



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 76 за 2008 г.



**Боговалов С.В., Колдоба А.В.,  
Устюгова Г.В., Чечеткин В.М.**

Численное моделирование  
эволюции Крабовидной  
туманности.

I. Математическая модель

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Численное моделирование эволюции Крабовидной туманности. I. Математическая модель / С.В.Боговалов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 76. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-76>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.КЕЛДЫША

С.В.Боговалов, А.В.Колдоба,  
Г.В.Устюгова, В.М.Чечеткин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭВОЛЮЦИИ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ.  
I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Москва 2008

**С.В.Боговалов, А.В.Колдоба,  
Г.В.Устюгова, В.М.Чечеткин**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭВОЛЮЦИИ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ.  
I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.**

**Аннотация**

В работе представлена математическая модель эволюции Крабовидной туманности. В рамках этой модели течение ультрарелятивистской плазмы описывается уравнениями релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД). Уравнения, описывающие динамику идеальнотокпроводящей плазмы, и уравнения Максвелла используются в форме Лихнеровича. Учитывается сильная анизотропия потока энергии от пульсара, что делает задачу двумерной. Построено приближенное решение задачи Римана для уравнений РМГД. Получены аналитические выражения для правых нуль-векторов и амплитуд всех физических волн, возникающих в результате распада разрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-02-16608), Президиума РАН (программа №4), научной школы НШ-5214.2008.2 и INTAS-ESA (проект 120-99).

**S.V.Bogovalov, A.V.Koldoba,  
G.V.Ustyugova, V.M.Chechetkin**

**NUMERICAL SIMULATION  
EVOLUTION OF THE CRAB NEBULA.  
I. MATHEMATICAL MODEL.**

**Abstract**

It was presented the mathematical model of Crab nebula. Flow of the ultrarelativistic plasma described by relativistic MHD model, which included energy-momentum and Maxwell equations in Lichnerovich form. The strong anisotropic of energy flow from pulsar was taken into consideration. Approximate solution of Riemann problem for RMHD equations was proposed.

## **Оглавление**

Введение. ....	3
Постановка задачи. ....	6
Соотношения Гюгонио на ударных волнах. ....	10
Энтропийное условие. ....	11
Условия на головной ударной волне. ....	14
Приближенное решение задачи Римана. ....	18

## Введение.

В настоящей работе представлен вычислительный алгоритм для численного интегрирования уравнений релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД) на подвижной расчетной сетке, разработанный специально для математического моделирования Крабовидной туманности. В отличие от уравнений РМГД общего вида, методы численного интегрирования которых описаны в [7, 8, 6, 16, 17, 18], здесь рассматриваются уравнения РМГД, описывающие специальный случай, когда в лабораторной системе отсчета вектор скорости лежит в плоскости течения, а вектор напряженности магнитного поля ортогонален этой плоскости. Целесообразность исследования такого частного вида уравнений РМГД обусловлена с одной стороны его относительной простотой (по сравнению с общим случаем), а с другой стороны тем обстоятельством, что этими уравнениями описывается гидродинамическая модель Крабовидной туманности.

Построение разностной схемы для уравнений РМГД проводится в рамках подхода, изложенного в [16, 17, 18] Этот подход опирается на идеи, содержащиеся в [7, 8]. Специфика задачи (вектор скорости лежит в плоскости течения, напряженность магнитного поля ортогональна этой плоскости) существенно упрощает задачу. В частности, отпадают проблема сохранения соленоидальности магнитного поля и необходимость раскрытия неопределенностей, которые возникают при представлении уравнений РМГД (так же как и МГД) в характеристической форме [5].

Рассматривается следующая модель Крабовидной туманности [1, 2]. В центре объекта расположен пульсар, являющийся источником электрон-позитронной плазмы, ускоренной под действием того или иного механизма до ультрарелятивистских скоростей. Считается, что существенную роль в ускорении и формировании ветра играет магнитное поле и что электромагнитная компонента составляет значительную долю в переносимом им потоке

энергии. Этот ультрарелятивистский ветер, взаимодействуя с межзвездной средой, образует некоторую структуру, наблюдаемую как Крабовидная туманность. В этой структуре выделяют несколько элементов (областей): область релятивистского ветра, область горячей электрон-позитронной плазмы — плерион, остатки сверхновой — межзвездная среда.

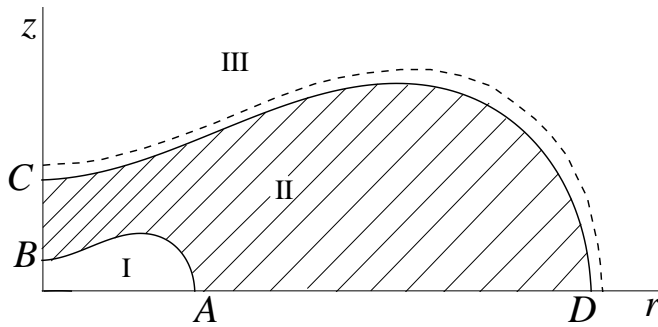


Рис. 1. Крабовидная туманность в полоидальной плоскости.

На рис.1 показана идеализированная картина Крабовидной туманности согласно [2]. В центре находится пульсар и его магнитосфера. Внутренняя сплошная кривая изображает магнитогидродинамическую ударную волну, разделяющую ультрарелятивистский ветер (область 1) и плерион (область 2). Внешняя сплошная кривая изображает границу между плерионом и остатками сверхновой (область 3). Пунктирная кривая изображает границу между остатком сверхновой и межзвездной средой.

По современным представлениям радиус внутренней границы (в экваториальной плоскости) составляет  $0.1 \text{ пс} = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}$ , радиус внешней границы  $2 \text{ пс} = 6 \cdot 10^{18} \text{ см}$ , скорость разлета остатков сверхновой  $\sim 500 \text{ км/сек}$ . Интенсивность излучения пульсара составляет  $5 \cdot 10^{38} \text{ эрг/сек}$ , Лоренц-фактор частиц (электронов и позитронов) в релятивистском ветре меняется от  $\gamma_{ax} = 10^2$  на оси системы до  $\gamma_{eq} = 3 \cdot 10^6$  на экваторе. Поток частиц в ветре считается изотропным.

Проблема численного моделирования такого ультрарелятивистского течения состоит не столько в абсолютной величине Лоренц-фактора (скорость

направленного движения частиц как на оси, так и на экваторе практически равна скорости света), сколько в огромной, более чем на четыре порядка, анизотропии потока энергии

$$\frac{dL}{do} = \gamma mc^2 \frac{dN}{do} + P ,$$

где  $\frac{dL}{do}$ ,  $\frac{dN}{do}$  — потоки энергии и частиц в единицу телесного угла;  $P$  — поток электромагнитной энергии.

Так как считается, что  $\frac{dN}{do}$  не зависит от полярного угла  $\theta$ , а доля электромагнитной компоненты в полном потоке энергии ветра невелика, то  $\frac{dL}{do} \sim \gamma(\theta)$ . В настоящей работе принимается, что  $\gamma(\theta) = \gamma_1 + \gamma_2 \sin^2 \theta$ ,  $\gamma_{ax} = \gamma_1$ ,  $\gamma_{eq} = \gamma_1 + \gamma_2 \gg \gamma_{ax}$ . Соответственно  $\frac{dL}{do} = A + B \sin^2 \theta$ . Полный поток энергии от пульсара составляет

$$L = \int \frac{dL}{do} do = 2\pi \int_0^\pi \frac{dL}{do} \sin \theta d\theta = 4\pi \left( A + \frac{2B}{3} \right) .$$

Степень анизотропии ветра определяется отношением

$$\alpha = \frac{(dL/do)_{eq}}{(dL/do)_{ax}} = 1 + \frac{B}{A} \gg 1 .$$

При больших степенях анизотропии картина течения слабо зависит от  $\alpha$ , поэтому моделирование проводилось для  $\alpha = 10^3$  (а не  $3 \cdot 10^4$ ).

Другой важной для гидродинамической картины течения характеристикой ветра является параметр  $\sigma = \frac{P}{dL/do}$  — доля электромагнитной компоненты в полном потоке энергии. В настоящей работе принимается, что  $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \theta$ . В литературе [2] используется другой параметр, характеризующий вклад электромагнитного поля в полный поток энергии

$$\sigma_{КС} = \frac{P}{\gamma mc^2 (dN/do)} .$$

Очевидно  $\sigma_{КС} = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$ ,  $\sigma = \frac{\sigma_{КС}}{1 + \sigma_{КС}}$ .

# 1 Математическая модель.

## 1.1 Постановка задачи.

В центре системы находится пульсар, испускающий ультрарелятивистский электрон-позитронный ветер. Течение в этом ветре практически радиальное с фактором Лоренца  $\gamma$  меняющимся в пределах  $10^2 - 3 \cdot 10^6$ . Хаотическое тепловое движение частиц незначительное, так что в этой области течения  $OAB$  давлением плазмы можно пренебречь. Магнитное поле здесь имеет только тороидальную компоненту. В результате взаимодействия разлетающейся электрон-позитронной плазмы с межзвездной средой возникает ударная волна  $AB$ , на которой плазма тормозится до релятивистских скоростей, но с  $\gamma > 1$ .

Заторможенная плазма занимает область  $ABCD$ . Линия  $CD$  — контактная граница, отделяющая заторможенную электрон - позитронную плазму от остатков сверхновой и межзвездной среды. На ударной волне энергия направленного радиального течения плазмы переходит в значительной степени в тепловую энергию хаотического движения. Эффективность этого преобразования зависит в основном от угла, под которым плазма падает на фронт ударной волны  $AB$ .

Течение идеальнопроводящей плазмы в областях  $OAB$  и  $ABCD$  описывается уравнениями РМГД:

энергии-импульса

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (1.1)$$

Максвелла

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (1.2)$$

неразрывности

$$\frac{\partial nu^k}{\partial x^k} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $T^{ik} = (w + h^2)u^i u^k + (p + \frac{h^2}{2})g^{ik} - h^i h^k$  — тензор энергии-импульса;

$G^{ik} = h^i u^k - h^k u^i$  — тензор, дуальный тензору электромагнитного поля;

$g_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  — метрический тензор;

$p, w$  — давление и плотность энтальпии;

$u^i = (\gamma, \gamma \mathbf{v})$  — 4-вектор скорости;

$h^i = (h^0, \mathbf{h})$  — 4-вектор магнитного поля;

$n$  — плотность числа частиц (в сопутствующей системе отсчета).

При этом

$$u_i u^i = -1 \quad , \quad u_i h^i = 0 \quad . \quad (1.4)$$

В дальнейшем используется система единиц, в которой скорость света  $=1$ .

В области  $ABCD$ , согласно вышесказанному, можно пренебречь энергией массы покоя частиц по сравнению с энергией теплового движения, то есть в уравнении состояния

$$w = mn + \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1}$$

можно пренебречь первым слагаемым в правой части.

Здесь  $m$  — масса покоя частиц,  $\Gamma$  — показатель адиабаты.

В этом приближении плотность числа частиц выпадает из уравнений (1.1), (1.2) и они образуют совместно с ограничениями (4) и соотношением  $w = \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1}$  замкнутую систему.

В области ультррелятивистского ветра  $OAB$  течение считается заданным и учитывается в дальнейшем лишь при постановке граничных условий на границе  $AB$  области  $ABCD$  — соотношений Гюгонио на ударной волне  $AB$ . Именно: течение здесь радиальное; скорость плазмы практически равна скорости света;  $\gamma \gg 1$ ,  $w, h^2 \ll 1$  при этом  $\gamma^2(w + h^2)$  — конечная величина, имеющая смысл плотности потока энергии. Параметрами, характеризующими это течение, являются зависимость светимости пульсара от полярного угла, соответственно плотность потока энергии, и доля электромагнитного поля (вектора Пойнтинга) в этом потоке.



Таким образом, в рамках описанной модели рассматривается релятивистское течение горячей электронно-позитронной плазмы в области  $ABCD$ , границы которой — ударная волна  $AB$  и тангенциальный разрыв  $CD$  заранее неизвестны. Это течение описывается уравнениями энергии-импульса (1.1) и Максвелла (1.2). Уравнение состояния принимается в виде  $w = \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1}$ .

В этом случае следствием (1.1), (1.2) является соотношение

$$\frac{\partial p^{1/\Gamma} u^k}{\partial x^k} = 0, \quad (1.5)$$

которое интерпретируется как уравнение баланса энтропии,  $p^{1/\Gamma}$  — плотность энтропии (в сопутствующей системе отсчета).

В общем случае 4-вектор магнитного поля  $h^i = (h^0, \mathbf{h})$  связан с напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$  соотношением

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left( \frac{\mathbf{H}}{\gamma} + \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{H})\mathbf{v} \right), \quad h^0 = (\mathbf{v}, \mathbf{h}) = \frac{\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{H})}{\sqrt{4\pi}} \quad (1.6)$$

В рассматриваемой ситуации  $(\mathbf{v}, \mathbf{H}) = 0$  и формулы (1.6) упрощаются:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{\gamma\sqrt{4\pi}}, \quad h^0 = 0. \quad (1.7)$$

Система (1.1), (1.2), (1.3), содержит девять уравнений для десяти неизвестных  $\{u^i; h^i; p; n\}$ . Переменные  $\{u^i; h^i; p; n\}$  не являются независимыми, они связаны соотношениями  $u_i u^i = -1$ ,  $u_i h^i = 0$ . Уравнения также не являются независимыми, так как  $\partial^2 G^{ik} / \partial x^i \partial x^k = 0$  в силу антисимметрии тензора  $G^{ik}$ . В качестве восьми независимых переменных могут быть приняты пространственные компоненты 4-вектора скорости  $\mathbf{u}$  (или скорость плазмы  $\mathbf{v}$ ), пространственные компоненты 4-вектора магнитного поля  $\mathbf{h}$  (или напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ ), давление и плотность плазмы. Эти переменные подчиняются уравнениям: энергии-импульса (четыре уравнения), неразрывности и индукции (три уравнения). Соотношение  $\text{div} \mathbf{H} = 0$  является следствием уравнения индукции, если условие соленоидальности магнитного поля выполнено на начальном многообразии.

Альтернативный подход к представлению уравнений РМГД предложен в [7, 8]. В рамках этого подхода принимается, что все десять переменных  $\{u^i; h^i; p; n\}$  являются независимыми, а условия  $u_i u^i = -1$ ,  $u_i h^i = 0$  накладываются на них в начальный момент времени и далее выполняются в силу уравнений. Эволюция переменных  $\{u^i; h^i; p; n\}$  описывается десятью уравнениями: энергии-импульса (четыре уравнения), неразрывности, модифицированными уравнениями Максвелла (четыре уравнения) и еще одним дополнительным уравнением, в качестве которого в настоящей работе, так же как и в [16, 17, 18], принято уравнение баланса энтропии (1.5). Модификация уравнений Максвелла, согласно [7, 8], состоит в замене тензора  $G^{ik} \rightarrow h^i u^k - h^k u^i + u_j h^j g^{ik}$ . Очевидно модифицированный и немодифицированный тензоры  $G^{ik}$  совпадают на допустимых решениях. Такая форма уравнений РМГД является гиперболической и описывает десять волн, распространяющихся в каждом пространственном направлении. Некоторые из этих волн являются физически недопустимыми, так как на их фронтах нарушаются условия  $u_i u^i = -1$ ,  $u_i h^i = 0$ , и должны быть исключены из рассмотрения. При принятой в настоящей работе форме представления уравнений РМГД физически недопустимыми являются псевдоэнтропийная и световые волны [16, 17, 18]. Для их исключения начальные данные (применительно к процедуре построения разностной схемы годуновского типа — исходный разрыв) должны быть такими, чтобы амплитуды этих нефизических волн обратились в ноль. Для рассматриваемой в работе ситуации условия  $u_i h^i = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  выполняется автоматически. Кроме того из рассмотрения следует исключить альфвеновские волны, так как они не возникают в рассматриваемом типе течений. Отметим, что плотность  $n$  входит только в последнее десятое уравнение системы (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), так что первые девять могут рассматриваться как замкнутая система. Распределение плотности не влияет на картину течения, её расчет проводится для вычисления интенсивности синхротронного излучения.

## 1.2 Соотношения Гюгонио на ударных волнах.

Соотношения Гюгонио для уравнений РМГД получаются из (1.1), (1.2), (1.3) стандартным способом и имеют вид:

$$\nu_k[G^{ik}] = 0 \quad , \quad \nu_k[T^{ik}] = 0 \quad , \quad \nu_k[nu^k] = 0 \quad , \quad (1.8)$$

где  $[\cdot]$  — скачок соответствующей величины на фронте ударной волны;  $\nu_k$  — нормаль к поверхности разрыва в пространстве Минковского.

Из последнего соотношения следует, что величина  $n\omega$ , где  $\omega = \nu_k u^k$ , одинакова по обе стороны от разрыва. Из двух первых соотношений с учетом  $\nu_k h^k = 0$  следует, что 4-векторы

$$V^i = \omega h^i \quad ,$$

$$W^i = (w + h^2) \omega u^i + \left(p + \frac{h^2}{2}\right) \nu^i$$

одинаковы по обе стороны от разрыва. Соответственно одинаковы скалярные величины, образованные из векторов  $\nu^i$ ,  $V^i$ ,  $W^i$ :  $V_i V^i$ ,  $W_i W^i$ ,  $V_i W^i$ ,  $\nu_i W^i$ . В частности [3]:

$$[\omega^2 h^2] = 0 \quad , \quad \left[ \nu^2 \left(p + \frac{h^2}{2}\right) + \omega^2 w \right] = 0 \quad .$$

Для уравнений релятивистской МГД аналогом адиабаты Гюгонио является адиабата Лихнеровича [3, 4]. Применительно к рассматриваемому типу течений ( $\nu_k h^k = 0$ ) адиабата Лихнеровича может быть записана в форме

$$(n_1 \vartheta_1)^2 - (n_0 \vartheta_0)^2 - (\vartheta_0 + \vartheta_1)(q_1 - q_0) = 0 \quad ,$$

где  $\vartheta = \frac{w + h^2}{n^2}$  — динамический объем, вычисленный по полной энтальпии  $w + h^2$ ;  $q = p + \frac{h^2}{2}$  — полное давление.

На газодинамической ударной волне термодинамические величины связаны соотношением (адиабата Тауба [3, 15])

$$\frac{w_2^2}{n_1^2} - \frac{w_0^2}{n_0^2} - \left( \frac{w_0}{n_0^2} + \frac{w_1}{n_1^2} \right) (p_1 - p_0) = 0 \quad . \quad (1.9)$$

Принимая  $\Gamma = 4/3$  (ультрарелятивистский газ), соответственно  $w = 4p$ , и вводя энтропию на одну частицу  $s = \frac{p^{3/4}}{n}$ , преобразуем (1.9) к виду

$$4 (s_1^2 \sqrt{p_1} - s_0^2 \sqrt{p_0}) - \left( \frac{s_0^2}{\sqrt{p_0}} + \frac{s_1^2}{\sqrt{p_1}} \right) (p_1 - p_0) = 0 \quad .$$

Отсюда для энтропии за фронтом ударной волны получаем

$$s_1 = s_0 \sqrt{\frac{f(f^2 + 3)}{3f^2 + 1}}, \quad \text{где } f^2 = \frac{p_1}{p_0}.$$

В частности, при  $\frac{p_1}{p_0} = 2$  находим  $s_1 \cong 1.005s_0$ ,

при  $\frac{p_1}{p_0} = 4$ ,  $s_1 = s_0 \sqrt{14/13} \cong 1.038s_0$ .

### 1.3 Энтропийное условие.

Не все скачки, на которых выполнены условия Гюгонио, являются физически допустимыми. Допустимые скачки должны удовлетворять энтропийному условию

$$\nu_k [p^{1/\Gamma} u^k] \geq 0 \quad , \quad (1.10)$$

где  $[\cdot] = (\cdot)_1 - (\cdot)_0$ , а 4-вектор нормали  $\nu_k$  направлен в сторону состояния "0" (см.рис.2). Это условие означает, что на скачке производится энтропия. Для стоячего (в некоторой системе отсчета) скачка  $\nu_k = (0, 1, 0, 0)$  и неравенство (1.10) принимает вид

$$p_0^{1/\Gamma} \gamma_0 v_{x0} \leq p_1^{1/\Gamma} \gamma_1 v_{x1}$$

Так как  $p^{1/\Gamma} \gamma v_x$  — плотность потока энтропии, то последнее неравенство показывает, что энтропия, втекающая в единицу времени на единицу площади допустимого скачка  $p_0^{1/\Gamma} \gamma_0 v_{x0}$ , меньше чем соответствующая величина, вытекающая из скачка,  $p_1^{1/\Gamma} \gamma_1 v_{x1}$ .

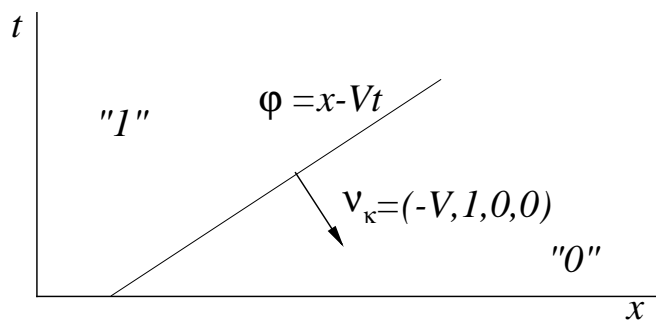


Рис. 2. траектория скачка и 4-вектор нормали.

В случае стоячей гидродинамической ( $\mathbf{H} = 0$ ) волны условия Гюгонио имеют вид

$$\gamma_0^2 w_0 v_{x0} = \gamma_1^2 w_1 v_{x1} \quad , \quad (1.11)$$

$$\gamma_0^2 w_0 v_{x0}^2 + p_0 = \gamma_1^2 w_1 v_{x1}^2 + p_1 \quad , \quad (1.12)$$

$$v_{y0} = v_{y1} \quad ,$$

а энтропийное неравенство при показанной на рисунке ориентации скоростей ( $v_{x0} > 0$ ) и  $\Gamma = 4/3$

$$\gamma_0 p_0^{3/4} v_{x0} \leq \gamma_1 p_1^{3/4} v_{x1} \quad .$$

Разделив это неравенство на (1.11), получаем

$$\frac{p_0^{-1/4}}{\gamma_0} \leq \frac{p_1^{-1/4}}{\gamma_1} \quad , \quad p_0 \gamma_0^4 \geq p_1 \gamma_1^4 \quad .$$

С учетом (1.11):

$$\frac{v_{x0}}{\gamma_0^2} \leq \frac{v_{x1}}{\gamma_1^2} \quad , \quad v_{x0}(1 - v_{x0}^2 - v_y^2) \leq v_{x1}(1 - v_{x1}^2 - v_y^2) \quad ,$$

где  $v_y = v_{y1} = v_{y0}$ .

С другой стороны, исключая  $p_0, p_1$  из соотношений (1.11), (1.12) получаем

$$v_{x0} + \frac{1 - v_{x0}^2 - v_y^2}{4v_{x0}} = v_{x1} + \frac{1 - v_{x1}^2 - v_y^2}{4v_{x1}}$$

На рис.3 показан график функции

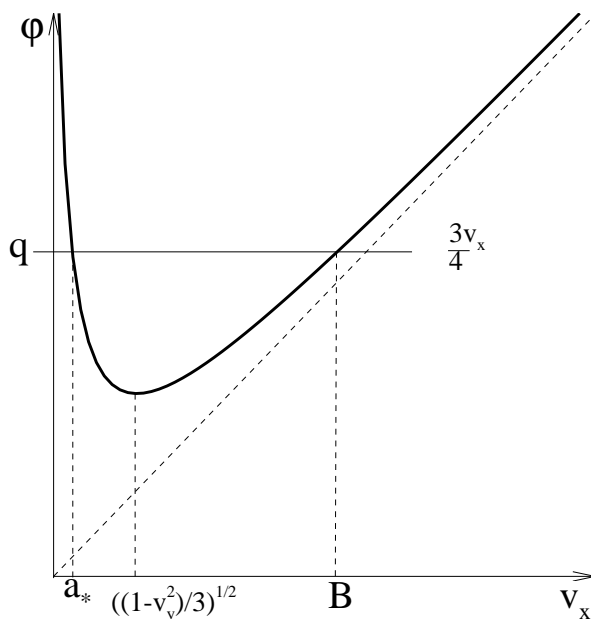


Рис. 3. график  $\varphi(v_x)$

$$\varphi(v_x) = v_x + \frac{1 - v_x^2 - v_y^2}{4v_x}$$

при  $v_y = \text{const}$ . Уравнение  $\varphi(v_x) = q$  имеет два корня  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), которые соответствуют значениям нормальной компоненты скорости перед и за скачком. Функция  $\varphi(v_x)$  имеет минимум при

$$v_x = \sqrt{\frac{1 - v_y^2}{3}} = c\sqrt{1 - v_y^2},$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  — скорость звука.

Отметим, что обе скорости  $v_{x0}$ ,  $v_{x1}$  могут быть меньше звуковой.

Рассмотрим функцию

$$F(q) = b(1 - b^2 - v_y^2) - a(1 - a^2 - v_y^2),$$

где  $a, b$  — корни уравнения  $\varphi(v_x) = q$ .

Имеем с одной стороны

$$dF = (1 - 3b^2 - v_y^2)db - (1 - 3a^2 - v_y^2)da.$$

С другой

$$\begin{aligned} \varphi'(b)db &= \varphi'(a)da = dq , \\ -\frac{1 - 3b^2 - v_y^2}{4b^2}db &= -\frac{1 - 3a^2 - v_y^2}{4a^2}da = dq . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{dF}{dq} = 4(a^2 - b^2) .$$

Кроме того  $F(q_{min}) = 0$ . Так как  $a < b$ , то  $\frac{dF(a)}{dq} < 0$  и  $F(q) < 0$  при  $q > q_{min}$ .

Таким образом, чтобы удовлетворить энтропийному неравенству (1.10) следует положить  $v_{x0} = b$ ,  $v_{x1} = a$ , т.е. аналог теоремы Цемплена для уравнений релятивистской газовой динамики может быть записан в виде  $v_{x1} < c\sqrt{1 - v_y^2} < v_{x0}$ .

#### 1.4 Условия на головной ударной волне.

Условия Гюгонио на ударной волне  $AB$  пишутся стандартным образом с учетом свойств течения плазмы перед фронтом, которые были сформулированы выше.

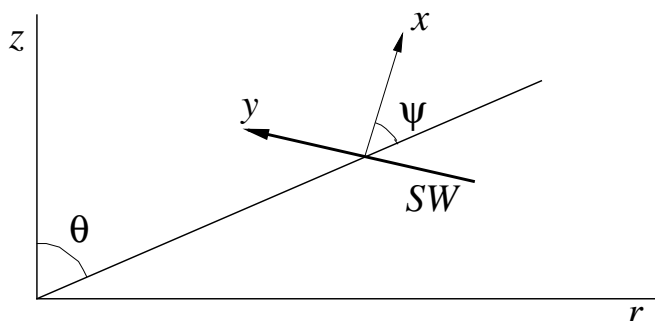


Рис. 4.

Рассмотрим точку  $M$  на ударной волне. Для удобства введем локальную систему координат, ось  $X$  которой направлена по нормали к фронту ударной

волны, а ось  $Y$  вдоль фронта (см. рис.4). В этой системе координат 4-вектор нормали к фронту имеет вид  $\nu_k = (-V, 1, 0, 0)$ , где  $V$  — скорость ударной волны в нормальном к фронту направлении (то есть в  $X$ -направлении). Условия Гюгонио имеют вид

$$\nu_k [T^{ik}] = 0 \quad , \quad \nu_k [G^{ik}] = 0 \quad , \quad \nu_k [nu^k] = 0 \quad ,$$

где  $[\cdot]$  — скачок соответствующей величины на фронте ударной волны.

С учетом того, что магнитное поле имеет только компоненту перпендикулярную плоскости  $XU$  соотношения Гюгонио принимают вид

$$\left[ (w + h^2) \omega u^i + \left( p + \frac{h^2}{2} \right) \nu^i \right] = 0 \quad ,$$

$$[\omega h^i] = 0 \quad , \quad [\omega n] = 0 \quad ,$$

где  $\omega = \nu_k u^k = \gamma(v_x - V)$

В подробной записи эти соотношения выглядят следующим образом:

$$\gamma_0^2 (w_0 + h_0^2) (v_{x0} - V) + \left( p_0 + \frac{h_0^2}{2} \right) V = \gamma^2 (w + h^2) (v_x - V) + \left( p + \frac{h^2}{2} \right) V \quad ,$$

$$\gamma_0^2 (w_0 + h_0^2) v_{x0} (v_{x0} - V) + \left( p_0 + \frac{h_0^2}{2} \right) = \gamma^2 (w + h^2) v_x (v_x - V) + \left( p + \frac{h^2}{2} \right) \quad ,$$

$$\gamma_0^2 (w_0 + h_0^2) v_{y0} (v_{x0} - V) = \gamma^2 (w + h^2) v_y (v_x - V) \quad ,$$

$$\gamma_0 h_0 (v_{x0} - V) = \gamma h (v_x - V) \quad .$$

$$\gamma_0 n_0 (v_{x0} - V) = \gamma n (v_x - V) \quad .$$

Здесь величины перед фронтом ударной волны помечены индексом "0"; за фронтом — без индекса. В соответствии со сказанным в п.1 в этих формулах следует положить  $p_0 + \frac{h_0^2}{2} = 0$ , считая при этом величину  $\gamma_0^2 (w_0 + h_0^2) = Q$  конечной.

Обозначим  $\sigma = \frac{h_0^2}{w_0 + h_0^2}$  — долю электромагнитной компоненты в потоке энергии. Тогда  $\gamma_0 h_0 = \sqrt{\sigma Q}$ . Конечно величины  $Q$  и  $\sigma$  зависят от положения точки  $M$ . Кроме того, в силу предположения об ультрарелятивистском радиальном характере течения перед ударной волной  $v_{x0} = \cos \psi$ ,  $v_{y0} = \sin \psi$ ,



где  $\psi$  — угол между нормалью к фронту ударной волны и радиальным направлением. В этих обозначениях соотношения Гюгонио принимают вид

$$\begin{aligned}
 Q(\cos \psi - V) &= \gamma^2(w + h^2)(v_x - V) + \left(p + \frac{h^2}{2}\right)V, \\
 \gamma^2(w + h^2)v_x(v_x - V) &+ \left(p + \frac{h^2}{2}\right), \\
 Q \sin \psi(\cos \psi - V) &= \gamma^2(w + h^2)v_y(v_x - V), \\
 \sqrt{\sigma Q}(\cos \psi - V) &= \gamma h(v_x - V), \\
 \gamma_0 n_0(\cos \psi - V) &= \gamma n(v_x - V).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Рассмотрим простейший случай стоячей волны ( $V = 0$ ). Имеем (последнее соотношение опускаем):

$$\begin{aligned}
 Q \cos \psi &= \gamma^2(w + h^2)v_x, \\
 Q \cos^2 \psi &= \gamma^2(w + h^2)v_x^2 + \left(p + \frac{h^2}{2}\right), \\
 Q \sin \psi \cos \psi &= \gamma^2(w + h^2)v_y v_x, \\
 \sqrt{\sigma Q} \cos \psi &= \gamma h v_x.
 \end{aligned}$$

Из первого и третьего соотношений сразу следует  $v_y = \sin \psi$ , то есть тангенциальная к фронту компонента скорости непрерывна. Комбинируя остальные соотношения получаем для величины  $\tau = \frac{v_x}{\cos \psi}$  уравнение

$$3\tau^3 - (4 + \sigma)\tau^2 + \tau + \sigma = 0,$$

физически приемлемый корень которого есть

$$\tau = \frac{1 + \sigma + \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 12\sigma}}{6}.$$

Таким образом  $v_x = \tau(\sigma) \cos \psi$ . При этом

$$\begin{aligned}
 1/\gamma^2 &= (1 - \tau^2) \cos^2 \psi, \\
 p &= Q \frac{(\tau - \sigma)(1 - \tau^2)}{4\tau^2} \cos^2 \psi = Q \frac{(\tau - \sigma)(1 - \tau)}{\tau + \sigma} \cos^2 \psi,
 \end{aligned}$$

$$h^2 = \sigma Q \frac{1 - \tau^2}{\tau^2} \cos^2 \psi, \quad q = Q(1 - \tau) \cos^2 \psi, \quad H^2 = \frac{\sigma Q}{4\pi\tau^2}.$$

В предельных случаях:

- 1)  $\sigma \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \gamma^2 \rightarrow \frac{9}{8 \cos^2 \psi}, \quad v_x \rightarrow \frac{\cos \psi}{3}, \quad p \rightarrow \frac{2Q}{3} \cos^2 \psi, \quad h^2 \rightarrow 0;$
- 2)  $\sigma \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow 1, \quad \gamma^2 \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow \cos \psi, \quad p \rightarrow 0, \quad h^2 \rightarrow 0, \quad \frac{p}{h^2} \rightarrow 0.$

Плотности потоков консервативных переменных — энергии, полоидального импульса и тороидальной компоненты магнитного поля — через фронт ударной волны представляются левыми частями соотношений (1.13). Формулы (1.13) записаны в локальной системе координат, ось  $X$  которой ориентирована по нормали к ударной волне в рассматриваемой точке и должны быть преобразованы к (глобальной) лабораторной системе координат  $(r, z)$ .

Легко видеть, что в такой системе соответствующие плотности потоков имеют вид:

$$Q(\cos \psi - V), \quad Q \sin \theta (\cos \psi - V), \quad Q \cos \theta (\cos \psi - V), \quad \sqrt{\sigma Q} (\cos \psi - V),$$

где  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси  $z$ .

Для наших целей удобнее работать не с плотностями потоков, которые зависят от положения и ориентации ударной волны (через  $Q, \sigma$  и  $\psi$ ), а с потоками в единичный телесный угол, а точнее в единицу полярного угла  $\theta$ . Если  $\frac{dL}{do}$  — интенсивность потока энергии в единицу телесного угла (зависящая от направления), то  $Q = \frac{1}{R^2} \frac{dL}{do}$ , где  $R$  — расстояние от пульсара до точки на ударной волне. Площадь элемента поверхности ударной волны, видимой из начала координат в телесном угле  $do = \sin \theta d\theta$  есть  $d\sigma = \frac{R^2 \sin \theta d\theta}{\cos \psi}$ , а длина элемента дуги в полоидальной плоскости есть  $d\lambda = \frac{R d\theta}{\cos \psi}$ . Соответствующие потоки через этот элемент фронта ударной волны составляют

$$\frac{dL}{do} \left(1 - \frac{V}{\cos \psi}\right) do = \frac{dL}{do} \left(1 - \frac{V}{\cos \psi}\right) \sin \theta d\theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{do} \sin \theta \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) do &= \frac{dL}{do} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) \sin^2 \theta d\theta \quad , \\ \frac{dL}{do} \cos \theta \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) do &= \frac{dL}{do} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad , \\ \sqrt{\sigma \frac{dL}{do}} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) do &= \sqrt{\sigma \frac{dL}{do}} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) d\theta \quad , \\ \frac{dN}{do} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) do &= \frac{dN}{do} \left( 1 - \frac{V}{\cos \psi} \right) \sin \theta d\theta \quad , \end{aligned}$$

где  $\frac{dN}{do}$  — поток числа частиц в единичный телесный угол.

Величина  $\frac{V}{\cos \psi}$  имеет смысл скорости ударной волны в радиальном направлении.

### 1.5 Приближенное решение задачи Римана.

В соответствии с общей идеей построения разностных схем Годуновского типа для гиперболических систем уравнений следует вычислить потоки консервативных переменных на границах расчетных интервалов (или ячеек) исходя из того или иного приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва между МГД-состояниями в этих интервалах или ячейках. В настоящей работе, как и в [16, 17, 18], приближенное решение задачи Римана состоит в том, что распад разрыва рассматривается в акустическом приближении. Это означает, что скачки всех величин как на исходном разрыве, так и на возникающих в результате его распада волнах, предполагаются достаточно малыми для того, чтобы считать скорости волн равными звуковым скоростям относительно некоторого среднего состояния, а соотношения на разрывах или простых волнах линеаризовать относительно этого состояния.

Введем десятикомпонентный "вектор-  $\mathcal{U} = \{u^i; h^i; p; n\}$  и потоки  $\mathcal{F}^k = \{T^{ik}; G^{ik}; p^{1/\Gamma} n^k; nu^k\}$ , в терминах которых уравнения (1.1), (1.2),

(1.3), (1.5) запишутся в компактном виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}^k}{\partial x^k} = 0 \quad .$$

Пусть величины  $\mathcal{U}$  претерпевают разрыв на некоторой поверхности в пространстве Минковского,  $\nu_k$  — 4-вектор нормали к этой поверхности в некоторой точке. Линеаризованные соотношения Гюгонио на этой поверхности имеют вид

$$\nu_k[\mathcal{F}^k] = \nu_k \mathcal{A}^k[\mathcal{U}] = 0 \quad , \quad (1.14)$$

где  $[\cdot]$  — скачок величины,  $\mathcal{A}^k = \partial \mathcal{F}^k / \partial \mathcal{U}$ .

Из (6) видно, что  $[\mathcal{U}]$  является правым нуль-вектором матрицы  $\nu_k \mathcal{A}^k$ .

По своему смыслу компоненты правого нуль-вектора матрицы  $\nu_k \mathcal{A}^k$  есть скачки переменных  $\{u^i; h^i; p; n\}$  на волне, 4-вектор нормали к фронту которой есть  $\nu_k$ . Будем поэтому использовать для компонент нуль-вектора  $\mathcal{R}$  обозначения  $\mathcal{R} = \{[u^i]; [h^i]; [p]; [n]\}$ . Система уравнений, которой удовлетворяют скачки  $[u^i]$ ,  $[h^i]$ ,  $[p]$ ,  $[n]$ , есть условия Гюгонио на фронте с нормалью  $\nu_k$  в пределе, когда величины  $[\cdot]$  рассматриваются как бесконечно малые.

В результате распада начального разрыва по веществу будут распространяться волны, на каждой из которых переменные  $u = \{u^i; h^i; p; n\}$  претерпевают скачок, "вектор" которого коллинеарен соответствующему волне правому нуль-вектору матрицы  $\nu_k \mathcal{A}^k$ . Зная скорости волн (нумеруемых индексом  $a$ ), возникающих в результате распада разрыва, и скачки основных переменных  $[\mathcal{U}]_a$  на этих волнах, можно вычислить скачки потоков консервативных переменных в направлении нормали к фронту волны и сконструировать потоки консервативных переменных через грань, разделяющую расчетные интервалы (ячейки), с учетом ее движения.

Пусть в результате распада исходного разрыва возникает волна, фронт которой описывается уравнением  $\phi(x) = 0$ . Нормаль к фронту волны в точке  $x$  пространства Минковского есть 4-вектор  $\nu_k = \partial \phi / \partial x^k$ . Компоненты 4-вектора  $\nu_k$  должны быть таковы, чтобы матрица  $\nu_k \mathcal{A}^k$  имела нетриви-

альный правый и левый нуль-векторы, для чего необходимо выполнение условия  $\det(\nu_k \mathcal{A}^k) = 0$ . Выполнение этого условия приводит к следующим соотношениям, которым должны удовлетворять компоненты 4-вектора  $\nu_k$ :

- 1)  $(1 - c^2)\omega^2 - (c^2 + \frac{h^2}{w})\nu^2 = 0$ ;

- 2) шестикратный корень  $\omega = 0$ ;

- 3)  $\nu^2 = 0$ . Здесь  $\omega = \nu_k u^k$ ,  $\nu^2 = \nu_k \nu^k$ . Корни 1) соответствуют быстрым магнитозвуковым волнам; корни 2) — медленным магнитозвуковым, альфвеновским, энтропийной и псевдоэнтропийной волнам; корни 3) — световым волнам.

Как уже отмечалось, система уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) не является гиперболической, если все величины  $u^i, h^i, p, n$  рассматриваются как независимые, но может быть приведена к гиперболическому виду введением в уравнения Максвелла дополнительного слагаемого, обращаемого в ноль на допустимых решениях [7, 8]. При этом часть волн оказывается физически недопустимыми. Какие именно волны будут недопустимыми зависит от способа замыкания системы уравнений энергии-импульса, Максвелла и неразрывности, допустимые волны не зависят от способа этого замыкания [7, 8, 6, 16, 17, 18]. Так как в настоящей работе рассматривается "укороченная" система уравнений РМГД, описывающая течения специального вида, то к недопустимым волнам будут отнесены не только световые и псевдоэнтропийная [16, 17, 18] (как для уравнений РМГД общего вида), но и те, которые выводят вектор скорости из плоскости течения или генерируют компоненты магнитного поля, лежащие в плоскости течения. Соответственно рассматриваются волны, нормали к которым (в лабораторной системе отсчета) лежат в плоскости течения, то есть на допустимых волнах  $\nu_k h^k = \nu_k [h^k] = 0$ .

Для компактного представления решения задачи о распаде разрыва в РМГД удобно ввести локальные ортонормированные реперы, связанные с фронтами волн [7, 8, 6, 16, 17, 18]. Рассмотрим волну, 4-вектор нормали к фронту которой в некоторой точке есть  $\nu_i$ . Одним из векторов указанного

репера является 4-вектор скорости  $u_i$ . Второй вектор  $r_i = \nu_i + \omega u_i$ ,  $\omega = \nu_k u^k$  очевидно ортогонален  $u_i$ . Вектор  $\nu_i$  будем считать нормированным таким образом, что  $r^2 = r_k r^k = 1$ . Третий вектор репера  $t_i$  направлен вдоль тангенциальной к фронту волны компоненты 4-вектора магнитного поля  $h_i$ . В рассматриваемой в настоящей работе ситуации этот вектор имеет единственную ненулевую компоненту, перпендикулярную плоскости течения (в лабораторной системе отсчета). Четвертый вектор репера есть  $e^i = \varepsilon^{ijkl} u_j r_k t_l$ .

Линеаризация условий Гюгонио дает:

$$\begin{aligned} \nu_k [T^{ik}] &= (w + h^2)(u^i \nu_k + \omega \delta_k^i)[u^k] + (2\omega u^i + \nu^i)h_k[h^k] + \\ &\quad + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \omega u^i + \nu^i \right) [p] = 0 , \\ \nu_k [G^{ik}] &= h^i \nu_k [u^k] + \omega \delta_k^i [h^k] = 0 , \\ \nu_k [p^{1/\Gamma} u^k] &= \nu_k p^{1/\Gamma} [u^k] + \frac{\omega p^{1/\Gamma-1}}{\Gamma} [p] = 0 , \\ \nu_k n [u^k] + \omega [n] &= 0 , \end{aligned} \tag{1.15}$$

где  $\omega = \nu_k u^k$ .

Если  $\omega \neq 0$ , то из второго уравнения находим

$$[h^i] = -\frac{1}{\omega} h^i \nu_k [u^k] ,$$

из третьего

$$[p] = -\frac{1}{\omega} \Gamma p \nu_k [u^k] ,$$

из четвертого

$$[n] = -\frac{1}{\omega} n \nu_k [u^k] .$$

Подставляя эти соотношения в первое уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \omega(w + h^2)(u^i \nu_k + \omega \delta_k^i)[u^k] - (2\omega u^i + \nu^i)h^2 \nu_k [u^k] - \\ - \left( \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \omega u^i + \nu^i \right) \Gamma p \nu_k [u^k] = 0 , \end{aligned} \tag{1.16}$$

где  $h^2 = h_k h^k$ .

Умножение (1.16) на  $\nu^i$  приводит к однородному уравнению на  $\nu_k[u^k]$ , условие существования нетривиального решения которого дает дисперсионное соотношение

$$(2 - \Gamma)\omega^2 = \left( \frac{h^2}{w} + \Gamma - 1 \right) \nu^2$$

или

$$(1 - c^2)\omega^2 = (a^2 + c^2) \nu^2 ,$$

где  $c^2 = \Gamma - 1$  ,  $a^2 = \frac{h^2}{w}$ .

Учитывая, что при выполнении условия нормировки  $r^2 = 1$  имеют место соотношения

$$\nu^2 = 1 - \omega^2 , \quad \omega^2 = \frac{h^2 + c^2 w}{h^2 + w} = \frac{a^2 + c^2}{1 + a^2} . \quad (1.17)$$

получим

$$[u^i] = -\omega r^i , \quad [h^i] = h^i , \quad [p] = \Gamma p , \quad [n] = n .$$

Таким образом, правый нуль-вектор, соответствующий быстрым магнитозвуковым волнам, имеет вид:

$$\mathcal{R}_F = \{ -\omega r^i; h^i; \Gamma p; n \} .$$

Дисперсионное уравнение для остальных допустимых волн имеет вид  $\omega = 0$ . При этом линеаризованные условия Гюгонио (1.16) принимают вид:

$$1) h_k[h^k] + [p] = 0 , \quad 2) \nu_k[u^k] = 0 . \quad (1.18)$$

Остальные соотношения выполняются автоматически в силу (1.18). Уравнения (1.18) являются независимыми, их нетривиальное решение, удовлетворяющее наложенным на величины  $[\cdot]$  условиям, есть

$$1) [h^i] = -t^i , \quad [p] = t_k h^k , \quad 2) [u^i] = e^i .$$

Три допустимых правых нуль-вектора, соответствующих дисперсионному соотношению  $\omega = 0$ , могут быть записаны в виде

$$\mathcal{R}_C = \left\{ 0^i; -t^i; h; \frac{nh}{\Gamma p} \right\} ,$$

$$\mathcal{R}_T = \{ e^i; 0^i; 0; 0 \} ,$$

$$\mathcal{R}_E = \{ 0^i; 0^i; 0; 1 \} .$$

Здесь  $h = t_k h^k$ .

Эти волны будем называть контактной, тангенциальной и энтропийной.

Допустимым волнам единичной интенсивности, т.е. волнам, на которых  $[\mathcal{U}]_a = \mathcal{R}_a$ , соответствуют скачки потоков — 4-тензоров  $T^{ik}$ ,  $G^{ik}$  и 4-векторов  $p^{1/\Gamma} u^i$ ,  $nu^i$ :

1) быстрые магнитозвуковые волны

$$[T^{ik}]_F = -\omega(w + h^2)(u^i r^k + u^k r^i) + (\Gamma w + 2h^2)u^i u^k + (\Gamma p + h^2)g^{ik} - 2h^i h^k ,$$

$$[G^{ik}]_F = h^i s^k - h^k s^i , \quad [p^{1/\Gamma} u^i]_F = p^{1/\Gamma} s^i , \quad [nu^i]_F = n s^i ,$$

где  $s^i = u^i - \omega r^i$ ;

2) контактные волны

$$[T^{ik}]_C = \frac{2 - \Gamma}{\Gamma - 1} h u^i u^k + 2h t^i t^k , \quad [G^{ik}]_C = u^i t^k - u^k t^i ,$$

$$[p^{1/\Gamma} u^i]_C = \frac{h p^{1/\Gamma - 1}}{\Gamma} u^i , \quad [nu^i]_C = \frac{h n}{\Gamma p} u^i ,$$

3) тангенциальные волны

$$[T^{ik}]_T = (w + h^2)(u^i e^k + u^k e^i) , \quad [G^{ik}]_T = h^i e^k - h^k e^i ,$$

$$[p^{1/\Gamma} u^i]_T = p^{1/\Gamma} e^i , \quad [nu^i]_T = n e^i ,$$

4) энтропийные волны

$$[T^{ik}]_E = 0^{ik} , \quad [G^{ik}]_E = 0^{ik} , \quad [p^{1/\Gamma} u^i]_E = 0^i , \quad [nu^i]_E = u^i .$$