриваем.

Вершине $Q_2=(-2,\,2)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_2^{*(0)}(z,\,u)\stackrel{\mathrm{def}}{=}x_0^3(x_0-1)^3(u'^2-2u''u)=0,$$

аналогичное уравнению (1.2.1). Поскольку $x_0\neq 0,\ 1$, то это уравнение можно переписать в виде

$$\hat{g}_2^{(0)}(z,\,u)\stackrel{\mathrm{def}}{=}u'^2-2u''u=0. \tag{1.4.8}$$

Его характеристическое уравнение

$$\chi(r)=-r(r-2)=0 \tag{1.4.9}$$

имеет два корня $r_1=0$, $r_2=2$. Векторы $P_1=(-1,\,0), P_2=(-1,\,-2)$ не лежат в вещественном нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}=\{p_1<0,\,p_2>p_1\}$, следовательно, подходящих степенных решений у уравнения (1.4.8) нет. Уравнение (1.4.8) аналогично уравнению (1.2.1). Поэтому у него отсутствуют нестепенные и экзотические решения.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{*(1)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}x_0^3(x_0-1)^3(u'^2-2u''u-2u'+2u''z+2d)=0.$$

Так как $x_0\neq 0,\ 1$, то его можно переписать в виде

$$\hat{g}_1^{(1)}(z,\ u)\stackrel{\mathrm{def}}{=}u'^2-2u''u-2u'+2u''z+2d=0. \tag{1.4.10}$$

Согласно вещественному нормальному конусу $\mathbf{U}_1^{(1)}=\{\lambda(-1,\,-1),\ \lambda>0\}$, показатель степени $r_1=1$, поэтому степенные решения уравнения (1.4.10) ищем в виде $u=c_1z$. Определяющее уравнение есть

$$c_1^2-2c_1+2d=0. \tag{1.4.11}$$

Уравнение (1.4.11) второй степени. Здесь нужно рассматреть три случая. В первом случае ($d\neq 0$ и $d\neq 1/2$) уравнение (1.4.11) имеет два разных корня

$$c_{1i}=1+(-1)^i\sqrt{1-2d},\ i=1,2. \tag{1.4.12}$$

Во втором случае ($d = 0$) уравнение (1.4.11) имеет один нулевой корень $c_{11} = 0$ и один ненулевой $c_{12} = 2$. А в третьем случае $d = 1/2$ уравнение (1.4.11) имеет один двукратный корень $c_1 = 1$, и линейный дифференциальный оператор уравнения (1.4.10), вычисленный на решении $u = c_1 z$, обращается в тождественный нуль.

Первый случай $d \neq 0$ и $d \neq 1/2$. Первая вариация для (1.4.10) есть

$$\frac{\delta \hat{g}_1^{(1)}(z,u)}{\delta u} = 2u'\frac{d}{dz} - 2\frac{d^2}{dz^2}u - 2u'' - 2\frac{d}{dz}. \tag{1.4.13}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) = \frac{\delta \hat{g}_1^{(1)}(z, c_{1i}z)}{\delta u} = 2c_{1i}\frac{d}{dz} - 2c_{1i}z\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{d}{dz} + 2\frac{d^2}{dz^2}z \tag{1.4.14}$$

Характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2(c_{1i}-1)(k-(k-1)k) = 0$ при $c_{1i} \neq 1$, то есть $d \neq 1/2$, имеет два корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$. Поскольку конус задачи есть $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 1\}$, то k_2 – единственное критическое число. Носитель разложений решений есть $\mathbf{K} = \{1 + m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

Проверим выполняется ли условие совместности при $k = 2$. Это можно проверить и без помощи компьютера. Для этого выпишем второе приближение уравнения (1.4.6), соответствующее ребру $\Gamma_1^{(1)}$, то есть

$$\hat{g}_1^{(1)}(z,\ u) + \hat{\hat{g}}_1^{(1)}(z,\ u) = 0,$$

где $\hat{g}_1^{(1)}(z,\ u)$ определяется в формуле (1.4.10), а

$$\begin{gathered}\hat{\hat{g}}_1^{(1)}(z,\ u) = (8x_0^5 + 16x_0^3 - 20x_0^4 - 4x_0^2)u''z^2 + (-4x_0^5 + 2x_0^2 + 10x_0^4 - \\ 8x_0^3)u''uz + (-5x_0^4 + 4x_0^3 - x_0^2 + 2x_0^5)u'^2 z + (-4x_0^5 + 2x_0^2 + 10x_0^4 - 8x_0^3)u'z \\ +(4x_0^5 d - 10x_0^4 d + 8x_0^3 d - 2x_0^2 d)z + (-4x_0^5 + 2x_0^2 + 10x_0^4 - 8x_0^3)u''u^2 + \\ (-10x_0^4 + 4x_0^5 - 2x_0^2 + 8x_0^3)u'^2 u + (4x_0^2 + 20x_0^4 - 16x_0^3 - 8x_0^5)u'u + \\ (16x_0^3 d - 4x_0^2 d + 8x_0^5 d - 20x_0^4 d)u. \end{gathered} \tag{1.4.15}$$

Коэффициент θ_2 в формуле (3.6) [2] это коэффициент при z в выражении $\hat{\hat{g}}(z,\ c_{1i}z)$. Подставив $u = c_{1i}z$ в выражение (1.4.15) и выписав коэффициенты при z, получаем $\theta_2 = 0$. То есть условие совместности выполнено. Поэтому разложения решений имеют вид

$$\mathcal{O}_{3+i}: \quad u = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{ki}z^k,\ i = 1, 2,\ y = x_0 + u, \tag{1.4.16}$$

где комплексные коэффициенты: c_{1i} определен формулой (1.4.12), c_{2i} – произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_{ki} постоянны и однозначно определены.

По теореме 3.4 [2] ряд (1.4.16) сходится для достаточно малых $|z|$.

Уравнение (1.4.10) имеет решения вида $u = C_2 z^2 + C_1 z + \dfrac{C_1^2 - 2C_1 + 2d}{4C_2}$ и $u = c_{1i} z + C_0$, где C_2, C_1, C_0 – произвольные постоянные, c_{1i} – постоянный и однозначно определенный из (1.4.12). Среди них нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.4.10) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

В т о р о й с л у ч а й $d = 0$, $\alpha \neq 0$. В этом случае интересующий нас участок границы $\partial\Gamma$ состоит из ребра $[(-2,\, 2),\, (-1,\, 1)]$, вершины $(-1,\, 1)$ и ребра $[(-1,\, 1),\, (2,\, 0)]$. Ребру $[(-2,\, 2),\, (-1,\, 1)]$ соответствует укороченное уравнение (1.4.10) с $d = 0$. Соответствующее определяющее уравнение (1.4.11) имеет единственный ненулевой корень $c_1 = 2$, которому соответствует разложение (1.4.16) с $i = 2$ и $c_{12} = 2$. Следовательно, семейство $\mathcal{O}_5$ определено и для $d = 0$.

Вершине $Q_1^* = (-1,\, 1)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(0)*} \stackrel{\text{def}}{=} -2x_0^3(x_0 - 1)^3(-u''z + u') = 0.$$

Поскольку $x_0 \neq 0,\, 1$, то его можно записать в виде

$$\hat{g}_1^{(0)}(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} -u''z + u' = 0. \tag{1.4.17}$$

Характеристическое уравнение

$$\chi(r) = r(2 - r) = 0. \tag{1.4.18}$$

имеет два корня $r_1 = 0$, $r_2 = 2$. Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_2 < p_1, p_2 > 3p_1\}$. Вектор $P_1 = (-1,\, 0)$ не лежит в $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $P_2 = (-1,\, -2)$ лежит в $\mathbf{U}_2^{(0)}$. Таким образом, имеем семейство степенных асимптотик

$$u = c_2 z^2, \tag{1.4.19}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная. Поскольку уравнение (1.4.17) линейное и имеет вид $\mathcal{L}(z)u = 0$, то характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} z^{-k-v}\mathcal{L}(z)z^k = 0$ совпадает с уравнением (1.4.18). Следовательно, критических чисел нет. Согласно п. 3.2 [2] носитель разложения решений имеет вид

$$\mathbf{K} = \{s = 2 + m,\ m \in \mathbb{N}\}\,. \tag{1.4.20}$$

Решению (1.4.19) укороченного уравнения (1.4.17) при $d = 0$ соответствуют разложения решений полного уравнения (1.4.6)

$$\mathcal{O}_6: \quad u = c_2 z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k, \; y = x_0 + u, \tag{1.4.21}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Уравнение (1.4.17) не дает нестепенных или экзотических асимптотик. Это легко проверить проинтегрировав это уравнение в явном виде: $u = C_1 z^2 + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Ребру $\Gamma_7^{(1)} = [(-1,\, 1),\, (2,\, 0)]$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_7^{*(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2x_0^3(x_0-1)^3(-u' + u''z) + 2x_0(x_0-1)[ax_0^2 + (c+b-a)x_0 - b]z^2 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\hat{g}_7^{(1)}(z,u) \stackrel{\text{def}}{=} -2x_0^2(x_0-1)^2(u''z - u') + 2z^2(ax_0^2 + (c+b-a)x_0 - b) = 0. \tag{1.4.22}$$

Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_7^{(1)} = \{\lambda(-1,-3),\, \lambda > 0\}$. Поэтому ищем решения в виде $u = c_3 z^3$, $c_3 \neq 0$. Определяющее уравнение

$$-6x_0^2(x_0-1)^2 c_3 + 2(ax_0^2 + (c+b-a)x_0 - b) = 0$$

имеет корень

$$c_3 = \frac{ax_0^2 + (c+b-a)x_0 - b}{3x_0^2(x_0-1)^2}. \tag{1.4.23}$$

Из линейности уравнения (1.4.22) следует, что характеристическое уравнение совпадает с (1.4.18), т. е. критических чисел нет. Носитель разложений решений имеет вид $\mathbf{K} = \{s = 3 + m,\; m \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, при $d = 0, \alpha \neq 0$ имеем отдельное разложение

$$\mathcal{O}_7: \quad u = c_3 z^3 + \sum_{k=4}^{\infty} c_k z^k, y = x_0 + u, \tag{1.4.24}$$

где коэффицент c_3 определен формулой (1.4.23), все остальные комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Линейное уравнение (1.4.22) интегрируется в явном виде: $u = C_1 z^2 + C_2 + c_3 z^3$, где $C_1,\, C_2$ – произвольные постоянные, c_3 – однозначно определенная постоянная из (1.4.23), т. е. оно имеет только степенные решения.

Положение вершин $Q_1^* = (-1,\, 1)$ и $Q_2 = (-2,\, 2)$ не зависит от параметров a, b, c, поскольку соответствующие им укороченные уравнения (1.4.17) и (1.4.8) не содержат этих параметров.

Заметим, что при $x_0 \neq 0, 1$ система уравнений $\alpha = \beta = 0$ после исключения x_0 эквивалентна уравнению

$$(a + b + c)^2 = 4ac. \tag{1.4.25}$$

Третий случай $d = \alpha = 0,\ \beta \neq 0$. В этом случае у $\partial\Gamma$ сохраняются ребро $[(-2, 2), (-1, 1)]$ и вершина $(-1, 1)$ вместе с соответствующими им разложениями (1.4.16) с $i = 2,\ c_{12} = 2$ и (1.4.21), и имеется новое ребро $[(-1, 1), (3, 0)]$.

Ребру $\Gamma_6^{(1)} = [(-1, 1), (3, 0)]$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_6^{(1)}(z, u) \overset{\mathrm{def}}{=} 2x_0^3(x_0 - 1)^3(-u' + u''z) + 2[(b + c)x_0^2 - 2bx_0 + b]z^3 = 0. \tag{1.4.26}$$

Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_6^{(1)} = \{\lambda(-1, -4),\ \lambda > 0\}$. Поэтому ищем решения в виде $u = c_4 z^4$, $c_4 \neq 0$. Определяющее уравнение

$$16x_0^3(x_0 - 1)^3 c_4 + 2cx_0^2 + 2b(x_0 - 1)^2 = 0 \tag{1.4.27}$$

имеет решение

$$c_4 = -\frac{1}{8}\,\frac{cx_0^2 + b(x_0 - 1)^2}{x_0^3(x_0 - 1)^3}. \tag{1.4.28}$$

Поскольку уравнение (1.4.26) линейное, то его характеристическое уравнение совпадает с (1.4.18), т. е. критических чисел нет. Носитель разложений решений есть $\mathbf{K} = \{4 + k, k \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, получаем отдельное степенное разложение

$$\mathcal{O}_8:\ u = c_4 z^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_k z^k,\ y = x_0 + u, \tag{1.4.29}$$

где коэффицент c_4 определен формулой (1.4.28), все остальные комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Линейное уравнение (1.4.26) имеет решения вида $u = C_1 z^2 + C_2 + c_4 z^4$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, c_4 – однозначно определенная постоянная из (1.4.28), т. е. оно дает только степенные асимптотики.

Четвертый случай $d = \alpha = \beta = 0$, т. е. $d = \alpha = 0$ и $(a + b + c)^2 = 4ac$. Граница $\partial\Gamma$ имеет новое горизонтальное ребро высоты $q_2 = 1$ с укороченным уравнением

$$2x_0(x_0 - 1)(z + x_0)(z - 1 + x_0)[(z^2 - x_0^2 + x_0)u' + z(z + x_0)(z - 1 + x_0)u''] +$$

$$4(b(x_0 - 1) + cx_0)z^3 u + 8(x_0 - 1)(ax_0^2 + b)z^2 u = 0. \tag{1.4.30}$$

Оно соединяет вершины $(-1, 1)$, с укороченным уравнением (1.4.17), и (3, 1), с укороченным уравнением

$$2x_0(x_0-1)z^4(u''z+u')+4(b(x_0-1)+cx_0)z^3u=0.$$

Суммарный порядок дифференцирования каждого из этих трех уравнений равен двум. Согласно п. 5.3 [2] это ребро не дает нестепенных асимптотик.

Левой вершине $(-1, 1)$ соответствует укороченное уравнение (1.4.17), характеристическое уравнение которого не имеет корней с ненулевой мнимой частью. Согласно замечанию в [5] укороченное уравнение (1.4.30) не имеет экзотических решений, соответствующих конусу задачи.

Здесь уравнение (1.4.6) имеет решение $u=0$, т. е.

$$\mathcal{O}_9: \; y = x_0. \tag{1.4.31}$$

Случай $d=1/2$. В этом случае уравнение (1.4.11) имеет кратный корень $c_1 = 1$. При этом линейный дифференциальный оператор (1.4.14) обращается в тождественный нуль. Сделаем замену зависимой переменной $u = z + w$ в уравнении (1.4.6), для того чтобы получить асимптотические разложения решений с первым членом $u = z$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&e(z,\,w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-2w''w+w'^2)z^6+((-3+6x_0+4w)w'^2+(-4w^2+(6-\\
&12x_0)w)w'')z^5+((3w^2+(20x_0-10)w+3+15x_0^2-15x_0)w'^2-4w'w^2+\\
&(-2w^3+(10-20x_0)w^2+(-6-30x_0^2+30x_0)w)w''+(-1+2a)w^2)z^4+\\
&(((12x_0-6)w^2+(-40x_0+40x_0^2+8)w+20x_0^3-30x_0^2-1+12x_0)w'^2+\\
&(-4w^3+(8-16x_0)w^2)w'+((4-8x_0)w^3+(40x_0-8-40x_0^2)w^2+\\
&(-24x_0-40x_0^3+60x_0^2+2)w)w''+8w^3a+(2c-4a+2b-4x_0+\\
&2+8ax_0)w^2)z^3+(((-18x_0+18x_0^2+3)w^2+(-60x_0^2+24x_0-2+\\
&40x_0^3)w+18x_0^2+15x_0^4-3x_0-30x_0^3)w'^2+((6-12x_0)w^3+(-6-\\
&24x_0^2+24x_0)w^2)w'+((12x_0-12x_0^2-2)w^3+(-24x_0-40x_0^3+60x_0^2+\\
&2)w^2+(6x_0+60x_0^3-36x_0^2-30x_0^4)w)w''+(1+12a)w^4+(-12a+\\
&24ax_0+4b+4c)w^3+(-2c+6bx_0-4b+6cx_0+2a+12ax_0^2-12ax_0-\\
&2-6x_0^2+6x_0)w^2)z^2+(((-18x_0^2+6x_0+12x_0^3)w^2+(24x_0^2-40x_0^3+\\
&20x_0^4-4x_0)w-15x_0^4-3x_0^2+12x_0^3+6x_0^5)w'^2+((12x_0-12x_0^2-2)w^3+\\
&(-16x_0^3+2+24x_0^2-12x_0)w^2)w'+((-4x_0-8x_0^3+12x_0^2)w^3+(4x_0+\\
&40x_0^3-20x_0^4-24x_0^2)w^2+(-24x_0^3+30x_0^4+6x_0^2-12x_0^5)w)w''+8aw^5+\\
&(-12a+2c+2b+2x_0-1+24ax_0)w^4+(8bx_0+4a-4b+24ax_0^2+\\
&8cx_0-4c-24ax_0)w^3+(6bx_0^2+8ax_0^3-4cx_0+6cx_0^2-8bx_0-4x_0+\\
&4ax_0-4x_0^3+1-12ax_0^2+6x_0^2+2b)w^2)z+((3x_0^2-6x_0^3+3x_0^4)w^2+\\
&(-2x_0^2+8x_0^3+4x_0^5-10x_0^4)w-x_0^3+x_0^6+3x_0^4-3x_0^5)w'^2+((6x_0^2-2x_0-\\
&4x_0^3)w^3+(8x_0^3+2x_0-6x_0^2-4x_0^4)w^2)w'+((-2x_0^2+4x_0^3-2x_0^4)w^3+\\
&(10x_0^4+2x_0^2-8x_0^3-4x_0^5)w^2+(-6x_0^4+6x_0^5-2x_0^6+2x_0^3)w)w''+2aw^6+\\
&(8ax_0-4a)w^5+(2bx_0+12ax_0^2+2cx_0-12ax_0-x_0+x_0^2+2a-2c)w^4+
\end{aligned}$$

$$(4bx_0^2+4ax_0-4bx_0+4cx_0^2+8ax_0^3-12ax_0^2-4cx_0)w^3+(-2cx_0^2-4ax_0^3+ 2ax_0^2+x_0+2ax_0^4-4bx_0^2-x_0^4+2cx_0^3+2x_0^3+2bx_0^3+2bx_0-2x_0^2)w^2=0. \tag{1.4.32}$$

Носитель левой части уравнения $\mathbf{S}(e)$ и его выпуклая оболочка изображены на рис. 5. Вещественные нормальные конусы изображены на рис. 6. Нас интересуют только те обобщенные грани, вещественные нормальные конусы которых пересекаются с конусом задачи $\mathcal{K}=\{p_1\leq 0,\, p_2<p_1\}$, то есть вершина Q_2 и ребро $\Gamma_1^{(1)}$.

Вершине $Q_2=(-2,\,2)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{e}_2^{(0)}(z,w)\stackrel{\text{def}}{=}x_0^3(x_0-1)^3(-2w''w+w'^2)=0, \tag{1.4.33}$$

аналогичное уравнению (1.2.1). Вещественный нормальный конус есть $\mathbf{U}_2^{(0)}=\{p_1<0,\, p_2<0\}$. Уравнение (1.4.33) эквивалентно уравнению (1.4.8). Его характеристическое уравнение $\chi(r)=r(2-r)=0$ имеет два корня $r_1=0,\, r_2=2$. Вектор $P_1=(-1,\,0)$ не лежит в $\mathbf{U}_2^{(0)}$, а вектор $P_2=(-1,\,-2)$ лежит в вещественном нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}\bigcap\mathcal{K}$, следовательно, имеем семейство асимптотик

$$w=c_2z^2, \tag{1.4.34}$$

где $c_2\neq 0$ – произвольная комплексная постоянная. Вычислим критические числа этого решения. Первая вариация есть

$$\frac{\delta\hat{e}(z,w)}{\delta w}=-2\left(\frac{d^2}{dz^2}w+w''-\frac{d}{dz}w'\right). \tag{1.4.35}$$

Линейный дифференциальный оператор есть

$$\mathcal{L}=-2c_2\left(\frac{d^2}{dz^2}z^2+2-2\frac{d}{dz}z\right). \tag{1.4.36}$$

Характеристическое уравнение $\nu(k)\stackrel{\text{def}}{=}(k-2)(k-1)=0$ имеет два корня $k_1=1,\, k_2=2$. Но поскольку здесь конус задачи есть $\mathcal{K}=\{\operatorname{Re}k>2\}$, то ни одно из характеристических чисел не лежит в нем. Поэтому имеем степенное разложение решений

$$\mathcal{O}_{10}:\quad w=c_2z^2+\sum_{k=3}^{\infty}c_kz^k,\; y=x_0+z+w, \tag{1.4.37}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Уравнение (1.4.33) не дает нестепенные и экзотические асимптотики, поскольку оно аналогично (1.2.1).

В этом случае имеется решение $w^2 \equiv 0$ уравнения (1.4.32), т. е. решение $y = x_0 + z$. Это решение соответствует исключительному решению $\mathcal{I}_3 :\ y = x$ при $d = 1/2$ уравнения (1.1.1) [9].

Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ горизонтально с $q_2 = 2$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{e}_1^{(1)}(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} [x_0^3(x_0-1)^3 + 3x_0^2(2x_0-1)(x_0-1)^2 z + 3x_0(x_0-1)(5x_0^2 - 5x_0+1)z^2 + (2x_0-1)(10x_0^2 - 10x_0 + 1)z^3 + 3(5x_0^2 - 5x_0 + 1)z^4 + 3(2x_0-1)z^5 + z^6](w'^2 - 2w''w) + [(x_0-1)x_0((2a-1)x_0^2 + (1+2c - 2a+2b)x_0 - 1 - 2b) + (4(2a-1)x_0^3 + 6(1+b+c-2a)x_0^2 + 4(-1 - 2b+a-c)x_0 + 1 + 2b)z + 2(3(2a-1)x_0^2 + 3(1+b-2a+c)x_0 - 2b + a - c - 1)z^2 + 2(2(2a-1)x_0 + c + b - 2a + 1)z^3 + (2a-1)z^4]w^2 = 0. \tag{1.4.38}$$

Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ связывает вершины $Q_2 = (-2,\, 2)$ и $Q_1 = (4, 2)$. Им соответствуют укороченные уравнения, суммарный порядок дифференцирования каждого из которых равен двум, $\hat{e}_2^{(0)}(z,\, w) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^3(x_0-1)^3(w'^2 - 2w''w) = 0$ и $\hat{e}_1^{(0)}(z,\, w) \stackrel{\text{def}}{=} z^6(w'^2 - 2w''w) + (2a-1)z^4 w^2 = 0$. Согласно теореме 5.4 [2], у уравнения (1.4.38) не существует нестепенных асимптотик решений ни при $z \to 0$, ни при $z \to \infty$.

Поскольку у характеристического уравнения левой вершины все корни вещественны, то согласно замечанию в [5] ребро $\Gamma_1^{(1)}$ не дает экзотических асимптотик, соответствующих конусу задачи.

4.3. Случай $\mathbf{c_0 = 1}$. Здесь линейный дифференциальный оператор, определенный формулой (1.4.2), $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Чтобы вычислить разложения решений уравнения (1.1.2) с первым членом $y = 1$, сделаем в уравнении (1.1.4) замену зависимой переменной $y = 1 + v$, которая переводит точку $y = 1$ в точку $v = 0$. Получаем уравнение

$$h(z,\ v) \stackrel{\text{def}}{=} (2v''v^2 + (-2v'^2 + 2v'')v - v'^2)z^5 + (-2v''v^3 + ((10x_0 - 8)v'' + 2v' + 3v'^2)v^2 + ((10x_0-6)v'' + (8-10x_0)v'^2 + 2v')v + (3-5x_0)v'^2)z^4 + (((4-8x_0)v'' - 4v')v^3 + ((-32x_0 + 10 + 20x_0^2)v'' + (12x_0-6)v'^2 + (8x_0 - 10)v' + 2b + 2c)v^2 + ((20x_0^2 + 6 - 24x_0)v'' + (32x_0 - 20x_0^2 - 10)v'^2 + (8x_0 - 6)v' + 4c)v + (-10x_0^2 - 3 + 12x_0)v'^2 + 2c)z^3 + ((2d+2a)v^4 + ((12x_0 - 12x_0^2 - 2)v'' + (6-12x_0)v' - 4c - 4b + 4d + 4a)v^3 + ((-48x_0^2 + 20x_0^3 - 4 + 30x_0)v'' + (18x_0^2 - 18x_0 + 3)v'^2 + (12x_0^2 - 30x_0 + 12)v' - 4b + 2d + 6cx_0 - 14c + 2a + 6x_0 b)v^2 + ((-2 + 20x_0^3 + 18x_0 - 36x_0^2)v'' + (4 - 30x_0 + 48x_0^2 - 20x_0^3)v'^2 + (6 - 18x_0 + 12x_0^2)v' - 16c + 12cx_0)v + (-10x_0^3 - 9x_0 + 18x_0^2 +$$

$$1)v'^2+6cx_0-6c)z^2+(-4v^5a+(-12a+4x_0d+4x_0a-2d+2b+2c)v^4+((-8x_0^3+12x_0^2-4x_0)v''+(12x_0-12x_0^2-2)v'+12c+4b+8x_0a-8cx_0-4d+8x_0d-12a-8x_0b)v^3+((10x_0^4-32x_0^3+30x_0^2-8x_0)v''+(-18x_0^2+12x_0^3+6x_0)v'^2+(24x_0-4-30x_0^2+8x_0^3)v'+4x_0d-2d+6x_0^2b+6cx_0^2+24c-28cx_0-4a-8x_0b+4x_0a+2b)v^2+((18x_0^2-24x_0^3+10x_0^4-4x_0)v''+(-10x_0^4-30x_0^2+8x_0+32x_0^3)v'^2+(8x_0^3-2-18x_0^2+12x_0)v'-32cx_0+20c+12cx_0^2)v+(2x_0-5x_0^4-9x_0^2+12x_0^3)v'^2+6cx_0^2+6c-12cx_0)z+2v^6a+(8a-4x_0a)v^5+(2cx_0+2x_0^2d-2x_0d+2x_0b+2x_0^2a+12a-12x_0a-2c)v^4+((-2x_0^2+4x_0^3-2x_0^4)v''+(-2x_0-4x_0^3+6x_0^2)v'+8a+4x_0b-4x_0^2b-12x_0a-4x_0d+12cx_0-8c-4cx_0^2+4x_0^2d+4x_0^2a)v^3+((10x_0^3-8x_0^4+2x_0^5-4x_0^2)v''+(3x_0^2+3x_0^4-6x_0^3)v'^2+(-10x_0^3-4x_0+12x_0^2+2x_0^4)v'+2bx_0^3+2x_0^2a-2x_0d-14cx_0^2+2x_0b+24cx_0-4x_0a+2a-4x_0^2b+2cx_0^3-12c+2x_0^2d)v^2+((6x_0^3-6x_0^4+2x_0^5-2x_0^2)v''+(-10x_0^3+4x_0^2+8x_0^4-2x_0^5)v'^2+(2x_0^4+6x_0^2-2x_0-6x_0^3)v'+4cx_0^3-16cx_0^2+20cx_0-8c)v+(-x_0^5-3x_0^3+x_0^2+3x_0^4)v'^2+6cx_0+2cx_0^3-6cx_0^2-2c=0. \tag{1.4.39}$$

Ищем его решения при $z \to 0$ и $v \to 0$, a, $b \neq 0$, $x_0 \neq 0$, 1.

При $c \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(h)$ левой части уравнения и его выпуклая оболочка изображены на рис. 1. Вещественные нормальные конусы изображены на рис. 2. Нам потребуются суммы, соответствующие точкам $Q_2 \stackrel{\text{def}}{=} (-2, 2)$, $Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $Q_6 \stackrel{\text{def}}{=} (3, 0)$, $(-1, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ и $(3, 2)$. Они суть

$$h_{(-2,2)} = -x_0^2(x_0-1)^3(v'^2-2v''v), \quad h_{(0,0)} = 2c(x_0-1)^3,$$
$$h_{(1,0)} = 6c(x_0-1)^2z, \quad h_{(2,0)} = 6c(x_0-1)z^2, \quad h_{(3,0)} = 2cz^3,$$
$$h_{(-1,2)} = x_0(x_0-1)^2(-(5x_0-2)z(v'^2-2vv'')+2(x_0-1)vv'),$$
$$h_{(0,2)} = -(x_0-1)(10x_0^2-8x_0+1)z^2(v'^2-2vv'')+2(4x_0-1)(x_0-1)^2zvv'+2(x_0-1)((b+c)x_0^2+(a+d-6c-b)x_0-a+6c)v^2,$$
$$h_{(1,2)} = (10x_0^2-12x_0+3)z^3(-v'^2+2vv'')+6(2x_0-1)(x_0-1)z^2vv'+2(3(b+c)x_0^2+(2d-4b+2a-14c)x_0-2a+b+12c-d)zv^2,$$
$$h_{(2,2)} = (5x_0-3)z^4(-v'^2+2vv'')+2(4x_0-3)z^3vv'+2(-2b-7c+a+d+3(b+c)x_0)z^2v^2,$$
$$h_{(3,2)} = z^5(-v'^2+2vv'')+2z^4v'v+2(b+c)z^3v^2. \tag{1.4.40}$$

Нас интересуют только те ребра и вершины, вещественные нормальные конусы которых пересекаются с конусом задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0,\ p_2 < 0\}$, то есть вершины Q_1, Q_2 и ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$.

Согласно замечанию 1.1 вершину Q_1 и ребро $\Gamma_6^{(1)}$ не рассматриваем.

Вершине Q_2 соответсвует укороченное уравнение

$$\hat{h}_2^{*(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -x_0^2(x_0-1)^3(v'^2-2v''v)=0.$$

Поскольку $x_0 \neq 0,\ 1$, то его можно записать в виде

$$\hat{h}_2^{(0)}(z,\ v) = v'^2 - 2v''v = 0. \tag{1.4.41}$$

Это уравнение аналогично уравнению (1.4.8) с характеристическим уравнением (1.4.9). Векторы $P_1 = (-1,\,0), P_2 = (-1,\,-2)$ не лежат в вещественном нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_1 < 0,\, p_2 > p_1\}$. Уравнение (1.4.41) не дает подходящих решений.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x_0^2(x_0-1)^3(2v''v-v'^2)+2c(x_0-1)^3=0.$$

Поскольку $x_0 \neq 0,\ 1$, то это уравнение после деления на множитель $(x_0-1)^3$ принимает вид

$$\hat{h}_1^{(1)}(z,\ v) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^2(2v''v-v'^2)+2c=0. \tag{1.4.42}$$

Согласно вещественному нормальному конусу $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1,\,-1),\ \lambda > 0\}$, показатель степени $r_1 = 1$. Ищем степенные решения уравнения (1.4.42) в виде $v = c_1 z$. Определяющее уравнение $-x_0^2c_1^2+2c=0$ при $c \neq 0$ имеет два ненулевых решения

$$c_{1i} = (-1)^i\frac{\sqrt{2c}}{|x_0|} \neq 0,\ i=1,2, \tag{1.4.43}$$

а при $c = 0$ имеет двукратное нулевое решение. Эти два случая будем исследовать отдельно.

П е р в ы й с л у ч а й $c \neq 0$. Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{h}_1^{(1)}(z,\ v)}{\delta v} = 2x_0^2\frac{d^2}{dz^2}v + 2x_0^2v'' - 2x_0^2v'\frac{d}{dz}. \tag{1.4.44}$$

Линейный дифференциальный оператор есть

$$\mathcal{L}(z) = 2x_0^2c_{1i}\left(\frac{d^2}{dz^2}z - \frac{d}{dz}\right). \tag{1.4.45}$$

Характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2x_0^2c_{1i}k(k-2) = 0$ имеет два корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$. Так как конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 1\}$, то k_2 – единственное критическое число. Носитель разложений решений есть $\mathbf{K} = \{1+m,\ m \in \mathbb{N}\}$. Здесь имеем разложения

$$\mathcal{O}_{10+i}: \quad v = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{ki}z^k,\ i=1,2,\ y=1+v, \tag{1.4.46}$$

где комплексные коэффициенты: c_{1i} определен формулой (1.4.43), $c_{2i} = \alpha_{2i}+\beta_{2i}\ln z$, α_{2i} – произвольная постоянная, β_{2i} – постоянный и однозначно определенный, остальные коэффициенты c_{ki} многочлены от $\ln z$, которые однозначно определены.

С помощью Maple подставляем ряд (1.4.46) в уравнение (1.1.4) и получаем, что для $k_2 = 2$ выполняется условие совместности, т. е. в разложениях (1.4.46) коэффициент $\beta_{2i} = 0$ и все остальные коэффициенты c_{ki} – постоянны и однозначно определены.

По теореме 3.4 [2] ряд (1.4.46) сходится для достаточно малых $|z|$.

Уравнение (1.4.42) имеет решения вида $v = C_2z^2 + C_1z + \dfrac{C_1^2x_0^2 - 2c}{4C_2x_0^2}$ и $v = c_{1i}z + C_0$, где C_2, C_1, C_0 – произвольные постоянные, c_{1i} – постоянный и однозначно определенный из (1.4.43). Среди них нет нестепенных или экзотических. Поэтому уравнение (1.4.42) не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

Второй случай $c = 0$. Согласно (1.4.39) в этом случае носитель $\check{\mathbf{S}}(h)$ изображен на рис. 7. Вещественные нормальные конусы – на рис. 8. Конус задачи есть $\mathcal{K} = \{p_2 < 0, p_1 \le 0\}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы вершины $\check{Q}_2$ и ребра $\check{\Gamma}_6^{(1)}$.

Вершине $\check{Q}_2$ соответствуют укороченное уравнение (1.4.41) с характеристическим уравнением (1.4.9), вещественный нормальный конус $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < 0\}$ и конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0\}$. Вектор $P_1 = (-1, 0)$ не лежит в $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)}$, а вектор $P_2 = (-1, -2)$ лежит в вещественном нормальном конусе $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)} \bigcap \mathcal{K}$, следовательно, имеем семейство асимптотик

$$v = c_2z^2, \tag{1.4.47}$$

где c_2 – произвольная комплексная постоянная. Вычислим критические числа этого решения. Первая вариация есть

$$\frac{\delta\hat{h}_2^{(0)}(z,v)}{\delta v} = 2x_0^2(x_0-1)^3\left(\frac{d^2}{dz^2}v + v'' - \frac{d}{dz}v'\right). \tag{1.4.48}$$

Линейный дифференциальный оператор есть

$$\mathcal{L} = 2x_0^2(x_0-1)^3c_2\left(\frac{d^2}{dz^2}z^2 + 2 - 2\frac{d}{dz}z\right). \tag{1.4.49}$$

Характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} (k-2)(k-1) = 0$ имеет два корня $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Но поскольку здесь конус задачи есть $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 2\}$, то оба эти числа не являются критическими.

Имеем степенное разложение решений

$$\mathcal{O}_{13}: \quad v = c_2 z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k,\ y = 1 + v, \tag{1.4.50}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

У уравнения (1.4.41) отсутствуют нестепенные и экзотические решения, как и у уравнения (1.2.1).

Ребро $\check{\Gamma}_6^{(1)}$ горизонтально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_6^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} (z + x_0)(z + x_0 - 1)^3 \left[(z + x_0)(2v''v - v'^2) + 2vv'\right] +$$
$$2(z + x_0 - 1)v^2 \left[(z + x_0)(z + x_0 - 1)b + (z + x_0)(a + d) - a\right].$$

Согласно п. 5.3 [2] оно не дает подходящих решений. Поскольку оно соединяет вершину $\check{Q}_2$ с укороченным уравнением (1.4.41) и вершину $\check{Q}_6$ с укороченным уравнением $z^3[z^2(2v''v - v'^2) + 2zv'v + 2bv^2] = 0$. Каждое из этих трех уравнений имеет суммарный порядок дифференцирования равный двум.

Характеристическое уравнение для левой вершины имеет только вещественные корни. Согласно замечанию в [5] это ребро не дает экзотических асимптотик, соответствующих конусу задачи.

В этом случае имеется решение $v^2 \equiv 0$ уравнения (1.4.39), т. е. решение $y = 1$. Это решение соответствует исключительному решению $\mathcal{I}_2 : y = 1$ при $c = 0$ [9] уравнения (1.1.1).

§5. Разложения, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma}_3^{(1)}$

Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(z,\ y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^2(x_0 - 1)^2 y^2 \left(-2y''y + 3y'^2\right) + 2ay^6 = 0. \tag{1.5.1}$$

и вещественный нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(-1,\ 1),\ \lambda > 0\}$. Следовательно, $r_3 = -1$. Степенные решения уравнения (1.5.1) ищем в виде $y = c_{-1}/z,\ c_{-1} \neq 0$. Определяющее уравнение $\tilde{\tilde{f}}\ (c_{-1}) = c_{-1}^2 - z_0^2(x_0 - 1)^2/(2a) = 0$ имеет решения

$$c_{-1i} = (-1)^i \frac{|x_0(x_0 - 1)|}{\sqrt{2a}} \neq 0,\ i = 1, 2. \tag{1.5.2}$$

Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_3^{(1)}(z,\ y)}{\delta y} = x_0^2(x_0 - 1)^2 \left(-2\frac{d^2}{dz^2}y^3 - 6y''y^2 + 6y'y^2\frac{d}{dz} + \right.$$

$$6y'^2y + \frac{12ay^5}{x_0^2(x_0-1)^2}\Big).$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) = x_0^2(x_0-1)^2\left(-2c_{-1}^3\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^3} - 12c_{-1}^3\frac{1}{z^5} - 6c_{-1i}^3\frac{d}{dz}\frac{1}{z^4} + \right.$$

$$\left. +6c_{-1i}^3\frac{1}{z^5} + \frac{12ac_{-1i}^5}{x_0^2(x_0-1)^2}\frac{1}{z^5}\right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) = c_{-1i}^3 k(k+2) = 0. \tag{1.5.3}$$

имеет два решения $k_1 = -2$, $k_2 = 0$. Конус задачи есть $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > -1\}$. Только k_2 лежит в конусе задачи $\mathcal{K}$, т. е. является единственным критическим числом. Число $k_2 = 0$ лежит в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Носитель разложения решений есть $\mathbf{K} = \{-1+m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

Здесь имеем два разложения

$$\mathcal{O}_{13+i}: \quad y = \sum_{k=-1}^{+\infty} c_{ki}z^k,\ i = 1, 2, \tag{1.5.4}$$

где комплексные коэффициенты: c_{-1i} определен формулой (1.5.2), $c_{0i} = \alpha_{0i} + \beta_{0i}\ln z$, α_{0i} – произвольная постоянная, β_{0i} – постоянный и однозначно определенный, остальные коэффициенты c_{ki} многочлены от $\ln z$, которые однозначно определены.

С помощью Maple подставляем ряд (1.5.4) в уравнение (1.1.4) и получаем, что для $k_2 = 0$ выполняется условие совместности, т. е. в разложениях (1.5.4) коэффициент $\beta_{0i} = 0$ и все остальные коэффициенты c_{ki} – постоянны и однозначно определены.

Согласно теореме 3.4 [2] ряд (1.5.4) сходится для достаточно малых $|z|$.

Уравнение (1.2.1) имеет решения вида

$$y = \left(C_2z^2 + C_1z + \frac{x_0^2(x_0-1)^2C_1^2 - 2a}{x_0^2}\right)^{-1}$$

и $y = \dfrac{c_{-1i}}{z} + C_0$, где C_2, C_1, C_0 – произвольные постоянные, коэффициент c_{-1i} – постоянный и однозначно определенный из (1.5.2). Среди решений уравнения (1.2.1) нет нестепенных или экзотических. Поэтому оно не дает нестепенные или экзотические асимптотики.

2. Случай $a \cdot b = 0$

§1. Случай $a = 0,\ b \neq 0$

В случае $a = 0,\ b \neq 0$ у носителя $\mathbf{S}(f)$ уравнения (1.1.4), изображенного на рис. 1, пропадают точки, лежащие выше прямой $q_2 = 4$ (рис. 9). Новый носитель $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(f)\ |_{a=0,\, b\neq 0}$ имеет два новых ребра $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ и две новые вершины $\tilde{Q}_3$ и $\tilde{Q}_4$. Все отстальные ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_5^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$ и вершины Q_1, Q_2, Q_5, Q_6 носителя $\tilde{\mathbf{S}}$ сохраняются из случая $a,\ b \neq 0$. Следовательно, сохраняются асимптотические разложения решений им соответствующие. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ ребер $\Gamma_i^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$ и вершин Q_i, $\tilde{Q}_j$, $i = 1, 2, 5, 6$, $j = 3, 4$, изображены на рис. 10.

Среди новых объектов $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$, $\tilde{Q}_3$, $\tilde{Q}_4$ мы рассмотрим только горизонтальное ребро $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ и вершину $\tilde{Q}_3$, поскольку только их нормальные конусы пересекаются с полуплоскостью $p_1 \leq 0$, что соответствует $z \to 0$.

Вершине $\tilde{Q}_3$ соответствует укороченное уравнение (1.2.2) и вещественный нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)} = \{p_1 < 0,\ p_2 > 0\}$. Здесь вектор $P_1 = (-1,\ 0)$ не лежит в $\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)}$, а вектор $P_2 = (-1,\ 2)$ лежит в $\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)}$. Таким образом, имеем семейство степенных асимптотик решений уравнения (1.1.4)

$$y = \frac{c_{-2}}{z^2}, \tag{2.1.1}$$

где c_{-2} – произвольная ненулевая комплексная постоянная.

Вычислим критические числа. Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_3^{(0)}(z,\ y)}{\delta y} = 2\frac{d^2}{dz^2}y^3 + 6y''y^2 - 6y'y^2\frac{d}{dz} - 6yy'^2.$$

На укороченном решении $y = c_{-2}z^{-2}$ она дает линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\,\frac{c_{-2}^3}{z^8}\left(\frac{d^2}{dz^2}z^2 + 6\frac{d}{dz}z + 6\right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2c_{-2}^3(k^2 + 5k + 6) = 0 \tag{2.1.2}$$

имеет два корня $k_1 = -2$ и $k_2 = -3$. Поскольку конус задачи $\mathcal{K} = \{\mathrm{Re}\, k > -2\}$, то числа $k_1 = -2$ и $k_2 = -3$ не лежат в конусе задачи, т. е. не являются критическими.

Согласно п. 3.2 [2] носитель разложения решений имеет вид $\mathbf{K} = \{s = -2 + m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

Решению (2.1.1) укороченного уравнения (1.2.2) соответствуют разложения решений полного уравнения (1.1.4)

$$\mathcal{O}_{16}: \quad y = \frac{c_{-2}}{z^2} + \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^k, \tag{2.1.3}$$

где c_{-2} – произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

В этом случае имеется исключительное решение $\mathcal{I}_4: \ y = \infty$ при $a = 0$ [9] уравнения (1.1.1).

Ребро $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ горизонтально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\begin{gathered}(z+x_0)^2(z-1+x_0)^2y^2(2yy''-3y'^2)+2(z+x_0)(z-1+x_0)(2z+\\2x_0-1)y^3y'-[2d(z+x_0)^2+2(z+x_0)(b+c-d)-2c]y^4=0.\end{gathered} \tag{2.1.4}$$

Оно не дает степенных решений, поскольку оно горизонтально. Проверим, существуют ли нестепенные асимптотики. Ребро $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ соединяет вершины $\tilde{Q}_3 = (-2, 4)$ и $\tilde{Q}_4 = (2, 4)$, соответствующие укороченные уравнения $x_0^2(x_0-1)^2(2y''y-3y'^2)y^2 = 0$ и $z^4y^2(2y''y-3y'^2)+4z^3y^3y'-2dz^2y^4 = 0$ имеют суммарные порядки дифференцирования равные 2. Суммарный порядок дифференцирования уравнения (2.1.4) также равен 2, следовательно, по теореме 5.6 [2], у этого уравнения не существует нестепенных асимптотик решений ни при $z \to 0$, ни при $z \to \infty$.

Характеристическое уравнение для левой вершины имеет только вещественные корни. Согласно замечанию в [5] это ребро не дает экзотических асимптотик, соответствующих конусу задачи.

§2. Случай $a \neq 0$, $b = 0$

При $a \neq 0$, $b = 0$ у носителя $\mathbf{S}(f)$ уравнения (1.1.4), изображенного на рис. 1 пропадают точки, лежащие ниже прямой $q_2 = 2$ (рис. 7). Аналогично случаю $a = 0$, $b \neq 0$ новый носитель $\check{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(f) \mid_{a\neq 0,\, b=0}$ имеет два новых ребра $\check{\Gamma}_5^{(1)}$ и $\check{\Gamma}_6^{(1)}$ и две новые вершины $\check{Q}_2$ и $\check{Q}_6$. Ребра $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_4^{(1)}$ и вершины Q_3, Q_4, Q_5 носителя $\check{\mathbf{S}}$ сохраняются из случая a, $b \neq 0$. Следовательно, сохраняются асимптотические разложения решений им соответствующие. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(1)}$ и $\check{\mathbf{U}}_j^{(1)}$ ребер $\Gamma_i^{(1)}$, $\check{\Gamma}_j^{(1)}$, $i = 2, 3, 4$, $j = 5, 6$, и $\mathbf{U}_i^{(0)}$ и $\check{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ вершин Q_i, $\check{Q}_j$, $i = 3, 4, 5$ $j = 2, 6$, изображены на рис. 8.

Рассмотрим новые обобщенные грани: горизонтальное ребро $\check{\Gamma}_6^{(1)}$ и вершину $\check{Q}_2$, поскольку только их нормальные конусы пересекаются с полуплоскостью $p_1 \leq 0$, что соответствует $z \to 0$.

Вершине $\check{Q}_2$ соответствует укороченное уравнение (1.2.1) и вещественный нормальный конус $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{p_1 < 0,\ p_2 < 0\}$. Но здесь вектор $P_1 = (-1,\ 0)$ не лежит в $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)}$, а вектор $P_2 = (-1,\ -2)$ лежит в $\check{\mathbf{U}}_2^{(0)}$. Поэтому имеем семейство степенных асимптотик решений уравнения (1.1.4)

$$y = c_2 z^2, \tag{2.2.1}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная.

Вычислим критические числа. Первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_2^{(0)}(z,\ y)}{\delta y} = 2\frac{d^2}{dz^2}y + 2y'' - 2y'\frac{d}{dz}.$$

На укороченном решении $y = c_2 z^2$ она дает линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2c_2\left(\frac{d^2}{dz^2}z^2 - 2\frac{d}{dz}z + 2\right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2c_2(k^2 - 3k + 2) = 0 \tag{2.2.2}$$

имеет два корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Поскольку конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 2\}$, то числа $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ не лежат в конусе задачи, т. е. не являются критическими.

Согласно п. 3.2 [2] носитель разложения решений имеет вид

$$\mathbf{K} = \{s = 2 + m,\ m \in \mathbb{N}\}. \tag{2.2.3}$$

Решению (2.2.1) укороченного уравнения (1.2.1) соответствуют разложения решений полного уравнения (1.1.4)

$$\mathcal{O}_{16}: \quad y = c_2 z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k, \tag{2.2.4}$$

где c_2 – произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Ребро $\check{\Gamma}_3^{(1)}$ горизонтально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(z, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (z + x_0)^3[(z + x_0 - 1)^2(2y''y - y'^2) + 2(z + x_0 - 1)yy'] \\ -2(z + x_0)[(z + x_0)^2 c - (z + x_0)(a + d + c) - d]y^2 = 0. \quad (2.2.5)$$

Оно не дает степенных решений, так как оно горизонтально. Ребро $\check{\Gamma}_3^{(1)}$ соединяет вершины $\check{Q}_2 = (-2,\ 2)$ и $\check{Q}_6 = (3,\ 2)$, соответствующие им укороченные уравнения $x_0^3(x_0 - 1)^2(2y''y - y'^2) = 0$ и $z^5(2yy'' - y'^2) + 2z^4yy' -$

$2z^3y^2c = 0$ имеют суммарные порядки дифференцирования равные 2. Суммарный порядок дифференцирования уравнения (2.2.5) также равен 2, следовательно, по теореме 5.4 [2], у этого уравнения не существует нестепенных асимптотик решений ни при $z \to 0$, ни при $z \to \infty$.

Характеристическое уравнение для левой вершины имеет только вещественные корни. Согласно замечанию в [5] это ребро не дает экзотических асимптотик, соответствующих конусу задачи.

В этом случае имеется исключительное решение $\mathcal{I}_1 : y = 0$ при $b = 0$ [9] уравнения (1.1.1).

§3. Случай $a = b = 0$

Здесь новых семейств не возникает. Сохраняются 9 семейств $\mathcal{O}_j$, $j = 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13$ из случая $ab \neq 0$, семейство $\mathcal{O}_{16}$ из случая $a = 0$, $b \neq 0$ и семейство $\mathcal{O}_{17}$ из случая $a \neq 0$, $b = 0$. Кроме того, имеются 4 исключительных решения $\mathcal{I}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

3. Сводка и обсуждение результатов

Теорема 1. *В окрестности неособой точки $x = x_0$, $x_0 \neq 0, 1, \infty$ шестого уравнения Пенлеве (1.1.1) при различных значениях его четырех комплексных параметров a, b, c, d существуют всего 17 семейств $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, 17$ разложений его решений. Все они по целым степеням $z \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$ с постоянными коэффициентами. А именно:*

Однопараметрические (по c_{2i}) семейства $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ существуют при $b \neq 0$ и определяются формулой (1.3.3).

Двупараметрическое (по c_0 и c_1) семейство $\mathcal{O}_3$ существует при любых значениях параметров уравнения и определяется формулой (1.4.4).

Однопараметрические (по c_{2i}) семейства $\mathcal{O}_4$ и $\mathcal{O}_5$ существуют при $d \neq 0,\ 1/2$ и определяются формулой (1.4.16). Семейство $\mathcal{O}_5$ определено и при $d = 0$.

Однопараметрическое (по c_2) семейство $\mathcal{O}_6$ существует при $d = 0$ и определяется формулой (1.4.21).

Отдельное разложение $\mathcal{O}_7$ существует при $d = 0$, $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} ax_0^2 + (b + c - a)x_0 - b \neq 0$ и определяется формулой (1.4.24).

Отдельное разложение $\mathcal{O}_8$ существует при $d = \alpha = 0$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} (b + c)x_0^2 - 2bx_0 + b \neq 0$ и определяется формулой (1.4.29).

Отдельное решение $\mathcal{O}_9 : y = x_0$ существует при $d = \alpha = \beta = 0$.

Однопараметрическое (по c_2) семейство $\mathcal{O}_{10}$ существует при $d = 1/2$ и определяется формулой (1.4.37).

Однопараметрические (по c_{2i}) семейства $\mathcal{O}_{11}$ и $\mathcal{O}_{12}$ существуют при $c \neq 0$ и определяются формулой (1.4.46).

Однопараметрическое (по c_2) семейство $\mathcal{O}_{13}$ существует при $c = 0$ и определяется формулой (1.4.50).

Однопараметрические (по c_{0i}) семейства $\mathcal{O}_{14}$ и $\mathcal{O}_{15}$ существуют при $a \neq 0$ и определяются формулой (1.5.4).

Однопараметрическое (по c_{-2}) семейство $\mathcal{O}_{16}$ существует при $a = 0$ и определяется формулой (2.1.3).

Однопараметрическое (по c_2) семейство $\mathcal{O}_{17}$ существует при $b = 0$ и определяется формулой (2.2.4).

Кроме того, имеются 4 *исключительных решения* [9]. *Они суть*

$\mathcal{I}_1:\ y = 0$ *существует при* $b = 0$.

$\mathcal{I}_2:\ y = 1$ *существует при* $c = 0$.

$\mathcal{I}_3:\ y = x$ *существует при* $d = 1/2$.

$\mathcal{I}_4:\ y = \infty$ *существует при* $a = 0$.

Семейства $\mathcal{O}_6 - \mathcal{O}_9$ объединяются в одно большое однопараметрическое (по c_2) семейство вида (1.4.21), допускающее $c_2 = 0$ и существующее при $d = 0$.

Заметим, что неособая точка $x = x_0$, $x_0 \neq 0, 1, \infty$ уравнения (1.1.1) является подвижной особой точкой его решений. Для разложений решений $\mathcal{O}_{14}$ и $\mathcal{O}_{15}$ она является полюсом первого порядка, для $\mathcal{O}_{16}$ – полюсом второго порядка. В остальных разложениях – правильной особой точкой.

Из 17 семейств 9 однопараметрических семейств $\mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, 4, 5, 10, 12, 14, 15, 16$ известны [4]. Авторы этой книги вычисляли разложения, подставляя ряды $y = \sum\limits_{k=l}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,\ l = -2, -1, 0, 1$, в уравнение (1.1.1).

Методами степенной геометрии [2] кроме известных 9 семейств получены 8 новых семейств $\mathcal{O}_j$, $j = 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 17$. Эти результаты говорят об эффективности этих методов. Кроме того, по многоугольнику уравнения можно сразу определить случаи значений параметров уравнения, которые следует рассматривать.

Все ряды (1.3.3), (1.4.4), (1.4.16), (1.4.21), (1.4.24), (1.4.29), (1.4.37), (1.4.46), (1.4.50), (1.5.4), (2.1.3), (2.2.4) сходятся для малых $|z|$. Они исчерпывают все асимптотические разложения решений в окрестности неособой точки $x = x_0 \neq 0, 1$ уравнения (1.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. Т. 4. С. 233–234.

2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

3. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

4. *Gromak I.V.*, *Laine I.*, *Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002. 303 p.

5. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2007. Т. 416. №5. С. 583-587.

6. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Все базовые асимптотические разложения решений уравнения P6 в случае $a \cdot b \neq 0$. Препр. №62 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2007, 30 с.

7. *Bruno A.D.* Power Geometry as a New Calculus // Analysis and Applications - ISAAC 2001 (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London, 2003, p. 51-71.

8. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва/ Ленинград. 1950. 436 с.

9. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2007. Т. 417. №3. С. 298-302.

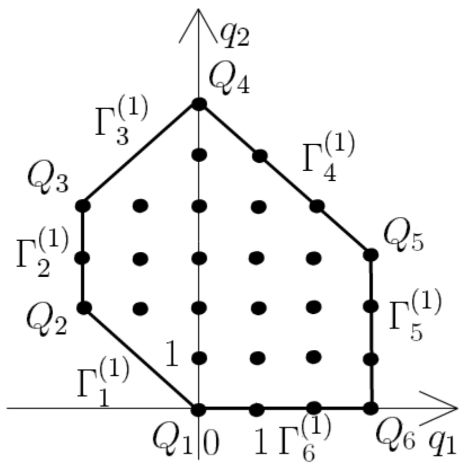

Рис. 1

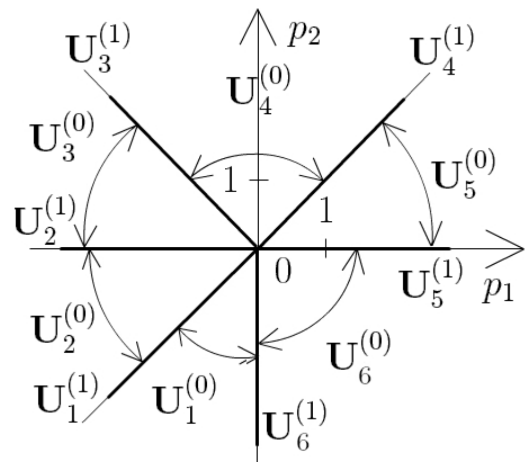

Рис. 2

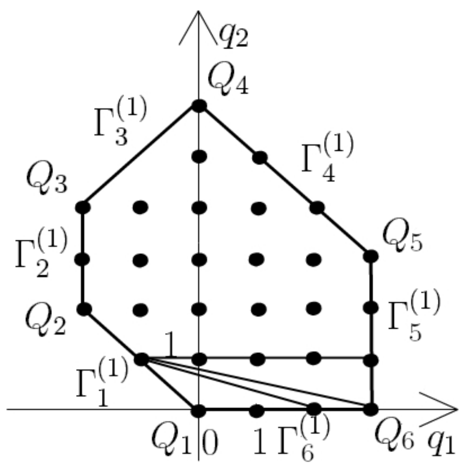

Рис. 3

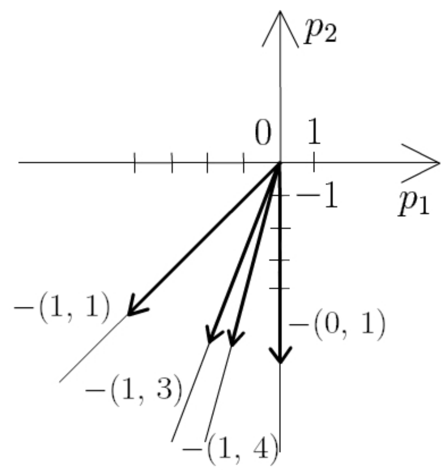

Рис. 4

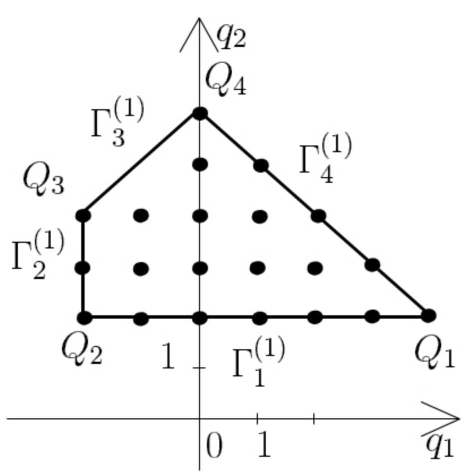

Рис. 5

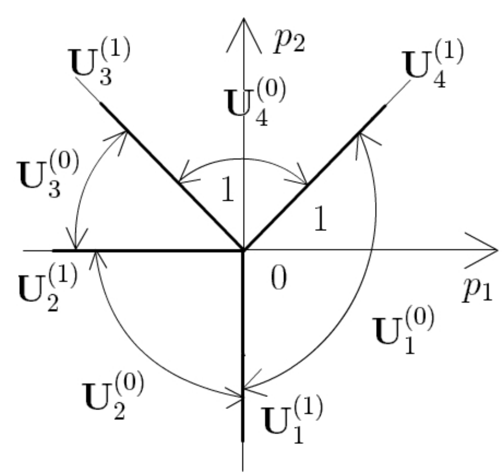

Рис. 6

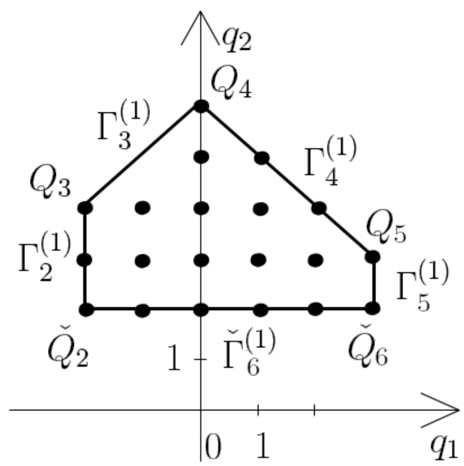

Рис. 7

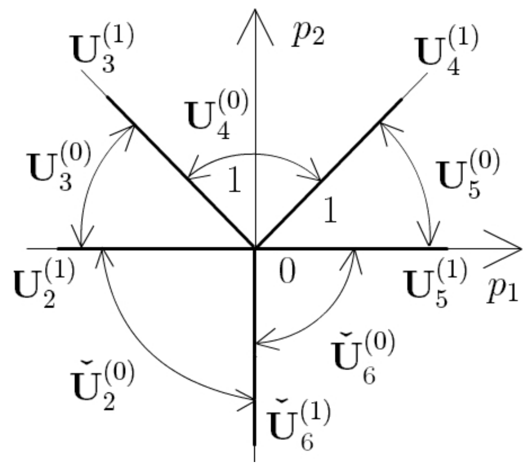

Рис. 8

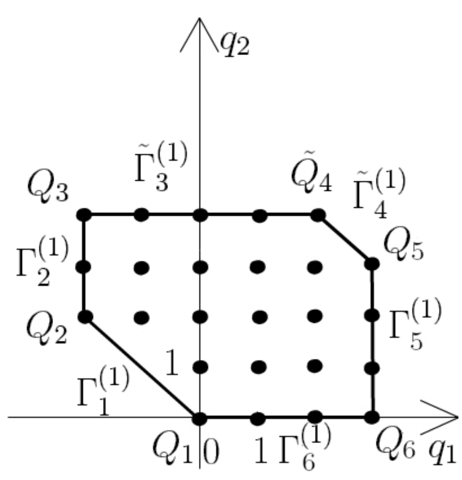

Рис. 9

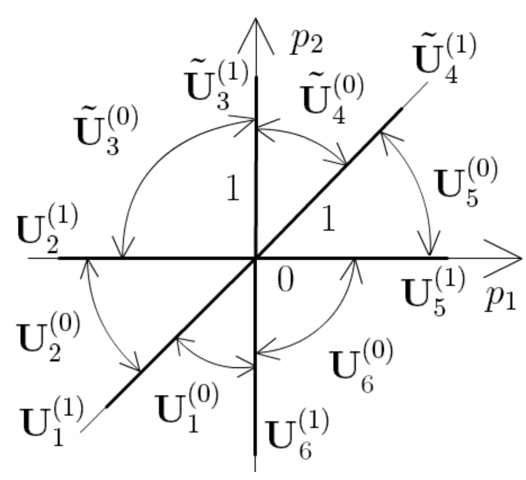

Рис. 10